

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Tạ Thị Hoàng Hiệp

**MỘT NGHIÊN CỨU DIDACTIC VỀ VIỆC
DẠY HỌC KHÁI NIỆM TỔ HỢP Ở
TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
VIỆT NAM VÀ PHÁP**

Chuyên ngành: **Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán**
Mã số: **60.14.1**

LUẬN VĂN THẠC SĨ GIÁO DỤC HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS NGUYỄN ÁI QUỐC**

Thành phố Hồ Chí Minh – 2011

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Nguyễn Ái Quốc, người đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn PGS.TS Lê Thị Hoài Châu, PGS.TS Lê Văn Tiến, TS. Lê Thái Bảo Thiên Trung, TS. Trần Lương Công Khanh đã nhiệt tình giảng dạy, truyền cho chúng tôi tình yêu đối với Didactic Toán, trang bị đầy đủ cho chúng tôi những công cụ cần thiết và hiệu quả để thực hiện việc nghiên cứu. Tôi cũng xin chân thành cảm ơn PGS.TS Annie Bessot, PGS.TS Claude Comiti, TS. Alain Birebent đã nhiệt tình giải đáp những thắc mắc và truyền đạt cho chúng tôi những kiến thức Didactic quý báu.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến

- Ban lãnh đạo và chuyên viên phòng KHCN – SĐH Trường ĐHSP TP.Hồ Chí Minh đã tạo điều kiện thuận lợi cho chúng tôi được học tập, nghiên cứu trong suốt khóa học.
- Tập thể lớp Didactic Toán K18 đã cùng tôi chia sẻ những niềm vui, những thử thách trong học tập và nghiên cứu. Đặc biệt là các bạn Dương Thị Lan Phương, Hoàng Nguyên Lý, Lê Thị Huỳnh Liên, Phan Thị Hương Loan và lớp trưởng Đinh Quốc Khánh đã cùng tôi chia sẻ những ngày tháng học tập vui vẻ, cũng như động viên, giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình hoàn thành luận văn này.
- BGH các trường THPT Trường Chinh và THPT Trần Quang Khải (TP. Hồ Chí Minh) đã tạo những điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi tiến hành những thực nghiệm của luận văn.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến những người thân yêu trong gia đình đã luôn động viên và nâng đỡ tôi về mọi mặt.

Tạ Thị Hoàng Hiệp

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN	2
MỤC LỤC	3
MỞ ĐẦU	5
1. Lí do chọn đề tài và câu hỏi xuất phát.....	5
2. Mục đích nghiên cứu.....	6
3. Phạm vi lý thuyết tham chiếu và phương pháp nghiên cứu.....	7
4. Cấu trúc luận văn	8
CHƯƠNG 1: ĐẶC TRƯNG KHOA HỌC LUẬN KHÁI NIỆM TỔ HỢP	10
1.1. PHÂN TÍCH KHOA HỌC LUẬN LỊCH SỬ HÌNH THÀNH KHÁI NIỆM TỔ HỢP	11
1.1.1 Từ thời Cổ đại (Antiquité) đến nửa đầu thế kỉ XVII: Bài toán đếm các cấu hình khác nhau của một tập hợp	11
1.1.1.1 Động cơ tôn giáo, bói toán, trò chơi cờ tướng ở Trung Quốc.....	11
1.1.1.2 Nền văn hóa Ả Rập.....	12
1.1.1.3 Nền văn minh phương Tây	14
1.1.2 Nửa sau thế kỉ XVII đến đầu thế kỉ XVIII: lý thuyết tổ hợp được hình thành như một ngành toán học mới, phát triển mạnh mẽ cùng với lý thuyết xác suất.....	17
1.1.3 Đầu thế kỉ XVIII đến cuối thế kỉ XIX : bài toán tồn tại cấu hình và mối liên hệ với lý thuyết đồ thị.....	19
1.1.4 Thế kỉ XX : đối tượng của toán học rời rạc.....	21
1.2. MỘT SỐ KẾT LUẬN	21
1.2.1 Các giai đoạn nảy sinh và phát triển.....	21
1.2.2 Phạm vi tác động của khái niệm tổ hợp và các bài toán có liên quan	21
1.2.3 Các đối tượng có liên quan.....	22
1.2.4 Các bài toán đặc trưng của Đại số tổ hợp.....	22
Chương 2 : KHÁI NIỆM TỔ HỢP TRONG PHẠM VI TOÁN Ở BẬC ĐẠI HỌC	24
2.1. Khái niệm tổ hợp trong giáo trình [a].....	24
2.2. Khái niệm tổ hợp trong giáo trình [b]	26
2.3. Kết luận chương 2	33
Chương 3 : MỐI QUAN HỆ THỂ CHẾ VỚI KHÁI NIỆM TỔ HỢP.....	38

3. 1 Tổ hợp trong CT và SGK Pháp.....	38
3.1.1 Đại số Tổ hợp trong chương trình Pháp.....	38
3.1.2 Đại số Tổ hợp trong sách giáo khoa Pháp.....	42
3.1.3 Kết luận	51
3..2 Tổ hợp trong CT và SGK Việt Nam	51
3.2.1 Chương trình và SGK ban cơ bản.....	51
2.1.1 Phân tích chương trình.....	51
3.2.1.2 Phân tích sách giáo khoa.....	53
3.2.1.3 Kết luận.....	56
Chương 4 : NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM	58
4.1 Đối tượng và hình thức thực nghiệm.....	58
4.2 Phân tích thực nghiệm.....	58
4.2.1 Giới thiệu câu hỏi thực nghiệm	58
4.2.2 Phân tích A priori.....	59
4.2.2.1 Câu hỏi 1	59
4.2.2.2 Câu hỏi 2.....	63
4.2.2.3 Câu hỏi 3.....	65
4.2.3 Phân tích A posteriori	66
KẾT LUẬN	68
TÀI LIỆU THAM KHẢO	69
PHỤ LỤC.....	71

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài và câu hỏi xuất phát

Đại số tổ hợp xuất hiện vào thế kỉ 17, nhưng nó chỉ được phát triển một cách mạnh mẽ từ khi có sự xuất hiện các máy tính điện tử. Hiện nay, lý thuyết tổ hợp được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau: lý thuyết số, hình học hữu hạn, biểu diễn nhóm, đại số không giao hoán, quá trình ngẫu nhiên, thống kê xác suất, quy hoạch thực nghiệm,... Vì những ứng dụng rộng rãi của đại số tổ hợp trong khoa học và kĩ thuật hiện đại, và với mục đích dạy học gắn liền với thực tiễn, phần đại số tổ hợp vẫn luôn chiếm một vị trí cần thiết trong chương trình toán THPT sau nhiều lần thay đổi chương trình và sách giáo khoa.

Ở Việt Nam, Đại số tổ hợp đã được đưa vào chương trình môn toán trường phổ thông trung học ở lớp 12 từ năm học 1992-1993. Sách giáo khoa trong giai đoạn này chỉ giới thiệu sơ lược các khái niệm cơ bản như: tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị, nhị thức Newton.

Trong chương trình Toán thi điểm dành cho phân ban KHTN giai đoạn 1995-1997, lý thuyết xác suất được giới thiệu lần đầu tiên ở lớp 12 trong chương Đại số tổ hợp-Xác suất. Sau khi đã giới thiệu đầy đủ các khái niệm của đại số tổ hợp, sách giáo khoa đưa vào các khái niệm và công thức tính xác suất.

Đến giai đoạn chỉnh lí năm 2000, Đại số tổ hợp được trình bày độc lập thành một chương, trong khi đó xác suất không được đưa vào chương trình giảng dạy.

Ở giai đoạn hiện nay, sách giáo khoa hiện hành đưa khái niệm xác suất vào giảng dạy đại trà và phần đại số tổ hợp được trình bày trước làm cơ sở cho việc tiếp cận lý thuyết xác suất. Sách giáo viên Đại số và giải tích 11 do Trần Văn Hạo chủ biên dẫn ra: *“Có nhiều định nghĩa xác suất, định nghĩa xuất hiện sau là mở rộng định nghĩa trước nhưng định nghĩa xác suất bằng tiên đề là đầy đủ nhất. Tuy vậy, trong giáo trình này, ta chỉ dừng lại ở định nghĩa cổ điển của xác suất, trong đó tính hữu hạn của không gian mẫu và tính đồng khả năng của các kết quả là những yêu cầu cần thiết. Tuy định nghĩa rất đơn giản nhưng thực hành lại rất khó. Nó đòi hỏi học sinh phải có kiến thức về đại số tổ hợp khá vững vàng để đếm $n(A)$ và $n(\Omega)$ ”*

Chúng tôi nhận thấy trong chương trình và sách giáo khoa Việt Nam, hai đối tượng tổ hợp và xác suất luôn được chọn trình bày trong mối quan hệ với nhau. Từ đó dẫn chúng tôi đến việc tìm câu trả lời cho các câu hỏi: Có mối liên hệ nào giữa khái niệm tổ hợp và khái niệm xác suất trong quá trình tiến triển lịch sử của các khái niệm này? Tại sao khái niệm tổ hợp luôn được trình bày trước khái niệm xác suất trong sách giáo khoa Việt Nam? Có thể dạy học xác suất mà không cần đến những kiến thức của tổ hợp?

Trong khi đó, chương trình và sách giáo khoa Pháp đã giới thiệu khái niệm xác suất từ lớp troisième (tương đương lớp 9 ở Việt Nam), khái niệm xác suất được chọn cách tiếp cận từ những thí nghiệm đơn giản mà học sinh có thể quan sát được số lần xuất hiện các kết quả. Tiếp nối ở lớp secondaire (tương đương lớp 10 ở Việt Nam), chương trình giới thiệu xác suất trên một tập hữu hạn, xác suất của một biến cố, xác suất đồng khả năng. Trong phần hướng dẫn kèm theo chương trình môn toán lớp secondaire của Bộ giáo dục Pháp có đề cập đến việc tính xác suất bằng cách sử dụng sơ đồ cây, biểu đồ hoặc bảng. Ở lớp Première (tương đương lớp 11 Việt Nam), Đại số tổ hợp hiện diện ở chương Xác suất với việc sử dụng sơ đồ cây và qui tắc nhân trong việc đếm số phần tử của một biến cố hay không gian mẫu. Các qui tắc tính xác suất được tiếp tục trình bày ở lớp terminale (tương đương lớp 12 Việt Nam), đại số tổ hợp được đưa vào giới thiệu trong phần này với mục đích phục vụ cho việc đếm số các kết quả cùng với các công cụ là sơ đồ cây và bảng biểu.

Vì sao có sự khác biệt lớn trong việc giới thiệu hai khái niệm tổ hợp và xác suất của sách giáo khoa trong hai chương trình toán Việt Nam và Pháp ?

Chúng tôi cũng nhận thấy, trong chương trình Pháp, sơ đồ cây được xem là một trong những công cụ hữu ích cho việc tính số phần tử của không gian mẫu hay biến cố. Trong khi đó sơ đồ cây hầu như vắng mặt trong chương trình Việt Nam.

Những ghi nhận trên dẫn chúng tôi tới việc đặt ra các câu hỏi xuất phát sau:

- Khái niệm tổ hợp và khái niệm xác suất đã nảy sinh và tiên triển như thế nào trong lịch sử toán học?
- Lý do nào mà thể chế Việt Nam luôn chọn trình bày khái niệm tổ hợp trước khái niệm xác suất? Nói cách khác: Những lựa chọn sự phạm nào đã tác động đến việc Đại số tổ hợp được đưa vào để làm cơ sở trình bày xác suất trong thể chế Việt Nam?
- Có những khác biệt và giống nhau nào trong việc dạy học khái niệm tổ hợp của chương trình hai nước Việt Nam và Pháp ?
- Tại sao khái niệm sơ đồ cây không được giảng dạy trong chương trình Việt Nam ?
- Với sự lựa chọn trên của thể chế Việt Nam, có những khó khăn và trở ngại nào ảnh hưởng đến giáo viên và học sinh trong việc dạy và học các khái niệm tổ hợp và xác suất ?

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu tổng quát của luận văn này là tìm câu trả lời cho các câu hỏi trên, được triển khai cụ thể như sau:

- Làm rõ những đặc trưng khoa học luận của khái niệm tổ hợp.
- Phân tích những lựa chọn sự phạm của các khái niệm tổ hợp và xác suất trong cả hai thể chế Việt Nam và Pháp. Đánh giá những thuận lợi và khó khăn của sự lựa chọn này.

- Thu thập và phân tích các kết quả thực nghiệm để làm rõ những tác động, những ràng buộc của hệ thống dạy học ảnh hưởng như thế nào đến ứng xử của GV và HS khi dạy và học khái niệm tổ hợp, xác suất.

3. Phạm vi lý thuyết tham chiếu và phương pháp nghiên cứu

Didactic toán quan tâm đến việc xây dựng tri thức toán học, đến hoạt động và những điều kiện của việc học tập các kiến thức trong môn học này. Trong việc nghiên cứu hoạt động dạy học một tri thức nào đó, một nghiên cứu didactic luôn đặc biệt tính đến : những nét đặc thù của tri thức toán học đang bàn đến, những đặc trưng và ràng buộc của thể chế dạy học, quá trình tác động qua lại giữa thầy giáo, học sinh và đối tượng kiến thức đưa ra giảng dạy. Vì thế, trong trường hợp của chúng tôi, sẽ phải có 3 nghiên cứu cần thực hiện:

- ♦ Nghiên cứu tri thức luận về khái niệm tổ hợp
- ♦ Nghiên cứu tri thức này với tư cách là một tri thức cần dạy
- ♦ Trên cơ sở đó, tiến hành thực nghiệm và phân tích các kết quả đạt được để làm rõ những ràng buộc của thể chế dạy học đã ảnh hưởng như thế nào đến việc dạy và học khái niệm tổ hợp, xác suất ?

Thực hiện một nghiên cứu đầy đủ về khoa học luận lịch sử hình thành và phát triển của khái niệm tổ hợp là một khó khăn đối với chúng tôi, vì những hạn chế về nguồn tài liệu lịch sử. Vì vậy, chúng tôi sẽ sơ lược lại phần lịch sử hình thành khái niệm tổ hợp, phân tích và tổng hợp các kết quả có được từ một số công trình, nhằm làm rõ những đặc trưng khoa học luận cơ bản của khái niệm này cũng như sự tiến triển của chúng qua các giai đoạn khác nhau của lịch sử, đặt trong sự ưu tiên về mối quan hệ với khái niệm xác suất.

Nghiên cứu thứ hai được thực hiện bằng việc phân tích chương trình, sách giáo khoa của Việt Nam để làm rõ mối quan hệ của thể chế dạy học Việt Nam đối với các khái niệm tổ hợp và xác suất. So sánh, đối chiếu với chương trình và sách giáo khoa của Pháp để thấy rõ hơn những ràng buộc của thể chế dạy học Việt Nam trên các khái niệm này.

Sau đó tiến hành thực nghiệm và phân tích các dữ liệu thu thập được.

Từ đó, chúng tôi đặt nghiên cứu mình trong phạm vi của Didactic toán, mà cụ thể là “Lý thuyết nhân chủng học” do Chevallard xây dựng.

Trong khuôn khổ của phạm vi lý thuyết tham chiếu đã lựa chọn, chúng tôi trình bày lại các câu hỏi đã được đặt ra như sau:

- ♦ Q1: Những đặc trưng khoa học luận nào của khái niệm tổ hợp ? Các khái niệm của đại số tổ hợp đã xuất hiện và phát triển trong những kiểu bài toán nào, những kiểu tình huống nào trong lịch sử

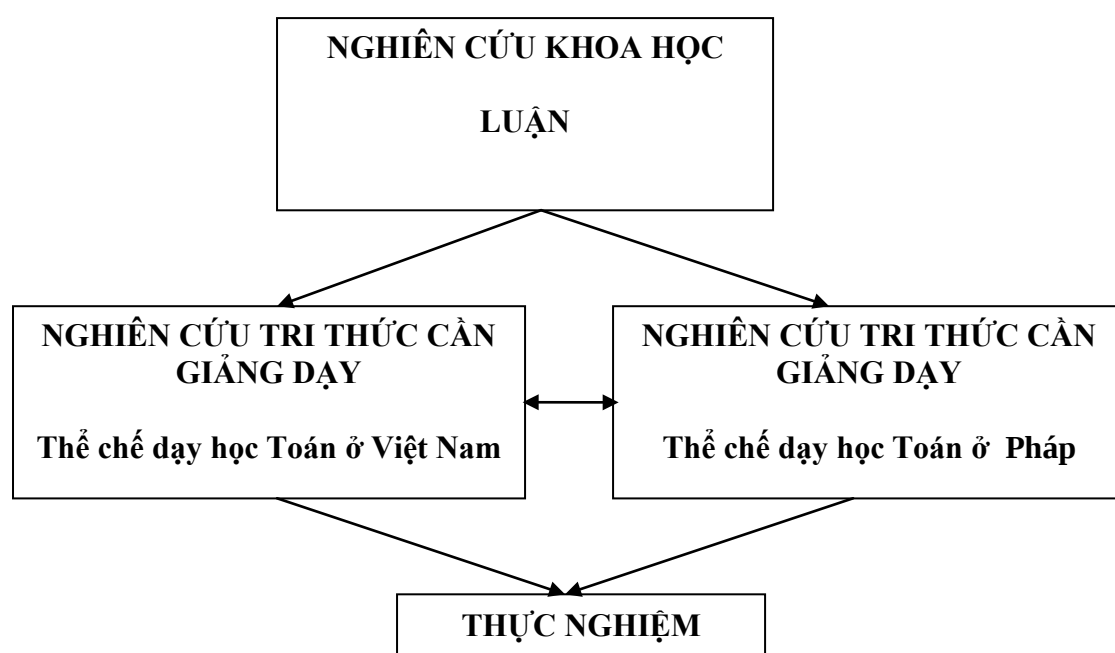
toán học? Mỗi liên hệ của nó với khái niệm xác suất đã được thể hiện ra sao trong tiến trình phát triển?

♦ Q2: Mỗi quan hệ thể chế của các khái niệm tổ hợp đã được hình thành và tiến triển như thế nào ở Việt Nam và ở Pháp ? Có những ràng buộc nào của thể chế trên các khái niệm này ?

♦ Q3: Những sự khác biệt và giống nhau nào trong việc dạy học khái niệm tổ hợp của chương trình hai nước? Tại sao khái niệm sơ đồ cây không được giảng dạy trong chương trình Việt Nam?

♦ Q4: Việc lựa chọn cách tiếp cận khái niệm tổ hợp trong thể chế Việt Nam có gây những khó khăn và trở ngại gì không đối với học sinh và giáo viên trong việc dạy và học khái niệm này?

Phương pháp nghiên cứu trên được sơ đồ hoá như sau



4. Cấu trúc luận văn

Luận văn gồm 6 phần:

Phần mở đầu: Trong phần này chúng tôi trình bày những ghi nhận ban đầu, lợi ích của đề tài nghiên cứu, mục đích của đề tài, phạm vi lý thuyết tham chiếu, phương pháp và tổ chức nghiên cứu, cấu trúc luận văn.

Chương 1: Trình bày việc phân tích khái niệm tổ hợp trong tiến trình phát triển lịch sử của các khái niệm, từ đó làm rõ những đặc trưng cơ bản của khái niệm.

Chương 2: Trình bày việc phân tích các khái niệm cơ bản của Đại số tổ hợp ở cấp độ tri thức khoa học trong một số giáo trình đại học để làm rõ những đặc trưng cơ bản, những cách trình bày các khái niệm này.

Chương 3: Mở đầu là sự phân tích một bộ SGK Toán của Pháp. Tiếp đó, chúng tôi phân tích mối quan hệ thể chế dạy học toán ở trường phổ thông Việt Nam với các khái niệm Tổ hợp.

Chương 4: Trình bày thực nghiệm nhằm kiểm chứng tính thỏa đáng của các giả thuyết mà chúng tôi đã đặt ra ở cuối chương 3.

Phần kết luận: Tóm lược lại những kết quả đạt được trong chương 1, 2, 3, 4 và đề xuất một số hướng nghiên cứu có thể mở ra từ luận văn này.

CHƯƠNG 1: ĐẶC TRƯNG KHOA HỌC LUẬN KHÁI NIỆM TỔ HỢP

MỞ ĐẦU

Trong chương này, chúng tôi không có mục đích thực hiện một nghiên cứu gốc về khoa học luận lịch sử hình thành và phát triển của khái niệm tổ hợp. Chúng tôi sẽ điểmlại phân lịch sử hình thành khái niệm tổ hợp và tổng hợp các kết quả có được từ một số các công trình, nhằm làm rõ đặc trưng cơ bản của khái niệm này. Cụ thể, bằng cách tham khảo các công trình của Andrea Bréard, Mahdi Abdeljaouad, Ahmed Djebbar, Bertrand Hauchecorne trên tạp chí *Tangente l'aventure mathématique*, Vũ Như Thư Hương, chúng tôi cố gắng tìm những yếu tố cho phép trả lời các câu hỏi sau:

- Khái niệm tổ hợp đã xuất hiện và tác động trong những kiểu bài toán, những kiểu tình huống nào ? Nó có những đặc trưng cơ bản nào ?
- Những đối tượng, những khái niệm toán học nào có liên quan và góp phần làm nảy sinh và phát triển khái niệm tổ hợp ?

Tuy nhiên, cũng cần phải nói rõ rằng dù không thực hiện một nghiên cứu gốc về lịch sử, phân tích mà chúng tôi trình bày dưới đây cũng không đơn thuần là sự tóm tắt các công trình mà chúng tôi đã tham khảo.

Trong [19], Andrea Bréard phân tích các bối cảnh lịch sử mà những kiến thức liên quan đến dãy số, Đại số tổ hợp, tam giác Pascal xuất hiện ở Trung Quốc. Mục đích của tác giả là bằng việc nghiên cứu các tài liệu của 4 nhà toán học Trung Quốc trong thời kì giữa thế kỉ 13 và thế kỉ 19, từ đó tìm hiểu sự nối khớp giữa các lĩnh vực khác nhau trên, và làm thế nào mà các tác giả này đã xây dựng một lĩnh vực mới của toán học ở Trung Quốc.

Với mục đích nghiên cứu lịch sử nảy sinh và phát triển của Đại số tổ hợp trong nền toán học Ả Rập, các bài báo của Mahdi Abdeljaouad ([18]) và Ahmed Djebbar ([22]) đã làm rõ tiến trình phát triển của ngành toán học này trong lịch sử với các nghiên cứu của các nhà toán học Ả Rập.

Bertrand Hauchecorne trên tạp chí *Tangente l'aventure mathématique*, chuyên đề về *L'art du dénombrement*, [26] đã tóm lược sự phát triển của Đại số tổ hợp ở Châu Âu.

Nghiên cứu của tác giả Vũ Như Thư Hương trong [7], đã đề cập đến khái niệm xác suất trong dạy – học toán ở trung học phổ thông. Trong luận văn này, tác giả đã tổng hợp và phân tích một cách đầy đủ tiến trình phát triển của khái niệm xác suất trong lịch sử, ở đó mối liên quan với Đại số tổ hợp đã được làm rõ.

1.1. PHÂN TÍCH KHOA HỌC LUẬN LỊCH SỬ HÌNH THÀNH KHÁI NIỆM TỔ HỢP

Chúng tôi sẽ chỉ ra cái gì làm nên Đại số tổ hợp cũng như các ví dụ về ngành khoa học bắt đầu từ việc giải quyết các vấn đề về đếm xuất hiện trong nhiều nền văn minh và trong những giai đoạn khác nhau.

1.1.1 Từ thời Cổ đại (Antiquité) đến nửa đầu thế kỉ XVII: Bài toán đếm các cấu hình khác nhau của một tập hợp

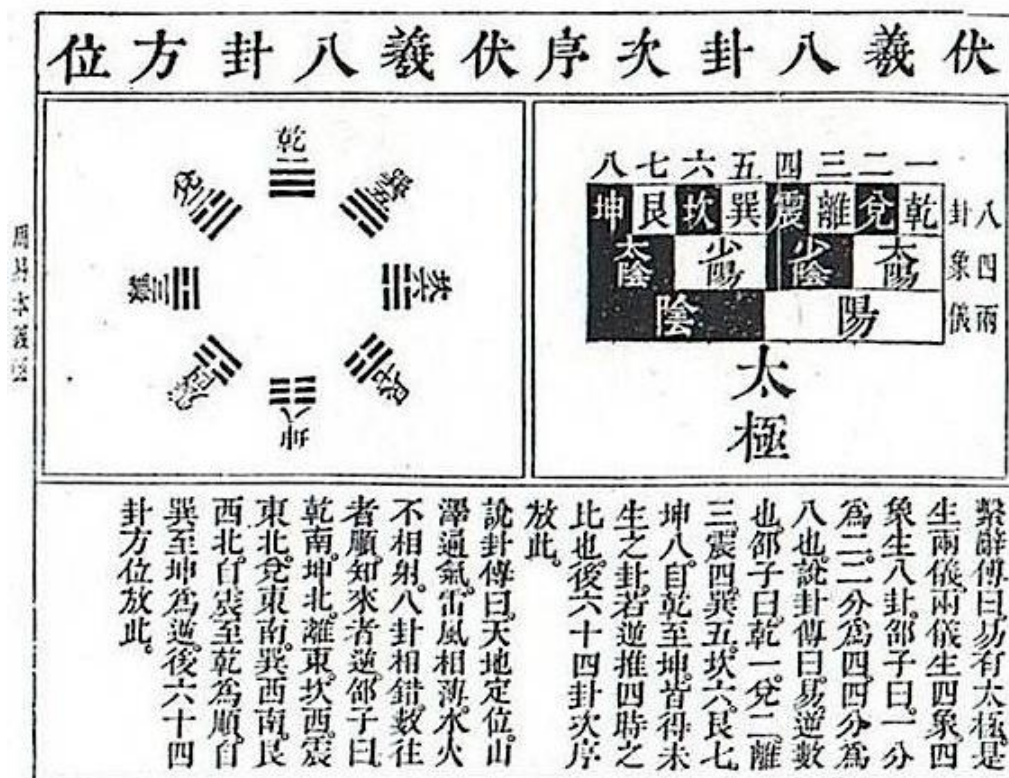
1.1.1.1 Động cơ tôn giáo, bói toán, trò chơi cờ tướng ở Trung Quốc

Nhóm các vật cùng loại theo nhóm 2, nhóm 3, ..., 18, 24 cũng như 72, hay 100 để đếm chúng đã là một hoạt động có từ lâu đời ở Trung Quốc. Trong tác phẩm I-king (Le livre permutation), được viết khoảng năm 1150 trước công nguyên, khoảng cuối thời nhà Chu (thế kỉ 3 trước Công nguyên), người ta tìm thấy 4 biểu đồ nhị phân

— — — —
— — — —

Cũng như 8 trigrammes (các từ được tạo thành từ 3 chữ), và nhiều tổ hợp kết hợp hai nhóm, một là Yang (âm) hoặc Yin (dương), với 6 bởi 6, những nhà toán học thần bí Trung Quốc đã tìm được 64 quẻ khác nhau hoàn toàn, mỗi quẻ có một ý nghĩa đặc biệt về mối quan hệ âm dương, con người và trời đất.

Có thể nói, những kinh nghiệm về tổ hợp đã có nguồn gốc ở Trung Quốc cổ đại, trong việc xây dựng các kĩ thuật bói toán dựa trên các cấu hình (configurations) tạo thành 3 hoặc 6 đường “nét đầy” (lignes pleines) hoặc “nét gãy” (lignes brisées). Hình bên dưới được trích trong tác phẩm *Livre des Mutations*, , người ta tìm thấy các “trigrammes”, một tổ hợp của 3 đường “nét đầy” hoặc “nét gãy”.



Nhận thấy, tác phẩm này đã đề cập đến chỉnh hợp của tập n phần tử với $n \leq 6$.

Tuy nhiên, việc sử dụng các kiến thức về tổ hợp ở Trung Quốc không chỉ giới hạn trong việc bói toán hoặc việc tìm kiếm các hình vuông ma thuật. Một phần lớn các nguồn tài liệu trình bày trò chơi như Go hoặc cờ tướng, những trò chơi bài hoặc domino, biểu thị một sự quan tâm đến các câu hỏi của giải tích tổ hợp trên phương diện toán học hoặc gần toán học.

Về nghệ thuật chơi cờ, việc quan tâm đến các nước đi, đếm các nước đi có thể trên bàn cờ, cũng là một hoạt động liên quan đến tổ hợp. Một quan lại của thế kỉ 11, Shen Gua quan tâm đến việc đếm các nước đi của cờ tướng. (đếm tất cả các cấu hình của một bàn cờ)

Ngoài ra, một số mô tả của trò chơi dominos, khoảng chừng năm 1600 đã cho thấy việc ngầm tìm kiếm tất cả các hoán vị có thể từ sự kết hợp của 3 cờ domino.

Một cách hệ thống và theo phương diện lý thuyết, hoán vị và tổ hợp được bàn luận đến lần đầu trong các bản viết tay ở cuối thế kỉ 17. Cũng giống như Châu Âu, một số nền tảng của lý thuyết tổ hợp đã được đưa ra ở Trung Quốc, dưới dạng viết tay, những khái niệm, những cách viết dưới dạng thuật toán truyền thống.

1.1.1.2 Nền văn hóa Ả Rập

Giữa cuối thế kỉ XII đến giữa thế kỉ XIV, một tập hợp những kinh nghiệm tổ hợp xuất hiện trong những bài viết của các nhà toán học Ả rập. Từ thế kỉ thứ VIII, những kinh nghiệm này được tìm thấy trong phạm vi các lĩnh vực văn hóa đặc trưng, đặc biệt là các hoạt động cải thiện ngôn ngữ và văn hóa Ả Rập.

Trong khuôn khổ của nền văn hóa Ả rập-hồi giáo, trước tiên Giải tích tổ hợp được sử dụng nhiều trong việc đếm và liệt kê các vật, trong các lĩnh vực ngoài toán học, đặc biệt là trong thiên văn học, trong từ điển học và luật về thơ. Sau đó, từ giữa thế kỉ thứ IX, với sự phát triển của các hoạt động nghiên cứu toán học và thiên văn, đã làm xuất hiện một số thao tác tổ hợp trong hình học, đại số, số học và âm nhạc. Những thao tác này thường là dựa vào kinh nghiệm, nên sẽ không tránh khỏi việc nó chỉ có thể giải quyết một số vấn đề mà những công cụ cổ điển không cho phép giải quyết được, một cách chính xác, bản chất tổ hợp của các vấn đề này.

- **Thiên văn học**

Trong thiên văn học, người ta đã đếm được sự giao hội của các hành tinh với mục đích sử dụng chúng trong việc dự đoán các hiện tượng. Những sự chuẩn bị này đã được tìm thấy suốt trong thời kì này, đặc biệt là ở thế kỉ XIV, với nhà toán học Ibn Haydur (1413).

Những chuyên gia trong lĩnh vực này đã thao tác với những số nguyên với những cách thức khác nhau : xây dựng hay đơn giản sử dụng những hình vuông hay hình tròn ma thuật càng lúc càng hoàn hảo, thao tác với chuỗi những chữ tượng trưng cho các yếu tố (principes) hay tên của thánh thần, thực hiện ‘máy tiên đoán’ (machine à prédire), đếm dãy số nguyên chẵn và lẻ trong việc thực hiện các hoạt động bói toán.

- **Trong lĩnh vực từ điển học**

Nửa sau của thế kỉ XVIII, đặc biệt là với mục đích làm (chế tạo) các từ điển, liệt kê và đếm các gốc của ngôn ngữ Ả Rập, quan tâm đến những cấu trúc khác nhau. Al-Khalil Ibn Ahmad (791) là người đầu tiên đếm chính xác những thân từ có hai chữ cái, 3 chữ cái, 4 chữ cái và 5 chữ cái. Sau ông, nhà ngữ pháp Sibawayh (795) đã xác định số từ thực sự được sử dụng, nghĩa là để ý đến những sự khác nhau về cách phát âm.

Với một cái nhìn bao quát những nguồn gốc đã đưa đến các vấn đề của ngôn ngữ Ả Rập, người ta có cảm tưởng rằng, cho đến thế kỉ XII, những chuyên gia trong lĩnh vực này vẫn chưa đưa đến các nghiệm số học của các bài toán đếm số từ đã tính được theo qui nạp trong tác phẩm của họ. Điều này được khẳng định trong tác phẩm của Ibn Durayd (934), với tựa đề ‘Anthologie de la langue’, một phương pháp cơ học để trả lời một trong các câu hỏi đưa ra : đó là việc đếm tất cả các từ có được của một nhóm chữ cái đã cho, bằng cách để ý đến các hoán vị và sự lặp lại của các chữ cái. Với mỗi tập hợp 3 phần tử, người ta sắp xếp với một thứ tự bất kì những từ được đưa ra. Sau đó họ xoay vòng cái này hoặc cái kia của hai anneaux, mỗi lần một góc tương ứng, để nhận được một trật tự mới của tất cả các từ. Để đếm số các từ có hơn 3 chữ cái, việc cần thiết là thêm vào số anneaux cần thiết để tính toán.

- **Mô hình đếm của Ibn Mun'im**

Những kết quả trong phần này được dẫn ra từ bài báo ‘*Quelques éléments d’histoire de l’analyse combinatoire*’ của Mahdi Abdeljaouad,

Ibn Mun‘im, nhà toán học Ả rập ở thế kỉ XII, đã đưa ra mô hình để thực hiện phép đếm tất cả những từ mà người ta có thể nói bằng cách sử dụng một trong chúng. Trước ông, Al-Khalil chỉ xét trong trường hợp các từ gồm các chữ cái khác nhau. Ông tiếp tục nghiên cứu đối với những từ có các chữ cái lặp lại hay được tạo thành từ 5 hay 6 chữ cái khác nhau mà một số hay tất cả các chữ cái này có thể lặp lại. Ông xem xét bài toán với bảng chữ cái alphabet gồm có 28 chữ và từ dài nhất được tạo thành từ 10 chữ cái có tính đến các phụ tố và sự lặp lại.

Ông chọn mô hình như sau : các chữ cái alphabet được biểu diễn bởi các màu sắc và các từ bởi các búi vải (touffes de soie). Ông đưa ra các bài toán cơ sở :

- Bài toán mở đầu :

Ta sẽ sắp đặt mười miếng lụa màu. Ta muốn lập thành những nhóm mà một số chúng có cùng một màu, những số khác thì có hai màu, ba màu, cho đến khi nhóm cuối cùng được lập nên từ 10 màu, và ta muốn biết số nhóm mỗi loại, bằng việc biết màu sắc của mỗi nhóm và tổng số nhóm nếu người ta thêm vào chúng có tính đến các màu sắc khác nhau của chúng. Ta sắp xếp lần lượt các màu trong một bảng. Việc trả lời câu hỏi trên, là việc bạn tìm được các nhóm được tạo thành từ hai màu khác biệt có được từ việc tổ hợp nhóm thứ hai với nhóm thứ nhất, nhóm thứ ba với nhóm thứ nhất và thứ hai, nhóm thứ tư với nhóm thứ nhất, nhóm thứ hai và nhóm thứ ba, và tiếp tục tổ hợp nhóm màu thứ hai với mỗi nhóm như vậy. Ta xác định được theo cách này số nhóm được tạo thành từ các màu khác nhau. (...)

- Bài toán 2 : ‘Xác định số cách sắp xếp các chữ của một từ khi biết số các chữ và không có chữ nào lặp lại’

Ông xem xét trong các trường hợp $n=2$, $n=3$, $n=4$, sau đó ông suy luận bằng phương pháp qui nạp và đưa đến công thức $P_n = n!$.

- Bài toán 3 : ‘Đếm số cách sắp xếp các chữ của một từ , khi biết số chữ và một số chữ trong chúng lặp lại’.

Ông đã tìm ra được công thức mà theo cách viết ngày nay là :
$$P_n(r_1, r_2, \dots, r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}.$$

1.1.1.3 Nền văn minh phương Tây

Trước đó, đại số tổ hợp cũng là một mối quan tâm của người Hy Lạp cổ đại, ví dụ như le Stomachion là một chuyên luận đầu tiên về Đại số tổ hợp, mà trong đó Archimede nghiên cứu số cách tổ hợp 14 miếng đa giác để thu được một hình vuông. Nên có thể nói đại số tổ hợp còn là một khoa học được khai phá bởi các nhà toán học Hy Lạp cổ đại.

- **Về vấn đề ngôn ngữ học ở Hy Lạp (khoảng 330 trước công nguyên)**

Nhà triết học Xénocrate (-406/-315), học trò của Platon, đã quan tâm đặc biệt đến ngôn ngữ, ông tính số các âm tiết có thể được tạo thành từ bảng chữ cái alphabet, và số kết quả nhận được là 1002.10^9 .

- **Châu Âu thời Trung cổ**

Những tiếp cận ban đầu về Giải tích tổ hợp là việc nghiên cứu chiêm tinh học, bói toán, và thần học. Một số nhà chiêm tinh học thời trung cổ đoán trước tương lai bằng cách gieo 3 con súc xắc. Thực nghiệm này tương ứng với $216 = 6^3$ kết quả có thể, và họ đã tính được số tổ hợp thuận lợi trong số kết quả trên.

Raymond Lulle (khoảng 1232-1316) thỉnh thoảng được xem như là người sáng lập ra Giải tích tổ hợp. Ông vừa là nhà triết học, vừa là nhà thần học Catalan, Tây Ban Nha, sử dụng ngôn ngữ Ả rập thông thạo, có chủ tâm kiên quyết biến đổi những tín đồ đạo Hồi. Để làm việc này, ông sử dụng những tổ hợp của tất cả những mệnh đề có thể, để có thể bác bỏ chắc chắn các lý lẽ không trung thành, cũng như thay đổi nó bằng sức mạnh của lý luận.

Levi ben Gershom (1288-1344), đôi khi được gọi là Gersonide. Ông quan tâm đến toán học, trong một bản viết tay của ông đề năm 1321 (không được biết đến một thời gian dài), ông chú ý đến mối liên hệ giữa số các chỉnh hợp và tổ hợp. Ông biết rằng có sự bằng nhau giữa số tổ hợp p phần tử của n phần tử, và số tổ hợp $n-p$ phần tử của n phần tử (chọn p phần tử tương ứng với bỏ $n-p$ phần tử).

Sau đó 2 thế kỉ, Jérôme Cardan đã chứng minh rằng một tập hợp n phần tử có $2^n - 1$ tập con (không tính tập rỗng).

- **Tam giác Pascal**

Thế kỉ 16, Michael Stifel (khoảng 1486-1567), một tu sĩ Đức trở thành nhà cải cách tôn giáo, và có sự quan tâm đến số. Ông nghiên cứu việc triển khai nhị thức, nghĩa là phép tính của $(a+b)^n$.

Bằng cách sử dụng phương pháp qui nạp, ông tìm được quan hệ $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$, cho phép tính toán các hệ số của nhị thức bậc n bằng việc sử dụng hệ số của nhị thức bậc $n-1$, và nhờ đó xây dựng tam giác Pascal.

Bài toán chia tiền cược đến từ Ả rập, sau đó được trình bày bởi các nhà toán học Ý (như Pacioli, Cardan và Tartaglia), và được quan tâm bởi Chevarlier de Méré. Ông giới thiệu nó với Blaise Pascal. Ý kiến cho rằng mỗi người trong hai người chơi lấy một phần tỉ lệ với cơ hội thắng cuộc. Pascal đưa vấn đề này ra với Fermat. Hai nhà bác học Pháp trao đổi nhau qua thư từ, được

xem như là những người đặt nền móng cho phép tính xác suất. Ông đã dùng tam giác số học các hệ số khai triển của nhị thức $(a+b)^n$ để giải bài toán.

Năm 1654, Pascal công bố *Traité du triangle arithmétique*. Từ đó về sau, tam giác này được mang tên ông, mặc dù đã được biết đến trước đó. (chúng ta có thể tìm thấy nó trong các văn bản của Chinois yang Hui, khoảng 1238-1298 và của Ả rập Omar Khayyam, 1048-1131). Ứng dụng của nó được mở rộng trong lý thuyết xác suất, khai triển nhị thức, đến việc tính các số tổ hợp.

Như vậy, ở cuối giai đoạn này khái niệm xác suất bắt đầu phát triển, xuất hiện trong các vấn đề tính toán cơ hội trong vài trò chơi may rủi, và Đại số tổ hợp bắt đầu được khai thác để giải quyết các bài toán đó.

➤ **Nhận xét :**

Từ các kết quả trên, chúng tôi rút ra một số nhận xét như sau :

- Bài toán đặc trưng của Đại số tổ hợp là bài toán đếm : nó được quan tâm trong một thời gian dài, bắt đầu xuất hiện trong đời sống con người từ thời cổ đại. Từ nhu cầu nhóm các vật có cùng tính chất và đếm chúng ở thời cổ, bài toán đếm đã phát triển trong nhiều lĩnh vực khác nhau : bói toán, trò chơi cờ, ngôn ngữ học, thiên văn học, từ điển học, tính toán cơ hội thắng cược trong các trò chơi cờ bạc, ...Số các cấu hình cần đếm ngày càng tăng cao về số lượng cũng như mức độ phức tạp về bản chất của các cấu hình trở thành một thách thức đối với các nhà toán học đương thời. Bằng việc tìm kiếm lời giải cho các bài toán đó, Đại số tổ hợp đã phát triển mạnh mẽ thành một ngành toán học độc lập, mà chúng ta sẽ thấy rõ trong việc nghiên cứu các giai đoạn sau.
- Đặc trưng của bài toán đếm : đếm số cấu hình tổ hợp có thể được tạo ra với những qui tắc kèm theo. Đối tượng của các bài toán đếm là các nhóm mà phần tử của nó là rời rạc và hữu hạn.
- Bài toán đặc trưng thứ hai là bài toán liệt kê : là cần phải chỉ rõ những cấu hình tổ hợp đó là những cấu hình nào, là việc sắp xếp và liệt kê các cấu hình theo thứ tự cần thiết. Từ kinh nghiệm liệt kê một cách tự nhiên của người xưa, khi số lượng cấu hình ngày càng lớn, thì người ta càng quan tâm đến việc tìm kiếm một mô hình hoặc hơn nữa là xác định một thuật toán để theo đó có thể xây dựng lần lượt các cấu hình cần quan tâm.
Một ví dụ về mô hình phục vụ cho việc liệt kê và đếm chính là bảng sắp xếp các màu trong bài toán đếm các từ của Ibn Mun'im. Trong lời giải bài toán này ẩn chứa một phương pháp liệt kê thường sử dụng là thuật toán sinh.
- Từ nhu cầu giải quyết bài toán đếm cũng như sắp xếp, phân phối các đồ vật, các nhà toán học luôn tìm kiếm những phương tiện, thuật toán để việc thực hiện phép đếm hiệu quả. Từ

đấy, những công cụ đếm của Đại số tổ hợp được quan tâm nghiên cứu như hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp bằng con đường quan sát thực nghiệm, hay là sử dụng những phép thử, các mô hình, như mô hình của Ibn Mun'im, rồi tổng quát lên bằng suy luận qui nạp, tìm ra được các công thức mà ngày nay chúng ta được biết dưới kí hiệu toán học hiện đại.

- Tam giác Pascal đã được ứng dụng rộng rãi trong lý thuyết xác suất, khai triển nhị thức, và việc tính các số tổ hợp.

1.1.2 Nửa sau thế kỉ XVII đến đầu thế kỉ XVIII: lý thuyết tổ hợp được hình thành như một ngành toán học mới, phát triển mạnh mẽ cùng với lý thuyết xác suất.

Ở giai đoạn 1, khái niệm xác suất đã xuất hiện một cách ngấm ẩn trong các bài toán về tính toán cơ hội. Một số nhà toán học như Pascal và Fermat đã bước đầu khai thác các công cụ của Đại số tổ hợp trong phép tính xác suất. Đến giai đoạn này, lý thuyết xác suất dành được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học, đạt được nhiều kết quả quan trọng, song song với sự phát triển của Đại số tổ hợp.

• Newton, Leibniz, và Bernoulli

Việc phát hiện phép tính vi phân vào cuối thế kỉ 17 kéo theo những ứng dụng khác của các hệ số nhị thức. Isaac Newton mở rộng khai triển $(a+b)^n$ đến số mũ không nguyên, có nhiều ứng dụng trong giải tích. Leibniz trình bày một cách tổng quát công thức nhị thức, bằng cách phát biểu khai triển của $(a_1+a_2+\dots+a_m)^n$ trong một lá thư viết gửi cho Jacques Bernoulli năm 1695. Ông đề nghị một cách biểu diễn của đạo hàm bất kì của tích hai hàm số.

Jacques Bernoulli tiếp cận đại số tổ hợp trong Ars Conjectandi (công bố năm 1713, 8 năm sau khi ông mất).

Trong phần 2 của Ars Conjectandi, ông đưa vào khái niệm phép thử ngẫu nhiên (phép thử Bernoulli), lấy giá trị từ 0 đến 1 với xác suất theo thứ tự là $1-p$ và p . Ông định nghĩa tổ hợp và hoán vị.

‘J’appelle permutations, les variations de choses, selon lesquelles la même quantité de choses étant conservée, l’ordre et la position entre ces choses sont modifiés de diverses facons.

Les combinaisons de choses sont assemblages selon lesquels on ôte quelques-unes de ces choses qui constituent une multitude déterminée, ces assemblages ne tenant aucun compte de l’ordre ou de la situation des choses’

(Une histoire des probabilités de Samueili et Boudenot, Ellipses)

Bernoulli cũng chứng minh được công thức tính số cấu hình tổ hợp

$${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ông cũng cố hai qui tắc tính số hoán vị n vật khi chúng khác nhau hoàn toàn hoặc một trong số chúng giống nhau là $n!$ và $\frac{n!}{n_a!n_b!...}$ với n_a vật của loại a, n_b vật của loại b, ...

Trong phần 3, ông quan tâm đến lý thuyết về các tổ hợp. Nếu ta gọi khả năng đạt được kết quả 1 trong phép thử Bernoulli, ông có nhận xét rằng nếu ta lặp lại n lần một cách độc lập phép thử Bernoulli, xác suất đạt được k (il parle de 'cas fertiles'), với $0 < k < n$, là $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Vì vậy, Bernoulli đặt câu hỏi về giới hạn của số lượng này khi n tiến về vô hạn : ông xét một bình chứa 3000 bi trắng và 2000 bi đen, ông đoán tỉ lệ của bi đen bằng cách rút ra một bi với một số lớn lần có hoàn lại. Ông chứng minh rằng xác suất tỉ lệ của bi đen được rút ra nằm trong một khoảng, mà nhỏ tùy ý và tập trung vào tỉ lệ thực sự, tiến gần đến 1 khi số phép thử là lớn. Công việc này chỉ mới là khúc dạo đầu đưa đến luật số lớn (la loi faible des grands nombres) và khái niệm khoảng tin cậy, được biết đến bởi các cuộc thăm dò bỏ phiếu.

Thuật ngữ Tổ hợp (Combinaison) được sử dụng trong toán học từ cuối thế kỉ 17, Michel Rolle và Isaac Newton đề nghị, trong phương pháp giải hệ các phương trình, các phương pháp tổ hợp và phương pháp thế (methode de substitution). Việc đầu tiên là ở chỗ tìm kiếm một phương trình mới bằng cách thêm vào hoặc bớt đi hai giữa chúng. Leibniz cũng sử dụng từ combinaison để chỉ một combinaison của 3 phần tử. Về sau, nghĩa mở rộng được liên kết đôi đã bị làm mờ nhạt đi, và người ta chỉ định rằng tổ hợp là tập hợp một số phần tử không kể thứ tự giữa chúng. Người ta cũng phân biệt khái niệm tổ hợp, chọn p phần tử trong n phần tử, cũng như khái niệm chỉnh hợp, khi người ta sắp xếp các phần tử được chọn.

Từ Đại số tổ hợp (combinatoire), xuất hiện khoảng 1730, là tập hợp tất cả những vấn đề liên quan đến việc đếm.

Tóm lại,

Trong giai đoạn này, khái niệm xác suất đã nảy sinh và phát triển, và người ta sử dụng các công cụ của Đại số tổ hợp để tính xác suất. Từ đó, lý thuyết tổ hợp được phát triển mạnh mẽ.

Các khái niệm cơ bản của tổ hợp như hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp được gọi tên và định nghĩa. Trong các định nghĩa này, đã nêu rõ đặc trưng của hai khái niệm hoán vị và tổ hợp, đó cũng là sự khác nhau cơ bản giữa chúng. Hoán vị là sự sắp xếp các vật mà có quan tâm đến thứ tự và vị trí của chúng. Một tổ hợp các vật là một tập hợp các vật mà không cần quan tâm đến thứ tự cũng như vị trí của chúng.

Các công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp được chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

1.1.3 Đầu thế kỉ XVIII đến cuối thế kỉ XIX : bài toán tồn tại cấu hình và mối liên hệ với lý thuyết đồ thị.

Ở thế kỉ 18, nền tảng của giải tích tổ hợp được xây dựng, có thể thấy ứng dụng của nó trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

Ý định giải phương trình bậc 5 dẫn đến các nhận xét mới. Joseph Larange nghiên cứu số các hoán vị của nghiệm của các phương trình. Niels Abel và Évariste Galois chứng minh được rằng không thể giải phương trình bậc 5. Galois bằng cách đưa vào nhóm các hoán vị, làm một cuộc cách mạng hóa đại số, và cho phép hình thức hóa lý thuyết các nhóm cuối thế kỉ 19. Từ đó, giải tích tổ hợp tiếp tục phát triển....

Trong nửa cuối thế kỉ 19, Arthur Cayley (1829-1895) giải một số bài toán của Đại số tổ hợp bằng việc sử dụng graph, và ông gọi dưới tên là ‘cây’ (arbres)

❖ Các bài toán quan trọng

Ở giai đoạn này, xuất hiện một số bài toán có vai trò quan trọng trong sự phát triển của Đại số tổ hợp.

• Euler và bài toán về 36 sĩ quan

Bài toán này được Euler đề nghị, nội dung của nó như sau : có một lần người ta triệu tập từ 6 trung đoàn mỗi trung đoàn 6 sĩ quan thuộc 6 cấp bậc khác nhau : thiếu úy, trung úy, thượng úy, đại úy, thiếu tá, trung tá về tham dự duyệt binh ở sư đoàn bộ. Hỏi rằng có thể xếp 36 sĩ quan này thành một đội ngũ hình vuông sao cho trong mỗi một hàng ngang cũng như mỗi một hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn và của cả 6 cấp bậc.

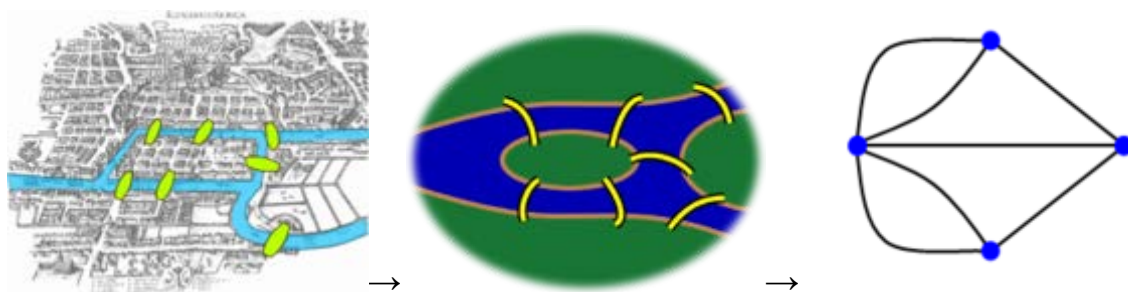
Euler đã mất rất nhiều công sức để tìm lời giải cho bài toán 36 sĩ quan thế nhưng ông đã không thành công. Vì vậy, ông đã đề ra giả thuyết là cách xếp như vậy không tồn tại. Giả thuyết này được nhà toán học Pháp chứng minh năm 1901 bằng cách duyệt tất cả mọi khả năng xếp. Euler căn cứ vào sự không tồn tại lời giải khi $n=2$ và $n=6$ còn đề ra một giả thuyết tổng quát hơn là : không tồn tại hình vuông la tinh trực giao cấp $n=4k+2$. Giả thuyết này đã tồn tại suốt hai thế kỷ, mãi đến năm 1960 ba nhà toán học Mỹ là Boce, Parker, Srikanda mới chỉ ra được một lời giải với $n=10$ và sau đó chỉ ra phương pháp xây dựng hình vuông la tinh trực giao cho mọi $n=4k+2$, với $k > 1$.

Trong các mục trên, bằng việc điếm qua các giai đoạn lịch sử, chúng tôi thấy bài toán đặc trưng của Đại số tổ hợp là bài toán đếm số cấu hình tổ hợp. Trong những bài toán đó sự tồn tại của các cấu hình là hiển nhiên và công việc chính là đếm số phần tử thỏa mãn tính chất đặt ra. Tuy nhiên, ở đây, khó khăn mà Euler gặp phải là phải chỉ ra sự tồn tại hay không các cấu hình thỏa mãn bài toán. Như vậy, trong tổ hợp xuất hiện một vấn đề thứ hai rất quan trọng là : xét sự tồn tại của các cấu hình tổ hợp với các tính chất cho trước. Các bài toán dạng này được gọi là các bài toán tồn tại tổ hợp.

- **Bài toán bảy cây cầu Euler**

Bài toán còn được gọi là **Bảy cầu ở Königsberg** xuất phát từ thành phố Königsberg, Đức (nay là Kaliningrad, Nga) nằm trên sông Pregel, bao gồm hai hòn đảo lớn nối với nhau và với đất liền bởi bảy cây cầu. Câu hỏi đặt ra là có thể đi theo một tuyến đường mà đi qua mỗi cây cầu đúng một lần rồi quay lại điểm xuất phát hay không. Năm 1736, Leonhard Euler đã chứng minh rằng điều đó là không thể được.

Để chứng minh kết quả, Euler đã phát biểu bài toán bằng các thuật ngữ của lý thuyết đồ thị. Ông loại bỏ tất cả các chi tiết ngoại trừ các vùng đất và các cây cầu, sau đó thay thế mỗi vùng đất bằng một điểm, gọi là đỉnh hoặc nút, và thay mỗi cây cầu bằng một đoạn nối, gọi là cạnh hoặc liên kết. Cấu trúc toán học thu được được gọi là một đồ thị.



Ngoài ra, nhận xét của Euler rằng thông tin quan trọng là số cây cầu và danh sách các vùng đất ở đầu cầu (chứ không phải vị trí chính xác của chúng) đã là dấu hiệu cho sự phát triển của ngành tô pô học. Sự khác biệt giữa sơ đồ thực và sơ đồ đồ thị là một ví dụ tốt rằng tô pô học không quan tâm đến hình thù cứng nhắc của các đối tượng.

Như thế,

Trong giai đoạn này vấn đề có tồn tại hay không một cấu hình tổ hợp được quan tâm xem xét. Đây là một bài toán đặc trưng của Đại số tổ hợp, bài toán tồn tại. Một bài toán tồn tại tổ hợp xem như giải xong nếu hoặc chỉ ra một cách xây dựng cấu hình, hoặc chứng minh rằng chúng không có. Tuy nhiên, nhận thấy rằng trong cả hai khả năng trên đều không dễ dàng.

Trong lịch sử toán học, lời giải của Euler cho bài toán bảy cây cầu ở Königsberg được coi là định lý đầu tiên của lý thuyết đồ thị, ngành nghiên cứu mà ngày nay được coi là một nhánh của toán học tổ hợp (*combinatorics*), tuy các bài toán tổ hợp đã được quan tâm đến từ sớm hơn rất nhiều.

Có thể nói, ở thế kỉ 18, nền tảng của giải tích tổ hợp được xây dựng, ứng dụng của nó được tìm thấy trong nhiều lĩnh vực : lý thuyết số, lý thuyết nhóm, lý thuyết đồ thị.

1.1.4 Thế kỉ XX : đối tượng của toán học rời rạc

Hiện nay, lý thuyết tổ hợp được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau: lý thuyết số, hình học hữu hạn, biểu diễn nhóm, đại số không giao hoán, quá trình ngẫu nhiên, thống kê xác suất, quy hoạch thực nghiệm...

Đặc biệt là, Toán học tổ hợp được dùng nhiều trong khoa học máy tính để ước lượng số phần tử của các tập hợp.

1.2. MỘT SỐ KẾT LUẬN

Việc tổng hợp, phân tích các kết quả nghiên cứu lịch sử của Đại số tổ hợp cho phép chúng tôi hình dung được quá trình nảy sinh, phát triển của nó, và đặc biệt là một số đặc trưng khoa học luận chủ yếu của tổ hợp.

1.2.1 Các giai đoạn nảy sinh và phát triển

- Giai đoạn 1 : từ thời Cổ đại đến nửa đầu thế kỉ XVII : Bài toán đếm các cấu hình khác nhau của một tập hợp. Đối tượng của các bài toán đếm là các nhóm mà phần tử của nó là rời rạc và hữu hạn. Ở thời kì này, các đối tượng cơ bản của tổ hợp chưa được chính thức định nghĩa.
- Giai đoạn 2 : Nửa sau thế kỉ 17 : lý thuyết tổ hợp được hình thành như một ngành toán học mới, phát triển mạnh mẽ cùng với lý thuyết xác suất. Các khái niệm cơ bản của tổ hợp như hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp được gọi tên và định nghĩa. Các công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp được chứng minh bằng phương pháp qui nạp.
- Giai đoạn 3 : Đầu thế kỉ XVIII đến cuối thế kỉ XIX : bài toán tồn tại cấu hình và mối liên hệ với lý thuyết đồ thị.
- Giai đoạn 4 : Thế kỉ XX : đối tượng của toán học rời rạc.

1.2.2 Phạm vi tác động của khái niệm tổ hợp và các bài toán có liên quan

• Phạm vi tác động của khái niệm tổ hợp

- Phạm vi lý thuyết xác suất : Đại số tổ hợp là công cụ hiệu quả trong tính toán xác suất ở trường hợp đồng khả năng. Khái niệm xác suất và khái niệm tổ hợp có mối quan hệ tương hỗ nhau trong tiến trình phát triển.
- Phạm vi lý thuyết tập hợp : Đối tượng của Đại số tổ hợp là các tập hợp mà số phần tử là hữu hạn và tính chất đặc trưng của các phần tử là rời rạc. Vì vậy, Đại số tổ hợp được xem như là một bộ phận của lý thuyết tập hợp hữu hạn. Mặt khác, ngôn ngữ tập hợp được sử dụng để trình bày các kết quả của lý thuyết tổ hợp, khiến cho việc thao tác trên các đối tượng tổ hợp trở nên dễ dàng hơn.

- Phạm vi lý thuyết đồ thị
- Phạm vi lý thuyết số
- Phạm vi lý thuyết nhóm
- Phạm vi toán học hữu hạn
- **Các bài toán có liên quan**
 - Đếm tất cả các nước đi của trò chơi cờ, domino.
 - Đếm số các từ được tạo thành từ một số chữ cái.
 - Bài toán tính toán các cơ hội thắng cuộc trong các trò chơi ngẫu nhiên.
 - Bài toán sắp xếp và liệt kê các phần tử của một tập hợp.
 - Bài toán chọn và phân phối các vật.

1.2.3 Các đối tượng có liên quan

Sự phát triển của lý thuyết tổ hợp gắn liền với các khái niệm phát triển đồng thời với nó.

- Khái niệm xác suất : Sự nảy sinh và phát triển khái niệm xác suất trong lịch sử có vai trò thúc đẩy sự phát triển mạnh mẽ của lý thuyết tổ hợp trong giai đoạn đầu. Đại số tổ hợp trở thành công cụ hiệu quả cho tính toán xác suất.
- Tập hợp, tập hợp hữu hạn : Việc xác định một tập hợp được đưa về việc biết tất cả các phần tử của nó. Các phần tử này được chỉ ra bằng cách đặc trưng chúng bởi một dấu hiệu chung nào đó, hoặc bằng cách liệt kê chúng ra. Phương pháp liệt kê các phần tử của tập hợp chỉ thực hiện được, nếu tập hợp đã cho có một số hữu hạn phần tử. Những tập hợp như thế được gọi là tập hợp hữu hạn. Đặc trưng cơ bản của một tập hợp hữu hạn là số phần tử của nó.
- Tập hợp sắp thứ tự, bộ sắp thứ tự :
- Lập luận quy nạp : các nhà toán học đã sử dụng phương pháp quy nạp trong việc tìm kiếm và chứng minh các công thức, kết quả quan trọng của Đại số tổ hợp như số hoán vị của n phần tử, số chỉnh hợp,...

1.2.4 Các bài toán đặc trưng của Đại số tổ hợp

- **Bài toán đếm** : đây là các bài toán nhằm trả lời câu hỏi ‘có bao nhiêu cấu hình thỏa mãn điều kiện đã nêu ?’. Phương pháp đếm thường dựa vào một số nguyên lý cơ bản và một số kết quả đếm các cấu hình đơn giản. Bài toán đếm được sử dụng trong việc tính toán xác suất và một số lĩnh vực khác.

Đặc trưng của bài toán đếm : bài toán được cho bằng lời, các vấn đề mà bài toán nhắm đến là các vấn đề nảy sinh trong cuộc sống hằng ngày. Các đối tượng của bài toán là hữu hạn và rời rạc.

- **Bài toán liệt kê** : bài toán này quan tâm đến tất cả cấu hình có thể có được. Cụ thể là cần phải chỉ rõ những cấu hình tổ hợp đó là những cấu hình nào, cũng như việc sắp xếp và liệt kê các cấu hình theo thứ tự cần thiết. Vì vậy, để giải bài toán này, thuật toán ‘vét cạn’ tất cả các cấu hình được sử dụng.
- **Bài toán tồn tại** : ở bài toán này, việc ‘có hay không có’ cấu hình còn là điều nghi vấn. Đây là một bài toán khó của Đại số tổ hợp, vì việc chỉ ra một cách xây dựng cấu hình, hoặc chứng minh rằng chúng không có là điều không đơn giản.
- **Bài toán tối ưu** : là bài toán lựa chọn trong số các cấu hình tổ hợp chấp nhận được cấu hình có giá trị sử dụng tốt nhất.

Chương 2 : KHÁI NIỆM TỔ HỢP TRONG PHẠM VI TOÁN Ở BẬC ĐẠI HỌC

Các kiến thức về Đại số tổ hợp được tìm thấy trong các giáo trình toán bậc đại học có thể chia thành hai nhóm :

- Nhóm thứ nhất là những giáo trình về lý thuyết xác suất, lý thuyết tập hợp. Trong các giáo trình này, phần Đại số tổ hợp thường được trình bày ở chương mở đầu, hoặc là phụ lục, là công cụ trong việc học các khái niệm khác.
- Nhóm thứ hai là những giáo trình toán rời rạc, giáo trình dành cho khoa học máy tính. Đại số tổ hợp được trình bày một cách đầy đủ.

Ở đây, chúng tôi chọn phân tích các tài liệu sau :

- Nguyễn Đức Nghĩa, Tô Hiến Thành (2009), Toán rời rạc. (kí hiệu là [a])
- Ngô Thúc Lan (1998), Tìm hiểu Đại số tổ hợp phổ thông. (kí hiệu là [b])

Mục đích của việc lựa chọn hai giáo trình này là do việc trình bày các vấn đề liên quan đến Đại số tổ hợp trong hai giáo trình này là tương đối phong phú hơn các giáo trình khác. Hơn nữa, việc so sánh giữa hai giáo trình sẽ cho phép làm rõ các cách khác nhau trong việc trình bày khái niệm tổ hợp cũng như đặc trưng của chúng ở cấp độ đại học. Điều này sẽ làm phong phú hơn cơ sở tham chiếu để chúng tôi thực hiện phân tích sách giáo khoa phổ thông ở chương 3.

Trong giới hạn của luận văn này, chúng tôi chỉ quan tâm nghiên cứu đến những vấn đề liên quan đến bài toán đếm của Đại số tổ hợp.

2.1. Khái niệm tổ hợp trong giáo trình [a]

Trong phần mở đầu, giáo trình này đã đề cập đến hai nguyên lý cơ bản của phép đếm : nguyên lý cộng và nguyên lý nhân.

- Nguyên lý cộng được trình bày như sau :

Nếu A và B là hai tập hợp rời nhau thì $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$

Nguyên lý cộng được mở rộng cho nhiều tập con rời nhau

Nếu $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ là một phân hoạch của tập hợp X thì

$$N(X) = N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_k)$$

Một trường hợp riêng hay dùng của nguyên lý cộng :

Nếu A là một tính chất cho trên tập X thì $N(A) = N(X) - N(\bar{A})$

(theo [a], tr.8)

Như vậy, nguyên lý cộng được trình bày theo ngôn ngữ tập hợp. Bản chất toán học của nguyên lý cộng là công thức tính số phần tử của hợp các tập hợp hữu hạn đôi một không giao nhau.

- Nguyên lý nhân

Nếu mỗi thành phần a_i của bộ có thứ tự k thành phần $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ có n_i khả năng chọn ($i = 1, 2, \dots, k$), thì số bộ sẽ được tạo ra là tích số của các khả năng này $n_1 n_2 \dots n_k$.

Một hệ quả trực tiếp của nguyên lý nhân :

$$N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = N(A_1)N(A_2)\dots N(A_k)$$

Với $A_1, A_2, \dots, A_k$ là những tập hợp nào đó, nói riêng :

$$N(A^k) = N(A)^k$$

(theo [a], tr.9)

Cùng một cách trình bày như nguyên lý cộng, ngôn ngữ tập hợp được ưu tiên sử dụng để diễn đạt qui tắc nhân. Nhận thấy rằng, nguyên lý nhân được suy ra trực tiếp từ công thức tính số phần tử của tích Đề-các k tập hợp hữu hạn.

Chúng tôi tìm thấy trong giáo trình này một kỹ thuật để phân biệt được các tình huống sử dụng nguyên lý cộng, hoặc là nguyên lý nhân

‘Trong việc giải các bài toán đếm cụ thể, nếu như đếm trực tiếp số cấu hình là khó, ta có thể phân hoạch tập các cấu hình cần đếm ra thành các tập con sao cho việc đếm các phần tử của các tập con này là đơn giản hơn. Khi đó sử dụng nguyên lý cộng để đếm số cấu hình đặt ra.

Nếu chúng ta cần đếm các cấu hình có thể xây dựng theo từng bước, thì khi đó có thể sử dụng nguyên lý nhân’

- Về các cấu hình tổ hợp đơn giản

Giáo trình này trình bày một số cấu hình tổ hợp đơn giản : chỉnh hợp lặp, chỉnh hợp không lặp, hoán vị, tổ hợp. Những cấu hình này thường làm cơ sở cho phép đếm.

- Chỉnh hợp lặp

‘Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho. Các thành phần có thể được lặp lại’ (Theo [a], tr.11)

Như thế, một chỉnh hợp lặp chập k của n có thể xem như một phần tử của tích Đề-các A^k với A là tập đã cho. Theo nguyên lý nhân, số tất cả các chỉnh hợp lặp chập k của n sẽ là n^k .

- Chỉnh hợp không lặp

‘Một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho. Các thành phần không được lặp lại’. (Theo [a], tr.11)

Để xây dựng một chỉnh hợp không lặp, ta xây dựng dần từ thành phần đầu tiên. Thành phần này có n khả năng chọn. Mỗi thành phần tiếp theo, số khả năng chọn giảm đi một so với thành phần đứng trước. Từ đó, theo nguyên lý nhân, số chỉnh hợp không lặp chập k của n sẽ là $n(n-1)\dots(n-k+1)$. Để tồn tại cấu hình, cần phải thỏa mãn $k \leq n$.

- Hoán vị

‘Ta gọi một hoán vị của n phần tử là một cách xếp thứ tự các phần tử đó’. (Theo [a], tr.12)

Một hoán vị của n phần tử được xem như một trường hợp riêng của chỉnh hợp không lặp khi $k = n$. Do đó số hoán vị của n phần tử là $1.2...n = n!$

Có thể đồng nhất một hoán vị của n phần tử với một song ánh của một tập n phần tử lên chính nó. Một song ánh như vậy còn được gọi là một phép thế.

- Tổ hợp

‘Một tổ hợp chập k của n phần tử là một bộ không kể thứ tự gồm k thành phần khác nhau lấy từ n phần tử đã cho. Nói cách khác, ta có thể coi một tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con k phần tử của nó’. (Theo [a], tr.12)

• Về bài toán đếm

Một số phương pháp và công cụ đếm được giới thiệu trong phần này.

- Nguyên lý bù trừ được giới thiệu để giải một số bài toán mà việc đếm trực tiếp các kết quả là khó khăn.
 - Phương pháp qui về các bài toán đơn giản : phân hoạch thành những bài toán đếm nhỏ hơn bằng cách chia việc đếm thành từng lớp để áp dụng nguyên lý cộng hoặc phân tích cấu hình cần đếm như là việc ghép một số cấu hình khác để áp dụng nguyên lý nhân.
 - Công thức truy hồi
 - Phương pháp hàm sinh
 - Phương pháp liệt kê
- Sinh các hoán vị và tổ hợp

2.2. Khái niệm tổ hợp trong giáo trình [b]

Trong giáo trình [b], các quy tắc cơ bản của phép đếm được gọi là quy tắc cộng và quy tắc nhân được trình bày như sau :

• Quy tắc cộng

‘Quy tắc cộng tổng quát :

Nếu có m_1 cách chọn đối tượng x_1 , m_2 cách chọn đối tượng x_2 , ..., m_n cách chọn đối tượng x_n , và nếu cách chọn đối tượng x_i không trùng với bất kì cách chọn đối tượng x_j nào ($i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$), thì có $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ cách chọn đối tượng ‘ x_1 hoặc x_2 hoặc x_3 , ..., hoặc x_n ’.

(Theo [b], tr.6)

Như vậy, ở đây ta có mô hình công việc với nhiều phương án,

- Quy tắc nhân

Quy tắc nhân tổng quát

Nếu một phép chọn được thực hiện qua n bước liên tiếp : bước 1 có m_1 cách, bước 2 có m_2 cách, ..., bước n có m_n cách, thì phép chọn đó có thể được thực hiện theo $m_1 m_2 \dots m_n$ cách khác nhau. (Theo [b], tr.7)

• **Về các cấu hình tổ hợp đơn giản**

Giáo trình này trình bày một số cấu hình tổ hợp đơn giản : tổ hợp, hoán vị, chỉnh hợp lặp, chỉnh hợp không lặp, hoán vị có lặp, tổ hợp có lặp. Những cấu hình này thường làm cơ sở cho phép đếm.

- Tổ hợp

‘Một tập con k phần tử của một tập hợp m phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của m phần tử’ (Theo [b], tr.40)

- Hoán vị

‘Những tập hợp sắp thứ tự khác nhau, mà chỉ khác nhau bởi thứ tự phần tử (tức là tạo nên từ cùng một tập hợp) được gọi là những hoán vị của tập hợp đó.’ (Theo [b], tr.54)

- Chỉnh hợp

‘Các tập con sắp thứ tự có k phần tử của một tập hợp có m phần tử được gọi là các chỉnh hợp chập k của m phần tử đó’. (Theo [b], tr.60)

Hai chỉnh hợp chập k của hai phần tử là khác nhau nếu :

+ chúng có những phần tử khác nhau.

+ Nếu có những phần tử như nhau thì thứ tự các phần tử đó khác nhau.

❖ **Tổ chức toán học gắn liền với khái niệm tổ hợp được tìm thấy trong cả hai giáo trình.**

➤ **Kiểu nhiệm vụ $T_{\text{đếm}}$ ‘Đếm số cấu hình tổ hợp’**

Kiểu nhiệm vụ này được tìm thấy ở hầu hết các giáo trình có giới thiệu về Đại số tổ hợp, có thể được phân chia thành các kiểu nhiệm vụ con như sau

▪ **T_1 : ‘Đếm số phần tử của hợp các tập hợp’**

Ví dụ : ([10] , thí dụ 2/tr.9)

Trong một đợt phổ biến đề tài tốt nghiệp, Ban chủ nhiệm Khoa công bố danh sách các đề tài bao gồm 80 đề tài về chủ đề ‘xây dựng hệ thông tin quản lý’, 10 đề tài về chủ đề ‘thiết kế phần mềm dạy học’ và 10 đề tài về chủ đề ‘Hệ chuyên gia’. Hỏi một sinh viên có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài ?

Kỹ thuật giải kiểu nhiệm vụ này được đưa ra trong [10]

- **Kỹ thuật**

τ_{11} :

- Đếm số cách chọn một phần tử từ tập hợp thứ nhất.
- Tiếp tục đếm số cách chọn một phần tử từ tập hợp thứ hai đến tập thứ n
- Cộng tất cả các kết quả đã có ở trên.

τ_{12} :

- + Kí hiệu $A_1, A_2, \dots, A_n$ là tập hợp các đối tượng đề bài cho.
- + Xác định số phần tử của các tập hợp là $n(A_1), n(A_2), \dots, n(A_n)$.
- + Nếu các tập hợp là hữu hạn đôi một không giao nhau thì số các kết quả được tính theo công thức :

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_n)$$

- + Nếu các tập hợp hữu hạn có thể có cặp giao nhau khác rỗng thì số kết quả được tính theo công thức :

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k^{(n)}$$

$$\text{Trong đó } S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

- **Công nghệ** θ_{QTC} : Quy tắc cộng

- **Lý thuyết:**

- **T₂ : ‘Đếm số cấu hình được xây dựng theo nhiều bước’**

Ví dụ : ([10] , thí dụ 1/tr.9)

Từ Hà Nội đến Huế có 3 cách đi : máy bay, ô tô, tàu hỏa. Từ Huế đến Sài Gòn có 4 cách đi : máy bay, ô tô, tàu hỏa, tàu thủy. Hỏi từ Hà Nội đến Sài Gòn (qua Huế) có bao nhiêu cách đi ?

- **Kỹ thuật**

τ_{21}

- + Đếm số cách thực hiện công việc ở mỗi giai đoạn là $m_1, m_2, \dots, m_k$
- + Tính tích $m_1.m_2 \dots m_k$

τ_{22}

- + Kí hiệu $A_1, A_2, \dots, A_n$ là tập hợp các đối tượng đề bài cho.
- + Xác định số phần tử của các tập hợp là $n(A_1), n(A_2), \dots, n(A_n)$.
- + Dùng công thức

$$n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = n(A_1).n(A_2) \dots n(A_n)$$

- **Công nghệ**

θ_{QTN} : quy tắc nhân

θ_{22} : quy tắc tính số phần tử của tập tích Đề-các

- Lý thuyết:

- **T₃ : ‘Đếm số cấu hình là hoán vị’**

Ví dụ : ([9], thí dụ/tr.54)

Các hoán vị của tập hợp $A = \{a, b, c\}$, các hoán vị của chúng là (a, b, c) , (a, c, b) , (b, a, c) , (b, c, a) , (c, a, b) , (c, b, a) .

Các kĩ thuật có thể giải quyết kiểu nhiệm vụ tổng quát : đếm số cấu hình là hoán vị của n phần tử

- Kỹ thuật

τ_{LK} : Liệt kê các cấu hình, quan tâm đến thứ tự.

τ_{32} : Mỗi hoán vị là kết quả của hành động chọn gồm n giai đoạn.

- + Giai đoạn 1: chọn phần tử đầu tiên cho hoán vị. Có n cách chọn.
- + Giai đoạn 2: chọn phần tử thứ hai cho hoán vị, có $(n-1)$ cách chọn.
- + Giai đoạn thứ k : chọn phần tử thứ k cho hoán vị, có $(n-k+1)$ cách chọn.
- + Giai đoạn n : chọn phần tử cuối cùng lúc này chỉ có một cách chọn.
- + Số các hoán vị là: $n!$

τ_{33} : Sử dụng công thức tính số hoán vị của tập hợp A có n phần tử

$$P_n = n!$$

- Công nghệ

θ_{LK} : phương pháp mô tả tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử.

θ_{QTN} : quy tắc nhân

θ_{CTHV} : công thức tính số hoán vị của n phần tử

- Lý thuyết:

- + tập hợp sắp thứ tự.
- + Thuật toán sinh hoán vị - phương pháp liệt kê theo thứ tự từ điển.
- + nguyên lý nhân tổng quát.

- **T₄ : ‘Đếm số cấu hình là chỉnh hợp’**

Ví dụ : ([9], thí dụ 3/tr.60)

Các chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử $\{a, b, c, d\}$ là $ab, ac, ad, bc, bd, cd, ba, ca, da, cb, db, dc$.

Các kĩ thuật có thể giải quyết kiểu nhiệm vụ tổng quát : đếm số cấu hình là chỉnh hợp chập k của n phần tử.

- Kỹ thuật

τ_{LK} : Liệt kê các cấu hình thỏa mãn.

Chú ý, khi liệt kê các cấu hình cần quan tâm đến tính thứ tự.

τ_{42} : Mỗi chỉnh hợp là kết quả của một hành động chọn gồm k giai đoạn.

+ Giai đoạn 1: chọn phần tử đầu tiên cho chỉnh hợp. Có n cách chọn.

+ Giai đoạn k: chọn phần tử thứ k (phần tử cuối cùng) của chỉnh hợp, có (n - k + 1) cách chọn.

+ Số các chỉnh hợp là: $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$

τ_{43} : Sử dụng công thức tính số chỉnh hợp chập k của n phần tử :

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

- Công nghệ

θ_{LK} : phương pháp mô tả tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử.

θ_{QTN} : quy tắc nhân

θ_{CTCH} : công thức tính số hoán vị của n phần tử

- **Lý thuyết:** tập hợp sắp thứ tự, nguyên lý nhân tổng quát.

Kiểu nhiệm vụ này có cùng khối công nghệ-lý thuyết với kiểu nhiệm vụ T_3 , tạo thành một praxéologie địa phương.

▪ **T_5 : ‘Đếm số cấu hình là tổ hợp’**

Ví dụ : ([9], bài tập 1/tr.41)

Có bao nhiêu cách chọn 3 đại biểu trong số 5 người được đề cử ?

- Kỹ thuật

τ_{LK}' : Liệt kê các cấu hình thỏa mãn, không quan tâm đến tính thứ tự.

τ_{52}' : Sử dụng công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Công nghệ

θ_{LK}' : phương pháp mô tả tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử.

θ_{CTTH} : công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử.

- **Lý thuyết:** Số tập con k phần tử của một tập hợp n phần tử.

▪ **T_6 : ‘Đếm số cấu hình là hoán vị lặp’**

Ví dụ : ([9], bài tập 2/tr.74)

Có bao nhiêu số có 7 chữ số, trong mỗi số đó chữ số 6 lặp lại 3 lần, và chữ số 5 lặp lại 4 lần ?

- Kỹ thuật

τ_{LK} : Liệt kê các cấu hình thỏa mãn, quan tâm đến tính thứ tự.

τ_{62} : Sử dụng công thức tính số hoán vị có lặp, cấp n ($n=k_1+k_2+\dots+k_s$) của s phần tử đã cho.

$$C_m(k_1, k_2, \dots, k_s) = \frac{m!}{k_1! k_2! \dots k_s!}$$

- Công nghệ

θ_{LK} : phương pháp mô tả tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử.

θ_{CTHVL} : công thức tính số hoán vị có lặp, cấp n ($n=k_1+k_2+\dots+k_s$) của s phần tử đã cho.

- **Lý thuyết:** Số phân hoạch của một tập hợp hữu hạn.

▪ **T₇: ‘Đếm số cấu hình là chỉnh hợp lặp’**

Ví dụ: ([10], thí dụ 1/tr.11)

Tính số hàm từ một k -tập vào một n -tập.

- Kỹ thuật

τ_{LK} : Liệt kê các cấu hình thỏa mãn.

τ_{72} : Mỗi chỉnh hợp lặp là kết quả của một hành động chọn gồm k giai đoạn

+ Giai đoạn 1: chọn phần tử đầu tiên cho chỉnh hợp lặp. Có n cách chọn.

+ Giai đoạn 2: chọn phần tử thứ hai cho chỉnh hợp lặp. Có n cách chọn.

+ Giai đoạn k : chọn phần tử thứ k (phần tử cuối cùng) của chỉnh hợp lặp, có n cách chọn

+ Số các chỉnh hợp là: $\overline{A}_m^k = n^k$

τ_{73} : Sử dụng công thức tính số chỉnh hợp có lặp chập k của n phần tử

$$\overline{A}_m^k = n^k$$

- Công nghệ

θ_{LK} : phương pháp mô tả tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử.

θ_{QTN} : quy tắc nhân.

θ_{CTCHL} : công thức tính số chỉnh hợp có lặp k của n phần tử

- **Lý thuyết:** quy tắc nhân

▪ **T₈: ‘Đếm số cấu hình là tổ hợp lặp’**

Ví dụ: ([10], bài tập 1/tr.79)

Có bao nhiêu cách chọn 4 tờ giấy bạc từ hai loại giấy bạc?

- Kỹ thuật

τ_{LK}' :

+ Kí hiệu $a, b, c, \dots$ là các phần tử thỏa bài toán.

+ Liệt kê các cấu hình thỏa mãn.

τ_{82} : Sử dụng công thức tính số tổ hợp có lặp chập k của n phần tử

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{k-1}$$

- Công nghệ

θ_{LK} : phương pháp mô tả tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử.

θ_{CTHL} : công thức tính số tổ hợp có lặp chập k của n phần tử

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{k-1}$$

▪ **T₉: ‘Đếm số cấu hình là hỗn hợp của nhiều cấu hình cơ bản’**

Ví dụ : ([10], thí dụ 1/tr.17)

Có bao nhiêu cách xếp 5 người đứng thành một hàng ngang sao cho A không đứng cạnh B ?

- Kỹ thuật

τ_{91} :

+ Chia bài toán thành các trường hợp riêng.

+ Tính số cấu hình của mỗi trường hợp bằng các kỹ thuật đếm số cấu hình cơ bản trên.

+ Dùng qui tắc cộng tính số kết quả cuối cùng.

τ_{92} :

+ Phân tích cấu hình cần đếm thành các giai đoạn.

+ Tính số các cấu hình ở mỗi giai đoạn theo các kỹ thuật đếm số các cấu hình cơ bản ở trên.

+ Dùng qui tắc nhân tính số kết quả cuối cùng.

τ_{93} :

+ Tính số phần tử của X

+ Tính số phần tử $\overline{A}$

+ Số phần tử của A: $n(A) = n(X) - n(\overline{A})$

Có nhiều bài toán phức tạp hơn, đòi hỏi chúng ta phải sử dụng kết hợp cả hai kỹ thuật τ_{91} và

τ_{92} .

- **Công nghệ**: quy tắc cộng, quy tắc nhân, nguyên lý bù, các công thức tính số cấu hình tổ hợp cơ bản

Trong trường hợp này, việc đếm trực tiếp số cấu hình là khó, ta có thể phân hoạch tập các cấu hình cần đếm ra thành các tập con sao cho việc đếm các phần tử của các tập con này là đơn giản hơn. Khi đó sử dụng nguyên lý cộng để đếm số cấu hình đặt ra. Hoặc phân tích cấu hình cần đếm như là việc ghép một số cấu hình khác để áp dụng nguyên lý nhân.

➤ **Kiểu nhiệm vụ T_{tính} ‘Tính toán và chứng minh tổ hợp’**

Ví dụ : ([9], Bài tập 8/tr.63)

Chứng minh rằng : $A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}$

- Kỹ thuật

τ_{tinh} : sử dụng trực tiếp các công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

➤ Kiểu nhiệm vụ T_{Newton} ‘Khai triển nhị thức Newton’

Ví dụ : ([9], bài tập 1/tr.85)

Khai triển $(\sqrt{x} + 1)^6$

- Kỹ thuật

τ_{Newton} : sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton

2.3. Kết luận chương 2

Trong chương 2, chúng tôi đã tìm hiểu một số cách trình bày một số khái niệm của Đại số tổ hợp trong một số giáo trình của bậc đại học. Các kết quả chính được rút ra sau đây.

Về hai quy tắc cơ bản của phép đếm : quy tắc cộng và quy tắc nhân

- Hai quy tắc này được trình bày hoàn toàn khác nhau trong cả hai giáo trình.

+ Giáo trình [a] sử dụng trực tiếp ngôn ngữ tập hợp, trình bày công thức tính số phần tử của hai tập hợp không giao nhau, hoặc mở rộng cho k tập hợp hữu hạn đôi một không giao nhau.

+ Giáo trình [b] chọn cách trình bày theo mô hình chọn một phần tử từ một tập hợp. Nhưng bản chất thực sự của quy tắc này vẫn là công thức tính số phần tử của hai tập hợp không giao nhau. Có phải chăng vì mô hình chọn một phần tử từ một tập hợp là gần gũi và dễ hiểu hơn, gần với kinh nghiệm tự nhiên của con người hơn, giúp cho việc sử dụng nguyên lý này trong các bài toán đếm (là những bài toán đặc trưng bằng lời, xuất phát từ những vấn đề trong cuộc sống đời thường) được sử dụng dễ dàng hơn.

- Chúng tôi tự hỏi rằng có sự chọn lựa khác nhau trong việc trình bày hai quy tắc này trong hai giáo trình có phải chăng là xuất phát từ lí do sự phạm.

+ Đối với giáo trình [a], thường dành cho sinh viên ngành khoa học máy tính, ngôn ngữ tập hợp được sử dụng xuyên suốt trong việc trình bày tất cả các vấn đề của bộ môn.

+ Đối với giáo trình [b], thường dành cho sinh viên ngành sư phạm, cho giáo viên phổ thông, việc chọn lựa một mô hình để đơn giản hóa quy tắc là một bước chuyển đổi sư phạm cần thiết, làm cho quy tắc gần gũi và dễ sử dụng hơn nhiều.

- Về vấn đề phân biệt các tình huống sử dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân

Giáo trình [a] đề cập đến vấn đề này bằng một phương pháp : Nếu tập A được phân hoạch thành k tập con rời nhau thì ta dùng quy tắc cộng. Số phần tử của A bằng tổng các phần tử của các tập con. Nếu trong mô hình của ta mỗi phần tử của tập A được hình thành qua một số công đoạn,

trong đó mỗi công đoạn được thực hiện theo một số cách thì ta dùng qui tắc nhân. Số phần tử của A bằng tích các số cách của mỗi công đoạn.

Về các cấu hình cơ bản của Đại số tổ hợp

- Giáo trình [a] trình bày các cấu hình cơ bản : chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp, hoán vị, tổ hợp.
- Ở giáo trình [b], ngoài các cấu hình giống của [a], còn có thêm một số cấu hình được đưa vào, hoán vị lặp, tổ hợp lặp.
- Cách trình bày các khái niệm này ở trong cả hai giáo trình có sự khác biệt rõ rệt, sự khác nhau này thể hiện rõ trong bảng so sánh sau đây.

Bảng 2.1 So sánh các cách trình bày ở hai giáo trình

Các khái niệm	Giáo trình [a]	Giáo trình [b]
Hoán vị n phần tử	Cách sắp xếp thứ tự các phần tử.	Tập hợp sắp thứ tự khác nhau.
	Là một song ánh từ tập n phần tử lên chính nó.	
Chỉnh hợp chập k của n phần tử	Bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho.	Tập con sắp thứ tự có k phần tử của tập hợp n phần tử.
Tổ hợp	Bộ không kể thứ tự gồm k thành phần khác nhau lấy từ n phần tử đã cho	Tập con k phần tử của một tập hợp n phần tử
Chỉnh hợp lặp	Bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho. Các thành phần có thể lặp lại	Dãy $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ gồm k phần tử có thể trùng nhau của A.
Hoán vị lặp	Không có	Là một chỉnh hợp có lặp, có kể đến số lần lặp lại của mỗi phần tử.
Tổ hợp lặp chập n của m phần tử	Không có	Một tập chứa n phần tử, trong đó mỗi phần tử là một trong m phần tử đã cho.

Về các tổ chức toán học

Chúng tôi tìm thấy có các kiểu nhiệm vụ sau trong hai giáo trình [a], [b]

- Kiểu nhiệm vụ $T_{\text{đếm}}$ ‘Đếm số cấu hình tổ hợp’
- + T_1 : ‘Đếm số phần tử của hợp các tập hợp’

- + T_2 : ‘Đếm số cấu hình được xây dựng theo nhiều bước’
- + T_3 : ‘Đếm số cấu hình là hoán vị’
- + T_4 : ‘Đếm số cấu hình là chỉnh hợp’
- + T_5 : ‘Đếm số cấu hình là tổ hợp’
- + T_6 : ‘Đếm số cấu hình là hoán vị lặp’
- + T_7 : ‘Đếm số cấu hình là chỉnh hợp lặp’
- + T_8 : ‘Đếm số cấu hình là tổ hợp lặp’
- + T_9 : ‘Đếm số cấu hình là hỗn hợp của nhiều cấu hình cơ bản’
- Kiểu nhiệm vụ $T_{\text{tính}}$ ‘Tính toán và chứng minh tổ hợp’
- Kiểu nhiệm vụ T_{Newton} ‘Khai triển nhị thức Newton’

Trong đó, các kiểu nhiệm vụ T_1 , T_6 , T_8 hoàn toàn vắng bóng trong giáo trình [a], và thay vào đó là các kiểu nhiệm vụ đặc trưng cho khoa học máy tính, nên chúng tôi không đưa ra ở đây.

Ngược lại, giáo trình [b] hiện diện đầy đủ tất cả các kiểu nhiệm vụ liên quan đến Đại số tổ hợp được nêu ra như trên.

Chúng tôi tổng hợp các tổ chức toán học trong bảng sau :

Bảng 2.2 Các tổ chức toán học hiện diện trong cả hai giáo trình

Kiểu nhiệm vụ		Kỹ thuật	Công nghệ	Lý thuyết
$T_{\text{đếm}}$	T_1	τ_{11} τ_{12}	θ_{QTC} : Quy tắc cộng	Công thức tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau.
	T_2	τ_{21}	θ_{21} : quy tắc nhân	Quy tắc nhân
		τ_{22}	θ_{22} : quy tắc tính số phần tử của tập tích đề-cac.	
	T_3	τ_{LK}	θ_{LK}	Thuật toán sinh hoán vị - Phương pháp liệt kê theo thứ tự từ điển
		τ_{32}	θ_{QTN}	Quy tắc nhân
		τ_{33}	θ_{CTHV}	Công thức tính số hoán vị của n phần tử.
	T_4	τ_{LK}	θ_{LK}	Θ_{LK}
		τ_{42}	θ_{QTN}	Quy tắc nhân

		τ_{43}	θ_{CTCH}	Công thức tính số chỉnh hợp của n phần tử.
	T ₅	τ_{LK}'	θ_{LK}'	Thuật toán sinh tổ hợp Phương pháp liệt kê theo thứ tự từ điển.
		τ_{52}	θ_{CTTH}	Công thức tính số tổ hợp của n phần tử.
	T ₆	τ_{LK}	θ_{LK}	Θ_{LK}
		τ_{62}	θ_{CTHVL}	Công thức tính số hoán vị lặp cấp n của s phần tử
	T ₇	τ_{LK}	θ_{LK}	Θ_{LK}
		τ_{72}	θ_{QTN}	Quy tắc nhân
		τ_{73}	θ_{CTCHL}	Công thức tính số hoán vị lặp cấp n của s phần tử
	T ₈	τ_{LK}'	θ_{LK}'	Thuật toán sinh tổ hợp Phương pháp liệt kê theo thứ tự từ điển.
		τ_{82}	θ_{CTTHL}	Công thức tính số tổ hợp lặp của n phần tử.
	T ₉	τ_{91}	θ_{QTC}	Quy tắc cộng
		τ_{92}	θ_{QTN}	Quy tắc nhân
		τ_{93}	θ_{NLB}	Nguyên lý bù
T _{Tinh}		τ_{Tinh}	Các công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp	Các công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp
T _{Newton}		τ_{Newton}	Công thức khai triển nhị thức Newton	Công thức khai triển nhị thức Newton

Nhận xét

- Có thể nhóm các kĩ thuật thành các nhóm chính là : nhóm sử dụng công thức, nhóm sử dụng trực tiếp qui tắc nhân hoặc qui tắc cộng, nhóm kĩ thuật liệt kê, nhóm sử dụng các công thức tính, nhóm qui tắc bù.

- Nhóm kĩ thuật liệt kê có mặt hầu như trong tất cả các KNV về đếm.
- Hầu hết các kĩ thuật đều có thể được giải thích cùng một yếu tố công nghệ và lý thuyết là hai quy tắc cơ bản, quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Chương 3 : MỐI QUAN HỆ THỂ CHẾ VỚI KHÁI NIỆM TỔ HỢP

Mục tiêu của chương

Chương này nhằm làm rõ:

Các đặc trưng của mối quan hệ thể chế với các khái niệm của Đại số Tổ hợp cũng như vai trò, vị trí, chức năng của chúng trong chương trình dạy học toán ở trường trung học phổ thông Việt Nam.

Những điều kiện và ràng buộc của thể chế trên các khái niệm này.

Để đạt được mục tiêu này, chúng tôi chọn phân tích CT và SGK Việt Nam hiện hành, theo hai ban Cơ bản và Nâng cao.

Ngoài ra, chúng tôi cũng phân tích một SGK của thể chế dạy học Pháp nhằm mục đích hình thành nên cơ sở tham chiếu thứ hai cho phân tích.

SGK được chọn là Mathématiques Terminal S, COLLECTION DÉCLIC, 2005, HACHETTE Éducation.

Việc chọn bộ SGK này xuất phát từ lí do bộ sách này được biên soạn theo đúng quan điểm của chương trình môn Toán bậc trung học giai đoạn gần nhất hiện nay, được áp dụng từ năm học 2002.

3. 1 Tổ hợp trong CT và SGK Pháp

3.1.1 Đại số Tổ hợp trong chương trình Pháp

Trong luận văn thạc sĩ của tác giả Trần Túy An “Nghiên cứu thực hành dạy học giáo viên: trường hợp khái niệm xác suất ở trường trung học phổ thông”, tác giả đã tổng hợp và phân tích các quan điểm được thừa nhận về việc dạy học xác suất ở trường phổ thông Pháp, trong đó Đại số tổ hợp có vai trò khác nhau trong từng giai đoạn, nhưng nhìn chung nó không tách rời việc dạy học xác suất.

Trong những giai đoạn mà khái niệm xác suất được thể chế lựa chọn tiếp cận theo Laplace, việc xác định xác suất của một biến cố được đưa về các phép đếm và Đại số tổ hợp đóng vai trò chính trong các tính toán xác suất. Vì vậy, chương trình đưa Đại số tổ hợp thành một chương riêng, và giới thiệu đầy đủ các khái niệm của phép đếm và các cấu hình cơ bản của tổ hợp.

Ngược lại, bắt đầu từ những năm 90, khái niệm xác suất được tiếp cận theo tần suất. Các phép đếm của Đại số tổ hợp không còn là một công cụ tiên quyết cho việc học xác suất nữa. Từ đó, có những thay đổi lớn trong việc giới thiệu Đại số tổ hợp trong chương trình Toán phổ thông ở Pháp.

Sự thay đổi này sẽ được chúng tôi làm rõ dựa vào việc phân tích chương trình được áp dụng từ năm học 2002, cụ thể là chương trình môn Toán các lớp 10, 11, 12 ban khoa học. Chúng tôi chọn cách phân tích song song tiến trình đưa vào các khái niệm của tổ hợp cùng với khái niệm xác suất.

• Ở lớp 10

Lần đầu tiên khái niệm xác suất được đưa vào chương trình dạy học môn toán với mục tiêu:

- *Xác định xác suất của biến cố trong trường hợp đồng khả năng.*
- *Sử dụng các mô hình cơ bản từ các tần số được quan sát.*

(Eduscol, programme pour la classe secondaire S)

Nhận thấy rằng, ở cấp lớp này, công thức cổ điển Laplace chưa được đưa vào để tính toán xác suất của các biến cố trong trường hợp đồng khả năng. Chúng tôi tìm thấy chỉ dẫn của chương trình trong việc tính xác suất như sau:

“ Để tính toán xác suất, người ta sử dụng sơ đồ cây, biểu đồ và các bảng ”

(Eduscol, programme pour la classe secondaire S)

Như vậy, thay vì dùng công cụ của Đại số tổ hợp để tính xác suất theo công thức cổ điển. Các công cụ đếm trực quan như sơ đồ cây, biểu đồ và các bảng được đưa ra. Ở đây, chúng tôi nhận thấy một vấn đề cần tiếp tục xem xét là phạm vi hoạt động của các công cụ này được xác định như thế nào ? Nghĩa là tìm hiểu những trường hợp nào mà việc sử dụng các mô hình đếm trên có hiệu quả hoặc ngược lại ? Từ đó cho phép chúng tôi tìm kiếm những ràng buộc của thể chế Pháp lên đối tượng sơ đồ cây. Việc tìm kiếm những câu hỏi trên sẽ được chúng tôi tiến hành trong phần phân tích sách giáo khoa lớp 11.

• Ở lớp 11

Chương trình môn Toán lớp 11 được xây dựng theo những mục tiêu lớn sau:

- Cung cấp đầy đủ phương pháp suy luận và chứng minh toán học.
- Làm chủ được các kĩ thuật tính toán.
- Đẩy mạnh mối quan hệ giữa các lĩnh vực toán học khác nhau.
- **Đưa vào vấn đề mô hình hóa.**
- Sử dụng một cách khôn ngoan các công cụ công nghệ thông tin.

Khái niệm xác suất được giới thiệu trong chương 10, tiếp tục cung cấp cho học sinh một cách hệ thống những kiến thức, kĩ năng liên quan đến khái niệm xác suất, với các nội dung:

- Khái niệm xác suất được tiếp cận theo quan điểm tần suất
- Công thức tính xác suất trong trường hợp đồng khả năng.

- Mô hình hóa các phép thử ngẫu nhiên tham chiếu: gieo một hay nhiều lần xúc sắc, đồng xu phân biệt hoặc không phân biệt, rút ngẫu nhiên các thẻ từ một bình, chọn các số ngẫu nhiên ...

Công thức Laplace được đưa vào với mục đích tính xác suất của các biến cố sơ cấp đồng khả năng. Tuy nhiên, chúng tôi nhận thấy mong muốn của thể chế là ưu tiên cho tiếp cận khái niệm xác suất theo tần suất. Điều này thể hiện qua quan điểm của chương trình

“Đưa vào những khái niệm của xác suất cho phép hiểu và giải thích được một số hiện tượng đơn giản qua quan sát thực nghiệm và bằng mô phỏng”

(Eduscol, programme pour la classe première S)

Theo cách tiếp cận này, Đại số tổ hợp không còn là công cụ hiệu quả để tính xác suất nữa. Có phải chăng chính lí do này tiếp tục giải thích cho sự vắng bóng của Đại số tổ hợp trong chương trình Toán lớp 11 ? Ở đây, một câu hỏi được đặt ra: việc không đưa vào các công cụ đếm của Đại số tổ hợp có gây khó khăn gì đến việc tính xác suất theo công thức Laplace ? Việc tìm kiếm các yếu tố trả lời sẽ được chúng tôi làm rõ trong phần phân tích sách giáo khoa.

Điều đặc biệt mà chúng tôi tìm thấy trong chương trình là các mô hình tham chiếu ngẫu nhiên như gieo xúc sắc, gieo đồng xu, rút ngẫu nhiên các thẻ từ một bình. Điều này thể hiện rõ một trong những mục tiêu lớn của chương trình toán lớp 11 là đưa vào vấn đề mô hình hóa, như trên chúng tôi đã trích dẫn từ tài liệu hướng dẫn thực hiện chương trình.

Chúng tôi dẫn ra đây quan điểm của chương trình về việc mô hình hóa trong việc dạy học xác suất:

“Modéliser une expérience aléatoire, c’est associer à cette expérience un ensemble et une loi de probabilité sur cet ensemble. Ce choix, c’est à dire la modélisation de l’expérience, est en général délicat, sauf dans certains cas où des considérations propres au protocole expérimental conduisent à proposer a priori un modèle. Il en est ainsi des lancers de pièces ou de dés pour lesquels des considérations de symétrie conduisent au choix d’un modèle où la loi de probabilité est équirépartie. On se restreindra donc aux expériences de référence en évitant tout discours général sur ce qu’est ou n’est pas la modélisation”

(Collection lycée, série accompagnement des programmes, classe de première S, applicable à la rentrée 2002)

Mô hình hóa một phép thử ngẫu nhiên, là kết hợp phép thử này với một tập hợp và một qui tắc xác suất trên tập hợp này. Lựa chọn mô hình của phép thử thường khó khăn, ngoại trừ trong một số trường hợp mà việc xem xét cụ thể cho các giao thức thử nghiệm đã dẫn đến đề xuất một mô hình tiên nghiệm. Vì thế, các phép thử như gieo đồng xu hay xúc sắc được giả sử là đối xứng dẫn đến sự

lựa chọn của một mô hình mà các phân bố xác suất là đồng khả năng. Do đó chúng tôi chỉ giới hạn với các phép thử tham chiếu, và tránh những trường hợp mà không đưa về được một mô hình.

Từ quan điểm chương trình trên, chúng tôi rút ra một số yếu tố cho phép trả lời câu hỏi đã được đưa ra ở trên: Việc không đưa vào các công cụ đếm của Đại số tổ hợp có gây khó khăn gì đến việc tính xác suất theo công thức Laplace ?

Việc vắng bóng của Đại số tổ hợp trong chương trình toán 11 thể hiện mong muốn của thể chế là:

- Khái niệm xác suất được tiếp cận theo quan điểm tần suất
- Việc tính xác suất bằng công thức Laplace chỉ giới hạn với những phép thử đơn giản, có thể mô hình hóa được. Nói cách khác, chương trình chỉ đưa vào những bài toán mà việc đếm các kết quả là dễ dàng nhờ vào các mô hình cơ bản.
- Vấn đề mô hình hóa trong toán học được quan tâm.

Chúng tôi sẽ kiểm tra những nhận định trên trong phần phân tích sách giáo khoa.

• Ở lớp 12

Đến cấp lớp này, Đại số tổ hợp vẫn không được đưa ra giới thiệu một cách riêng biệt, nên chúng tôi phải tiếp tục tìm hiểu sự xuất hiện của nó trong các chương liên quan đến xác suất. Xác suất được giới thiệu ở hai chương; chương 8 đề cập đến xác suất có điều kiện, chương 9 giới thiệu về các qui tắc xác suất.

Chúng tôi tìm thấy một vài yếu tố của đại số tổ hợp trong phần nội dung của chương 9 “Qui tắc xác suất” (Lois de probabilité) như sau:

- Đưa vào khái niệm tổ hợp, kí hiệu là $\binom{n}{p}$

- Đưa vào công thức nhị thức

Kèm theo hướng dẫn vận dụng

“ *Người ta đưa ra kí hiệu $n !$. Học sinh cần biết tìm công thức*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Các công thức này sẽ được áp dụng trong nhiều tình huống ”

Một chú ý từ chương trình

“*Pour les dénombrements intervenant dans les problèmes, on en restera à des situations élémentaires résolubles à l’aide d’arbres, de diagrammes ou de combinaisons.*”

“Đối với những phép đếm liên quan đến trong các bài toán, người ta giữ lại các tình huống cơ sở có thể giải được bằng cách sử dụng sơ đồ cây, các biểu đồ hay tổ hợp.”

(Eduscol, programme pour la classe terminale S)

Như vậy, trong chương trình toán lớp 12, Đại số tổ hợp cũng không được chính thức đưa vào giảng dạy. Thể chế chỉ giới thiệu một vài công cụ của phép đếm là tổ hợp, nhị thức Newton, và nhấn mạnh việc sử dụng các công cụ đếm trực quan như sơ đồ cây, bảng biểu trong các bài toán đếm số cấu hình.

• **Kết luận**

Qua phân tích chương trình, chúng tôi rút ra các kết quả sau:

- Tiếp nối chương trình những năm 90, chương trình năm 2000 lại tiếp tục thực hiện quan điểm tiếp cận tần suất đối với khái niệm xác suất.
- Đại số tổ hợp không được đưa vào giảng dạy chính thức trong chương trình toán các lớp phổ thông. Một số công cụ của phép đếm được giới thiệu trong chương “Quy tắc xác suất” như tổ hợp, hoán vị.
- Việc tính xác suất bằng công thức Laplace được giới thiệu đầu tiên với việc gắn liền với những phép thử đơn giản, có thể mô hình hóa được. Các công cụ đếm trực quan được ưu tiên sử dụng như: sơ đồ cây, bảng biểu,... Một vài yếu tố của tổ hợp được đưa vào chương trình nhằm giải quyết một số bài toán mà số kết quả của phép thử là lớn.
- Quan điểm mô hình hóa trong toán học được thể chế Pháp quan tâm

3.1.2 Đại số Tổ hợp trong sách giáo khoa Pháp

Để trả lời cho các câu hỏi Q₂, Q₃, khi phân tích sách giáo khoa, chúng tôi sẽ tập trung làm rõ tiến trình xuất hiện các khái niệm của Đại số Tổ hợp và tổ chức toán học liên quan đến khái niệm này.

Các khái niệm của Đại số tổ hợp được giới thiệu chính thức lần đầu tiên ở lớp 12, trong chương 9 “*Các qui tắc tính xác suất*” (*Lois de probabilité*).

Tuy nhiên, chúng tôi nhận thấy một số vấn đề của Đại số tổ hợp đã xuất hiện trước đó trong việc tính toán xác suất ở lớp 10 và lớp 11. Chúng tôi sẽ làm rõ nhận định này qua việc phân tích sách giáo khoa lớp 11, ban khoa học (*Mathématiques, Déclit 1^{re} S*).

❖ Phân tích sách giáo khoa lớp 11 (MF1)

Trong MF1, chương 10 “Xác suất” được tìm thấy ngay sau chương 9 “Thống kê”. Điều này thể hiện sự phù hợp với mục tiêu của chương trình:

“Đưa vào các khái niệm của xác suất cho phép hiểu và giải thích được một số trường hợp đơn giản qua quan sát thực nghiệm hay bằng mô phỏng”.

(Eduscol, programme pour la classe première S)

Như vậy, ở SGK này, cách tiếp cận xác suất theo tần suất được ưu tiên. Chúng tôi tự hỏi: có phải chính điều này giải thích cho việc hoàn toàn vắng bóng các công cụ đếm của Đại số tổ hợp trong MF1 ?

Công thức Laplace được đưa vào trong phần “Tính toán xác suất”, trong trường hợp đồng khả năng. Với sự thiếu vắng các công cụ của Đại số tổ hợp, thể chế đã giải quyết thế nào đối với các bài toán này ?

Trong phần áp dụng, chúng tôi tìm thấy xuất hiện kiểu nhiệm vụ T_{kgm} ‘**Đếm số phần tử của biến cố, không gian mẫu**’ qua các ví dụ sau :

Ví dụ : (Xác định không gian mẫu của một phép thử ngẫu nhiên, tr.247)

Xác định không gian mẫu của các phép thử sau :

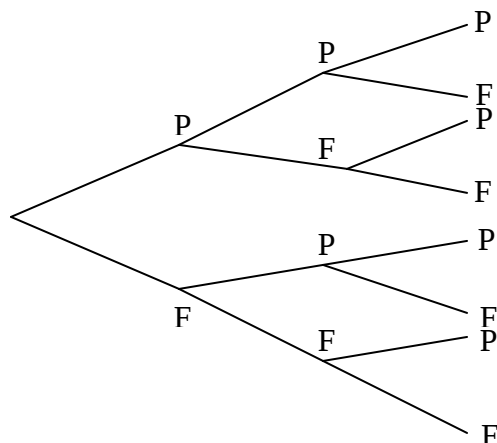
- Gieo một con xúc sắc 6 mặt.
- Gieo ba lần liên tiếp một đồng xu.

Lời giải được đưa ra bởi MF1

- $E_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $E_2 = \{(P;P;P);(P;P;F);(P;F;P);(P;F;F);(F;P;P);(F;P;F);(F;F;P);(F;F;F)\}$

MF1 còn đưa ra thêm một ghi chú

Để xác định E_2 , tránh khả năng bỏ sót một số kết quả, ta có thể xây dựng một sơ đồ cây.



Ví dụ: Xác định các khả năng của một biến cố, tr.247

Xác định các khả năng của các biến cố sau ứng với các phép thử ở trên.

- A_1 : “Kết quả là số lẻ”.
- A_2 : “Lần gieo đầu tiên và thứ ba cho cùng một kết quả”

Lời giải của MF1

- $A_1 = \{1; 3; 5\}$
- $A_2 = \{(P;P;P);(P;F;P);(F;P;F);(F;F;F)\}$

* Thêm vào nhận xét về KNV mới, đánh giá về kĩ thuật, công nghệ của kĩ thuật liệt kê và kĩ thuật sơ đồ cây

Trong lời giải của sách giáo khoa, ta thấy xuất hiện kĩ thuật τ_{LK} trong cả hai ví dụ. Nhận thấy rằng, việc hiểu và sử dụng kĩ thuật này là tự nhiên đối với học sinh, vì kinh nghiệm liệt kê các đồ vật đã có sẵn ở học sinh, được hình thành từ khi còn nhỏ. Hơn nữa, đặc trưng của các bài toán này là số kết quả của phép thử không nhiều, là điều kiện thuận lợi cho việc sử dụng τ_{LK} .

Ngoài ra, chúng tôi nhận thấy ở đây xuất hiện thêm một kĩ thuật mới để đếm số phần tử của không gian mẫu là: τ_{cay} “**Sơ đồ cây**”, với chú ý của MF1 là kĩ thuật này tránh bỏ sót kết quả.

Chúng tôi không tìm thấy nội dung nào liên quan đến việc giới thiệu khái niệm hay hướng dẫn sử dụng sơ đồ cây trong chương trình và trong sách giáo khoa Pháp. Điều đó cho thấy sơ đồ cây là một đối tượng toán học không được định nghĩa một cách tường minh trong chương trình toán ở phổ thông. Chúng tôi tự hỏi lí do tồn tại của nó? Liệu học sinh có thể sử dụng tốt kĩ thuật này?

➤ **Mô hình tham chiếu: bình (Modèle de référence: les urnes)**

Một số phép thử ngẫu nhiên có thể được mô hình hóa bằng cách sử dụng mô hình rút ngẫu nhiên các thẻ từ một bình; mà ta gọi là một tình huống cơ sở (une situation de référence)

▪ *Rút liên tiếp n thẻ có hoàn lại*

Người ta rút ngẫu nhiên một thẻ, và đánh số thẻ, sau đó trả lại vào bình trước khi rút thẻ khác. Trong một lần rút như vậy, thứ tự xuất hiện của các thẻ được tính đến và cùng một thẻ có thể xuất hiện nhiều lần.

▪ *Rút liên tiếp n thẻ không hoàn lại*

Người ta rút ngẫu nhiên một thẻ, và đánh số thẻ, không trả thẻ đã rút vào lại trong bình, sau đó rút ra một thẻ mới.

Ở đây thứ tự của các lần rút cũng được tính đến, nhưng cùng một thẻ không thể xuất hiện nhiều lần.

▪ *Rút đồng thời n thẻ*

Người ta rút ngẫu nhiên đồng thời n thẻ trong bình. Chính việc rút đồng thời đã không làm xuất hiện trong các kết quả sự lặp lại của cùng một số thẻ, cũng như thứ tự rút ra các thẻ cũng không được tính đến.

Sau khi giới thiệu ba mô hình trên, SGK đưa ra thêm một chỉ dẫn

“Để biểu diễn các kết quả có thể trong các mô hình như vậy, ta có thể sử dụng sơ đồ cây hoặc bảng, tùy theo từng trường hợp”

(Mathématiques, Décllic 1^{re} S, 2005, trang 256)

Sau phần giới thiệu các mô hình tham chiếu, sách MF1 đưa vào một số bài toán và yêu cầu sử dụng mô hình “bình” để giải bài toán. Chúng tôi trích dẫn ra ví dụ sau:

“Một lô sản phẩm có 7 chi tiết máy, trong đó có hai cái bị hư. Ta rút ngẫu nhiên 3 cái trong lô, để gắn vào một cái mô-tơ. Tính xác suất để trong 3 cái rút ra có hai cái bị hư.” (theo [31], tr.256)

MF2 không đưa ra lời giải, chúng tôi đề nghị lời giải như sau:

Mô hình hóa bài toán như sau: Trong một bình có chứa 7 quả cầu, trong đó có 5 quả cầu màu xanh, 2 quả cầu màu đỏ. Tính xác suất để rút ngẫu nhiên ra 3 quả cầu, trong đó có hai quả cầu màu đỏ.

Đánh dấu 5 quả cầu màu xanh: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ; và hai quả cầu màu đỏ là d_1, d_2 .

Sử dụng sơ đồ cây như sau để giải bài toán. Để thuận tiện cho việc xây dựng cây chúng tôi kí hiệu như sau: 1, 2, 3, 4, 5 (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) và 6, 7 (d_1, d_2)

Gọi A là biến cố rút ngẫu nhiên ra 3 quả cầu, trong đó có hai quả cầu màu đỏ.

Dựa vào cây được xây dựng, ta có không gian mẫu có 35 trường hợp,

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là các kết quả có chứa số 6, 7. Ta đếm được có 5 trường hợp

$$\text{Vậy: } P(A) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$



Nhận xét

- Mục tiêu của chương là tiếp cận khái niệm xác suất theo tần suất. SGK không đưa vào giới thiệu Đại số tổ hợp. Vì vậy, các công cụ đếm của Đại số tổ hợp không còn có ý nghĩa trong việc tính toán xác suất nữa.
- Công thức Laplace được đưa ra trong trường hợp tính xác suất của các trường hợp đồng khả năng.
- Kiểu nhiệm vụ đặc trưng có liên quan đến tổ hợp là T_{kgm} ‘Đếm số phần tử của biến cố, không gian mẫu’. Kỹ thuật mới được thể chế đề xuất để giải quyết KNV này là τ_{cay} “Sơ đồ cây”.

❖ Phân tích sách giáo khoa lớp 12 (MF2)

Đại số Tổ hợp được đề cập đến trong chương 9 “*Các qui tắc tính xác suất*” (*Lois de probabilité*), được MF2 giới thiệu qua 4 phần nhỏ mà mục đích đã được MF2 nói rõ. Đó là những phần sau:

- Phần 1: Hoạt động chuẩn bị (Activités)
- Phần 2: Bài học (Cours)
- Phần 3: Bài tập áp dụng (Applications)
- Phần 4: (Travaux dirigés)

Sau đây chúng tôi sẽ lần lượt phân tích từng phần nói trên.

✓ Phần 1- Hoạt động chuẩn bị

Mục đích của phần này là thiết lập các hoạt động mang lại nghĩa cho tri thức đang nhắm tới. Sách giáo khoa đưa ra 4 hoạt động chuẩn bị với mục đích như sau:

- Hoạt động 1: Sơ đồ cây để đếm (des arbres pour dénombrer)
- Hoạt động 2: chọn ngẫu nhiên một số trong khoảng $[0; 1]$ (choisir un nombre au hasard dans $[0; 1]$)
- Hoạt động 3: từ rời rạc đến liên tục: biểu đồ và diện tích (du discret au continu: histogrammes et aires)

Chúng tôi sẽ chỉ tập trung phân tích hoạt động 1, vì đây là hoạt động liên quan đến các khái niệm của Đại số Tổ hợp.

Trong hoạt động 1, sách giáo khoa đưa ra mô hình một túi đựng 4 cái thẻ không thể phân biệt được khi chạm vào, được đánh số 1, 2, 3, và 4. Người ta rút ngẫu nhiên 3 thẻ trong túi theo 3 tình huống được SGK trình bày như sau.

1. Tình huống A: rút liên tiếp có hoàn lại

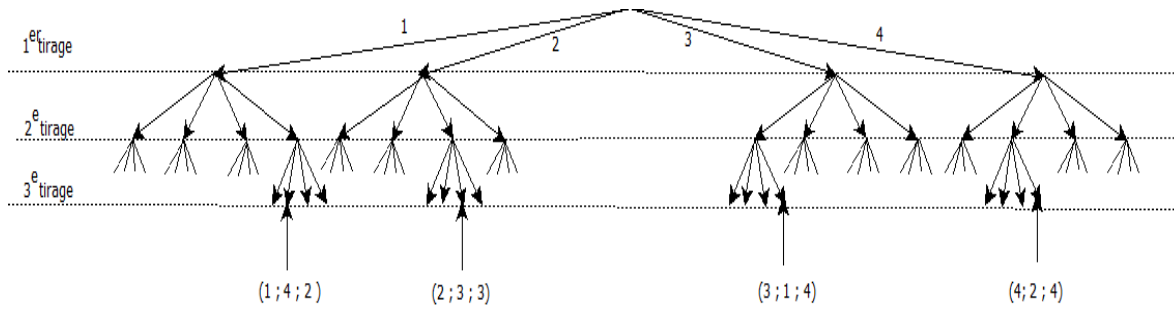
Việc rút ra lần lượt đưa đến một thứ tự xuất hiện các kết quả. Việc hoàn trả lại các thẻ được rút ra sau mỗi lần rút dẫn đến việc có thể xuất hiện nhiều lần của cùng một số trong kết quả.

3 thẻ được rút ra lần lượt có hoàn lại trong túi sau mỗi lần rút.

Ví dụ, nếu người ta rút ra cái thẻ số 4 ở lần rút thứ nhất và thứ 3, và thẻ số 2 ở lần rút thứ 2, người ta kí hiệu kết quả là bộ 3 số $(4; 2; 4)$

1^o. Đếm số bộ ba kết quả có thể xuất hiện sau 3 lần rút, bằng việc sử dụng sơ đồ cây theo mô hình dưới đây:

Sơ đồ cây



2⁰ Đếm số kết quả mà trong đó lần rút thứ hai không phải là thẻ số 3

3⁰ Đếm số kết quả mà trong đó thẻ thứ 3 được rút ra chính xác 3 lần.

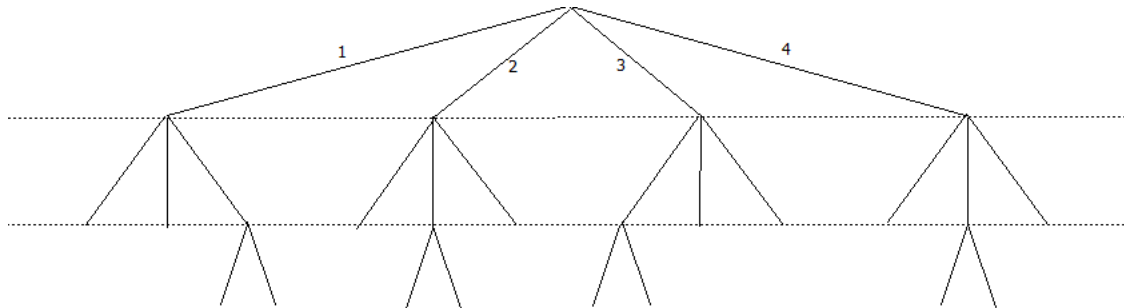
2. Tình huống B: rút liên tiếp không hoàn lại

Ở đây, việc liên tiếp rút ra các thẻ đưa ra một trật tự xuất hiện mới, mà việc không hoàn lại không làm xuất hiện nhiều lần của cùng một thẻ.

3 thẻ được rút ra liên tiếp và không hoàn lại trong túi

1⁰ Kết quả nào của tình huống A không xuất hiện ở tình huống B ?

2⁰ Điền vào sơ đồ cây dưới đây để đếm số kết quả có thể xuất hiện sau 3 lần rút.



3⁰ Đếm số kết quả mà thẻ số 3 không xuất hiện ở lần rút thứ 3

4⁰ Đếm số kết quả là bộ ba $(a; b; c)$ với $a < b < c$.

3. Tình huống C: rút ra đồng thời.

3 thẻ được rút ra đồng thời từ túi.

Người ta kí hiệu sự rút ra đồng thời 3 thẻ 4, 1 và 2 bởi tập hợp $\{4; 1; 2\}$

Thứ tự viết các số không được nhắc đến trong kí hiệu tập hợp.

Bằng cách sử dụng cách viết này, hãy lập một danh sách các kết quả có thể của tình huống này.

Với phần ghi chú việc rút ra đồng thời không cho phép sắp xếp chúng theo thứ tự thời gian.

Ví dụ như $\{a; b; c\} = \{c; a; b\}$ nhưng $(a; b; c) \neq (c; a; b)$

Đây chính là mô hình tham chiếu đã được giới thiệu ở lớp 11, nhưng trong trường hợp này, kỹ thuật để giải quyết tình huống cơ sở đã được thể chế hóa. Thật vậy, kỹ thuật τ_{cay} “Sơ đồ cây” đã được nêu lên một cách rõ ràng cả bằng lời và bằng hình ảnh trực quan.

✓ Phần 2: Bài học

Mục đích tổng quát của phần này là trình bày các định nghĩa, khái niệm, định lý liên quan đến tri thức cần dạy.

Ở mục một giới thiệu về phép đếm, SGK có giải thích từ phép đếm là đếm các số phần tử của một tập hợp hữu hạn. Sau đó các khái niệm liên quan đến phép đếm được đưa vào.

• Giai thừa của một số tự nhiên

MF2 đưa ra định nghĩa n giai thừa (factorielle n) là một số tự nhiên bằng tích của tất cả các số tự nhiên từ 1 đến n .

Khái niệm hoán vị không được đưa vào ở đây.

• Khái niệm Tổ hợp

MF2 đưa ra khái niệm

Nếu E là một tập hữu hạn không rỗng n phần tử, và p là một số nguyên sao cho $0 \leq p \leq n$

Một tổ hợp p phần tử của E là một tập con p phần tử của E . Một tổ hợp $A = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ của E được tạo thành bởi p phần tử phân biệt đôi một, mà ta có thể viết với thứ tự bất kì.

Sau đó SGK giới thiệu công thức tính số tổ hợp p phần tử của tập hợp E có n phần tử, được kí hiệu $\binom{n}{p}$, với $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

• Công thức Pascal

MF2 đưa ra định lý

Cho n là một số tự nhiên khác không

+ Nếu p là một số nguyên thỏa $0 \leq p \leq n$, thì $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

+ Công thức Pascal $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Nhận xét:

✓ Phần 3: Bài tập áp dụng

Mục đích tổng quát của phần này là giới thiệu các dạng bài tập có lời giải nhằm giúp học sinh nắm được các kỹ năng cần thiết và phương pháp giải toán. Mỗi dạng toán đều được giới thiệu thêm trong phần bài tập.

Ví dụ 1, MF2, tr.251, được SGK đưa ra nhằm...

4 vận động viên bơi lội bàn luận về một trận đấu. Loại trừ khả năng về đích đồng loạt, có bao nhiêu cách sắp thứ tự về đích của 4 vận động viên.

SGK đưa ra lời giải sau:

Ta gọi 4 vận động viên là A, B, C, D.

Ta có thể mô hình hóa (modéliser) tình huống bằng một sơ đồ cây, mà mỗi nhánh (chaque niveau de “feuille”) biểu diễn vị trí từ người bơi đến đích. (xem hoạt động 1).

Ta cũng có thể suy luận theo cách sau: có 4 cách chọn cho người về đích đầu tiên. Sau khi đã chọn người đầu tiên, còn lại 3 cách chọn cho người về đích thứ hai, 2 cách chọn cho người về đích thứ ba, và 1 cách chọn cho người về cuối cùng.

Vì vậy ta đếm được các thứ tự về đích khác nhau bởi phép tính: $4.3.2.1=4!$

Trong lời giải trên, chúng tôi thấy, ngoài kĩ thuật τ_{cay} “**Sơ đồ cây**”, xuất hiện thêm kĩ thuật suy luận theo quy tắc nhân được thể chế sử dụng. Sau đó giới thiệu khái niệm hoán vị của n phần tử:

Một thứ tự về đích tương ứng với một hoán vị của tập hợp $\{A, B, C, D\}$.

Một cách tổng quát, số hoán vị của n phần tử là $n!$

Nhận xét

Ví dụ 2 được đưa ra

Trong hình vẽ bên, người ta vẽ 5 đường thẳng song song với D và 4 đường thẳng song song với D'. Có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành từ hình bên

Lời giải được đưa ra

Một hình bình hành được định nghĩa bởi việc lựa chọn các cặp đường thẳng tạo thành các cặp cạnh đối nhau. Để tạo thành một hình bình hành, cần chọn 2 đường thẳng phân biệt trong 5 đường thẳng song song với D và hai đường thẳng phân biệt khác trong 4 đường thẳng song song với D'.

Có $\binom{5}{2} \times \binom{4}{2}$ khả năng, nghĩa là $10.6=60$

Vậy có 60 hình bình hành được tạo thành từ hình bên.

✓ **Phần 4: Bài tập**

Chúng tôi nhận thấy có các kiểu nhiệm vụ hiện diện trong sách MF1 và MF2

- Kiểu nhiệm vụ $T_{\text{đếm}}$ ‘Đếm số cấu hình tổ hợp’
 - + T_2 : ‘Đếm số cấu hình được xây dựng theo nhiều bước’
 - + T_3 : ‘Đếm số cấu hình là hoán vị’
 - + T_4 : ‘Đếm số cấu hình là chỉnh hợp’
 - + T_5 : ‘Đếm số cấu hình là tổ hợp’

- + T_7 : ‘Đếm số cấu hình là chỉnh hợp lặp’
- + T_9 : ‘Đếm số cấu hình là hỗn hợp của nhiều cấu hình cơ bản’
- Kiểu nhiệm vụ $T_{\text{tính}}$ ‘Tính toán và chứng minh tổ hợp’
- Kiểu nhiệm vụ T_{Newton} ‘Khai triển nhị thức Newton’

Các kĩ thuật giải quyết các kiểu nhiệm vụ này hoàn toàn tương đồng với các kĩ thuật đã được chỉ ra trong chương 2.

Bảng 3.1 Các kiểu nhiệm vụ hiện diện trong SGK Pháp

Kiểu nhiệm vụ		Nhiệm vụ sách Lớp 11(MF1)	Nhiệm vụ sách Lớp 12(MF2)	Tổng số
$T_{\text{đếm}}$	T_2	0	4	4
	T_3	0	7	7
	T_4	0	7	7
	T_5	0	8	8
	T_7	0	1	1
	T_9	0	11	11
T_{kgm}		10	0	10
$T_{\text{tính}}$		0	9	9
T_{Newton}		0	1	1

3.1.3 Kết luận

- Quy tắc cộng và quy tắc nhân không được đưa vào trong chương trình. Kĩ thuật dùng quy tắc nhân được giới thiệu thông qua việc giải một ví dụ.
- Ở lớp 11, kiểu nhiệm vụ liên quan là T_{kgm} chiếm số lượng tương đối nhiều trong sách MF1.

3.2 Tổ hợp trong CT và SGK Việt Nam

3.2.1 Chương trình và SGK ban cơ bản

2.1.1 Phân tích chương trình

Ở Việt Nam, Đại số tổ hợp đã được đưa vào chương trình môn toán trường phổ thông trung học ở lớp 12 từ năm học 1992-1993. Trong giai đoạn này, chương trình đưa ra các khái niệm cơ bản như: tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị, nhị thức Newton.

Trong chương trình Toán thi điểm dành cho phân ban KHTN giai đoạn 1995-1997, lý thuyết xác suất được giới thiệu lần đầu tiên ở lớp 12 trong chương Đại số tổ hợp-Xác suất. Sau khi đã giới

thiếu đầy đủ các khái niệm của đại số tổ hợp, sách giáo khoa đưa vào các khái niệm và công thức tính xác suất.

Đến giai đoạn chỉnh lí năm 2000, Đại số tổ hợp được trình bày độc lập thành một chương, trong khi đó xác suất không được đưa vào chương trình giảng dạy.

Ở giai đoạn hiện nay, sách giáo khoa hiện hành đưa khái niệm xác suất vào giảng dạy đại trà và phần đại số tổ hợp được trình bày trước làm cơ sở cho việc tiếp cận lý thuyết xác suất. Sách giáo viên Đại số và giải tích 11 do Trần Văn Hạo chủ biên dẫn ra: *“Có nhiều định nghĩa xác suất, định nghĩa xuất hiện sau là mở rộng định nghĩa trước nhưng định nghĩa xác suất bằng tiên đề là đầy đủ nhất. Tuy vậy, trong giáo trình này, ta chỉ dừng lại ở định nghĩa cổ điển của xác suất, trong đó tính hữu hạn của không gian mẫu và tính đồng khả năng của các kết quả là những yêu cầu cần thiết. Tuy định nghĩa rất đơn giản nhưng thực hành lại rất khó. Nó đòi hỏi học sinh phải có kiến thức về đại số tổ hợp khá vững vàng để đếm $n(A)$ và $n(\Omega)$ ”*

Nhận thấy rằng chương trình môn Toán đang hiện hành là sự tiếp nối của chương trình Toán thí điểm dành cho phân ban KHTN trước đó. Tác giả Túy An trong nghiên cứu của mình *“Nghiên cứu thực hành dạy học giáo viên: trường hợp khái niệm xác suất ở trường trung học phổ thông”* đã làm một phân tích sinh thái đầy đủ của khái niệm xác suất và đưa ra kết luận sau

“Thể chế I2 (bộ sách thí điểm phân ban) chọn giảng dạy khái niệm xác suất theo định nghĩa cổ điển của Laplace... Lựa chọn giảng dạy khái niệm xác suất bằng con đường này dẫn đến việc trang bị các phép đếm cơ bản của Đại số tổ hợp trước khi học xác suất và việc lựa chọn các phép thử chỉ gồm các biến cố sơ cấp là đồng khả năng. (Trang 37)”

Nhận xét: Từ những phân tích trên, chúng tôi nhận thấy rõ mục đích của noosphere trong việc đưa vào giảng dạy các khái niệm tổ hợp là sự chuẩn bị cho việc giới thiệu định nghĩa cổ điển của xác suất sau đó.

Chúng tôi chọn so sánh hai chương trình gần đây để làm rõ nhận định trên cũng như trả lời cho các câu hỏi được nêu ra ở trên.

Ở chương trình chỉnh lí năm 2000, tổ hợp là một chương cuối (chương 4) của sách giáo khoa lớp 12. Các khái niệm của Đại số tổ hợp được chọn giới thiệu ở hai bài của sách giáo khoa với thời lượng 4 tiết, cụ thể như sau:

- Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp (1 tiết)
- Nhị thức Newton

Theo chương trình phân ban hiện nay, khái niệm tổ hợp được đưa vào chương II của lớp 11, ở cả hai ban cơ bản và nâng cao. Các khái niệm của Đại số Tổ hợp được đưa vào giảng dạy ở chương II có tên gọi *Tổ hợp và xác suất* trong chương trình Đại số và Giải tích 11. Nội dung của chương gồm 5 bài với thời lượng 16 tiết, gồm các nội dung cụ thể như sau:

- Hai qui tắc đếm cơ bản (3 tiết)
- Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp (5 tiết)
- Nhị thức Newton (1 tiết)
- Phép thử và biến cố (2 tiết)
- Xác suất của biến cố (2 tiết)

Mục tiêu về kĩ năng của phần đại số tổ hợp mà học sinh cần phải đạt được sau khi học chương II là:

“Nắm được qui tắc cộng và qui tắc nhân, bước đầu biết cách áp dụng vào giải toán”

“Nắm vững các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp, phân biệt được sự khác nhau giữa các khái niệm”

“Nhớ các công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp và công thức nhị thức Newton”

(Sách giáo viên Toán 11 Cơ bản, tr.44, 45)

Sau đó, trong bài Xác suất của biến cố, phần Đại số Tổ hợp đã được khẳng định là công cụ quan trọng để tính xác suất:

“..., trong giáo trình này, ta chỉ dừng lại ở định nghĩa cổ điển của xác suất, trong đó tính hữu hạn của không gian mẫu và tính đồng khả năng của các kết quả là những yêu cầu cần thiết. Tuy định nghĩa rất đơn giản nhưng thực hành lại rất khó. Nó đòi hỏi học sinh phải có kiến thức về đại số tổ hợp khá vững vàng để đếm $n(A)$ và $n(\Omega)$ ” (Sách GV Cơ bản, tr.61)

3.2.1.2 Phân tích sách giáo khoa

Quyển sách giáo khoa Đại số và Giải tích 11 được soạn thảo với tổng chủ biên là PGS Trần Văn Hạo. Để thuận tiện trong quá trình phân tích, chúng tôi kí hiệu là MV1; đi kèm với sách giáo khoa là một cuốn sách giáo viên (kí hiệu G_1) và một cuốn sách bài tập (kí hiệu E_1).

Mở đầu chương, MV1 giới thiệu hai qui tắc đếm với mục đích: đếm số phần tử của tập hợp hữu hạn và để xây dựng các công thức trong Đại số tổ hợp.

Qui tắc cộng được giới thiệu bằng một ví dụ minh họa

Ví dụ 1:

“ Trong một hộp chứa 6 quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và 3 quả cầu đen được đánh số 7, 8, 9. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy ?” (M_1 tr.43)

Qua đó, MV1 đưa ra quy tắc:

“Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m+n$ cách thực hiện” (M_1 tr.44)

Sau đó, MV1 lưu ý rằng Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là qui tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau, được phát biểu như sau:

Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau, thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Tương tự, Quy tắc nhân cũng được giới thiệu qua một ví dụ

Ví dụ 3:

“Bạn Hoàng có hai áo màu khác nhau và 3 quần kiểu khác nhau. Hỏi Hoàng có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo ?”

Để giải quyết ví dụ 3, MV1 đã sử dụng hình ảnh trực quan là sơ đồ cây, với hướng dẫn của sách G_1 : *“Ví dụ 3 trong SGK nhằm dẫn đến quy tắc nhân nên khi giảng ví dụ này giáo viên nên dùng sơ đồ cây để học sinh dễ hình dung”* (G_1 tr.46). Qua đây, có thể thấy sơ đồ cây cũng là một công cụ hiệu quả trong việc tính số phần tử của một tập hợp. Sơ đồ cây xuất hiện trong tình huống này thể hiện mong muốn gì của thể chế và nó tồn tại ra sao trong sách giáo khoa hiện hành ? Đây là câu hỏi mà chúng tôi sẽ tìm câu trả lời sau khi phân tích phần bài tập của sách giáo khoa.

Sau đó, qui tắc nhân được MV1 đưa ra bằng cách mô tả mà không có chứng minh

“Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có m.n cách hoàn thành công việc” (M_1 tr.45)

Khái niệm hoán vị được hình thành dần qua ví dụ 1 và hoạt động 1.

Ví dụ 1: Trong một trận bóng đá, sau hai hiệp phụ hai đội vẫn hòa nên phải thực hiện đá luân lưu 11m. Một đội đã chọn được năm cầu thủ để thực hiện đá năm quả 11m. Hãy nêu 3 cách sắp xếp đá phạt.

Ở ví dụ 1, ta thấy xuất hiện vấn đề sắp thứ tự một tập hợp. Từ việc kết luận mỗi kết quả của việc sắp thứ tự tên của 5 cầu thủ đã chọn được gọi là một hoán vị tên của năm cầu thủ, M_1 đưa đến định nghĩa

“Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$).

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.”

M_1 đưa ra hoạt động 3

“Trên mặt phẳng, cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D. Liệt kê tất cả các vector khác vector-không mà điểm đầu và điểm cuối của chúng thuộc tập hợp điểm đã cho.”

Trong ví dụ trên, mỗi vector là một cặp điểm có thứ tự chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vector, nói cách khác mỗi vector là một tập con sắp thứ tự của tập hợp 4 phần tử A, B, C, D. Như vậy,

khái niệm tập con có thứ tự được giới thiệu thông qua hoạt động 3 làm cơ sở để dẫn đến khái niệm chỉnh hợp như sau:

“Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$).

Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.”

Ta thấy trong phần đầu khi giới thiệu ví dụ 3, MV1 dùng phương pháp liệt kê để biểu diễn các cách phân công trực nhật, hay các chỉnh hợp chập 3 của 5. Nếu số lượng học sinh của nhóm học tập là một số lớn thì phương pháp liệt kê phần tử như trên sẽ gặp nhiều khó khăn. Sau đó, MV1 đưa thêm một phương pháp để tính số cách phân công trực nhật là sử dụng qui tắc nhân. Hơn nữa, qui tắc nhân còn được sử dụng để chứng minh công thức tính số chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Nhận thấy trong thực tế giảng dạy, một số nhiều học sinh có xu hướng dùng qui tắc nhân để tính số các cách chọn k phần tử được sắp thứ tự của tập hợp n phần tử hơn là dùng trực tiếp công thức tính số chỉnh hợp. Giải thích sự lựa chọn trên của học sinh? Những khó khăn nào của học sinh trong việc sử dụng khái niệm chỉnh hợp để giải toán? Những thuận lợi và trở ngại nào đối với giáo viên trong việc dạy học khái niệm chỉnh hợp?

Cũng với phương pháp trình bày hai khái niệm trên, khái niệm tổ hợp cũng được M_1 giới thiệu sau ví dụ 5, tìm số các tam giác có thể có được tạo thành từ các điểm của tập hợp 4 điểm A, B, C, D. Mỗi tam giác là một tập con gồm ba điểm từ tập 4 điểm đã cho mà không kể thứ tự.

Từ đó sách giáo khoa đưa ra định nghĩa khái niệm tổ hợp:

“Giả sử tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho”

Mối liên hệ giữa tổ hợp và chỉnh hợp cũng được MV1 thể hiện rõ trong việc đưa đến công thức $A_n^k = C_n^k \cdot k!$ cũng như yêu cầu phân biệt rõ sự khác nhau giữa hai khái niệm tổ hợp và chỉnh hợp

“Khi dạy về tổ hợp và chỉnh hợp, giáo viên cần chỉ rõ cho học sinh khi nào dùng tổ hợp, khi nào dùng chỉnh hợp” (G₁ tr.53)

 Các tổ chức toán học hiện diện trong MV1

Chúng tôi nhận thấy trong MV1 có các KNV sau:

- Kiểu nhiệm vụ $T_{\text{đếm}}$ ‘Đếm số cấu hình tổ hợp’
 - + T_1 : ‘Đếm số phần tử của hợp các tập hợp’
 - + T_2 : ‘Đếm số cấu hình được xây dựng theo nhiều bước’
 - + T_3 : ‘Đếm số cấu hình là hoán vị’
 - + T_4 : ‘Đếm số cấu hình là chỉnh hợp’
 - + T_5 : ‘Đếm số cấu hình là tổ hợp’

- + T_7 : ‘Đếm số cấu hình là chỉnh hợp lặp’
- + T_9 : ‘Đếm số cấu hình là hỗn hợp của nhiều cấu hình cơ bản’
- Kiểu nhiệm vụ $T_{\text{tính}}$ ‘Tính toán và chứng minh tổ hợp’
- Kiểu nhiệm vụ T_{Newton} ‘Khai triển nhị thức Newton’

Chúng tôi tổng hợp các KNV hiện diện trong SGK Việt Nam trong bảng sau :

Bảng 3.2 Các KNV trong MV1

Kiểu nhiệm vụ		Nhiệm vụ sách MV1
T_{đếm}	T_1	1
	T_2	4
	T_3	2
	T_4	5
	T_5	2
	T_7	2
	T_9	2
T_{kgm}		0
T_{tính}		0
T_{Newton}		1

Phương pháp ứng dụng hai qui tắc nhân và cộng không được thể chế hóa. Vậy học sinh sẽ thao tác ra sao khi gặp bài toán hỗn hợp cần phải xác định việc sử dụng qui tắc nhân hay qui tắc cộng.

Số lượng bài tập sử dụng qui tắc nhân chiếm ưu thế, nên chúng tôi đưa đến một qui tắc hợp đồng là

R_1 : Sự xuất hiện của KNV về qui tắc nhân chiếm đa số gây ảnh hưởng đến việc hình thành kỹ thuật giải quyết các bài toán về tổ hợp.

3.2.1.3 Kết luận

Qua việc phân tích chương trình và sách giáo khoa trên, chúng tôi rút ra một số kết quả sau:

- Phần Đại số tổ hợp được đưa vào giảng dạy trước khi dạy khái niệm xác suất là phù hợp với mong muốn của thể chế: chỉ đưa vào chương trình định nghĩa cổ điển của xác suất. Các khái niệm của Đại số tổ hợp trở thành công cụ hiệu quả để đếm số các khả năng xảy ra của biến cố và đếm số phần tử của không gian mẫu.

- Kết luận trên được khẳng định qua việc phân tích các tổ chức toán học của chương. Chúng tôi nhận thấy tất cả các kiểu nhiệm vụ của phần đại số tổ hợp đều trở thành nhiệm vụ con của các kiểu nhiệm vụ liên quan đến xác suất.

- Khái niệm sơ đồ cây không “sống” được trong thể chế Việt Nam. Trong cả chương, sơ đồ cây chỉ xuất hiện với ý nghĩa là hình ảnh minh họa trực quan cho hai ví dụ của qui tắc nhân (qui tắc nhân trong phần tổ hợp và qui tắc nhân xác suất). Sau đó trong tất cả các lời giải được đưa ra của G_1 , sơ đồ cây hoàn toàn vắng bóng.

- Mặc dù sơ đồ cây không được thể chế hóa trong chương trình Việt Nam, nhưng chúng tôi tự hỏi việc sử dụng nó trong ví dụ minh họa có ý nghĩa như thế nào ? Học sinh sẽ ứng xử ra sao khi gặp đối tượng mới này ? Có phải chăng với học sinh đối tượng này thực sự là không mới mẻ hoàn toàn ? Họ dễ dàng chấp nhận nó ? Họ sử dụng được nó một cách hiệu quả để đọc kết quả bài toán. Những ghi nhận này đưa chúng tôi đến giả thuyết H_1 như sau:

H_1 : Tồn tại quan hệ cá nhân của học sinh với đối tượng sơ đồ cây

Chương 4 : NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM

Mục tiêu của chương

Chương này sẽ tìm câu trả lời cho câu hỏi sau

Những ràng buộc của thể chế dạy học có ảnh hưởng như thế nào đến mối quan hệ cá nhân học sinh đến các đối tượng của Đại số tổ hợp ?

Những quy tắc hành động nào, những quan niệm nào được học sinh vận dụng

Trọng tâm nghiên cứu này là kiểm chứng các quy tắc hợp đồng và giả thuyết nghiên cứu sau đây:

R_1 : Sự xuất hiện của KNV về qui tắc nhân chiếm đa số gây ảnh hưởng đến việc hình thành kỹ thuật giải quyết các bài toán về tổ hợp.

H_1 : Tồn tại quan hệ cá nhân của học sinh với đối tượng sơ đồ cây.

4.1 Đối tượng và hình thức thực nghiệm

Thực nghiệm được tổ chức dưới dạng bộ câu hỏi điều tra. Học sinh được phát phiếu thực nghiệm, giấy nháp và yêu cầu làm việc cá nhân để trả lời vào phiếu. Phiếu thực nghiệm và giấy nháp được thu lại để phân tích.

Tổng thời gian làm bài khoảng 25-30 phút đảm bảo cho học sinh đủ giờ để trả lời hết các câu hỏi. Chúng tôi cũng thông báo sẽ không lấy điểm chỉ giúp nghiên cứu nhằm tránh tình trạng copy bài nhau của học sinh và nếu em nào không biết trả lời thì yêu cầu nêu lí do.

Chúng tôi chọn tiến hành trên đối tượng học sinh lớp 11, sau khi đã học xong chương Xác suất – Tổ hợp.

Học sinh sẽ được phát tờ giấy làm bài, trên đó có in đề bài toán (gồm 3 bài). Tổng thời gian thực nghiệm dành cho 3 bài toán là 25'. Học sinh sẽ làm bài cá nhân với các bài toán này.

4.2 Phân tích thực nghiệm

4.2.1 Giới thiệu câu hỏi thực nghiệm

Chúng tôi đưa ra 3 câu hỏi thực nghiệm (phiếu câu hỏi thực nghiệm được đính kèm trong phần PHỤ LỤC) như sau:

Câu hỏi 1

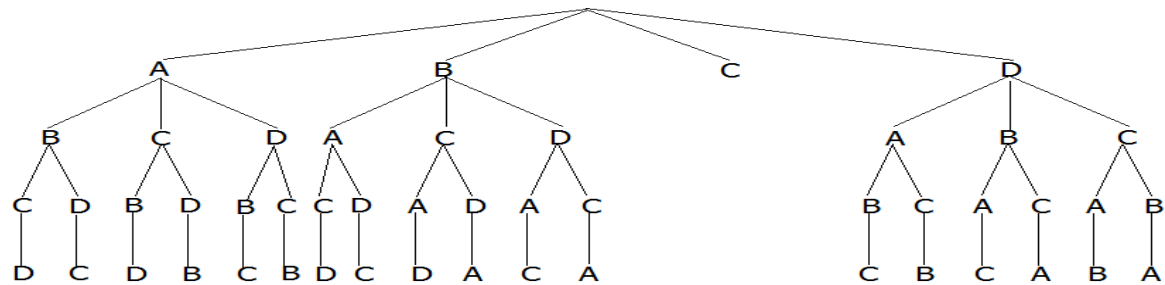
1. Có bao nhiêu cách cắm 2 bông hoa vào 4 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông) nếu:
 - a) Các bông hoa khác nhau ?
 - b) Các bông hoa như nhau ?

2. Em hãy hướng dẫn cho 1 em học sinh lớp 10 giải được bài toán này, và giải thích cho em này hiểu sự giống nhau và khác nhau giữa hai câu a và b trên ?

Câu hỏi 2

Một bác sỹ đến khám bệnh tại nhà của 4 bệnh nhân: A, B, C, D. Có bao nhiêu cách sắp thứ tự các cuộc khám bệnh mà bệnh nhân A trước bệnh nhân C ?

Một học sinh đã giải bài toán trên bằng cách lập sơ đồ sau



Và kết luận như sau:

Vì A trước C, nên ta loại trừ trường hợp C ở vị trí đầu tiên. Dựa vào sơ đồ cây trên, ta đếm được có 12 trường hợp thỏa mãn. Vậy có 12 thứ tự khám bệnh mà bệnh nhân A trước bệnh nhân C.

a. Em hãy chọn một trong ba câu trả lời sau mà em cho là đúng.

- Lời giải trên là đúng ☐

Hãy nêu ra 3 kết quả sắp thứ tự khám bệnh từ sơ đồ trên:

.....

- Lời giải trên là sai: ☐

Giải thích:

- Không biết ☐

Giải thích:

b. Em hãy đưa ra một cách giải mà em đã biết cho bài toán trên ?

Câu hỏi 3

Một công ti cần tuyển chọn người vào 3 vị trí Giám đốc, Kế toán trưởng và Chủ tịch hội đồng quản trị. Có 4 người A, B, C, D ứng cử vào các vị trí trên.

Có bao nhiêu cách chọn nhân sự thỏa mãn: ông A không thể chọn là Giám đốc, chức Chủ tịch hội đồng quản trị phải là ông C hoặc ông D ?

4.2.2 Phân tích A priori

4.2.2.1 Câu hỏi 1

Như đã phân tích ở chương 3, một khó khăn tồn tại thực sự ở học sinh là việc phân biệt giữa hai khái niệm tổ hợp và chỉnh hợp, cũng như là việc sử dụng chúng vào việc giải toán. Khó khăn này có nguồn gốc từ khoa học luận của tri thức, để né tránh khó khăn này, thể chế Việt Nam đã

chọn mô hình “**chọn k phần tử từ một tập hợp n phần tử**” và “**sắp xếp theo thứ tự**” để mô tả kiến thức. Với câu hỏi 1 này, chúng tôi muốn tìm hiểu xem mô hình này có được vận hành tốt trong thể chế Việt Nam không ? Hơn nữa, chúng tôi cũng có thể biết được các kỹ thuật học sinh sẽ vận dụng trong việc tính toán tổ hợp, chỉnh hợp thông qua câu hỏi mở, giúp 1 học sinh lớp 10 giải bài toán.

Câu hỏi 1 là một bài tập trong sách giáo khoa Việt Nam, ban cơ bản, trong bài “Hoán vị - Chỉnh hợp – Tổ hợp”.

❖ Các biến didactic

- V₁₁: Bài toán quen thuộc

Bài toán này là một bài toán tương tự bài tập 5, tr. 55 trong sách giáo khoa ban cơ bản ở bài “Hoán vị - chỉnh hợp – Tổ hợp”.

Sự lựa chọn này của chúng tôi nhằm biết được ảnh hưởng của những ràng buộc của thể chế đối với học sinh qua việc giải bài toán này. Điều này có nghĩa là: học sinh đã được giáo viên sửa bài tập này ở trên lớp, và cách giải của giáo viên sẽ phần nào tác động vào cách ứng xử của học sinh khi giải quyết kiểu nhiệm vụ này.

- V₁₂: Mô hình của bài toán

Bài toán này đưa ra một vấn đề thực tế gần gũi, học sinh có thể dựa vào kinh nghiệm cá nhân để giải quyết nó mà không cần sử dụng các công thức tính toán của Đại số tổ hợp.

- V₁₃: Cách đặt câu hỏi

Câu hỏi ở phần 2, yêu cầu học sinh hướng dẫn cho một học sinh lớp 10 giải quyết bài tập này, là một câu hỏi lạ đối với học sinh. Nhưng nó giúp người nghiên cứu có thể biết được các quan niệm, cũng như các quy tắc hành động tồn tại ở học sinh.

- V₁₄: Có các từ chìa khóa “khác nhau” và “như nhau”

Từ khóa “khác nhau” hướng học sinh đến việc sử dụng công thức chỉnh hợp để tính số cách cắm.

Từ khóa “như nhau” hướng học sinh đến việc sử dụng công thức tổ hợp để tính số cách cắm.

Việc đưa ra một cách tường minh hai từ chìa khóa “khác nhau” và “như nhau” sẽ làm rõ quan niệm của học sinh về hai khái niệm tổ hợp và chỉnh hợp trong quá trình họ phải giải thích cho một học sinh khác hiểu về hai đối tượng này. (chú ý là kiến thức này là hoàn toàn mới với em học sinh lớp 10).

Có một cách nêu đề bài như sau a) 3 bông hoa là: cúc, hồng, huệ; b) 3 bông đều là hoa hồng. Trong cách phát biểu này, thì đặc điểm giống nhau hoặc khác nhau đã được che dấu, nhiệm vụ của học sinh là phải phát hiện ra vấn đề.

- **V₁₅**: Số lượng của lọ và các bông hoa

Trong trường hợp này, số lượng của hoa và lọ là ít, nên học sinh có thể sử dụng được các kinh nghiệm cá nhân để giải quyết, mà không cần phải sử dụng các công thức.

Nếu số lọ là 5, và số bông là 3, giống bài tập của sách giáo khoa, thì số lượng kết quả của bài toán là nhiều nên học sinh không thể hình dung được các kết quả này, dẫn đến việc hạn chế các chiến lược liệt kê, chiến lược sơ đồ cây.

- **V₁₆**: Đối tượng được chọn trong câu số 2 là học sinh lớp 10. Với lý do: học sinh này chưa từng học về Đại số tổ hợp, vì vậy việc lựa chọn một cách giải thích phù hợp sẽ thể hiện được quan niệm của học sinh về hai khái niệm này.

❖ **Các chiến lược có thể:**

- **Chiến lược “công thức”**: Áp dụng trực tiếp công thức tính số chỉnh hợp và số tổ hợp để tính số cách cắm hoa vào bình.

- **Chiến lược “liệt kê”**: Đưa bài toán về một mô hình cụ thể và sau đó liệt kê tất cả các trường hợp có thể xảy ra.

- **Chiến lược “sơ đồ cây”**: Xây dựng sơ đồ cây để đếm số các kết quả thỏa mãn bài toán.

❖ **Những cái có thể quan sát được**

▪ **Chiến lược “công thức”**:

Các câu trả lời có thể:

Câu 1a)

S_{1a}: Vì 2 bông hoa khác nhau nên mỗi cách cắm 2 bông vào 4 lọ là một chỉnh hợp chập 2 của 4. Số cách cắm là: $A_4^2 = 12$

S_{2a}: Ta chia thành hai giai đoạn

- Giai đoạn 1: Chọn 2 lọ trong số 4 lọ. Có C_4^2 cách chọn.
- Giai đoạn 2: Xếp 2 bông khác nhau vào 2 lọ. Có $2!$ cách xếp.

Vậy có: $C_4^2 \cdot 2! = 12$ cách cắm.

S_{3a}: Kí hiệu 4 lọ lần lượt là: 1, 2, 3, 4.

Hai bông khác nhau là: xanh, vàng.

- Chọn bông xanh cắm vào lọ: có 4 cách chọn
- Sau khi chọn bông xanh, ta tiếp tục chọn bông vàng, có 3 cách chọn.

Vậy có: $3 \cdot 4 = 12$ cách cắm.

Câu 1b)

S_{1b}: Vì 2 bông hoa giống nhau nên mỗi cách cắm 2 bông vào 4 lọ là một tổ hợp chập 2 của 4. Số cách cắm là: $C_4^2 = 6$

S_{2b}: Ta chia thành hai giai đoạn

- Giai đoạn 1: Chọn 2 lọ trong số 4 lọ. Có C_4^2 cách chọn.
- Giai đoạn 2: Xếp 2 bông khác nhau vào 4 lọ. Vì 2 bông giống nhau, nên chỉ có 1 cách xếp.

Vậy có: $C_4^2 \cdot 1 = 6$ cách cắm.

S_{3b}: Kí hiệu 2 bông lần lượt là: 1, 2.

- Chọn bông 1 cắm vào lọ: có 4 cách chọn
- Sau khi chọn bông 1, ta tiếp tục chọn bông 2, có 3 cách chọn.

Vì 2 bông giống nhau nên số cách cắm là $\frac{3 \cdot 4}{2!} = 6$ (cách)

▪ Chiến lược “liệt kê”

Câu 1a)

S_{4a}: Kí hiệu 4 lọ lần lượt là 1, 2, 3, 4.

Một cách cắm hai bông khác nhau vào 2 lọ là một cặp số (a, b).

Ta có các trường hợp:

(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)

(2; 1), (3; 1), (4; 1), (3; 2), (4; 2), (4; 3)

Vậy có 12 cách cắm 2 bông khác nhau vào 4 lọ.

Câu 1b)

S_{4b}: Vẫn sử dụng cách kí hiệu như trên. Vì hai bông giống nhau nên chỉ có các trường hợp sau:

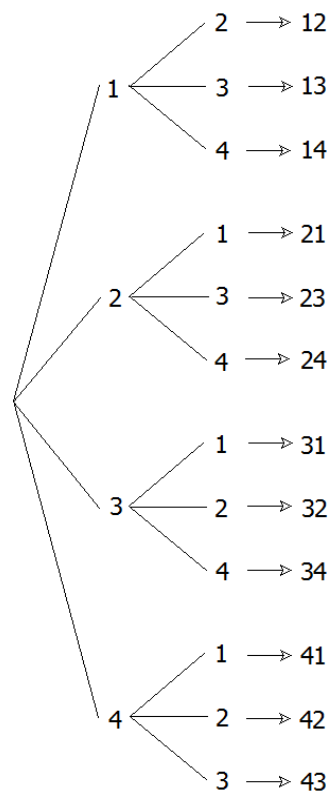
{1; 2}, {1; 3}, {1; 4}, {2; 3}, {2; 4}, {3; 4}

Vậy có tất cả 6 cách cắm 2 bông vào 4 lọ khác nhau.

▪ Chiến lược “sơ đồ cây”

Câu 1a)

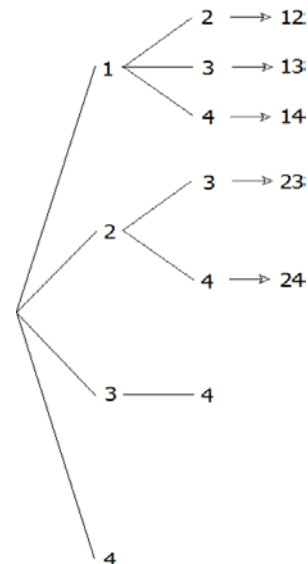
S_{5a}:



Dựa vào sơ đồ cây đã vẽ, ta có 12 kết quả. Vậy có 12 cách xếp 2 bông khác nhau vào 4 lọ.

Câu 1b)

S_{5b}: Dưới đây là sơ đồ cây, biểu diễn các tổ hợp chập 2 của 4 phần tử. Vậy có 6 cách cắm 2 bông hoa giống nhau vào 4 lọ.



4.2.2.2 Câu hỏi 2

Như đã phân tích ở chương 3, Sơ đồ cây là một công cụ trực quan hiệu quả được thể chế Pháp sử dụng. Trong khi đó, nó lại không “sống” được ở thể chế Việt Nam. Câu hỏi 2 đưa ra nhằm tìm hiểu ứng xử của học sinh trong tình huống phải lựa chọn các phương án, từ đó làm rõ được những ràng buộc của thể chế trong việc dạy học Đại số tổ hợp. Hơn nữa, chúng tôi thiết kế thực nghiệm này, nhằm tìm hiểu mối quan hệ cá nhân của học sinh với đối tượng sơ đồ cây.

Bài toán này được chúng tôi lựa chọn trong sách giáo khoa Pháp, Déclic Terminal S, phần bài tập. Lời giải mong muốn của thể chế Pháp là lời giải 1.

❖ Các biến didactic

- **V₂₁:** Cách đặt câu hỏi

Có các giá trị khác nhau của biến như sau:

+ Lời giải được đưa ra có sử dụng sơ đồ cây, kỹ thuật này không tồn tại trong thể chế Việt Nam, và yêu cầu học sinh đánh giá kỹ thuật. Kết quả đánh giá của học sinh sẽ làm rõ được mối quan hệ cá nhân của học sinh với đối tượng sơ đồ cây.

+ Không đưa ra lời giải đề nghị, mà yêu cầu học sinh giải bài toán. Học sinh có khuynh hướng vận dụng các kỹ thuật đã được thể chế hóa.

- **V₂₂:** Số lượng bệnh nhân

Các giá trị khác nhau của biến:

- Số lượng bệnh nhân ít:

Trong bài toán này, số lượng bệnh nhân là 4 người, con số này là không nhiều, tạo thuận lợi cho các kỹ thuật liệt kê có cơ hội xuất hiện trong thể chế Việt Nam, cũng như kỹ thuật sơ đồ cây được sử dụng hiệu quả đối với thể chế Pháp. Hơn nữa, mặc dù sơ đồ cây là một đối tượng “lạ” đối với học sinh Việt Nam, nhưng trong trường hợp này, khi số kết quả là không nhiều, tạo thuận lợi cho việc đọc các kết quả từ “cây”.

- Số lượng bệnh nhân là nhiều:

Trường hợp này tạo điều kiện thuận lợi cho các kỹ thuật sử dụng công thức, các kỹ thuật liệt kê, sơ đồ cây không hiệu quả.

❖ Các chiến lược có thể

- Chiến lược “phân hoạch và sắp thứ tự” (S_{21}): Bài toán đếm có điều kiện, ta phân chia các trường hợp.

- Chiến lược “liệt kê” (S_{22}): Liệt kê tất cả các cấu hình thỏa mãn yêu cầu bài toán.

❖ Những cái có thể quan sát được

Câu 2b)

Có thể xuất hiện các lời giải sau:

Lời giải 1

Ta có 12 kết quả sau:

ACBD	ABDC	DACB	ADCB
BDAC	BADC	ACDB	ADBC
BACD	ABCD	DBAC	DABC

Lời giải 2

1	2	3	4
---	---	---	---

Đánh dấu thứ tự các cuộc khám bệnh là 1, 2, 3, 4.

Trường hợp 1: A đứng đầu (vị trí số 1). A có 1 cách chọn. Có 3! Cách xếp các bệnh nhân còn lại.

⇒ Số cách đi khám bệnh là: $1 \times 3! = 6$

Trường hợp 2: A ở vị trí thứ hai; A có một cách chọn; người ở vị trí thứ 1 có hai cách chọn; có 2! cách chọn hai người còn lại ở vị trí thứ 3, 4.

⇒ Số cách đi khám bệnh là: $1 \times 2 \times 2 = 4$

Trường hợp 3: A ở vị trí thứ 3, vị trí cuối sẽ là C, hai vị trí còn lại có 2! cách sắp xếp.

⇒ Số cách đi khám bệnh là: $1 \times 2 = 2$

Vậy, có tất cả $6 + 4 + 2 = 12$ cách sắp thứ tự khám bệnh mà bệnh nhân A trước bệnh nhân C.

Lời giải 3

Trường hợp 1: C ở vị trí thứ 2, có 1 cách sắp xếp thứ tự cho A.

Trường hợp 2: C ở vị trí thứ 3, có 2 cách sắp xếp thứ tự cho A

Trường hợp 3: C ở vị trí cuối cùng, có 3 cách sắp xếp thứ tự cho A

⇒ Số cách sắp xếp thứ tự mà A trước C là: $1 + 2 + 3 = 6$

Hai vị trí còn lại là của B và D, vì hai người này có thể đổi chỗ cho nhau nên ta có:

$6 \times 2! = 12$ cách sắp xếp thứ tự khám bệnh cho 4 người A, B, C, D mà bệnh nhân A trước bệnh nhân C.

4.2.2.3 Câu hỏi 3

Trong câu hỏi này, chúng tôi muốn kiểm chứng giả thuyết H_2

❖ Các biến didactic

- V_{31} : Thứ tự được đưa ra của 3 vị trí Giám đốc, Kế toán trưởng, Chủ tịch hội đồng quản trị.

- V_{32} : Cách đặt câu hỏi

❖ Các chiến lược có thể

- Chiến lược “chia giai đoạn” (S_{31})

- Chiến lược “phân hoạch” (S_{32})

❖ Những cái có thể quan sát được

Lời giải 1

Việc chọn nhân sự được chia thành các công đoạn sau:

- Công đoạn 1: Chọn giám đốc: có 3 cách chọn chức giám đốc (chọn B, C, D)

- Công đoạn 2: Chọn kế toán trưởng: có 3 cách chọn kế toán trưởng từ 3 người còn lại.

- Công đoạn 3: Chọn chủ tịch HĐQT: có 2 cách chọn (ông C hoặc D).

Theo quy tắc nhân thì số cách chọn nhân sự là $3.3.2=18$.

Lời giải này không đúng. Vì số cách thực hiện công đoạn 3 phụ thuộc vào kết quả của công đoạn 2.

Nếu ở công đoạn 2 cả C và D không được chọn thì công đoạn 3 mới có 2 cách. Còn nếu C hoặc D đã được chọn thì ở công đoạn 3 chỉ có một cách.

Tuy nhiên, nếu ta thiết lập việc chọn ba vị trí giám đốc, kế toán trưởng và chủ tịch HĐQT tiến hành theo 3 công đoạn khác thì vẫn có thể áp dụng quy tắc nhân, được trình bày trong lời giải 2.

Lời giải 2

- Công đoạn 1: Chọn Chủ tịch HĐQT: có hai cách chọn

- Công đoạn 2: Chọn giám đốc: ta luôn có hai cách chọn dù ở công đoạn 1 ai được chọn (C, B) hoặc (D, B)

- Công đoạn 3: Chọn kế toán trưởng có hai cách

Vậy kết quả là có $2.2.2=8$ cách chọn.

Lời giải 3

Trường hợp 1: C là chủ tịch hội đồng quản trị

- Chọn Giám đốc: có 2 cách chọn (B hoặc D)

- Chọn kế toán trưởng: có 2 cách chọn.

Nên có $2.2 = 4$ cách chọn

Trường hợp 2: D là chủ tịch hội đồng quản trị

- Chọn Giám đốc: có 2 cách chọn (B hoặc C).
- Chọn kế toán trưởng: có 2 cách chọn.

Nên có: $2.2 = 4$ cách chọn.

Vậy có: $4 + 4 = 8$ cách chọn nhân sự thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4.2.3 Phân tích A posteriori

Thực nghiệm được thực hiện vào tháng 1 năm 2011, ở các lớp 11 trường THPT Trường Chinh (TP. Hồ Chí Minh) và 1 lớp 11 trường THPT Trần Quang Khải (TP Hồ Chí Minh). Tổng số học sinh thực nghiệm là 135.

Mỗi học sinh được phát một phiếu làm bài, một tờ giấy nháp và làm việc độc lập trong khoảng 30'. Học sinh được sử dụng máy tính bỏ túi.

Sau đây chúng tôi sẽ đi vào phân tích kết quả thu được của từng câu hỏi thực nghiệm.

A. Câu hỏi 1.

Bảng 4.1 Bảng thống kê số lượng các chiến lược giải cho câu hỏi 1a.

Chiến lược	Giải bài toán					Tổng cộng
	Công thức			Liệt kê	Sơ đồ cây	
	S _{1a}	S _{2a}	S _{3a}	S _{4a}	S _{5a}	
Số lượng	47	32	44	6	0	

Bảng 4.2 Bảng thống kê số lượng các chiến lược giải cho câu hỏi 1a.

Chiến lược	Giải bài toán					Tổng cộng
	Công thức			Liệt kê	Sơ đồ cây	
	S _{1b}	S _{2b}	S _{3b}	S _{4b}	S _{5b}	
Số lượng	63	10	74	6	0	

Từ bảng thống kê này cho thấy:

1. Đối với chiến lược công thức, tổng số lượng học sinh sử dụng chiến lược S_{2a}, S_{3a} chiếm ưu thế, cả hai chiến lược này đều sử dụng kỹ thuật của quy tắc nhân. Mặc dù câu hỏi 3 được thiết kế khá thuận lợi cho học sinh thiên về sử dụng trực tiếp công thức tính số chỉnh hợp nhưng thực tế cho thấy tỉ lệ học sinh sử dụng qui tắc nhân cao hơn hẳn. Điều này cho phép chúng tôi hợp thức quy tắc hợp đồng R₁.

2. Chiến lược sơ đồ cây hoàn toàn vắng bóng. Điều này phù hợp với phân tích thể chế ở chương 3.

KẾT LUẬN

Các nghiên cứu ở chương 1, 2, 3, 4 cho phép chúng tôi tìm ra câu trả lời cho các câu hỏi nghiên cứu trước đó. Sau đây là những kết quả nghiên cứu chính đã đạt được :

1. Việc phân tích khoa học luận lịch sử khái niệm tổ hợp, cho thấy theo các giai đoạn phát triển của lịch sử, có bốn bài toán đặc trưng là : bài toán đếm, bài toán tồn tại, bài toán liệt kê, bài toán tối ưu.

- Đặc trưng của bài toán đếm là : bài toán được cho bằng lời, các vấn đề mà bài toán nhắm đến là các vấn đề nảy sinh trong cuộc sống hằng ngày. Các đối tượng của bài toán là hữu hạn và rời rạc.

- Đại số tổ hợp và xác suất có mối liên hệ mật thiết với nhau trong quá trình nảy sinh và phát triển. Cụ thể hơn, Đại số tổ hợp là công cụ hiệu quả cho các tính toán xác suất với trường hợp đồng khả năng, sử dụng công thức Laplace.

2. Khó khăn tồn tại ở học sinh trong việc hiểu các kiến thức về Đại số tổ hợp như phân biệt giữa quy tắc cộng và quy tắc nhân, giữa tổ hợp và chỉnh hợp là có nguồn gốc từ khoa học luận của kiến thức. Vì vậy, các thể chế dạy học đều tìm cho mình một mô hình chuyển đổi nhằm tránh các chướng ngại về khoa học luận.

3. Khi nghiên cứu mối quan hệ thể chế của khái niệm tổ hợp

- Thể chế Pháp, không đưa vào chương trình giảng dạy Đại số tổ hợp, mà chỉ giới thiệu một vài công cụ đếm như tổ hợp, hoán vị và quy tắc nhân. Ngược lại, các mô hình đếm trực quan như sơ đồ cây, bảng biểu lại chiếm vị trí ưu thế trong SGK Pháp. Các khái niệm khác của Đại số tổ hợp không được giới thiệu một cách tường minh trong chương trình. Nhưng chúng ta có thể tìm thấy dấu vết của nó trong các kỹ thuật đếm dựa vào các mô hình trực quan : sơ đồ cây, mô hình bình chứa...

- Ngược lại, trong thể chế Việt Nam, hoàn toàn vắng bóng việc giới thiệu các mô hình đếm cũng như các công cụ đếm trực quan.

4. Nghiên cứu thực nghiệm đã kiểm chứng được các quy tắc hợp đồng cũng như giải thuyết sau :

R_1 : Sự xuất hiện của KNV về qui tắc nhân chiếm đa số gây ảnh hưởng đến việc hình thành kỹ thuật giải quyết các bài toán về tổ hợp.

H_1 : Tồn tại quan hệ cá nhân của học sinh với đối tượng sơ đồ cây.

* Hướng nghiên cứu mở ra từ luận văn : Nghiên cứu và xây dựng những tình huống dạy học phân biệt được các khái niệm tổ hợp và chỉnh hợp.

Chúng tôi hi vọng rằng, công trình khoa học này sẽ đóng góp một phần trong việc đổi mới phương pháp giảng dạy Toán ở trường phổ thông hiện nay.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Trần Túy An, *Nghiên cứu thực hành dạy học giáo viên: trường hợp khái niệm xác suất ở trường trung học phổ thông*, Luận văn thạc sĩ giáo dục học, TPHCM 2007.
2. Nguyễn Hữu Anh, *Toán rời rạc*, NXB Lao động xã hội 2009.
3. Lê Thị Hoài Châu – Lê Văn Tiến, *Vai trò của phân tích khoa học luận lịch sử toán học trong nghiên cứu và thực hành dạy học môn toán*, Đề tài NCKH cấp Bộ, ĐHSPTPHCM 2003.
4. Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến, *Những yếu tố cơ bản của didactic Toán*, NXB Đại học quốc gia TP Hồ Chí Minh, 2009.
5. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên) - Vũ Tuấn - Đào Ngọc Nam - Lê Văn Tiến - Vũ Viết Yên, *Đại số và giải tích 11*, Nhà xuất bản giáo dục, 2007.
6. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên) - Vũ Tuấn - Đào Ngọc Nam - Lê Văn Tiến - Vũ Viết Yên, *Đại số và giải tích 11 Sách Giáo viên*, Nhà xuất bản giáo dục, 2007.
7. Vũ Như Thư Hương, *Khái niệm xác suất trong dạy học Toán ở trung học phổ thông*, Luận văn thạc sĩ khoa học, TPHCM 2005.
8. Ngô Thúc Lanh – Đoàn Quỳnh – Nguyễn Đình Trí, *Từ điển Toán học thông dụng*, NXB Giáo dục 2002.
9. Ngô Thúc Lanh, *Tìm hiểu Đại số tổ hợp phổ thông*, Nhà xuất bản giáo dục 1998.
10. Nguyễn Đức Nghĩa – Nguyễn Tô Thành, *Toán rời rạc*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội 1997
11. X.M.Nikoxki, *Từ điển bách khoa phổ thông Toán học tập 2*, NXB Giáo dục 2001.
12. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên) – Nguyễn Huy Doan – Nguyễn Xuân Liêm – Nguyễn Khắc Minh – Đặng Hùng Thắng, *Đại số và giải tích 11 Nâng cao*, Nhà xuất bản giáo dục, 2007.
13. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên) – Nguyễn Huy Doan – Nguyễn Xuân Liêm – Nguyễn Khắc Minh – Đặng Hùng Thắng, *Đại số và giải tích 11 Nâng cao Sách Giáo viên*, Nhà xuất bản giáo dục, 2007.
14. Lê Văn Tiến, *Phương pháp dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2005.
15. Hoàng Chí Thành, *Giáo trình tổ hợp*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội 1999.
16. Đặng Hùng Thắng, *Mở đầu về lý thuyết xác suất và các ứng dụng*, Nhà xuất bản giáo dục 2009.
17. Vụ giáo dục trung học, *Tài liệu bồi dưỡng giáo viên thực hiện chương trình, sách giáo khoa lớp 11*, NXB Giáo dục 2007.

Tiếng Pháp

18. Mahdi Abdeljaouad, *Quelques éléments d'histoire de l'analyse combinatoire*, Journées Nationales de l'ATSM Décembre 2002, Tunisie.
19. Andrea Bréard, *Pratiques et mathématiques combinatoires en Chine*, Université Lille 1, Laboratoire Paul Painlevé, UMR CNRS 8524, le 15 mai 2009.
20. Annie Bessot - Alain Birebent - Claude Comiti - Bernard Genevès - Colette Laborde - Le Thai Bao Thien Trung - Nguyen Thi Nga, *Rapport de recherche: Modélisation mathématique de phénomènes variables, dans l'enseignement, à l'aide de la géométrie dynamique*, MIRA rapport 2010.
21. Laure Balman, *Étude d'un objet combinatoire: le graphe*, Équipe CNAM, laboratoire Leibniz, 1998.
22. Ahmed Djebbar, *Les pratiques combinatoires aux Maghreb à l'époque de Raymond Lulle*, Université des sciences et technologies de Lille.
23. A. Dahan – Dalmedico/Jpeiffer, *Une histoire des mathématiques*, Éditions du Seuil 1986
24. *Accompagnement des programmes mathématiques classe Terminale S, programme applicable à la compter de la rentrée 2002*, Centre national de documentation pédagogique, eduscol.education.fr.
25. *Accompagnement des programmes mathématiques classe de Première S programme applicable à la compter de la rentrée 2002*, Centre national de documentation pédagogique, eduscol.education.fr.
26. L'aventure mathématique, *L'art du dénombrement*, La gazette de tangente, Avril – Mai 2010.
27. *Programme pour la class de seconde S, programme applicable à la compter de la rentrée 2002*, eduscol.education.fr, Juine 2009.
28. *Programme pour la class de première S, programme applicable à la compter de la rentrée 2002*, eduscol.education.fr.
29. *Programme pour la class Terminale S, programme applicable à la compter de la rentrée 2002*, eduscol.education.fr.
30. Jean – Paul Beltramone – Vincent Brun – Claude Felloneau – Lydia Mysset – Claude Talamoni, *Déclic Terminal S*, Hachette éducation 2005.
31. Jean – Paul Beltramone – Vincent Brun – Claude Felloneau – Lydia Mysset – Claude Talamoni, *Déclic 1^{re} S*, Hachette éducation 2005.
32. <http://images.math.cnrs.fr>
33. <http://chronomath.com>
34. <http://wikipedia.org>
35. <http://universitysurf.fr>

PHỤ LỤC
PHIẾU THỰC NGHIỆM HỌC SINH
PHIẾU THỰC NGHIỆM

Trường:

Học sinh:

Các em thân mến !

Phiếu này gồm có 3 bài toán, các em có 25 phút để trình bày lời giải ngay phía dưới phần bài làm.

Lời giải không nhằm đánh giá các em mà để góp phần cải thiện việc dạy và học Toán. Xin cảm ơn sự tham gia của các em !

Câu hỏi 1

1. Có bao nhiêu cách cắm 2 bông hoa vào 4 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông) nếu:

c) Các bông hoa khác nhau ?

d) Các bông hoa như nhau ?

BÀI LÀM

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Em hãy hướng dẫn cho 1 em học sinh lớp 10 giải được bài toán này, và giải thích cho em này hiểu sự giống nhau và khác nhau giữa hai câu a và b trên ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

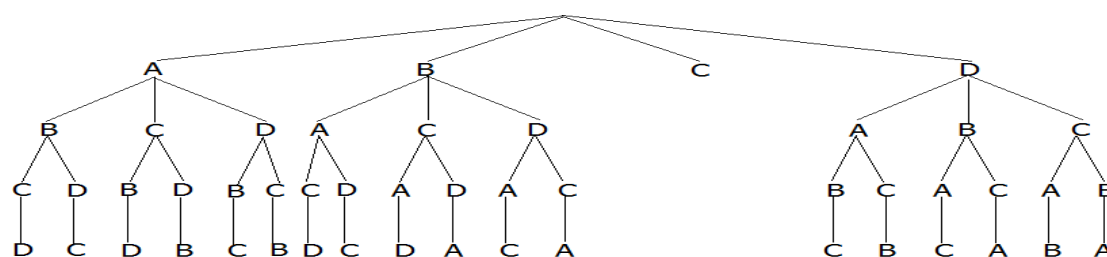
.....

.....

Câu hỏi 2

Một bác sỹ đến khám bệnh tại nhà của 4 bệnh nhân: A, B, C, D. Có bao nhiêu cách sắp thứ tự các cuộc khám bệnh mà bệnh nhân A trước bệnh nhân C ?

Một học sinh đã giải bài toán trên bằng cách lập sơ đồ sau



Và kết luận như sau:

Vì A trước C, nên ta loại trừ trường hợp C ở vị trí đầu tiên. Dựa vào sơ đồ cây trên, ta đếm được có 12 trường hợp thỏa mãn. Vậy có 12 thứ tự khám bệnh mà bệnh nhân A trước bệnh nhân C.

a. Em hãy chọn 1 trong 3 câu trả lời sau mà em cho là đúng

- Lời giải trên là đúng ☐

Hãy nêu ra 3 kết quả sắp thứ tự khám bệnh từ sơ đồ trên:

.....

- Lời giải trên là sai: ☐

Giải thích:

.....

.....

- Không biết ☐

Giải thích:

.....

.....

b. Em hãy đưa ra một cách giải mà em đã biết cho bài toán trên ?

.....

[illegible]

Câu hỏi 3

Một công ty cần tuyển chọn người vào 3 vị trí Giám đốc, Kế toán trưởng và Chủ tịch hội đồng quản trị. Có 4 người A, B, C, D ứng cử vào các vị trí trên.

Có bao nhiêu cách chọn nhân sự thỏa mãn: ông A không thể chọn là Giám đốc, chức Chủ tịch hội đồng quản trị phải là ông C hoặc ông D ?

BÀI LÀM

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.