

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Lê Anh Tuấn

**MỘT NGHIÊN CỨU DIDACTIC VỀ KHÁI NIỆM ĐẠO
HÀM Ở LỚP 11 PHỔ THÔNG**

Chuyên ngành : Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán

Mã số : 60 14 10

LUẬN VĂN THẠC SĨ GIÁO DỤC HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN ÁI QUỐC

Thành phố Hồ Chí Minh – 2009

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Nguyễn Ái Quốc, người đã tận tình hướng dẫn, động viên tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn đến quý thầy cô : PGS. TS. Lê Văn Tiến, PGS. TS. Lê Thị Hoài Châu, TS. Lê Thái Bảo Thiên Trung, TS. Trần Lương Công Khanh, TS. Nguyễn Chí Thành về những bài giảng didactic Toán rất thú vị.

Tôi xin chân thành cảm ơn PGS. TS. Claude Comiti, PGS. TS. Annie Bessot và TS. Alain Birebent về những lời góp ý cho luận văn.

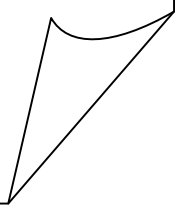
Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám Hiệu cùng quý thầy cô : Trường Cao Đẳng Sư Phạm Đồng Nai, THPT Long Thành, THPT Ngô Quyền, THPT Tam Phước đã luôn hỗ trợ, giúp đỡ cho tôi về mọi mặt để tôi hoàn thành tốt khóa học và hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Phòng Khoa Học Công Nghệ và Sau Đại Học, Khoa Toán - Trường Đại Học Sư Phạm Thành Phố Hồ Chí Minh đã tạo những điều kiện học tập tốt nhất cho chúng tôi.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến các bạn cùng lớp didactic Toán khóa 17 vì những sẻ chia trong thời gian học tập. Tôi rất hạnh phúc vì được quen và học cùng các bạn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn đến gia đình tôi vì những sự quan tâm và động viên giúp tôi hoàn tất khóa học.

Lê Anh Tuấn



DANH MỤC VIẾT TẮT

SGKC11	: Sách giáo khoa chương trình chuẩn lớp 11 hiện hành
SGKNC11	: Sách giáo khoa chương trình nâng cao lớp 11 hiện hành
SGKC12	: Sách giáo khoa chương trình chuẩn lớp 12 hiện hành
SGKNC12	: Sách giáo khoa chương trình nâng cao lớp 12 hiện hành
SGKCL12	: Sách giáo khoa chính lý 12 năm 2000
SBTC11	: Sách bài tập chương trình chuẩn lớp 11 hiện hành
SBTNC11	: Sách bài tập chương trình nâng cao lớp 11 hiện hành
SBTC12	: Sách bài tập chương trình chuẩn lớp 12 hiện hành
SBTNC12	: Sách bài tập chương trình nâng cao lớp 12 hiện hành
SBTCL12	: Sách bài tập chính lý 12 năm 2000
SGK	: Sách giáo khoa
SBT	: Sách bài tập
SGV	: Sách giáo viên
ĐH	: đạo hàm
GV	: giáo viên
HS	: học sinh
KNV	: kiểu nhiệm vụ

MỞ ĐẦU

1. Những ghi nhận ban đầu và câu hỏi xuất phát

Như chúng ta đã biết, đạo hàm là một khái niệm quan trọng của giải tích. Nó là một khái niệm cơ bản để nghiên cứu nhiều tính chất của hàm số: tính đơn điệu, cực trị, khoảng lồi lõm, điểm uốn, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất,...giúp ích rất nhiều cho việc khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số. Đạo hàm cũng là một phương tiện hữu hiệu để giải quyết một số bài toán trong lĩnh vực khoa học như: Cơ học, điện học, hóa học, sinh học,...

Từ năm học 2006-2007, chương trình môn Toán ở bậc THPT được biên soạn lại theo chương trình giáo dục phổ thông mới. Những thay đổi về quan điểm dạy học Toán ở phổ thông đã dẫn đến những thay đổi về chương trình mà trong đó đạo hàm không phải là ngoại lệ. Chính vì vậy, việc tìm hiểu sự thay đổi đó là việc quan trọng và cần thiết.

Những ghi nhận trên dẫn chúng tôi tới việc đặt ra các câu hỏi xuất phát như sau:

- Khái niệm đạo hàm ở lớp 11 hiện hành được xây dựng như thế nào? Việc xây dựng đó có ảnh hưởng như thế nào đến việc giảng dạy của GV và việc lĩnh hội, hình thành các khái niệm về đạo hàm đối với HS ?
- Có sự nối khớp nào của chương đạo hàm với các phần khác có liên quan với nó trong chương trình hay không?

2. Phạm vi lí thuyết tham chiếu

Chúng tôi sẽ sử dụng các khái niệm của Lý thuyết nhân chủng học (như: tổ chức toán học, quan hệ thể chế và quan hệ cá nhân đối với một tri thức để phân tích mối quan hệ thể chế với khái niệm đạo hàm) và khái niệm hợp đồng didactic để phục vụ cho nghiên cứu của mình.

Trong phạm vi lí thuyết này và từ các câu hỏi khởi đầu nêu trên, chúng tôi trình bày lại hệ thống câu hỏi nghiên cứu của luận văn như sau :

Q1: Khái niệm đạo hàm được xây dựng như thế nào ở bậc đại học?

Q2: Mối quan hệ thể chế với khái niệm đạo hàm được hình thành như thế nào ở chương trình phổ thông hiện hành? Có những ràng buộc thể chế nào lên khái niệm này?

Q3: Mối quan hệ thể chế nêu trên ảnh hưởng thế nào đến quá trình dạy học của giáo viên liên quan đến khái niệm này ?

Q4: Mối quan hệ cá nhân của HS đối với đối tượng đạo hàm ảnh hưởng như thế nào đến việc hình thành khái niệm này ở HS ?

Q5: Giữa đạo hàm với các phần khác liên quan với nó trong chương trình có mối quan hệ như thế nào? Các đối tượng có liên quan này có vai trò chức năng gì trong mối quan hệ đó?

3. Mục đích và phương pháp nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu của chúng tôi là đi tìm câu trả lời cho những câu hỏi đã đặt ra ở mục 2. Để đạt được mục đích đề ra, chúng tôi xác định phương pháp nghiên cứu như sau:

- Tìm hiểu việc xây dựng khái niệm đạo hàm trong một số giáo trình bậc đại học
- Phân tích chương trình và sách giáo khoa Toán phổ thông của Việt Nam để làm rõ mối quan hệ của thể chế dạy học Việt Nam đối với khái niệm này qua các thời kì: lớp 12 chính lí hợp nhất 2000 và lớp 11, 12 hiện hành. Từ đó thấy được những ràng buộc của thể chế dạy học Việt Nam trên khái niệm đạo hàm.
- Xây dựng và tiến hành một thực nghiệm đối với HS để làm rõ mối quan hệ cá nhân của học sinh đối với khái niệm đạo hàm.

4. Tổ chức của luận văn

Luận văn gồm 5 phần: Phần mở đầu, 3 chương và phần kết luận chung.

Trong **phần mở đầu**, chúng tôi trình bày những ghi nhận ban đầu, lợi ích của đề tài; lý thuyết tham chiếu; mục đích và phương pháp nghiên cứu; tổ chức của luận văn.

Chương 1, dành cho việc tổng hợp cách xây dựng khái niệm đạo hàm trong một số giáo trình đại học và đưa ra các kết luận

Chương 2, chúng tôi phân tích CT và SGK hiện hành để làm rõ mối quan hệ thể chế với khái niệm đạo hàm. Sau đó nêu ra các kết luận và một số hợp đồng didactic

Chương 3, Nghiên cứu thực nghiệm đối với HS nhằm kiểm chứng một số kết luận và hợp đồng didactic ở chương 2.

Trong **phần kết luận chung**, chúng tôi tóm tắt các kết quả đạt được ở chương 1, 2, 3 và nêu một số hướng nghiên cứu mở ra từ luận văn.

Chương 1

KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM TRONG MỘT SỐ GIÁO TRÌNH ĐẠI HỌC

1.1. Đạo hàm trên phương diện đối tượng

1.1.1. Trong giáo trình Toán học cao cấp, tập 2 và 3 của các tác giả : Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (Nhà xuất bản giáo dục năm 2008- tái bản lần thứ 12). Chúng tôi kí hiệu là : [4]

Trước khi xây dựng khái niệm Đạo hàm thì có các khái niệm

➤ Giới hạn hàm số : “ Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(a;b)$, nói rằng $f(x)$ có giới hạn là L (hữu hạn), khi x dần đến x_0 ($x_0 \in [a;b]$) nếu với bất kì $\varepsilon > 0$ cho trước tìm được $\delta > 0$ sao cho khi $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$ ”

➤ Giới hạn một phía

“ Xét $\lim f(x)$ khi x dần đến x_0 (hữu hạn) khi x luôn thỏa $x < x_0$ hoặc khi $x > x_0$; khi đó nếu tồn tại $\lim f(x)$ thì ta nói đó là các giới hạn một phía : giới hạn trái ($x \rightarrow x_0, x < x_0$) và giới hạn phải ($x \rightarrow x_0, x > x_0$) của $f(x)$ ”

➤ Vô cùng bé và vô cùng lớn

“ Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng bé khi x dần đến x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ”

“ Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng lớn khi x dần đến x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$ ”

➤ Sự liên tục của hàm số

“ Cho $f(x)$ là một hàm số xác định trong khoảng $(a;b)$; nói rằng $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \in (a;b)$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ”

➤ Sự liên tục đều

“ Hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(a;b)$ được gọi là liên tục đều trong $(a ;b)$ nếu với bất kì $\varepsilon > 0$ cho trước tìm được $\delta > 0$ sao cho với bất kì $u, v \in (a;b)$ thỏa $|u - v| < \delta$ thì $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$ ”

Định nghĩa Đạo hàm (hàm số một biến)

“ Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(a;b)$; nói rằng hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm $c \in (a;b)$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = A, \quad x \neq c$$

Số A ; giới hạn của tỉ số $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}, x \neq c$ khi $x \rightarrow c$ được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ lấy tại điểm $x = c$; và kí hiệu $f'(c)$

Đặt $x - c = \Delta x$ thì biểu thức định nghĩa trở thành $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$ ”.

Sau đó giáo trình còn đưa ra một định nghĩa khả vi dưới dạng

$f(c + \Delta x) - f(c) = f'(c)\Delta x + o(\Delta x)$, trong đó $o(\Delta x)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \rightarrow 0$.

Tiếp theo là xây dựng các phép toán ĐH, ĐH của hàm số hợp, ĐH theo tham số, ĐH các hàm số sơ cấp cơ bản, ĐH một phía(xây dựng từ giới hạn một bên $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ và có đưa ra kí hiệu), ĐH vô cùng, ĐH và vi phân cấp cao.

Trong [4] còn mở rộng đạo hàm riêng, vi phân riêng của hàm số nhiều biến, ĐH của hàm ẩn, ĐH vectơ, phương trình vi phân.

Nhận xét :

- Khái niệm giới hạn hàm số được xây dựng theo ngôn ngữ ε, δ .

-Đưa vào kí hiệu $\Delta x, \Delta y$ trong định nghĩa ĐH và có cả định nghĩa khả vi theo vô cùng bé.

- Định nghĩa ĐH có mối quan hệ mật thiết với các khái niệm hàm số liên tục, khái niệm vô cùng bé.

- Khái niệm đạo hàm được mở rộng cho hàm nhiều biến.

1.1.2. Giáo trình Toán Giải Tích 1 của PGS. TS Dương Minh Đức (Nhà xuất bản thống kê năm 2006). Kí hiệu: [5]

Trước khi xây dựng khái niệm ĐH giáo trình này cũng xây dựng các khái niệm tương tự như giáo trình [4].

Về định nghĩa Đạo hàm (hàm số một biến)

“ Cho f là hàm số thực trên khoảng mở $(a;b)$ và $x \in (a;b)$. Chọn một số thực dương r sao cho $(x - r; x + r) \subset (a;b)$.

Đặt $u(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ với mọi $h \in (-r, r) \setminus \{0\}$

Ta nói f là một hàm số khả vi tại x nếu và chỉ nếu giới hạn sau đây có và là một số thực

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (= \lim_{h \rightarrow 0} u(h))$$

Lúc đó ta kí hiệu giới hạn này là $f'(x)$ và gọi nó là đạo hàm của f tại x . Nếu f khả vi tại mọi $x \in (a;b)$ ta nói f khả vi trên $(a;b)$.

Giáo trình này không đưa ra kí hiệu đạo hàm một bên mà chỉ giới thiệu thông qua các giới hạn một bên của $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Tiếp theo cũng xây dựng các phép toán ĐH, ĐH của hàm số hợp, ĐH các hàm số sơ cấp cơ bản, ĐH cấp cao, mở rộng đạo hàm của hàm số nhiều biến số.

1.1.3. Giáo trình Principles of Mathematical Analysis của Walter Rudin

(MacGraw – Hill Book Company, Third Edition, 1976). Kí hiệu: [1]

Trước khi xây dựng khái niệm ĐH giáo trình này cũng xây dựng các khái niệm tương tự như giáo trình [4].

Về định nghĩa Đạo hàm

“ Cho hàm số thực f xác định trên đoạn $[a;b]$. Với x thuộc $[a;b]$, lập tỉ số

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (a < t < b, t \neq x)$$

Nếu $\lim_{t \rightarrow x} \phi(t)$ tồn tại thì kí hiệu $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \phi(t)$ là đạo hàm của hàm số f tại x

Đạo hàm bên phải(hay bên trái) tại x là giới hạn bên phải (hay bên trái) của $\lim_{t \rightarrow x} \phi(t)$ ” (chương 5, trang 89).

Ngoài ra trong [1] còn mở rộng có khái niệm : ĐH của hàm số phức

“ Cho hàm phức f xác định trên $[a; b]$. Đặt $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ với f_1, f_2 là hàm thực và $a \leq t \leq b$.

Khi đó nếu cả hai hàm số f_1, f_2 có đạo hàm tại x thì ta nói hàm số f cũng có đạo hàm tại x và cũng kí hiệu là $f'(x)$. Ngoài ra $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x)$ ”.

(trang 96)

Tiếp theo là xây dựng các phép toán ĐH, ĐH của hàm số hợp, ĐH các hàm số sơ cấp cơ bản, ĐH một bên, ĐH cấp cao, mở rộng đạo hàm của hàm số nhiều biến số.

Nhận xét :

- Theo giáo trình này kí hiệu $\Delta x, \Delta y$ không được đưa vào định nghĩa đạo hàm.
- ĐH bên trái và bên phải được định nghĩa qua giới hạn một bên và không đưa ra kí hiệu.
- Có mở rộng khái niệm : ĐH của hàm số phức.

1.1.4. Giáo trình A FIRST COURSE IN CALCULUS của Serge Lang (Springer, 5th Edition, 1998).

Kí hiệu là [2]

Về định nghĩa Đạo hàm của hàm số một biến

“ Giới hạn $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, nếu có, được gọi là đạo hàm của hàm số f tại x và kí hiệu là

$f'(x)$. Vậy $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ” (chương III, Trang 40)

Nhận xét :

- Giáo trình này cũng đưa ra kí hiệu $\frac{df}{dx} = f'(x)$
- Không đưa vào kí hiệu $\Delta x, \Delta y$ trong định nghĩa đạo hàm

- Khái niệm đạo hàm một bên cũng không đưa ra kí hiệu mà chỉ xét dựa vào giới hạn một bên của

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Chẳng hạn trong Ví dụ 4 , trang 42

Tìm đạo hàm bên phải và bên trái của hàm số $f(x) = |x|$ tại $x = 0$.

Trong lời giải tác giả trình bày như sau :

Đạo hàm bên phải tại $x = 0$ là giới hạn $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$.

Tương tự có đạo hàm bên trái là giới hạn $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$.

1.1.5. Giáo trình Mathematical Analysis của A.F. Bermant, I.G. Aramanovich (Mir Publishers - Moscow, second Edition, 1979). Kí hiệu là: **[3]**

Về định nghĩa Đạo hàm của hàm số một biến:

Giáo trình này đưa ra bài toán tìm vận tốc tức thời của một chất điểm.

Đưa vào khái niệm và kí hiệu số gia của biến số và số gia hàm số và định nghĩa đạo hàm của hàm số

$y = f(x)$ là giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ và kí hiệu là $f'(x)$

Như vậy $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Sau đó xây dựng và chứng minh các qui tắc tính ĐH, Hàm số đạo hàm, ĐH của hàm số hợp và hàm nghịch đảo, ĐH các hàm số sơ cấp cơ bản, ĐH các hàm lượng giác ngược(tr.136), ĐH hàm ẩn(tr.141), ĐH theo tham số(tr. 147), Phương trình tiếp tuyến(có ví dụ về lập PT tiếp tuyến Elip trang 150).

Khái niệm vi phân : thiết lập công thức $dy = f'(x)dx$.

Khái niệm ĐH một bên : **[3]** xây dựng như sau : “ giới hạn trái và giới hạn phải của tỉ số

$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tại x_0 gọi là đạo hàm bên trái hay bên phải của hàm số

$y = f(x)$. Tức là khi $x \rightarrow x_0, x > x_0$ thì có ĐH bên phải và khi $x \rightarrow x_0, x < x_0$ có ĐH bên trái ” (tr.163).

Xây dựng công thức gần đúng $f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$ (tr. 163).

Tiếp theo là khái niệm ĐH và vi phân cấp cao.

1.2. Đạo hàm trên phương diện công cụ

1.2.1. Giáo trình [4]

❖ Hàm số một biến số

Ứng dụng Các định lý về giá trị trung bình

Trước hết trong [4] có đưa ra và chứng minh các định lý về giá trị trung bình

Định lý Fermat: “ Nếu hàm số $f : (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ đạt cực trị tại $c \in (a;b)$ và nếu f khả vi tại c thì $f'(c) = 0$ ”.

Định lý Rolle : “ Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trong khoảng đóng $[a;b]$ và khả vi trong khoảng mở $(a;b)$; giả sử $f(a) = f(b)$ khi đó tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = 0$ ”.

Định lý Lagrange: “ Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trong khoảng đóng $[a;b]$ và khả vi trong khoảng mở $(a;b)$, khi đó tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ ”.

Công thức Taylor : “ Nếu hàm số $f(x)$ xác định có đạo hàm đến cấp n liên tục trong khoảng đóng $[a;b]$, có đạo hàm cấp $(n+1)$ lần trong khoảng mở $(a;b)$ thì với bất kì $c \in (a;b)$ luôn có

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{c})}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Với $\bar{c}$ là một số nằm giữa x và c ”

Khai triển Mac Laurin : cho $c = 0$ trong công thức Taylor ta có

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{với } 0 < \theta < 1$$

Từ đó nêu ra các ứng dụng

- Khử dạng vô định bằng cách dùng qui tắc De L'Hospital

“ Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ xác định, khả vi tại lân cận $x = a (a \in \mathbb{R})$, có thể trừ tại $x = a$. Nếu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \quad g'(x) \neq 0 \text{ ở lân cận } x = a$$

$$\text{Và nếu } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ thì } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A ”$$

- Khảo sát sự biến thiên của hàm số dựa vào định lý

“Cho hàm số f xác định, liên tục trong khoảng đóng hữu hạn $[a;b]$ và khả vi trong khoảng mở $(a;b)$, khi đó: điều kiện cần có và đủ để $f(x)$ tăng (giảm) trong $[a;b]$ là $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in (a;b)$ ”

Cụ thể hơn là ứng dụng để : chứng minh bất đẳng thức, tìm cực trị hàm số.

- Xấp xỉ một hàm số thực bằng các đa thức

- Xây dựng khái niệm hàm số lồi, hàm số lõm, các bất đẳng thức lồi như bất đẳng thức Jensen, Holder, Minkowski
- Khảo sát hàm số và vẽ đồ thị hàm số
- Khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số
- Khảo sát đường cong trong hệ tọa độ cực
- Giải phương trình $f(x) = 0$ theo phương pháp Newton(phương pháp tiếp tuyến)

Mô tả phương pháp Newton

Nếu hàm số f xác định, liên tục trong $[a;b]$ và khả vi trong $(a;b)$ ngoài ra nếu $f(a).f(b) < 0$ và $f'(x)$ không đổi dấu trong khoảng $(a;b)$, khi đó tồn tại duy nhất một nghiệm $x = \alpha$ của phương trình $f(x) = 0$.

Thủ tục lặp dưới đây cho cách tìm nghiệm xấp xỉ nghiệm $x = \alpha$.

Chọn $x_0 \in (a;b)$, tính $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Nếu $f'(x), f''(x)$ liên tục, không đổi dấu trong $(a;b)$ thì $\{x_n\}$ hội tụ về α và chọn x_0 sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với $f''(x)$: nếu $f'(x).f''(x) < 0$ (> 0) thì $\{x_n\}$ đơn điệu tăng (giảm).

❖ Hàm số nhiều biến số

- Tìm cực trị của hàm nhiều biến
- Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số nhiều biến
- Tìm công thức liên hệ giữa các đại lượng biến thiên phụ thuộc nhau
- Tìm sai số trong tính gần đúng
- Xây dựng hình học vi phân
- Giải các phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân
- Xây dựng tích phân kép, tích phân bội, tích phân đường, tích phân mặt
- Xây dựng lý thuyết trường (thường gặp trong vật lý và kỹ thuật): trường vô hướng, trường vector.

1.2.2. Giáo trình [5]

Trong [5] phần các định lý về giá trị trung bình chỉ có *Định lý Lagrange*, *Công thức Taylor* và công thức *Khai triển Mac Laurin*.

Các ứng dụng được đưa ra giống như [4] và có bổ sung thêm

- Chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất

1.2.3. Giáo trình [1]

Các ứng dụng

- Quy tắc L'Hospital và ứng dụng quy tắc này tìm các giới hạn hàm số
- Công thức Taylor và ứng dụng xấp xỉ các hàm số bằng hàm đa thức
- Vi phân của hàm vectơ nhằm xây dựng hình học vi phân
- Xây dựng tích phân Riemann - Stieltjes

1.2.4. Giáo trình [3]

Trong giáo trình này cũng giới thiệu định lý Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, quy tắc L'Hospital, Công thức Taylor, khai triển Mac laurin, đạo hàm hàm số phức, vi phân của độ dài cung

- Lập phương trình tiếp tuyến
- Cực trị hàm số
- Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số(trong đó rất nhiều bài toán ứng dụng trong vật lý, chẳng hạn như các bài toán max, min của chiều dài, vận tốc, gia tốc,...)
- Tìm độ dài cung, đường cong
- Xấp xỉ nghiệm các phương trình
- Tính gần đúng nhờ vi phân
- Xây dựng tích phân và các ứng dụng của tích phân

1.3. Kết luận

1.3.1 . Về vai trò đối tượng nghiên cứu của khái niệm đạo hàm

- Trước khi xây dựng khái niệm đạo hàm thì các giáo trình đã xây dựng một cách chặt chẽ về khái niệm giới hạn hàm số và hàm số liên tục(theo ngôn ngữ ε, δ)
- Định nghĩa đạo hàm của hàm số trong các giáo trình trên có hai hình thức:

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \phi(t) \text{ với } \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (a < t < b, t \neq x)$$

$$\text{Hay: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Định nghĩa đạo hàm có quan hệ mật thiết với các khái niệm giới hạn hàm số, hàm số liên tục , khái niệm vô cùng bé.
- Khái niệm đạo hàm bên trái và bên phải được định nghĩa qua giới hạn một bên và có thể không cần đưa ra kí hiệu.
- Khái niệm hàm số đạo hàm đều được các giáo trình trên đưa vào.
- Khái niệm đạo hàm còn được các giáo trình mở rộng cho hàm số nhiều biến, hàm số biến số phức.

1.3.2. Về vai trò công cụ của khái niệm đạo hàm

Xây dựng đầy đủ các định lý về giá trị trung bình, qui tắc L'Hospital, công thức Taylor và công thức Khai triển Mac Laurin. Do đó việc ứng dụng đạo hàm trong các giáo trình nêu trên rất đa dạng và phong phú. Những ứng dụng đó là:

Đối với Hàm một biến số

- ✓ Lập phương trình tiếp tuyến
- ✓ Khảo sát sự biến thiên của hàm số (tìm cực trị, chứng minh bất đẳng thức, chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất,...)
- ✓ Khảo sát hàm số và vẽ đồ thị hàm số
- ✓ Khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số
- ✓ Khảo sát đường cong trong hệ tọa độ cực
- ✓ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số(trong đó giải quyết nhiều bài toán trong vật lý, hóa học và nhiều bài toán thực tiễn khác)
- ✓ Tính giới hạn hàm số bằng cách dùng qui tắc De L'Hospital
- ✓ Xấp xỉ một hàm số thực bằng các đa thức
- ✓ Tính gần đúng các giá trị nhờ vi phân
- ✓ Tìm độ dài cung, đường cong
- ✓ Xấp xỉ nghiệm các phương trình
- ✓ Xây dựng khái niệm tích phân

Đối với Hàm số nhiều biến số

- ✓ Tìm cực trị của hàm nhiều biến
- ✓ Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của hàm số nhiều biến
- ✓ Tìm công thức liên hệ giữa các đại lượng biến thiên phụ thuộc nhau
- ✓ Tìm sai số trong tính gần đúng
- ✓ Xây dựng hình học vi phân
- ✓ Giải các phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân
- ✓ Xây dựng tích phân kép, tích phân bội, tích phân đường, tích phân mặt
- ✓ Xây dựng lý thuyết trường (thường gặp trong vật lý và kỹ thuật): trường vô hướng, trường vector

Chương 2: MỐI QUAN HỆ THỂ CHẾ VỚI KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

2.1. Phân tích mối quan hệ thể chế với khái niệm đạo hàm (SGK chương trình chuẩn lớp 11, 12 hiện hành, kí hiệu lần lượt là: **SGKC11, SGKC12**)

2.1.1. Phân tích về việc xây dựng lý thuyết của bộ **SGKC11, SGKC12**

Chúng tôi chỉ chọn phân tích những nội dung cần thiết cho việc nghiên cứu của luận văn. Phân tích gồm hai phần: Đạo hàm và Ứng dụng của đạo hàm.

2.1.1.1. Đạo hàm (SGKC11. tr146- 177)

❖ Định nghĩa Đạo hàm

“Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc

$y'(x_0)$. Tức là: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.”

Sau đó đưa vào kí hiệu $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của đối số tại x_0 và $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Nhận xét:

- Khái niệm số gia của đối số, số gia của hàm số (cũng như các kí hiệu Δx , Δy) là những khái niệm khó đối với HS. Về bản chất, Δx là một số thực bất kì, miễn là thỏa mãn điều kiện: $x_0 + \Delta x$ thuộc vào khoảng xác định đang xét của hàm số. Ngoài ra Δx là một kí hiệu chứ không phải là tích Δ nhân với x , nó không phụ thuộc vào biến số x và có thể thay thế bởi bất kì kí hiệu nào như h , hay $k, \dots$. Chẳng hạn, có thể định nghĩa $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (các giáo trình đại học [5], [2] nêu trong chương 1 định nghĩa theo cách này).

- **SGKC11** chỉ đưa ra kí hiệu Δx , Δy mà không có những lưu ý về các kí hiệu này. Vì vậy, HS có thể viết kí hiệu này hoàn toàn máy móc mà không quan tâm đến ý nghĩa của nó.

❖ Về tính ĐH bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm $y'(x_0)$ cần thực hiện 3 bước

1) Cho x_0 số gia Δx và tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

2) Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

3) Tìm giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Nhận xét:

- Đối với HS việc tính đạo hàm bằng định nghĩa chẳng qua là việc tính các giới hạn. HS chỉ quan tâm đến giới hạn của tỉ số số gia mà không hiểu rõ bản chất của giới hạn đó.

- Khi tính DH $y'(x_0)$ của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ bằng định nghĩa, HS thường tính giới

hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ chứ không dùng giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Có thể giải thích điều này bởi các lí

do sau : kí hiệu $\Delta x, \Delta y$ là một kí hiệu tương đối lạ, HS không hình dung được sự di động của

x đến x_0 và do đó khó sử dụng, giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ đã được HS tiếp xúc và tính thường

xuyên trong phần giới hạn hàm số, đặc biệt khi cho hàm số dạng có nhiều biểu thức thì đối

với HS việc tính DH tại x_0 theo giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ là dễ thực hiện hơn so với giới

hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

❖ Đạo hàm một bên: **SGKC11** đã bỏ khái niệm này (chỉ đưa vào bài đọc thêm trang 154, 155)

Nhận xét:

Theo chúng tôi, việc không xây dựng đạo hàm một bên không ảnh hưởng lớn đến các nội dung khác.

Khi phải chứng minh : Hàm số không có đạo hàm tại một điểm nào đó, có thể trình bày trực tiếp thông qua các giới hạn một bên.

❖ Đạo hàm trên một khoảng

“Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó”.

Nhận xét:

- Khái niệm “hàm số đạo hàm” đã được đưa vào trang 153, **SGKC11**

“Hàm số $f' : (a; b) \rightarrow R$

$x \mapsto f'(x)$ gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$

kí hiệu là y' hay $f'(x)$ ”.

- Hàm số đạo hàm ít được chú trọng trong **SGKC11**. Khái niệm này chỉ được sử dụng để xây dựng đạo hàm bậc cao ở lớp 11 và chứng minh bất đẳng thức ở lớp 12.

❖ Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

SGKC11 thừa nhận Định lí: “Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 , thì nó liên tục tại điểm đó”.

SGK đưa ra các chú ý

a) Định lí trên tương đương với khẳng định: Nếu hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.

b) Mệnh đề đảo lại không đúng. Một hàm số liên tục tại một điểm x_0 , có thể không có đạo hàm tại điểm đó.

Sau đó đưa ra ví dụ. Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Hàm số này liên tục tại $x = 0$ nhưng không

có đạo hàm tại điểm đó. SGK cũng nhận xét rằng đồ thị của hàm số này là một đường liên, nhưng bị “gãy” tại điểm $O(0;0)$.

Nhận xét :

- Trong ví dụ cũng không giải thích rõ: tại sao hàm số đã cho liên tục tại $x = 0$, cũng như tại sao hàm số không có đạo hàm tại điểm đó?

- Khái niệm đồ thị của một hàm số bị “gãy” chưa được định nghĩa.

❖ Tiếp tuyến của đường cong phẳng

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường cong (C). Giả sử (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $M_0(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Kí hiệu $M(x; f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C). Đường thẳng M_0M là một cát tuyến của (C). Khi $x \rightarrow x_0$ thì $M(x; f(x))$ di chuyển tới điểm $M_0(x_0; f(x_0))$. Giả sử cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn, kí hiệu M_0T thì M_0T được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0 . Điểm M_0 được gọi là tiếp điểm .

Nhận xét

- SGK cũng chỉ xét tiếp tuyến của (C) với (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

- Đưa hệ trục tọa độ vào để xây dựng tiếp tuyến nên khái niệm “ vị trí giới hạn của cát tuyến M_0M khi điểm M chạy trên (C) dần đến điểm M_0 ” được làm rõ thông qua khái niệm giới hạn mà HS đã được học ở chương IV(đây cũng là sự thay đổi lớn so với SGK chương trình chính lí hợp nhất 2000). Như vậy quan niệm về tiếp tuyến là “vị trí giới hạn của cát tuyến” được xác định tường minh hơn.

Cụ thể là:

+ Xét đường cong (C) là đồ thị của một hàm số xác định trên một khoảng nào đó. Điều này cho phép đồng nhất sự chuyển động của điểm M với sự thay đổi hoành độ x_M của nó trên khoảng đang xét.

+ “Vị trí giới hạn” của cát tuyến M_0M khi điểm M chuyển động trên (C) dần đến M_0 là đường thẳng đi qua M_0 và có hệ số góc là $k_0 = \lim_{x_M \rightarrow x_0} k_M$ (trong đó k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M và

$\lim_{x_M \rightarrow x_0} k_M$ phải tồn tại). Tức là : điều kiện cần và đủ để (C) có tiếp tuyến tại điểm M_0 là sự tồn tại của

$\lim_{x_M \rightarrow x_0} k_M$.

Chúng tôi nêu ra câu hỏi như sau:

- Quan niệm về tiếp tuyến vừa được giới thiệu như trên có gây ra những khó khăn gì cho HS trong việc lĩnh hội kiến thức này, vì trước đây quan niệm tiếp tuyến mà các em được biết chỉ là những đặc trưng như “tiếp xúc” hay “có một điểm chung”

(khái niệm tiếp tuyến với đường tròn). GV lựa chọn phương pháp nào để giới thiệu quan niệm mới đã nêu về tiếp tuyến để dạy cho HS?

- Có sự nối khớp nào giữa hai khái niệm tiếp tuyến với đường tròn và khái niệm tiếp tuyến với đường cong không ?

- Khái niệm tiếp tuyến như là “vị trí giới hạn của cát tuyến” được HS hiểu như thế nào? Việc dựng tiếp tuyến với một đường cong tại một điểm được các em tiến hành ra sao?

- SGK11 chỉ xét tiếp tuyến của đường cong trong trường hợp đường cong là đồ thị của một hàm số, điều này có được GV và HS quan tâm đến?

❖ Vi phân

Định nghĩa

“ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a;b)$. Giả sử Δx là số gia của x . Ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ (hoặc $y'\Delta x$) là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx và kí hiệu là dy hoặc $df(x)$, tức là $dy = y'\Delta x$ hoặc $df(x) = f'(x)\Delta x$ ”.

Áp dụng định nghĩa trên cho $y = x$ thì $dx = (x)'\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x$

Vì vậy có $dy = y'dx$ hoặc $df(x) = f'(x)dx$

Sau đó là Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng. SGK đưa ra công thức

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (*)$$

Và gọi là công thức gần đúng đơn giản nhất.

Nhận xét

-Vi phân của hàm số là một khái niệm khó.

-HS không chú ý nhiều đến khái niệm này vì cho rằng nó chỉ dùng để tính gần đúng, mà trong chương trình việc tính gần đúng không được thể chế quan tâm.

-HS có thể đặt câu hỏi :tại sao tổng quát lại có $dx = \Delta x$ (vì mới chỉ dựa trên hàm số $y = x$ để suy ra điều đó).

-Trong công thức (*): $f'(x_0)\Delta x$ là vi phân của hàm số f tại x_0 , khi cố định x_0 đại lượng này phụ thuộc tuyến tính vào Δx . HS lầm tưởng vi phân của hàm số tại một điểm là một số không đổi.

-Khi đưa ra một công thức gần đúng thì điều quan trọng đặt ra là công thức đó cho kết quả chính xác đến mức nào? (sai số mắc phải trong kết quả sẽ là bao nhiêu?). **SGKC11** cũng không đề cập đến điều đó.

-Trong công thức (*) thì $f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến tại x_0 . Trong thực tế thì HS có nhận biết được ý nghĩa hình học của vi phân không?.

-GV cũng ít quan tâm đến vi phân cũng như ứng dụng của vi phân vào việc tính gần đúng.

KẾT LUẬN

➤ Các bài toán dẫn đến khái niệm ĐH trong **SGKC11** có vai trò rất mờ nhạt trong việc hình thành và lĩnh hội khái niệm về ĐH của HS. Khi cho các bài toán tương tự như các bài toán dẫn đến khái niệm ĐH đã được đưa vào các SGK thì HS lúng túng và không giải quyết được.

➤ Nhiều HS chưa hiểu và nắm vững định nghĩa ĐH.

➤ Kí hiệu $\Delta x, \Delta y$ trong định nghĩa ĐH và kí hiệu dx, dy trong định nghĩa vi phân là những kí hiệu lạ và khó sử dụng đối với HS. Khi tính ĐH của hàm số tại một điểm, HS thường tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ chứ không tính dựa vào giới hạn } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

➤ Trong **SGKC11**, các bài tập chứng minh một hàm số có (hoặc không có ĐH) tại một điểm là rất ít. Kỹ thuật chứng minh một hàm số liên tục tại một điểm nhưng không có ĐH tại đó không được SGK nêu một cách rõ ràng.

➤ HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số đã cho là có ĐH hay không mà chỉ việc tính ĐH.

➤ Trong **SGKC11** có sự thay đổi về khái niệm tiếp tuyến so với SGK chỉnh lí 2000.

➤ Mối liên hệ giữa hệ số góc của tiếp tuyến và việc tính gần đúng nhờ vi phân có vai trò rất mờ nhạt.

➤ Sự nối khớp giữa khái niệm ĐH và các khái niệm giới hạn hàm số, hàm số liên tục cũng chưa được quan tâm trong chương trình và SGK mới.

2.1.1.2. Ứng dụng của đạo hàm (SGKC12. tr4- 47)

❖ SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

- Việc khảo sát tính đơn điệu của hàm số trong **SGKC12** được mở rộng trên K (khoảng, đoạn, nửa khoảng; **SGKCL12** chỉ xét trên khoảng).

-**SGKC12** bỏ định lí Lagrăng, chỉ nêu định lí điều kiện đủ của tính đơn điệu và không chứng minh (Định lý Lagrăng đưa vào bài đọc thêm trang 10).

- Bỏ định nghĩa về điểm tới hạn. Nhưng trong qui tắc xét tính đơn điệu của hàm số cũng đã ngầm đưa khái niệm này vào.

- Đưa vào phần lý thuyết về sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để chứng minh bất đẳng thức (không có trong phần lý thuyết, chỉ có ở sách bài tập SGKCL12).

- Khi xét tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên K (khoảng, đoạn, nửa khoảng). HS không có trách nhiệm kiểm tra tính liên tục và có đạo hàm trên K

Chẳng hạn: + Bài 4(trang 10/SGKCL12) Chứng minh hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên $(0;1)$ và nghịch biến trên $(1;2)$

Lời giải đề nghị của SGK đã bỏ qua việc xét tính liên tục trên đoạn $[0;2]$ và có đạo hàm trên $(0;2)$.

❖ CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU

- định nghĩa lân cận của một điểm không được nêu một cách tường minh, tuy nhiên nó cũng được đưa vào ngầm ẩn $(x_0 - h; x_0 + h)$ chính là một lân cận của điểm x_0 .

- Phân biệt rõ các yêu cầu: tìm cực trị của hàm số, tìm các điểm cực trị của hàm số và tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số. Điều này có thể làm HS gặp khó khăn khi phân biệt các yêu cầu nêu trên.

❖ Giá Trị Lớn Nhất Và Giá Trị Nhỏ Nhất Của Hàm Số

- GTNN và GTLN của hàm số trên một khoảng không được nêu thành bài toán tổng quát cũng như phương pháp giải mà chỉ giới thiệu thông qua hoạt động và ví dụ.

- Trong **SGKCL12**, bảng biến thiên được điền đầy đủ tất cả các “chỉ số”, kể cả các giá trị vô cực và tại vô cực của y .

- **SGKCL12** có ví dụ bằng cách dùng đồ thị để nhận xét và tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn(đây là điểm mới so với **SGKCL12**).

- Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn $[a;b]$ chỉ áp dụng cho các hàm số liên tục trên đoạn ấy. Các bài tập trong **SGKCL12** và **SBTC12** đều cho các hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ nên HS không cần kiểm tra điều này và chỉ việc sử dụng quy tắc để giải.

- Chúng tôi cho rằng, khi học kiến thức về tìm GTLN và GTNN của một hàm số (có ứng dụng đạo hàm) HS thường mắc sai lầm khi nhầm lẫn giữa giá trị cực trị và GTLN; giá trị cực tiểu và GTNN (khi sử dụng bảng biến thiên).

❖ TÍNH LỖI, LỖM VÀ ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ

SGKCL12 không đưa vào giảng dạy chính thức (chỉ đưa vào bài đọc thêm trang 24 đến 27)

Việc không học về tính lỗi lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số có thể làm cho HS vẽ đồ thị không chính xác, đặc biệt tại các vị trí cung lõm, cung lõm và điểm uốn.

❖ TÌM NGUYÊN HÀM

Định nghĩa nguyên hàm

“ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (khoảng, đoạn, nửa khoảng)

Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K ”

So với **SGKCL12** thì trong phần Tìm nguyên hàm có những thay đổi chính là:

Phương pháp tính nguyên hàm được phát biểu tường minh gồm có : phương pháp đổi biến số và nguyên hàm từng phần. Hai phương pháp này được nêu thông qua hai định lý sau

Định lý 1(dùng cho phương pháp đổi biến số)

“ Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C ”$$

Định lý 2 (dùng cho phương pháp nguyên hàm từng phần)

“ Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx ”$$

Nhận xét

- Tìm nguyên hàm của một hàm số là thực hiện quá trình ngược với tìm ĐH của một hàm số. ĐH trở thành công cụ trong bài toán tìm nguyên hàm.

- Phương pháp tính nguyên hàm được phát biểu tường minh gồm có : phương pháp đổi biến số và nguyên hàm từng phần.

- SGK12 thừa nhận định lý 3

“ Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K ”

Trong các ví dụ và bài tập được SGK đưa ra thì việc kiểm tra hàm số đã cho có nguyên hàm không được tiến hành. Điều này dẫn đến, khi tính nguyên hàm HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số đã cho có nguyên hàm hay không, mà chỉ việc dùng các kỹ thuật đã học để tính nguyên hàm.

❖ TÍNH TÍCH PHÂN

Định nghĩa tích phân

“ Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$) của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta còn dùng kí hiệu $F(x)|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$

Vậy $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) ”$

Tương tự việc tìm nguyên hàm của một hàm số, có hai phương pháp tính tích phân đó là : đổi biến số và tích phân từng phần

Phương pháp tính tích phân đổi biến số dựa vào định lý sau

“ Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có ĐH liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha;\beta]$.

Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt ”$$

Phương pháp tính tích phân từng phần dựa vào định lý sau

“ Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Hay $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$ ”

Nhận xét

- Về mặt lịch sử, sự ra đời của phép tính tích phân xuất phát từ việc tìm giới hạn của các tổng tích phân. Tuy nhiên vì lí do sự phạm **SGKC12** đã định nghĩa tích phân thông qua nguyên hàm.

- Từ định nghĩa tích phân, chúng ta thấy rằng để tính được tích phân $\int_a^b f(x)dx$ việc quan trọng nhất là phải tìm được nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$. Sau đó áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (Công thức Newton- Leibniz).

- Khi tính tích phân thì hàm số dưới dấu tích phân phải liên tục trên đoạn lấy tích phân. Nhưng điều này không được kiểm tra trong tất cả các ví dụ và bài tập mà SGK12 đưa ra. Như vậy, HS không có trách nhiệm kiểm tra điều kiện khả tích mà chỉ việc dùng các phương pháp giải đã được học để tính tích phân.

KẾT LUẬN

- Việc xét tính đơn điệu của hàm số trong **SGKC12** được mở rộng trên K(khoảng, đoạn, nửa khoảng). Từ đó tạo thuận lợi cho việc đưa một cách tường minh vào SGK KNV “chứng minh bất đẳng thức có sử dụng đạo hàm”

(trong **SGKCL12** thì KNV này chỉ được giới thiệu trong SBT ở phần bài tập làm thêm)

- Các ví dụ và bài tập về hàm số không có ĐH tại x_0 nhưng vẫn đạt cực trị tại đó là rất ít. Nên HS có thể cho rằng: Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó ĐH của hàm số đó bằng 0.
- Khi học kiến thức về tìm GTLN và GTNN của một hàm số (có ứng dụng ĐH) HS thường mắc sai lầm khi nhầm lẫn giữa giá trị cực đại và GTLN; giá trị cực tiểu và GTNN (khi sử dụng bảng biến thiên).
- SGK chương trình chuẩn, khi tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một đoạn có đưa ra kĩ thuật giải sử dụng đồ thị. Điều này có thực sự là lời giải mà thể chế mong muốn? Trong thực tế thì HS có sử dụng kĩ thuật này không? Và GV sẽ “phản ứng” ra sao khi HS giải theo kĩ thuật này?
- Việc không học về tính lồi lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số có thể làm cho HS vẽ đồ thị không chính xác, đặc biệt tại các vị trí cung lồi, cung lõm và điểm uốn.

➤ Thiếu thận trọng khi lập bảng biến thiên

Nhiều HS quên rằng bảng biến thiên là sự tổng kết, tóm tắt các kết quả khảo sát hàm số để nhìn vào đó thấy rõ sự biến thiên của hàm số và có thể vẽ đồ thị chính xác. Họ thường làm việc này như một thủ tục phải làm chứ không hiểu bản chất nêu trên.

➤ Trong lịch sử, sự ra đời của tích phân xuất từ việc tìm giới hạn của các tổng tích phân. Tuy nhiên, SGK12 đã định nghĩa tích phân qua nguyên hàm, đây là một sự chuyển đổi didactic. Điều này làm cho HS không hiểu nghĩa của tích phân.

➤ Trong bài toán tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$, việc tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ là việc then chốt. Bản chất của việc tìm nguyên hàm của một hàm số là quá trình ngược với quá trình tìm ĐH. HS có nhận ra hay không mối quan hệ giữa ĐH và tích phân? Các em có gặp khó khăn gì khi tiếp thu khái niệm tích phân? Để tạo ra sự nối khớp giữa hai khái niệm này thì GV làm thế nào khi giảng dạy?

➤ Ngoài ra, khi tính tích phân HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số dưới dấu tích phân có khả tích hay không mà chỉ việc dùng các kỹ thuật để tính nó. Việc tính tích phân được HS tiến hành một cách máy móc theo phương pháp mà họ không hiểu ý nghĩa của tiến trình.

➤ Việc ứng dụng tích phân vào giải các bài toán thực tế là rất hạn chế ở HS.

2.1.2. Các tổ chức toán học liên quan đến khái niệm đạo hàm trong SGK11, SGK12

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_1 :** “ Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa ”

Kỹ thuật τ_1 :

- Cho x_0 số gia Δx và tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

- Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Tìm giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Khi đó $y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Hoặc dùng **kỹ thuật τ'_1**

- Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ bằng một hằng số thì kết luận hằng số đó là ĐH của hàm số tại

x_0 . Nếu giới hạn trên không tồn tại thì hàm số không có ĐH tại x_0 .

Công nghệ θ_1 : định nghĩa đạo hàm

“Cho hàm số $y = f(x)$, xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc

$y'(x_0)$. Tức là: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ „

Lý thuyết Θ_1 : giới hạn hàm số

Ví dụ 1. [SGKC11, tr.156]

Tính đạo hàm của các hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ tại điểm $x_0 = 2$

Lời giải của SGK11

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 2$. Ta có

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = -\frac{\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2(2 + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2 + \Delta x)} = -\frac{1}{4}. \quad \text{Vậy } f'(2) = -\frac{1}{4}$$

Nhận xét

- Ví dụ trên đưa ra ngay sau khi giới thiệu qui tắc tính DH bằng định nghĩa và trong ví dụ này đã tính DH của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 = 2$ dựa vào giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Trong SGK11, các ví dụ khác và các bài tập tính DH của

một hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 đều được tính theo $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- Theo định nghĩa DH thì kĩ thuật τ'_1 cũng có thể dùng để giải quyết KNV T_1
- Chúng tôi cũng cho rằng HS có thể gặp khó khăn trong việc trình bày lời giải trên vì kí hiệu Δx , Δy là các kí hiệu khó sử dụng đối với HS. Khi phải tính DH bằng định nghĩa của hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_0$, có thể HS sẽ trình bày lời giải của mình mà không sử dụng kí hiệu Δx , Δy . Tức là tính trực tiếp $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ mà không tính theo giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kiểu nhiệm vụ con của T_1 :

+ **Kiểu nhiệm vụ con** T_{1a} : “chứng minh hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ ”

Bài 4. [SGKC11, tr.156]

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$

Lời giải của **SGV, tr 160**

$$\text{Ta có } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ có ĐH tại $x = 2$ và $f'(2) = 2$

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_2 :** “Tìm đạo hàm y' của hàm số $y = f(x)$ bằng công thức”

Kĩ thuật τ_2 :

- Dùng các công thức tính đạo hàm

Công nghệ θ_1 : định nghĩa đạo hàm

Lý thuyết Θ_1 : giới hạn hàm số

Ví dụ 2. [SGKC11, tr.160]

Tìm đạo hàm của các hàm số $y = x^3(\sqrt{x} - x^5)$

Lời giải của SGKC11

$$\begin{aligned} \text{Ta có } [x^3(\sqrt{x} - x^5)]' &= (x^3)'(\sqrt{x} - x^5) + x^3(\sqrt{x} - x^5)' \\ &= 3x^2(\sqrt{x} - x^5) + x^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 5x^4\right) \\ &= 3x^2\sqrt{x} + x^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 8x^4\right) \end{aligned}$$

Nhận xét

- Ví dụ trên không đề cập đến việc kiểm tra hàm số đã cho có ĐH hay không? HS cứ thực hiện đúng theo các qui tắc và công thức tính ĐH đã học và không có trách nhiệm kiểm tra về sự tồn tại của các ĐH đang tính.

Các kiểu nhiệm vụ con của T_2

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{2a} :** “Tìm vận tốc, gia tốc tức thời của chuyển động có phương trình $s = s(t)$ tại thời điểm $t = t_0$ ”

Bài 8. [SGKC11, tr.177]

Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t$

(t được tính bằng giây, s được tính bằng mét).

a) Tính vận tốc của chuyển động tại $t = 2s$

b) Tính gia tốc của chuyển động tại $t = 3s$

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{2b} :** “chứng minh một hệ thức chứa đạo hàm cấp 1 của hàm số $y = f(x)$ ”.

Bài 3. [SBTC11, tr.194]

Cho $\varphi(x) = \frac{8}{x}$. Chứng minh rằng $\varphi'(-2) = \varphi'(2)$

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{2c} :** “*Tính giá trị một biểu thức chứa đạo hàm cấp 1, 2 của hàm số cho trước*”.

Bài 3. [SGKC11, tr.176]

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$. Tính $f(3) + (x-3)f'(3)$

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{2d} :** “*Giải phương trình $f'(x) = 0$* ”

Bài 7. [SGKC11, tr.169]

Giải phương trình $f'(x) = 0$ biết rằng $f(x) = 3\cos x + 4\sin x + 5x$

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{2e} :** “*Giải bất phương trình $f'(x) > 0$* ”

Bài 2. [SGKC11, tr.168]

Giải các bất phương trình sau

$$\text{a) } y' < 0 \text{ với } y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} \qquad \text{b) } y' \geq 0 \text{ với } y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_3 :** “*Chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại điểm x_0* ”

Có hai kĩ thuật

Kĩ thuật τ_3^1 : chứng minh hàm số không liên tục tại x_0

Công nghệ θ_3 : định lí

“Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại điểm đó”.

Lý thuyết Θ_1 : giới hạn hàm số.

Bài 4. [SGKC11, tr.156]

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$

Lời giải của SGK, tr. 160

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x)^2 = 0$

Vậy hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$. Từ đó suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Nhận xét

- Bài toán cho dạng hàm số bị gián đoạn tại $x = 0$ nên việc chứng minh hàm số này không có ĐH thực chất chỉ là việc chứng minh hàm số gián đoạn tại một điểm. Kĩ thuật τ_3^1 đã được xây dựng trước đó một cách rõ ràng.

➤ Tuy nhiên, chúng ta cũng thấy rằng kỹ thuật trên là chưa đủ nếu gặp hàm số liên tục tại $x = x_0$ nhưng không có ĐH tại đó.

Kỹ thuật τ_3^2 : “giới hạn một bên”

- Kiểm tra $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ không tồn tại hoặc hai giới hạn trên khác nhau.

Công nghệ θ_1 : định nghĩa đạo hàm.

Lý thuyết Θ_1 : giới hạn hàm số.

Ví dụ 3. [SBTC11, tr.192]

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & ; x \geq 0 \\ (x+1)^2 & ; x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$, nhưng

liên tục tại đó

Lời giải của SBTC11(sơ lược)

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2) = -2$

và giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2) = 2$

vì giới hạn hai bên khác nhau nên không tồn tại giới hạn của tỉ số $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ khi x dần

đến 0. Điều đó chứng tỏ hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1)^2 = 1$ và $f(0) = 1$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

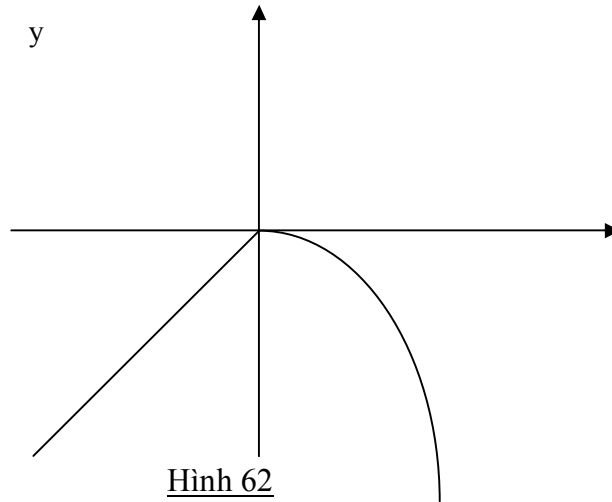
Nhận xét

- Chúng tôi thấy rằng, kỹ thuật τ_3^2 nói trên không được đưa vào **SGKC11**, chỉ xuất hiện trong **SBTC11**. Như vậy, HS có thể sẽ gặp khó khăn khi giải quyết nhiệm vụ trên vì nó không được nêu thành kỹ thuật giải cụ thể mặc dù kỹ thuật τ_3^2 là hoàn toàn có thể thực hiện được ở các HS (bản chất của kỹ thuật này là việc xét sự tồn tại giới hạn của một hàm số tại một điểm).
- Ngoài ra, từ lời giải của SBT chúng tôi đặt ra câu hỏi như sau : Nếu bài toán chỉ yêu cầu chứng minh hàm số không có ĐH tại $x = x_0$ thì HS có thực hiện bước kiểm tra hàm số liên tục tại điểm đó ?

Ngoài hai kĩ thuật trên chúng tôi cũng tìm được ***lời giải thích*** cho ví dụ: hàm số liên tục tại x_0 nhưng không có ĐH tại điểm đó [SGKC11, tr 150]

“ Chẳng hạn, hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Liên tục tại $x=0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó. Ta nhận xét rằng đồ thị của hàm số này là một đường liền, nhưng bị “gãy” tại điểm $O(0;0)$ (h. 62) ”



Hình 62

Chúng tôi đặt ra câu hỏi như sau

- Lời giải thích của SGK cho ví dụ trên phải chăng là một kĩ thuật để giải quyết bài toán : “ chứng minh một hàm số liên tục tại x_0 nhưng không có đạo hàm tại điểm đó ” ?
- Nếu nó là một kĩ thuật thì kĩ thuật này không thỏa đáng, vì khái niệm đồ thị hàm số bị “gãy” tại một điểm là chưa có, hơn nữa tại sao đồ thị hàm số bị gãy tại điểm đó thì hàm số không có ĐH tại điểm đó ?
- Như vậy, nếu gặp bài toán tương tự như trên HS sẽ giải quyết như thế nào? GV sẽ lựa chọn cách nào để giảng dạy cho HS khi nêu bài toán trên ?

✓ ***Kiểu nhiệm vụ T_4*** : “ *Tìm vi phân* của hàm số $y = f(x)$ ”.

Kĩ thuật τ_4 :

- Dùng τ_2 để tính đạo hàm $f'(x)$.
- Sử dụng công thức $df(x) = f'(x)dx$.

Công nghệ θ_4 : định nghĩa vi phân.

Lý thuyết Θ_4 : Định nghĩa đạo hàm.

Ví dụ 1. [SGKC11, tr.170]

Tìm vi phân của các hàm số sau

$$a) y = x^3 - 5x + 1 \quad b) y = \sin^3 x$$

Lời giải của SGK11, tr.170

$$a) y = x^3 - 5x + 1, \quad y' = 3x^2 - 5$$

$$\text{Vậy } dy = d(x^3 - 5x + 1) = y' dx = (3x^2 - 5)dx$$

$$b) y = \sin^3 x, \quad y' = 3\sin^2 x \cos x$$

$$\text{Vậy } dy = d(\sin^3 x) = y' dx = 3\sin^2 x \cos x dx$$

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_5 :** “*Tính gần đúng một giá trị*”

Kỹ thuật τ_5 :

- Chọn hàm số $y = f(x)$ và x_0 ; Δx phù hợp.
- Sử dụng công thức gần đúng $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Công nghệ θ_4 : định nghĩa vi phân.

Lý thuyết Θ_4 : Định nghĩa đạo hàm.

Ví dụ 2. [SGK11, tr.171]

Tính giá trị gần đúng của $\sqrt{3,99}$

$$\text{Giải. Đặt } f(x) = \sqrt{x}, \text{ ta có } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Áp dụng công thức gần đúng với $x_0 = 4$, $\Delta x = -0,01$ ta có

$$f(3,99) = f(4 - 0,01) \approx f(4) + f'(4) \cdot (-0,01)$$

$$\text{Tức là } \sqrt{3,99} = \sqrt{4 - 0,01} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (-0,01) = 1,9975$$

Nhận xét

- Từ lời giải chúng ta thấy việc chọn x_0 , Δx như thế nào cho phù hợp không được SGK đề cập. Điều này có thể gây khó khăn cho HS.
- Vấn đề sai số mắc phải trong kết quả cũng không được **SGK11** chú ý đến.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_{6a} :** “*Viết phương trình tiếp tuyến của (C): $y = f(x)$ tại $M(x_0; f(x_0))$* ”

Kỹ thuật τ_{6a} :

- Tính $f'(x_0)$
- Thay vào phương trình tiếp tuyến $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Công nghệ θ_6 : ý nghĩa hình học của đạo hàm

“ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có ĐH tại $x_0 \in (a; b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó

ĐH của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$

”.

Lý thuyết Θ_4 : Định nghĩa đạo hàm

Ví dụ 2. [SGKC11, tr.152]

Cho parabol $y = -x^2 + 3x - 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = 2$

Lời giải của **SGKC11, tr.152**

Bằng định nghĩa ta tính được $y'(2) = -1$. Do đó hệ số góc của tiếp tuyến là -1 .

Ngoài ra ta có $y(2) = 0$

Vậy phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm $M_0(2; 0)$ là

$$y - 0 = (-1).(x - 2) \text{ hay } y = -x + 2$$

Nhận xét

- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại một điểm là bài toán chủ yếu được **SGKC11** và **SGKC12** đưa ra đối với vấn đề tiếp tuyến.
- **SGKC11** chỉ xây dựng tiếp tuyến của đồ thị hàm số (không có khái niệm tiếp tuyến của một đường cong như **SGKC12**). Điều này có được GV và HS quan tâm đến ?

✓ **Kiểm nhiệm vụ** T_{6b} : “Viết phương trình các đường thẳng có hệ số góc k và tiếp xúc với $(C) : y = f(x)$ ”.

Kỹ thuật τ_{6b} :

- Giải phương trình $k = f'(x)$. Suy ra các hoành độ tiếp điểm là $x_0, x_1, \dots$
- Suy ra phương trình tiếp tuyến $y - y_i = f'(x_i)(x - x_i)$ với $i = 0, 1, \dots$

Công nghệ θ_6 : ý nghĩa hình học của đạo hàm.

Lý thuyết Θ_4 : Định nghĩa đạo hàm.

Bài 6[SGKC11, tr.156]

Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$

Nhận xét :

➤ Trong **SGKC11** chỉ có duy nhất một bài toán thuộc KNV T_{6b} . Đó chính là bài

toán vừa nêu.

- Tuy nhiên SGK cũng không đưa ra kỹ thuật giải mà chỉ cho đáp số của bài toán (trong **SGKCL12** có nêu tường minh kỹ thuật trên). Điều này có gây khó khăn gì cho HS ?

✓ **Kiểm nhiệm vụ T_7 :** “Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ dựa vào bảng biến thiên”

Kỹ thuật τ_7 :

- Tìm TXĐ
- Tính ĐH $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó ĐH bằng 0 hoặc không xác định.
- Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên
- Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến

Công nghệ θ_7 : Dấu hiệu điều kiện đủ của tính đơn điệu của hàm số

“ Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K(khoảng, đoạn, nửa khoảng)

Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K

Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K ”

Lý thuyết Θ_7 : Định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến trên K

“ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$ ”

Ví dụ 3. [SGKC12, tr. 8]

Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

Lời giải của **SGKC12, tr. 8**

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$y' = x^2 - x - 2, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow 19/6$	$\searrow -4/3$	$\nearrow +\infty$	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$

Các kiểu nhiệm vụ con của T_7

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{7a} :** “*Chứng minh hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hay nghịch biến) trên K* ”

Bài 3 [SGKC12, tr.10]

Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{7b} :** “*Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hay nghịch biến) trên K* ”

Bài 5 [SGKC12, tr.45]

Cho hàm số $y = 2x^2 + 2mx + m - 1$

Xác định m sao cho hàm số:

- đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$
- Nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

Kiểu nhiệm vụ con T_{7c} : “*Chứng minh bất đẳng thức dùng đạo hàm*”

Bài 5. [SGKC12, tr.10]

Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $\tan x > x \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$ b) $\tan x > x + \frac{x^3}{3} \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_8 :** “*Tìm cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f(x)$* ”

Có hai kỹ thuật là :

Kỹ thuật τ_8^1 :

- Tìm tập xác định
- Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định
- Lập bảng biến thiên

- Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị

Công nghệ θ_8^1 : Dấu hiệu I

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$ với $h > 0$

Nếu khi x đi qua x_0 , đạo hàm đổi dấu thì điểm x_0 là một điểm cực trị

Ví dụ 2. [SGKC12, tr. 15]

Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 3$

Lời giải của **SGKC12, tr. 15**

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$y' = 3x^2 - 2x - 1, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		$86/27$		2		$+\infty$	
		$-\infty$					

Từ bảng biến thiên suy ra $x = -1/3$ là điểm cực đại, $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho

Và kỹ thuật τ_8^2

- Tìm tập xác định

- Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i (i = 1, 2, \dots)$ là các nghiệm của nó

- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$

- Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i

Công nghệ θ_8^2 : Dấu hiệu II

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với

$h > 0$

- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu

- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại

Ví dụ 4. [SGKC12, tr. 17]

Tìm cực trị của các hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 6$

Lời giải của **SGKC12, tr. 17**

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4); f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$$

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

$$f''(\pm 2) = 8 > 0 \Rightarrow x = -2 \text{ và } x = 2 \text{ là hai điểm cực tiểu}$$

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ là điểm cực đại}$$

Kết luận

$$f(x) \text{ đạt cực tiểu tại } x = -2 \text{ và } x = 2; f_{CT} = f(\pm 2) = 2$$

$$f(x) \text{ đạt cực đại tại } x = 0 \text{ và } f_{CD} = f(0) = 6$$

Các kiểu nhiệm vụ con của T_g

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{ga}** : “*Chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x = x_0$ nhưng vẫn đạt cực trị tại đó*”

Bài 3. [SGKC12, tr.18]

Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{|x|}$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng vẫn đạt cực tiểu tại điểm đó

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{gb}** : “*Tìm m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại hay cực tiểu tại $x = x_0$* ”

Bài 6. [SGKC12, tr.18]

Xác định m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_{9a}** : “*Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a;b)$* ”

Kỹ thuật τ_{9a} : “*dùng bảng biến thiên*”

- Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(a;b)$.
- Dựa vào bảng biến thiên kết luận GTLN, GTNN.

Công nghệ θ_{9a} : Định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng

Ví dụ 1. [SGKC12, tr.19]

Tìm GTNN và GTLN của hàm số $y = f(x) = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Lời giải của **SGKC12, tr. 19**

Trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	-3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số có giá trị cực tiểu duy nhất, đó cũng là GTNN của hàm số

Nhận xét :

- GTNN và GTLN của hàm số trên một khoảng không được **SGKC12** nêu thành bài toán tổng quát cũng như phương pháp giải mà chỉ giới thiệu thông qua ví dụ.
(**SGKCL12** có nêu thành bài toán tổng quát và cách giải)
- Trong **SGKC12**, bảng biến thiên được điền đầy đủ tất cả các “chỉ số”, kể cả các giá trị vô cực và tại vô cực của y.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_{9b}** : “ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ”

Có hai kĩ thuật

Kĩ thuật τ_{9b}^1 : “dùng đồ thị”

- Vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[a; b]$
- Dựa vào đồ thị tìm được GTLN và GTNN của hàm số trên $[a; b]$ đưa ra kết luận: điểm cao nhất của đồ thị trên $[a; b]$ ứng với GTLN và điểm thấp nhất của đồ thị trên đoạn này ứng với GTNN.

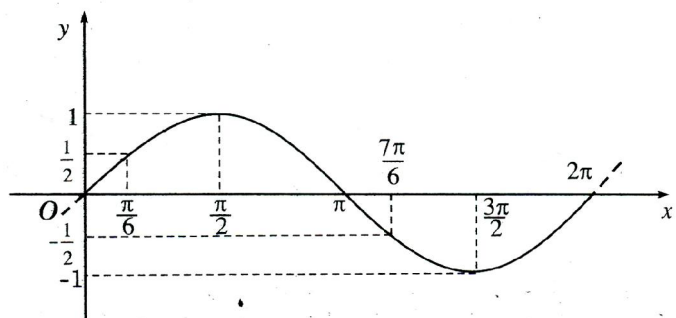
Công nghệ θ_{9b}^1 : Định nghĩa GTLN và GTNN của hàm số.

Lý thuyết Θ_{9b}^1 : Quan hệ thứ tự trong tập **R**.

Ví dụ 2. [SGKC12, tr.20]

Tìm GTNN và GTLN của hàm số $y = \sin x$

- a) trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right]$ b) trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; 2\pi \right]$



Hình 9

Từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$, ta thấy ngay :

a) Trên đoạn $D = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right]$ ta có

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Từ đó $\max_D y = 1, \min_D y = -\frac{1}{2}$

b) Trên đoạn $E = \left[\frac{\pi}{6}; 2\pi \right]$ ta có

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, y(2\pi) = 0$$

Từ đó $\max_E y = 1, \min_E y = -1$

Nhận xét :

- **SGKC12** có đưa ra lời giải bằng cách dùng đồ thị để nhận xét và tìm GTLN, GTNN (đây là điểm mới so với **SGKCL12**).
- Tuy nhiên, chỉ có ví dụ trên và một hoạt động làm theo phương pháp này. Các bài tập tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một đoạn còn lại trong **SGKC12** cũng như **SBTC12** thì không giải theo phương pháp trên.

Và **Kĩ thuật** τ_{9b}^2 : “dùng qui tắc”

- Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định(nhưng $f(x)$ xác định)

- Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$

-Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên

$$\text{Khi đó} \quad M = \max_{[a;b]} f(x) \quad m = \min_{[a;b]} f(x)$$

Công nghệ θ_{9b}^1 : Định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Lý thuyết Θ_{9b}^1 : Quan hệ thứ tự trong tập **R**.

Bài 1. [SGKC12, tr.23]

Tìm GTNN và GTLN của hàm số

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên các đoạn $[-4;4]$ và $[0;5]$

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên các đoạn $[0;3]$ và $[2;5]$

✓ **Kiểu nhiệm vụ** T_{10} : “ Tìm nguyên hàm $\int f(x) dx$ ”

Kiểu nhiệm vụ này có các kỹ thuật

➤ **Kỹ thuật** τ_{10}^1

- Tìm hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$

- Khi đó

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ là hằng số})$$

Công nghệ θ_{10}^1 : Định nghĩa nguyên hàm

“ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (khoảng, đoạn, nửa khoảng)

Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K ”

Ví dụ 4. [SGKC12, tr.95]

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3 \sin x + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Lời giải của **SGKC12, tr. 95**

Với $x \in (0; +\infty)$, ta có

$$\int \left(3 \sin x + \frac{2}{x} \right) dx = \int 3 \sin x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx = -3 \cos x + 2 \ln x + C$$

Nhận xét

+ SGK bỏ qua việc kiểm tra sự tồn tại nguyên hàm của hàm số trên (tức là bỏ qua việc kiểm tra tính liên tục của hàm số trên khoảng đang xét)

+ Việc tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ dựa trên việc tìm một hàm số $F(x)$ có đạo hàm bằng $f(x)$

➤ **Kỹ thuật** τ_{10}^2 “ đổi biến số ”

• Đặt $u = u(x)$

• Biểu thị $f(x)dx$ theo $u = u(x)$ và du sao cho

$$f(x)dx = g(u)du$$

• Tìm nguyên hàm $\int g(u) du$

• Thay $u = u(x)$ vào nguyên hàm $\int g(u) du$ ta được $\int f(x) dx$

Công nghệ θ_{10}^2 là định lý sau

“ Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C ”$$

Lý thuyết Θ_{10}^2 : định nghĩa nguyên hàm.

Ví dụ 8. [SGKC12, tr.99]

Tính $\int \frac{x}{(x+1)^5} dx$.

Lời giải của **SGKC12, tr. 99**

Đặt $u = x + 1$, thì $u' = 1$ và $\frac{x}{(x+1)^5} dx$ được viết thành $\frac{u-1}{u^5} du$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+1)^5} dx &= \int \frac{u-1}{u^5} du = \int \left(\frac{1}{u^4} - \frac{1}{u^5} \right) du = \int u^{-4} du - \int u^{-5} du \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u^4} + C \end{aligned}$$

Thay $u = x + 1$ vào kết quả ta được

$$\int \frac{x}{(x+1)^5} dx = \frac{1}{(x+1)^3} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \right) + C$$

Nhận xét

+ Để áp dụng được kỹ thuật trên thì $u = u(x) = x + 1$ phải có đạo hàm liên tục và $u \neq 0$, điều này không được chú ý đến trong lời giải trên.

➤ **Kỹ thuật** τ_{10}^3 : nguyên hàm từng phần

- Đưa $\int f(x) dx$ về dạng $\int u(x)v'(x) dx$
- $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$
- Tính $\int v(x)u'(x) dx$

Công nghệ θ_{10}^3 : định lý sau

“ Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx ”$$

Lý thuyết Θ_{10}^2 : định nghĩa nguyên hàm.

Ví dụ 9. [SGKC12, tr.100]

Tính $\int x \cos x dx$.

Lời giải của **SGKC12, tr. 100**

Đặt $u = x$ và $dv = \cos x dx$, ta có $du = dx$ và $v = \sin x$

Vậy

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx$$

Hay
$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$$

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_{11}** : “ Tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ ”

Kiểu nhiệm vụ này có các kỹ thuật

➤ **Kỹ thuật τ_{11}^1** : “ Tìm nguyên hàm ”

- Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên $[a;b]$
- Áp dụng công thức Newton – Leibniz

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Công nghệ θ_{11}^1 : Định nghĩa tích phân

“ Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$) của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Ta còn dùng kí hiệu $F(x) \Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$

Vậy
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$
 ”

Ví dụ 2. [SGKC12, tr.105]

1)
$$\int_1^2 2x dx = x^2 \Big|_1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

2)
$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Nhận xét

+ Việc kiểm tra $f(x)$ liên tục trên đoạn lấy tích phân không được nhắc tới. Vì lí do, các hàm số mà **SGKC12** yêu cầu tính tích phân đều liên tục trên đoạn lấy tích phân. Điều này làm cho HS không quan tâm đến điều kiện tồn tại của tích phân mà chỉ việc tính tích phân.

➤ **Kỹ thuật τ_{11}^2** : “ Đổi biến số dạng 1 ”

- Đặt $x = \varphi(t)$, xác định đoạn $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $a \leq \varphi(t) \leq b$
- Biến đổi $f(x)dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = g(t)dt$
- Tìm một nguyên hàm $G(t)$ của $g(t)$
- Tính $I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Kỹ thuật τ_{11}^3 “đổi biến số dạng 2”

- Đặt $u = u(x)$
- Biểu thị $f(x)dx$ theo $u = u(x)$ và du sao cho $f(x)dx = g(u)du$
- Tìm một nguyên hàm $G(u)$ của $g(u)$
- Tính $I = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du = G(u(b)) - G(u(a))$

Công nghệ θ_{11}^2 của hai kỹ thuật τ_{11}^2 và τ_{11}^3 là định lý sau

“Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có ĐH liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha;\beta]$.

Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Lý thuyết Θ_{11}^2 : định nghĩa tích phân

Ví dụ 5. [SGKC12, tr.108] **Kỹ thuật τ_{11}^2**

Tính $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

Lời giải của **SGKC12, tr. 108**

Đặt $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Ta có $x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$

Do đó $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}$

Nhận xét

+ Việc kiểm tra $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ liên tục trên $[0;1]$ cũng như điều kiện hàm số $x =$

$\tan t$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ không được chú ý đến.

+ HS chỉ máy móc thực hiện việc tính tích phân theo phương pháp mà không cần quan tâm đến các điều kiện trên cũng như ý nghĩa của tiến trình thực hiện.

Ví dụ 6. [SGKC12, tr.109] Kỹ thuật τ_{11}^3

$$\text{Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx.$$

Lời giải của **SGKC12, tr. 109**

Đặt $u = \sin x$. Ta có $u' = \cos x$

Khi $x = 0$ thì $u(0) = 0$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\text{Vậy } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

➤ **Kỹ thuật τ_{11}^4** : Tích phân từng phần

- $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$
- Tính $\int_a^b v(x)u'(x)dx$

Công nghệ θ_{11}^4 : định lý sau

“ Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad ”$$

Lý thuyết Θ_{11}^2 : định nghĩa tích phân

Ví dụ 8. [SGKC12, tr.110]

$$\text{Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

Lời giải của **SGKC12, tr. 110**

Đặt $u = x$ và $dv = \sin x dx$, ta có $du = dx$ và $v = -\cos x$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= (-x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= (-x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Các kiểu nhiệm vụ con của **Kiểu nhiệm vụ T_{11}**

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{11a}** : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong

Ví dụ 1. [SGKC12, tr.115]

Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{11b}** : Tính thể tích vật thể

Ví dụ 4. [SGKC12, tr.118]

Tính thể tích khối lăng trụ, biết diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{11c}** : Tính thể tích khối tròn xoay

Ví dụ 5. [SGKC12, tr.120]

Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình này xung quanh trục Ox

+ **Kiểu nhiệm vụ con T_{11d}** : Chứng minh đẳng thức tích phân

Bài 3.15 . [SBT, tr.153]

Giả sử hàm số liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

Bảng 2.1.2: Bảng thống kê các kiểu nhiệm vụ liên quan đến khái niệm đạo hàm trong bộ sách chương trình chuẩn **SGKC11** và **SGKC12**

Kiểu nhiệm vụ		Ví dụ	Bài tập	Bài tập	Tổng bài tập
T_1 và KNV con	τ_1	3	3	3	9
T_2 và KNV con	τ_2	12	18	34	64
T_3	$\tau_3^1 ; \tau_3^2$	1	1	3	5
T_4	τ_4	1	2	7	10
T_5	τ_5	1	0	1	2
T_{6a}	τ_{6a}	1	9	2	12
T_{6b}	τ_{6b}	0	2	4	6
T_7 và KNV con	τ_7	5	8	10	23
T_8 và KNV con	$\tau_8^1 ; \tau_8^2$	6	10	7	23
T_{9a}	τ_{9a}	3	4	6	13
T_{9b}	$\tau_{9b}^1 ; \tau_{9b}^2$	2	1	3	6
T_{10}	$\tau_{10}^1 ; \tau_{10}^2 ; \tau_{10}^3$	9	6	12	27
T_{11} và KNV con	$\tau_{11}^1 ; \tau_{11}^2 ; \tau_{11}^3 ; \tau_{11}^4$	15	14	25	54
Tổng		59	78	117	254

2.1.3. PHÂN TÍCH CÁC TỔ CHỨC TOÁN HỌC VÀ KẾT LUẬN

❖ **Kiểu nhiệm vụ T_1 :** “ Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa ” cùng với KNV con chỉ có 9 bài (trong **SGKC11** có 6 bài).

Trong khi, **Kiểu nhiệm vụ T_2 :** “ Tìm đạo hàm y' của hàm số $y = f(x)$ bằng công thức ” cùng các KNV con của nó chiếm số lượng tương đối lớn : 64 bài.

Điều này cho phép chúng tôi đưa ra kết luận sau : Noosphere quan tâm nhiều đến **Kiểu nhiệm vụ T_2** . Chính vì vậy, đối với HS thì tính ĐH bằng định nghĩa rất ít khi được sử dụng. Định nghĩa ĐH có vai trò rất mờ nhạt đối với HS khi học khái niệm này, mối quan hệ giữa ĐH và giới hạn hàm số được nêu trong định nghĩa ĐH dường như không tồn tại đối với cá nhân HS.

- Khi tính ĐH $y'(x_0)$ của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ bằng định nghĩa, HS thường tính dựa vào

giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ chứ không dùng giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- Khi phải tính ĐH của một hàm số nào đó thì **Kĩ thuật τ_2** (sử dụng công thức tính đạo hàm) được ưu tiên tuyệt đối.

Từ đó, chúng tôi thấy có một qui tắc hợp đồng đối với HS như sau:

RE1: “ Tính đạo hàm của một hàm số là sử dụng các công thức đạo hàm đã có”

❖ Ngoài ra qua việc phân tích OM chúng ta thấy, **Kiểu nhiệm vụ T_3 :**

“*Chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại điểm x_0* ”

cũng rất ít (chỉ có 1 ví dụ và 1 bài tập trong **SGKC11**). Chúng tôi phân tích kĩ ví dụ và bài tập này.

Để nhận xét mệnh đề đảo của định lí : “ Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại

điểm đó”, **SGKC11** trang 150 đã đưa ra ví dụ: hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 0$

nhưng không có đạo hàm tại đó. Ta nhận xét rằng đồ thị của hàm số này là một đường liên, nhưng bị “gãy” tại điểm $O(0;0)$ (**SGKC11** có vẽ đồ thị hàm số kèm theo).

- Bài tập 4. [**SGKC11**, tr.156]

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$

Lời giải đề nghị trong SGK đã tìm giới hạn bên trái và bên phải của $f(x)$ tại $x = 0$. Từ đó suy ra hàm số gián đoạn tại $x = 0$, nên không có đạo hàm tại đó.

Nhận xét

- Đối với lời giải ở ví dụ **SGKC11**, trang 150, chúng ta thấy rằng “kĩ thuật” đưa ra chưa thỏa đáng vì **chưa có** khái niệm đồ thị bị “gãy” tại một điểm. Hơn nữa, việc đồ thị bị “gãy” tại một điểm có liên quan như thế nào với việc kết luận về sự tồn tại đạo hàm tại đó? Theo lời giải trên,

ta thấy rằng SGK đã kết luận đồ thị hàm số bị “gãy” tại x_0 nên không có đạo hàm tại đó. Điều này SGK không giải thích vì sao ?

- Về bài tập 4 **SGKC11**, trang 156, chúng ta thấy SGK đã chọn hàm số không liên tục tại $x = 0$, nên dễ dàng kết luận được hàm số không có đạo hàm.

Nói chung, **SGKC11** đã tránh không đề cập đến KNV T_3 đã nêu. SGK cũng không nêu kĩ thuật chứng minh hàm số không có ĐH tại x_0 nhưng liên tục tại đó

Riêng trong **SBTC11** có 3 bài thuộc KNV này và chúng được giải quyết theo

Kĩ thuật τ_3^2 : “ giới hạn một bên ”

- Kiểm tra $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ không tồn tại hoặc hai giới hạn trên khác nhau.

Ví dụ 3. [SBTC11, tr.192]

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & ; x \geq 0 \\ (x+1)^2 & ; x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$, nhưng liên tục tại đó.

- ❖ Trong **SGKC11**, tất cả các ví dụ bài tập có thực hiện việc tính đạo hàm đều không chú ý đến việc kiểm tra hàm số đã cho có đạo hàm hay không. Nên đối với các bài toán tính đạo hàm HS chỉ thực hiện thao tác tính đạo hàm mà không quan tâm đến sự tồn tại của nó. Từ đó, chúng tôi thấy có một qui tắc hợp đồng đối với HS như sau:

RE2: “ Trong các bài toán tìm đạo hàm của một hàm số, HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số đã cho có đạo hàm hay không mà chỉ việc tính đạo hàm ”

- ❖ **Kiểu nhiệm vụ T_5 :** “ Tính gần đúng một giá trị ” có 2 bài (1 ví dụ trong **SGKC11** và 1 bài tập trong **SBTC11**)

Cho chúng tôi kết luận rằng vấn đề tính gần đúng nhờ vi phân chưa thực sự được thể chế quan tâm. **SGKC11** đưa ra khái niệm vi phân chỉ nhằm mục đích giới thiệu kí hiệu dy và dx , nhằm phục vụ cho chương tiếp theo là Nguyên hàm và Tích phân.

Trong các lời giải mà SGK và SBT đề nghị cũng không nêu rõ cách chọn x_0 và Δx thế nào ? Điều này gây ra những khó khăn cho HS.

Ngoài ra, chúng tôi còn tìm thấy trong luận văn thạc sĩ “*Mối liên hệ giữa tiếp tuyến và đạo hàm - Một nghiên cứu khoa học luận và sự phạm*” của Bùi Thị Thu Hiền (2007) giả thuyết nghiên cứu sau : “ Học sinh thiết lập được mối quan hệ giữa tiếp tuyến và đạo hàm, giữa đạo hàm và xấp xỉ affine nhưng mối quan hệ giữa tiếp tuyến và xấp xỉ affine không hiện diện trong mối quan hệ cá nhân của họ ”.

- ❖ **Kiểu nhiệm vụ T_7 :** “ Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ dựa vào bảng biến thiên ”

Các bài tập xét tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên K (khoảng, đoạn, nửa khoảng), SGK12 bỏ qua việc kiểm tra tính liên tục và có đạo hàm trên K của hàm số.

Chẳng hạn: + Bài 4 (trang 10/SGKC12) Chứng minh hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên $(0;1)$ và nghịch biến trên $(1;2)$.

Lời giải đề nghị của SGK đã bỏ qua việc xét tính liên tục trên đoạn $[0;2]$ và có đạo hàm trên $(0;2)$.

Điều này cho chúng tôi đưa ra kết luận sau :

“ HS không có trách nhiệm kiểm tra tính liên tục và có đạo hàm trên K khi xét tính đồng biến, nghịch biến trên K của hàm số ”

❖ **Kiểu nhiệm vụ con T_{7c} :** “Chứng minh bất đẳng thức dùng đạo hàm” đã được đưa vào tường minh trong SGK12 ở cả phần lý thuyết cũng như bài tập. Tuy nhiên, số lượng bài tập cũng rất ít (tổng cộng có 4 bài: 1 ví dụ, 1 bài tập trong SGK12 và 2 bài tập trong SBT). Điều này cho thấy, thể chế cũng chưa quan tâm đến KNV này.

❖ **Kiểu nhiệm vụ T_8 :** “Tìm cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ ”

Khi phân tích **Kiểu nhiệm vụ con T_{8a} :** “ Chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x = x_0$ nhưng vẫn đạt cực trị tại đó ”.

Chúng tôi thấy rằng, các ví dụ và bài tập về hàm số không có ĐH tại x_0 nhưng vẫn đạt cực trị tại đó là rất ít (có 3 bài gồm : 1 ví dụ SGK12, 1 bài tập SGK12 và 1 bài tập SBTC12). Tất cả các bài tập còn lại của KNV T_8 và các KNV con của nó thì hàm số đều đạt cực trị tại x_0 mà tại đó đạo hàm bằng 0. Nên HS có thể cho rằng : Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số đó bằng 0.

Từ các nhận xét trên chúng tôi nêu ra giả thuyết nghiên cứu như sau:

H1 : Khi giải quyết các bài toán cực trị, HS cho rằng : Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm mà đạo hàm của hàm số tại đó bằng 0

❖ **Kiểu nhiệm vụ T_{9b} :** “ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ”

Đối với KNV này thì cả SGK12 và SBTC12 đều không đưa ra **Kĩ thuật τ_{9a} :** “dùng bảng biến thiên” để tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $[a;b]$.

Điều này có thể khẳng định rằng : thể chế mong muốn **Kĩ thuật τ_{9b}^2 :** “dùng qui tắc” được HS sử dụng. Như vậy, có thể đối với HS khi gặp KNV này thì **Kĩ thuật τ_{9b}^2 :** “dùng qui tắc” chiếm ưu thế tuyệt đối.

Mặt khác, khi sử dụng kĩ thuật τ_{9b}^2 thì SGK12 cũng không có bước kiểm tra điều kiện sử dụng được của qui tắc này là: hàm số $y = f(x)$ phải liên tục trên đoạn $[a;b]$ nên HS cũng không quan tâm đến điều kiện này khi giải quyết KNV nói trên.

Ngoài ra **SGKC12** cũng đưa thêm vào kĩ thuật τ_{9b}^1 : “dùng đồ thị” để giải quyết KNV trên, tuy nhiên chỉ đưa ở 2 ví dụ mở đầu và 1 bài tập trong SBT. Tất cả các bài tập khác giải theo kĩ thuật τ_{9b}^2

Từ đó chúng tôi đưa ra hai qui tắc hợp đồng ở HS lớp 12 như sau:

Re3: “ Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là dùng kĩ thuật τ_{9b}^2 (dùng qui tắc) để giải”

Re4: “ Khi giải quyết các bài tìm GTNN, GTLN của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$ HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số có liên tục trên $[a;b]$ hay không, mà chỉ việc sử dụng kĩ thuật τ_{9b}^2 (dùng qui tắc) để giải ”

- ❖ SGK chương trình chuẩn đã bỏ phần : Tính lỗi, lồi và điểm uốn của đồ thị hàm số nên các KNV liên quan đến vấn đề này không xuất hiện trong chương trình

Chúng tôi cho rằng, việc không học về tính lồi lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số có thể làm cho HS vẽ đồ thị không chính xác, đặc biệt tại các vị trí cung lồi, cung lõm và điểm uốn

- ❖ Đối với KNV T_{10} , T_{11} (cùng các KNV con)

Bản chất của việc tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ hay tính tích phân hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thực ra là tìm một hàm số $F(x)$ sao cho có đạo hàm bằng $f(x)$. Như vậy, giữa đạo hàm, nguyên hàm, tích phân có mối liên hệ mật thiết với nhau. Tuy nhiên, HS có nhận ra mối quan hệ này hay không ? Có sự nối khớp nào giữa chúng trong chương trình và SGK.

Trong các bài toán tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ việc kiểm tra sự tồn tại nguyên hàm không được **SGKC12** chú ý. Tương tự, bài toán tính tích phân thì việc kiểm tra sự khả tích của các hàm số trên đoạn lấy tích phân cũng không được đề cập. Điều này dẫn đến, HS không quan tâm đến các điều kiện tồn tại nguyên hàm cũng như điều kiện khả tích của tích phân đang tính. Đối với HS việc tính nguyên hàm, tích phân chỉ là việc sử dụng máy móc các phương pháp tính đã học.

Theo luận văn thạc sĩ “ *Nghiên cứu didactic về những khó khăn chính của học sinh khi tiếp thu khái niệm tích phân* ” của Trần Lương Công Khanh(2002) thì chúng tôi tìm thấy có các qui tắc ngầm ẩn của hợp đồng didactic về khái niệm tích phân như sau:

“ Qui tắc RE1: Học sinh không có trách nhiệm kiểm tra điều kiện khả tích khi tính tích phân.

Qui tắc RE2: Học sinh không có trách nhiệm kiểm tra khoảng hợp thức của các nguyên hàm.

Qui tắc RE3: Học sinh có trách nhiệm vận dụng những kĩ thuật tính tích phân đã được tiếp thu trong bài học, trong luyện tập nhưng không có trách nhiệm kiểm tra tính hợp thức của các kĩ thuật này.

Qui tắc RE4: Học sinh có trách nhiệm tính chính xác tích phân được yêu cầu.

Qui tắc RE5: Để tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$, học sinh có trách nhiệm tìm một nguyên hàm của hàm số f và áp dụng công thức Newton – Leibniz hoặc dùng công thức tích phân từng phần để đưa tích phân cần tính về một tích phân dễ tính hơn.

Qui tắc RE6 : Khi thu được kết quả $\int_a^b f(x)dx = \alpha$ trong đó $\alpha = F(b) - F(a)$, học sinh không có trách nhiệm khảo sát sự liên hệ giữa $F(x)$ và $f(x)$. ”

Nhận xét : Các qui tắc trên vẫn tồn tại trong SGK12.

KẾT LUẬN

Như vậy qua việc phân tích các tổ chức toán học liên quan đến khái niệm đạo hàm của hai bộ SGK11 và SGK12, chúng tôi đưa ra 4 qui tắc hợp đồng sau :

Qui tắc RE1: “ Tính đạo hàm của một hàm số là sử dụng các công thức đạo hàm đã có ”.

Qui tắc RE2: “ Trong các bài toán tìm đạo hàm của một hàm số, HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số đã cho có đạo hàm hay không mà chỉ việc tính đạo hàm ”.

Qui tắc Re3: “ Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là sử dụng kĩ thuật τ_{9b}^2 (dùng qui tắc) để giải ”.

Qui tắc Re4: “ Khi giải quyết các bài tìm GTNN, GTLN của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$ HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số có liên tục trên $[a;b]$ hay không, mà chỉ việc sử dụng kĩ thuật τ_{9b}^2 (dùng qui tắc) để giải ”.

Cùng với *giả thuyết nghiên cứu* sau:

“ Khi giải quyết các bài toán cực trị, HS cho rằng : Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm mà đạo hàm của hàm số tại đó bằng 0 ”.

2.2. Phân tích mối quan hệ thể chế với khái niệm đạo hàm (SGK chương trình nâng cao lớp 11,12 hiện hành , kí hiệu lần lượt là : SGKNC11, SGKNC12)

2.2.1. Phân tích về việc xây dựng lý thuyết của bộ SGKNC11,SGKNC12

2.2.1.1 Đạo hàm

- ❖ Định nghĩa Đạo hàm và tính ĐH bằng định nghĩa: Xây dựng giống **SGKC11**
- ❖ Đạo hàm một bên: **SGKNC11** cũng bỏ khái niệm này (chỉ đưa vào bài đọc thêm trang 193,194)
- ❖ Đạo hàm trên một khoảng
 - Định nghĩa như **SGKC11** và khái niệm “hàm số đạo hàm” cũng được đưa vào.
 - ❖ Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số
 - **SGKNC11** không đề cập đến vấn đề này. Chỉ có duy nhất một nhận xét “ Nếu hàm số $y = f(x)$ có ĐH tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0 ” (có chứng minh)
 - **SGKNC11** có đưa ra một chú ý “ Hàm số $y = 1/x$ xác định tại $x = 0$, tuy nhiên người ta chứng minh được rằng nó không có đạo hàm tại $x = 0$ ”.
- ❖ Tiếp tuyến của đường cong phẳng: Xây dựng giống **SGKC11**.
- ❖ Vi phân : Xây dựng giống **SGKCL12** và **SGKC11**.

CÁC KẾT LUẬN

- Các bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm trong **SGKNC11** có vai trò rất mờ nhạt trong việc hình thành và lĩnh hội khái niệm về đạo hàm của HS.
- Nhiều HS chưa hiểu và nắm vững định nghĩa đạo hàm.
- Kí hiệu $\Delta x, \Delta y$ trong định nghĩa đạo hàm và kí hiệu dx, dy trong định nghĩa vi phân là những kí hiệu lạ và khó sử dụng đối với HS.
- Các bài tập chứng minh một hàm số có (hoặc không có đạo hàm) tại một điểm là rất ít .
- HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số đã cho là có đạo hàm hay không mà chỉ việc tính đạo hàm.
- Trong **SGKNC11** có sự thay đổi về khái niệm tiếp tuyến so với **SGKCL12**.
- HS có thể gặp khó khăn khi tiếp thu khái niệm hàm số hợp.
- Mối liên hệ giữa hệ số góc của tiếp tuyến và việc tính gần đúng nhờ vi phân có vai trò rất mờ nhạt.
- Sự nối khớp giữa khái niệm đạo hàm và các khái niệm giới hạn hàm số, hàm số liên tục cũng chưa được quan tâm trong chương trình và SGK mới.

2.2.1.2. Ứng dụng của đạo hàm

- ❖ SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

- Xây dựng như **SGKC12**.

- Tuy nhiên, **SGKNC12** không đưa ra Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số như hai bộ **SGKCL12** và **SGKC12**.

- Không đưa vào phần lý thuyết về sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để chứng minh bất đẳng thức như **SGKC12**. Vấn đề này được đưa vào trong phần luyện tập.

- Khi xét tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên K(khoảng, đoạn, nửa khoảng). HS không có trách nhiệm kiểm tra tính liên tục và có đạo hàm trên K.

Chẳng hạn:

+ Bài tập 1 [**SGKNC12**, tr.7]. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$

Lời giải đề nghị của SGK cũng không kiểm tra tính liên tục của hàm số trên $[-2;2]$ và có đạo hàm trên khoảng $(-2;2)$

❖ CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU

- Xây dựng như **SGKC12**

- Trong SGK có đưa ra chú ý

+ Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có ĐH.

Chẳng hạn hàm số $y = |x|$

+ Như vậy, một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

Dùng quy tắc 1, để tìm cực trị của hàm số $f(x) = |x|$, **SGKNC12** làm như sau :

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(x) = \begin{cases} -x & \text{ khi } x < 0 \\ x & \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}$ Do đó $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{ khi } x < 0 \\ 1 & \text{ khi } x > 0 \end{cases}$

(hàm số f không có ĐH tại $x = 0$)

Sau đây là bảng biến thiên

x	$-\infty$ $+\infty$	0
$f'(x)$	-	+
$f(x)$		

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và giá trị cực tiểu là $f(0) = 0$

- Từ lời giải của **SGKNC12** chúng ta thấy SGK bỏ qua việc chứng minh hàm số f không có đạo hàm tại $x = 0$. Và trong SGK cũng có ghi chú rằng “ không cần chứng minh hàm số f không có đạo hàm tại $x = 0$ ”.

❖ Giá Trị Lớn Nhất Và Giá Trị Nhỏ Nhất Của Hàm Số

- Xây dựng như **SGKC12**.

- Có thêm kĩ thuật tìm GTLN và GTNN của hàm số bằng định nghĩa.
- Kĩ thuật dùng bảng biến thiên cũng không nêu phương pháp giải tường minh mà thông qua ví dụ.
- Không đưa vào kĩ thuật sử dụng đồ thị để tìm GTLN và GTNN trên một đoạn như SGK12.

❖ TÍNH LỖI, LỖM VÀ ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ

- SGKNC12 đưa vào bài đọc thêm trang 59 đến 61.
- Không đưa vào chương trình việc xét tính lồi lõm. Nhưng khác với SGK12 là vấn đề Điểm uốn được đưa vào phần lý thuyết ở bài Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc ba.

❖ TÌM NGUYÊN HÀM

Định nghĩa nguyên hàm (giống SGK12)

Phương pháp tính nguyên hàm cũng được phát biểu tường minh gồm có : phương pháp đổi biến số và nguyên hàm từng phần giống như SGK12.

Nhận xét

- Tìm nguyên hàm của một hàm số là thực hiện quá trình ngược với tìm DH của một hàm số. DH trở thành công cụ trong bài toán tìm nguyên hàm.
- Phương pháp tính nguyên hàm được phát biểu tường minh gồm có : phương pháp đổi biến số và nguyên hàm từng phần.
- SGKNC12 thừa nhận kết quả :

“ Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K ”.

- Trong SGKNC12 cũng **đưa ra chú ý** như sau: “ Trong các bài toán tìm nguyên hàm của một hàm số, nếu không nói gì thêm, ta luôn giả thiết rằng hàm số đó là liên tục và nguyên hàm của nó được xét trên mỗi khoảng (nửa khoảng, đoạn) xác định của hàm số đó ”.

❖ TÍNH TÍCH PHÂN

- Vì lí do sự phạm SGKNC12 cũng đã định nghĩa tích phân thông qua nguyên hàm.

- Từ định nghĩa tích phân, chúng ta thấy rằng để tính được tích phân $\int_a^b f(x)dx$ việc quan trọng nhất là phải tìm được nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$. Sau đó áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (Công thức Newton- Leibniz).

- Khi tính tích phân thì hàm số dưới dấu tích phân phải liên tục trên đoạn lấy tích phân. Nhưng điều này không được kiểm tra trong tất cả các ví dụ và bài tập mà SGK12 đưa ra. Như vậy, HS không có trách nhiệm kiểm tra điều kiện khả tích mà chỉ việc dùng các phương pháp giải đã được học để tính tích phân.

KẾT LUẬN

- Trong SGKNC12 cũng có KNV “chứng minh bất đẳng thức có sử dụng đạo hàm”.

- Các ví dụ và bài tập về hàm số không có đạo hàm tại x_0 nhưng vẫn đạt cực trị tại đó là rất ít. Nên HS có thể cho rằng: Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số đó bằng 0.
- Khi học kiến thức về tìm GTLN và GTNN của một hàm số (có ứng dụng đạo hàm) HS thường mắc sai lầm khi nhầm lẫn giữa giá trị cực trị và GTLN; giá trị cực tiểu và GTNN (khi sử dụng bảng biến thiên).
- SGK chương trình nâng cao, khi tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một đoạn **có đưa ra kỹ thuật chứng minh sử dụng định nghĩa GTLN và GTNN để giải**. Điều này có thực sự là lời giải mà thể chế mong muốn? Trong thực tế thì HS có sử dụng kỹ thuật này không? Và GV sẽ “phản ứng” ra sao khi HS giải theo kỹ thuật này?
- Trong SGK nâng cao *không có kỹ thuật sử dụng đồ thị tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một đoạn*. GV ứng xử thế nào khi HS học theo chương trình nâng cao dùng kỹ thuật trên để giải?
- Việc không học về tính lời lồi của đồ thị hàm số có thể làm cho HS vẽ đồ thị không chính xác, đặc biệt tại các vị trí cung lồi, cung lõm và điểm uốn.
- HS thường thiếu thận trọng khi lập bảng biến thiên

Nhiều HS quên rằng bảng biến thiên là sự tổng kết, tóm tắt các kết quả khảo sát hàm số để nhìn vào đó thấy rõ sự biến thiên của hàm số và có thể vẽ đồ thị chính xác. Họ thường làm việc này như một thủ tục phải làm chứ không hiểu bản chất nêu trên.

- Trong lịch sử, sự ra đời của tích phân xuất phát từ việc tìm giới hạn của các tổng tích phân. Tuy nhiên, **SGKNC12** đã định nghĩa tích phân qua nguyên hàm, đây là một sự chuyển đổi didactic. Điều này làm cho HS không hiểu nghĩa của tích phân.
- Trong bài toán tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$, việc tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ là việc then chốt. Bản chất của việc tìm nguyên hàm của một hàm số là quá trình ngược với quá trình tìm ĐH. HS có nhận ra hay không mối quan hệ giữa ĐH và tích phân? Các em có gặp khó khăn gì khi tiếp thu khái niệm tích phân? Để tạo ra sự nối khớp giữa hai khái niệm này thì GV làm thế nào khi giảng dạy?
- Ngoài ra, khi tính tích phân HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số dưới dấu tích phân có khả tích hay không mà chỉ việc dùng các kỹ thuật để tính nó. Việc tính tích phân được HS tiến hành một cách máy móc theo phương pháp mà họ không hiểu ý nghĩa của tiến trình.
- Việc ứng dụng tích phân vào giải các bài toán thực tế là rất hạn chế ở HS.

2.2.2. Các tổ chức toán học liên quan đến khái niệm đạo hàm trong SGKNC11, SGKNC12 và kết luận

2.2.2.1. Các Kiểu nhiệm vụ giống SGK chương trình chuẩn

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_1 :** “ Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa ”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_2 :** “ Tìm đạo hàm y' của hàm số $y = f(x)$ bằng công thức ”.

Các kiểu nhiệm vụ con của T_2

+ Kiểu nhiệm vụ con T_{2a} : “Tìm vận tốc, gia tốc tức thời của chuyển động có phương trình $s = s(t)$ tại thời điểm $t = t_0$ ”.

+ Kiểu nhiệm vụ con T_{2b} : “chứng minh một hệ thức chứa đạo hàm cấp 1 của hàm số $y = f(x)$ ”.

+ Kiểu nhiệm vụ con T_{2c} : “Tính giá trị một biểu thức chứa đạo hàm cấp 1, 2 của hàm số cho trước”.

+ Kiểu nhiệm vụ con T_{2d} : “Giải phương trình $f'(x) = 0$ ”.

+ Kiểu nhiệm vụ con T_{2e} : “Giải bất phương trình $f'(x) > 0$ ”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_3 :** “Chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại điểm x_0 ”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_4 :** “ Tìm vi phân của hàm số $y = f(x)$ ”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_5 :** “ Tính gần đúng một giá trị”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_{6a} :** “Viết phương trình tiếp tuyến của (C): $y = f(x)$ tại $M(x_0; f(x_0))$ ”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_{6b} :** “Viết phương trình các đường thẳng có hệ số góc k và tiếp xúc với (C): $y = f(x)$ ”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_7 :** “Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ dựa vào bảng biến thiên”.

Các kiểu nhiệm vụ con của T_7

+ Kiểu nhiệm vụ con T_{7a} : “Chứng minh hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hay nghịch biến) trên K ”.

+ Kiểu nhiệm vụ con T_{7b} : “Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = f(x)$ đồng biến(hay nghịch biến) trên K ”.

+ Kiểu nhiệm vụ con T_{7c} : “Chứng minh bất đẳng thức dùng đạo hàm”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_8 :** “Tìm cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ ”.

Các kiểu nhiệm vụ con của T_8

+ Kiểu nhiệm vụ con T_{8a} : “Chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x = x_0$ nhưng vẫn đạt cực trị tại đó”.

+ Kiểu nhiệm vụ con T_{8b} : “Tìm m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại hay cực tiểu tại $x = x_0$ ”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_{9a} :** “Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ ”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_{9b} :** “ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_{10} :** “ Tìm nguyên hàm $\int f(x)dx$ ”.

✓ **Kiểu nhiệm vụ T_{11}** : “ Tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ ”.

Các kiểu nhiệm vụ con của **Kiểu nhiệm vụ T_{11}**

- + **Kiểu nhiệm vụ con T_{11a}** : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong
- + **Kiểu nhiệm vụ con T_{11b}** : Tính thể tích vật thể
- + **Kiểu nhiệm vụ con T_{11c}** : Tính thể tích khối tròn xoay
- + **Kiểu nhiệm vụ con T_{11d}** : Chứng minh đẳng thức tích phân

2.2.2.2. Các điểm khác so với SGK chương trình chuẩn

❖ Thêm vào 2 kiểu nhiệm vụ con của nhiệm vụ T_2

Đó là KNV : Tìm cường độ dòng điện tức thời tại $t = t_0$

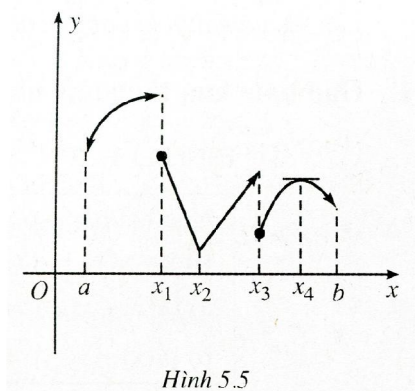
Và KNV : Tìm đạo hàm cấp n của một hàm số.

❖ Đối với KNV T_3 : Chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại x_0

Bài 15. [SGKNC11, tr.195]

Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Dựa vào hình vẽ, hãy cho biết tại mỗi điểm x_1, x_2, x_3 và x_4 :

- a) Hàm số có liên tục hay không ?
- b) Hàm số có đạo hàm hay không ? Hãy tính đạo hàm nếu có



Hình 5.5

Để giải thích tại điểm x_2 hàm số không có đạo hàm, lời giải được trình bày trong SGKNC11 như sau : « Hàm số không có đạo hàm tại điểm x_2 vì tại điểm M_2 đồ thị hàm số bị gãy, giống như tại điểm $(0; 0)$ đối với đồ thị hàm số $y = |x|$ »

Chúng tôi cho rằng, kĩ thuật như trên **chưa thỏa đáng** vì : khái niệm đồ thị hàm số « bị gãy » chưa được nói đến.

Chúng tôi tìm thấy khái niệm đồ thị bị gãy trong Bài đọc thêm SGKNC11. tr 194 như sau : “ Nếu tại điểm x_0 hàm số f có ĐH bên phải và ĐH bên trái , nhưng chúng không bằng nhau thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ gọi là gãy tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ ”. Như vậy, đồ thị « bị gãy » tại điểm x_0 là đồ thị của một trong hai dạng hàm số :

- Hàm số không liên tục tại x_0 .
- Hàm số liên tục tại x_0 nhưng đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải tại x_0 không bằng nhau.

Trong trường hợp này, để kiểm tra đồ thị « bị gãy » phải dùng **Kĩ thuật** τ_3^2 : “ giới hạn một bên ”

Kiểm tra $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ không tồn tại hoặc hai giới hạn trên khác nhau.

❖ **Kiểm nhiệm vụ T_{6b}** : “ Viết phương trình các đường thẳng có hệ số góc k và tiếp xúc với (C) : $y = f(x)$ ”

Kĩ thuật giải được nêu rõ ràng

Kĩ thuật τ_{6b} :

- Giải phương trình $k = f'(x)$. Suy ra các hoành độ tiếp điểm là $x_0, x_1, \dots$
- Suy ra phương trình tiếp tuyến $y - y_i = f'(x_i)(x - x_i)$ với $i = 0, 1, \dots$

Công nghệ θ_6 : ý nghĩa hình học của đạo hàm

“ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có ĐH tại $x_0 \in (a; b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó.

ĐH của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ ”

Bài 53. [SGKNC11, tr.221]

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{8}x + 3$

Lời giải của **SGVNC11, tr.267**

Do $y = x^4 + 2x^2 - 1$, ta có $y' = 4x^3 + 4x$

Vì tiếp tuyến phải tìm vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{8}x + 3$, nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 8, suy ra

$$y' = 8 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow 4(x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy $x = 1$ là hoành độ tiếp điểm, nên phương trình tiếp tuyến là

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 8x - 6$$

Ngoài ra **SGKNC11** thêm vào **Kiểm nhiệm vụ T_{6c}** : “Viết phương trình tiếp tuyến của (C): $y = f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua $M_1(x_1; y_1)$ ”

Có hai kĩ thuật

Kĩ thuật τ_{6c}^1 :

-Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thuộc (C) :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Thay tọa độ điểm M_1 vào phương trình tiếp tuyến trên. Tìm được x_0
- Tìm $f'(x_0)$. Sau đó thay vào phương trình tiếp tuyến

Kĩ thuật τ_{6c}^2 :

-Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M_1(x_1; y_1)$ với hệ số góc k là

$$y = k(x - x_1) + y_1$$

- Giải hệ phương trình tìm nghiệm x_0

$$\begin{cases} f(x_0) = k(x_0 - x_1) + y_1 \\ f'(x_0) = k \end{cases}$$

- Khử x_0 từ hệ trên, tìm được k.
- Thay k vào phương trình theo hệ số ở trên.

Công nghệ θ_6 : Điều kiện tiếp xúc của hai đường cong.

Bài 25. [SGKNC11, tr.205]

Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ biết rằng tiếp tuyến đi qua $A(0; -1)$

Lời giải của **SGVNC11, tr.241**

Đặt $f(x) = x^2$ và gọi M_0 là điểm thuộc (P) với hoành độ x_0 . Khi đó tọa độ của điểm M_0 là $(x_0; f(x_0))$ hay $(x_0; x_0^2)$

Cách 1. (dùng **Kĩ thuật τ_{6c}^1**)

Ta có $y' = 2x$. Phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm M_0 là

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 \Leftrightarrow y = 2x_0x - x_0^2$$

Tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0; -1)$ nên ta có

$$-1 = 2x_0 \cdot 0 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$$

+ Với $x_0 = 1$ thì $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$ và phương trình tiếp tuyến phải tìm là

$$y = 2(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

+ Với $x_0 = -1$ thì $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = -2$ và phương trình tiếp tuyến phải tìm là

$$y = -2(x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = -2x - 1$$

vậy có hai tiếp tuyến của (P) đi qua A với các phương trình tương ứng là $y = \pm 2x - 1$

Cách 2. (dùng **Kĩ thuật τ_{6c}^2**)

Phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(0; -1)$ với hệ số góc k là

$$y = kx - 1$$

Để (d) tiếp xúc với (P) tại điểm M_0 , điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 - 1 \\ f'(x_0) = k \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_0^2 = kx_0 - 1 \\ 2x_0 = k \end{cases} \quad \text{Khử } x_0 \text{ từ hệ này ta tìm được } k = \pm 2$$

Vậy có hai tiếp tuyến của (P) đi qua $A(0;-1)$ với các phương trình tương ứng là $y = \pm 2x - 1$

Nhận xét

- các bài toán tiếp tuyến đa dạng hơn **SGKC11, SGKC12** và các kĩ thuật nêu rõ ràng.
- trong SGK có đưa ra chú ý : hàm số $y = f(x)$ có ĐH $f'(x_0)$ tại x_0 khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$. Như vậy, có sự liên hệ chặt chẽ giữa ĐH và tiếp tuyến với đồ thị tại một điểm.

❖ Thêm vào Kiểu nhiệm vụ T_{12} : Tìm điểm uốn của đồ thị hàm số

***Kĩ thuật* τ_{12} :**

+ Tính $f''(x)$

+ Nếu đạo hàm $f''(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0 thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho.

***Công nghệ* θ_{12} :** Định lí

“ Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên một khoảng chứa điểm x_0 . Nếu đạo hàm cấp hai đổi dấu khi x đi qua x_0 thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho ”.

Ví dụ. [SGKNC12, tr.39]

Tìm điểm uốn của đồ thị hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + \frac{4}{3}$

Lời giải của SGKNC12, tr.39

Ta có $f'(x) = -x^2 + 2x + 3, f''(x) = -2x + 2$ và $f''(x) = 0$ tại điểm $x_0 = 1$. Vì $f''(x)$ đổi dấu (từ dương sang âm) khi x qua điểm $x_0 = 1$ nên $U(1; 5)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho

❖ Thêm vào KNV T_{13} : chứng minh hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại một điểm

***Kĩ thuật* τ_{13} :**

+ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

+ Hệ có nghiệm, Suy ra hai đường cong tiếp xúc nhau và nghiệm của hệ là hoành độ tiếp điểm.

***Công nghệ* θ_{13} :** Định nghĩa hai đường cong tiếp xúc

“Giả sử hai hàm số f, g có đạo hàm tại điểm x_0 . Ta nói rằng hai đường cong

$y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0; y_0)$ nếu M là một điểm chung của chúng và hai đường cong có tiếp tuyến chung tại điểm M . Điểm M được gọi là tiếp điểm của hai đường cong đã cho ”.

Ví dụ 2. [SGKNC12, tr.53]

Chứng minh rằng hai đường cong

$$y = x^3 + \frac{5}{4}x - 2 \quad \text{và} \quad y = x^2 + x - 2 \quad \text{tiếp xúc với nhau tại một điểm nào đó}$$

Lời giải của **SGKNC12, tr.53**

Hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đã cho là nghiệm của hệ phương trình

$$(I) \quad \begin{cases} x^3 + \frac{5}{4}x - 2 = x^2 + x - 2 \\ \left(x^3 + \frac{5}{4}x - 2\right)' = (x^2 + x - 2)' \end{cases}$$

Ta có

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 + \frac{x}{4} = 0 \\ 3x^2 + \frac{5}{4} = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy hai đường cong đã cho tiếp xúc với nhau tại điểm $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$

KNV con của T_{13} là :

T_{13a} : Tìm điều kiện để hai đường cong tiếp xúc.

Bài 66. [SGKNC12, tr.58]

Tìm các hệ số a và b sao cho parabol $y = 2x^2 + ax + b$ tiếp xúc với hypebol

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{tại điểm} \quad M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

2.2.3. Phân tích các tổ chức toán học và kết luận

❖ **Kiểu nhiệm vụ T_1** : “ *Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa* ” cùng với KNV con chỉ có 4 bài

Trong khi, **Kiểu nhiệm vụ T_2** : “ *Tìm đạo hàm y' của hàm số $y = f(x)$ bằng công thức* ” cùng các KNV con của nó chiếm số lượng tương đối lớn : 66 bài.

Điều này cho phép chúng tôi đưa ra kết luận sau : Noosphere quan tâm nhiều đến **Kiểu nhiệm vụ T_2** . Chính vì vậy, đối với HS tính đạo hàm bằng định nghĩa rất ít khi được sử dụng. Định nghĩa đạo hàm có vai trò rất mờ nhạt đối với HS khi học khái niệm đạo hàm, mối quan hệ giữa đạo hàm và giới hạn hàm số được nêu trong định nghĩa đạo hàm dường như không tồn tại đối với HS.

Khi phải tính đạo hàm của một hàm số nào đó thì **Kĩ thuật** τ_2 (sử dụng công thức tính đạo hàm) được ưu tiên tuyệt đối.

Như vậy vẫn tồn tại qui tắc hợp đồng đối với HS như sau:

RE1: “ Tính đạo hàm của một hàm số là sử dụng các công thức đạo hàm đã có”

❖ Ngoài ra qua việc phân tích OM chúng ta thấy, **Kiểu nhiệm vụ** T_3 :

“*Chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại x_0* ” cũng rất ít (chỉ có 3 bài : 2 bài SGK và 1 bài trong SBT). Và trong **SGKNC11** chỉ có duy nhất một bài (bài 14. tr195) giải theo kĩ thuật τ_3^2 :
“ giới hạn một bên”

- Kiểm tra $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ không tồn tại hoặc hai giới hạn trên khác nhau.

SGKNC11 còn đưa ra thêm một kĩ thuật τ_3^3 : Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, nếu tại x_0 đồ thị hàm số bị gãy thì hàm số không có đạo hàm tại đó (bài 15. tr 195) . Tuy nhiên, kĩ thuật này theo chúng tôi là chưa thỏa đáng.

Tất cả các bài tập có tính đạo hàm HS chỉ việc dùng công thức tính đạo hàm, không phải kiểm tra hàm số đã cho có đạo hàm hay không. Từ đó, chúng tôi thấy qui tắc hợp đồng RE2 vẫn còn đúng.

RE2: “Trong các bài toán tìm đạo hàm của một hàm số, HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số đã cho có đạo hàm hay không mà chỉ việc tính đạo hàm”

❖ **Kiểu nhiệm vụ** T_7 : “Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ dựa vào bảng biến thiên”

Các bài tập xét tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên K(khoảng, đoạn, nửa khoảng), **SGKNC12** cũng bỏ qua việc kiểm tra tính liên tục và có đạo hàm trên K của hàm số

Chẳng hạn: Bài tập 1[**SGKNC12, tr.7**] Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$. Lời giải đề nghị của SGK cũng không kiểm tra tính liên tục của hàm số trên $[-2;2]$ và có đạo hàm trên khoảng $(-2;2)$.

Lời giải đề nghị của SGK đã bỏ qua việc xét tính liên tục trên đoạn $[0;2]$ và có đạo hàm trên $(0;2)$.

Điều này cho chúng tôi đưa ra kết luận sau :

“HS không có trách nhiệm kiểm tra tính liên tục và có đạo hàm trên K khi xét tính đồng biến, nghịch biến trên K của hàm số”.

❖ **Kiểu nhiệm vụ con** T_{8a} : “*Chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x = x_0$ nhưng vẫn đạt cực trị tại đó*”.

Chúng tôi cũng thấy rằng, các ví dụ và bài tập về hàm số không có đạo hàm tại x_0 nhưng vẫn đạt cực trị tại đó là rất ít (có 3 bài gồm : 1 ví dụ SGK, 1 bài tập SGK và 1 bài tập SBT). Tất cả các bài tập còn lại của KNV T_8 và các KNV con của nó thì hàm số đều đạt cực trị tại x_0 mà tại đó đạo hàm bằng 0.

Từ các nhận xét trên chúng tôi cho rằng giả thuyết

“Khi giải quyết các bài toán cực trị, HS cho rằng : Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm mà đạo hàm của hàm số tại đó bằng 0”

vẫn còn đúng cho chương trình và SGK nâng cao

❖ **Kiểu nhiệm vụ T_{9b}** : “ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ”

Đối với KNV này thì SGK nâng cao có đề cập đến **Kĩ thuật τ_{9a}** : “dùng bảng biến thiên” để tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $[a;b]$.

Đó là ví dụ 2, trang 19.SGKNC12

« Tìm GTLN,GTNN của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ »

Tuy nhiên, chỉ có duy nhất ví dụ 2, trang 19 của SGK giải bằng kĩ thuật τ_{9a} .

Từ đó trong SGK và chương trình nâng cao vẫn tồn tại qui tắc hợp đồng :

Re3: “ Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là sử dụng kĩ thuật τ_{9b}^2 (dùng qui tắc) để giải”

Cũng tương tự như SGK chương trình chuẩn thì việc kiểm tra hàm số liên tục trên $[a;b]$ cũng không được SGK nhắc đến mặc dù trong qui tắc SGK có nêu điều kiện đó. Nên chúng ta có qui tắc hợp đồng

RE4 : Khi giải quyết các bài tìm GTNN, GTLN của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$ HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số có liên tục trên $[a;b]$ hay không, mà chỉ việc sử dụng kĩ thuật τ_{9b}^2 (dùng qui tắc) để giải

❖ SGK chương trình nâng cao có giới thiệu khái niệm điểm uốn của đồ thị hàm số thông qua các bài toán khảo sát đồ thị hàm số bậc 3 và hàm số bậc 4 trùng phương; tính lồi, lõm của đồ thị hàm số cũng không được đề cập như SGK chương trình chuẩn. Tuy nhiên, KNV liên quan đến khái niệm điểm uốn chỉ có KNV : “tìm điểm uốn của đồ thị hàm số” .

Như vậy, việc HS vẽ đồ thị không chính xác, đặc biệt tại các vị trí cung lồi, cung lõm và điểm uốn là có cơ sở.

2.3. KẾT LUẬN TỪ VIỆC PHÂN TÍCH MỐI QUAN HỆ THỂ CHẾ VỚI KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

Qua việc phân tích mối quan hệ thể chế với khái niệm đạo hàm trong bộ SGK lớp 11,12 hiện hành chúng tôi rút ra một số kết luận sau :

- Định nghĩa đạo hàm có vai trò rất mờ nhạt đối với HS khi học khái niệm đạo hàm, mối quan hệ giữa đạo hàm và giới hạn hàm số được nêu trong định nghĩa đạo hàm dường như không tồn tại đối với HS.

- Khi tính ĐH của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ bằng định nghĩa, việc tính $y'(x_0)$ bằng

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ chiếm ưu thế so với việc tính } y'(x_0) \text{ bằng } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Bài toán dựa vào đồ thị xác định sự tồn tại của đạo hàm ít được HS quan tâm. Để giải thích về sự tồn tại của đạo hàm tại một điểm nào đó bằng đồ thị, HS thường chỉ dự đoán theo “cảm giác” dựa trên nhiều quan niệm như : đồ thị gãy, đồ thị liền nét hay đồ thị có tiếp tuyến tại đó.

Ngoài ra, chúng ta thấy tồn tại các qui tắc hợp đồng :

Qui tắc RE1: “ *Tính đạo hàm của một hàm số là sử dụng các công thức đạo hàm đã có*”.

Qui tắc RE2: “*Trong các bài toán tìm đạo hàm của một hàm số, HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số đã cho có đạo hàm hay không mà chỉ việc tính đạo hàm*”.

Qui tắc Re3: “ *Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là dùng kĩ thuật τ_{9b}^2 (dùng qui tắc) để giải* ”.

Qui tắc RE4 : “ *Khi giải quyết các bài tìm GTNN, GTLN của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$ HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số có liên tục trên $[a;b]$ hay không, mà chỉ việc sử dụng kĩ thuật τ_{9b}^2 (dùng qui tắc) để giải* ”.

Cùng với giả thuyết nghiên cứu sau:

« *Khi giải quyết các bài toán cực trị, HS cho rằng : Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm mà đạo hàm của hàm số tại đó bằng 0* »

Chương 3 : NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM

3.1. Mục tiêu thực nghiệm

Thực nghiệm nhằm nghiên cứu ảnh hưởng của mối quan hệ thể chế về đạo hàm lên mối quan hệ cá nhân tương ứng của học sinh. Kiểm chứng các kết luận:

- Định nghĩa đạo hàm có vai trò mờ nhạt đối với cá nhân học sinh
- Khi tính ĐH của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ bằng định nghĩa, việc tính $y'(x_0)$ bằng

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ chiếm ưu thế so với việc tính } y'(x_0) \text{ bằng } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Bài toán dựa vào đồ thị xác định sự tồn tại của đạo hàm ít được HS quan tâm. Để giải thích về sự tồn tại của đạo hàm tại một điểm nào đó bằng đồ thị HS thường chỉ dự đoán theo “cảm giác” dựa trên nhiều quan niệm như : đồ thị gãy, đồ thị liền nét hay đồ thị có tiếp tuyến tại đó.

Đồng thời kiểm chứng hai qui tắc hợp đồng sau

Qui tắc RE1: “ *Tính đạo hàm của một hàm số là sử dụng các công thức đạo hàm đã có*”

Qui tắc RE2: “*Trong các bài toán tìm đạo hàm của một hàm số, HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số đã cho có đạo hàm hay không mà chỉ việc tính đạo hàm*”

3.2. Đối tượng, hình thức, nội dung thực nghiệm

- Thực nghiệm sẽ được tiến hành ở các lớp khá giỏi của ba trường : THPT Ngô Quyền, THPT Long Thành và THPT Tam Phước tỉnh Đồng Nai.
- Thời điểm thực nghiệm: Thực nghiệm được tiến hành cuối học kỳ 2 của năm học 2008 - 2009, sau khi các kiến thức về đạo hàm được dạy: Khái niệm đạo hàm, các qui tắc tính đạo hàm, đạo hàm của các hàm số lượng giác, vi phân, đạo hàm cấp cao
- Hình thức thực nghiệm : HS làm các bài tập tự luận vào phiếu đã in sẵn câu hỏi. Thời gian làm bài khoảng 50 phút.
- Nội dung thực nghiệm (xem phụ lục)

3.3. Phân tích a priori

3.3.1. Bài tập 1

Dùng định nghĩa tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0

a) $y = 2x - 3$ tại $x_0 = 2$

b) $y = \begin{cases} 9x - 4 & \text{ khi } x \geq 1 \\ x^3 + 3x^2 + 1 & \text{ khi } x < 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

❖ Mục đích

+ Kiểm chứng kết luận : Khi tính ĐH của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ bằng định nghĩa, việc tính $y'(x_0)$ bằng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ chiếm ưu thế so với việc tính $y'(x_0)$ bằng $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

❖ Các chiến lược giải có thể quan sát được

Chiến lược S1 : “ tính ĐH bằng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ”

$$a) f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 3x^2 + 1 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x^2 + 4x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 4x + 4) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{9x - 4 - 5}{x - 1} = 9 \quad \text{Vậy } f'(1) = 9$$

Chiến lược S2 : “ tính ĐH bằng $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ”

$$a) f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(2 + \Delta x) - 3 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 = 2$$

$$b) \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(\Delta x + 1)^3 + 3(\Delta x + 1)^2 + 1 - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} [(\Delta x)^2 + 6\Delta x + 9] = 9$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{9(\Delta x + 1) - 4 - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} 9 = 9$$

Vậy $f'(1) = 9$

❖ Biện didactic

V1: “ Dạng hàm số ” : cho bởi một biểu thức, cho bởi nhiều biểu thức

Nếu hàm số cho bởi nhiều biểu thức thì chiến lược **S1** xuất hiện nhiều hơn và chiến lược **S2** ít xuất hiện hơn

3.3.2. Bài tập 2

$$a) \text{ Tính giới hạn } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$$

$$b) \text{ Tính đạo hàm của hàm số } y = \sqrt{x+1} \text{ tại } x_0 = 3$$

❖ Mục đích

+ Kiểm chứng được kết luận : Định nghĩa ĐH có vai trò rất mờ nhạt đối với HS khi học khái niệm ĐH, mối quan hệ giữa ĐH và giới hạn hàm số được nêu trong định nghĩa ĐH dường như không tồn tại đối với cá nhân HS.

+ Kiểm chứng qui tắc hợp đồng

RE1: “ Tính đạo hàm của một hàm số là sử dụng các công thức đạo hàm đã có ”

❖ Các chiến lược giải có thể quan sát được

a) Chiến lược : “nhân lượng liên hợp”

HS khử dạng vô định 0/0 bằng cách nhân lượng liên hợp của $(\sqrt{x+1}-2)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$$

b) **Chiến lược S_{DN}** : “định nghĩa ĐH”

Từ định nghĩa ĐH và do kết quả câu a) ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{1}{4} \Rightarrow y'(3) = \frac{1}{4}$$

Chiến lược S_{CT} : “công thức ĐH”

$$\text{Ta có } y' = (\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\text{Nên } y'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = \frac{1}{4}$$

❖ Biến didactic

➤ V_2 : “giới hạn hàm số ở câu a”

• Giá trị của biến là :

+ xuất hiện hay không xuất hiện.

+ có dạng đúng theo định nghĩa ĐH của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 hay không ?

Chẳng hạn, nếu không cho tính giới hạn ở câu a) thì **Chiến lược S_{DN}** : “định nghĩa ĐH” sẽ hầu như không xuất hiện.

Trong câu a), nếu cho tính giới hạn nhưng giới hạn đó không đúng theo dạng giới hạn xuất hiện trong định nghĩa ĐH của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 thì chiến lược **S_{DN}** cũng không được HS sử dụng.

- Trong thực nghiệm trên chúng tôi đã chọn giá trị của biến là : xuất hiện giới hạn hàm số tại một điểm và giới hạn này giống như giới hạn xuất hiện trong định nghĩa ĐH của hàm số tại một điểm.

3.3.3. Bài tập 3

Tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm đã chỉ ra

a) $y = (x+1)\sqrt{x+1}$ tại $x = 0$; $x = -1$

b) $y = \frac{\tan x}{\sin x}$ tại $x = \frac{\pi}{4}$; $x = \pi$

c) $y = \frac{x^3-1}{x-1}$ tại $x = 2$; $x = 1$

❖ Mục đích: kiểm chứng qui tắc hợp đồng

RE2: “Trong các bài toán tìm đạo hàm của một hàm số, HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số đã cho có đạo hàm hay không mà chỉ việc tính đạo hàm”

❖ Các chiến lược giải có thể quan sát được

Chiến lược CL1. “Xét sự tồn tại ĐH, sau đó mới tính ĐH nếu có ”

a) Hàm số trên chỉ có ĐH trên khoảng $(-1; +\infty)$ nên tại $x = -1$ hàm số không có ĐH.

Ta tính ĐH tại $x = 0$

$$y' = \left((x+1)\sqrt{x+1} \right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x+1} \quad \text{Nên } y'(0) = \frac{3}{2}$$

b) Tại $x = \pi$ thì $\sin x = 0$ nên hàm số không có ĐH

+ Ta tính ĐH tại $x = \frac{\pi}{4}$

HS có thể rút gọn biểu thức hàm số rồi tính ĐH hay áp dụng công thức ĐH trực tiếp và ra được kết

quả $y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ nên $y'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

c) Tại $x = 1$ thì $x - 1 = 0$ nên hàm số không có ĐH

+ Ta tính ĐH tại $x = 2$

HS có thể rút gọn biểu thức hàm số rồi tính ĐH hay áp dụng công thức ĐH trực tiếp và ra được kết

quả $y'(2) = 5$

Chiến lược CL2. “ Rút gọn biểu thức hàm số và áp dụng công thức tính ĐH rồi thay giá trị x vào ”

b) Ta có $y = \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$

suy ra $y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. Vậy $y'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ và $y'(\pi) = 0$

c) Ta có $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1$

suy ra $y' = 2x + 1$. Vậy $y'(1) = 3$ và $y'(2) = 5$

Chiến lược CL3. “ Dùng công thức tính ĐH, không đơn giản biểu thức và thay giá trị x vào ”

a) $y' = \left((x+1)\sqrt{x+1} \right)' = \sqrt{x+1} + (x+1) \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

Nên $y'(0) = \frac{3}{2}$ và $y'(-1)$ không xác định $\Rightarrow$ không có ĐH tại $x = -1$

b) $y' = \frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x}{\sin^2 x}$ Nên $y'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ và $y'(\pi)$ không xác định $\Rightarrow$ không có ĐH tại $x = \pi$

c) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$. Suy ra $y' = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{(x - 1)^2}$

Nên $y'(2) = 5$ và $y'(1)$ không xác định $\Rightarrow$ không có ĐH tại $x = 1$

Chiến lược CL4. “ Dùng công thức tính ĐH, rút gọn biểu thức và thay giá trị x vào ”

$$a) y' = \sqrt{x+1} + (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\sqrt{x+1} = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$$

Nên $y'(0) = \frac{3}{2}$ và $y'(-1) = 0$

$$b) y' = \frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \text{Vậy } y'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \quad \text{và } y'(\pi) = 0$$

$$c) y' = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2(2x+1)}{(x-1)^2} = 2x+1 \quad \text{Vậy } y'(1) = 3 \quad \text{và } y'(2) = 5$$

❖ **Biến didactic**

a)

➤ V_{a1} : dạng hàm số $f(x)$

- Giá trị của biến là : hàm đa thức, hàm căn bậc hai, hàm phân thức hữu tỉ...

Chẳng hạn, nếu chọn hàm đa thức thì việc tính ĐH của hàm số tại một điểm là luôn thực hiện được nên chiến lược **CL1** không xảy ra và các chiến lược **CL2**, **CL3**, **CL4** được ưu tiên. Nếu chọn hàm căn bậc hai hay hàm phân thức thì ngoài các chiến lược **CL2**, **CL3**, **CL4** thì cũng có thể xuất hiện thêm chiến lược **CL1**.

- Trong bài toán thực nghiệm, chúng tôi đã lựa chọn hàm căn bậc hai

➤ V_{a2} : hàm số dưới dấu căn bậc hai.

- Giá trị của biến là : chọn hàm số dưới dấu căn là hàm số mà ĐH của nó luôn tồn tại hay ĐH của nó có thể không tồn tại tại điểm xét.

Chẳng hạn, nếu chọn hàm số dưới dấu căn mà ĐH luôn tồn tại với mọi x thì chiến lược **CL1** hầu như không xảy ra.

- Chúng tôi chọn trong thực nghiệm hàm số dưới dấu căn là $f(x) = x + 1$

Vì $(\sqrt{f(x)})' = (\sqrt{x+1})'$ chỉ tồn tại với $x \in (-1; +\infty)$

➤ V_{a3} : hàm số ngoài dấu căn

- Giá trị của biến là: Hàm số ngoài dấu căn có nhân tử giống (hay khác) nhân tử của hàm số trong dấu căn

Chẳng hạn, nếu chọn hàm số ngoài dấu căn có nhân tử giống nhân tử của hàm số trong dấu căn thì tạo điều kiện thuận lợi cho chiến lược **CL2**: “ Rút gọn biểu thức hàm số và áp dụng công thức tính ĐH rồi thay giá trị x vào ” và chiến lược **CL4**:

“ Dùng công thức tính ĐH, rút gọn biểu thức và thay giá trị x vào ”

- Trong thực nghiệm, Chúng tôi chọn hàm số ngoài dấu căn có nhân tử giống nhân tử của hàm số trong dấu căn. Cụ thể là $y = (x + 1)\sqrt{x + 1}$
- V_{a4} : giá trị để tính đạo hàm của $f(x)$ tại đó
- Giá trị của biến là: chọn điểm mà tại đó ĐH của hàm số tồn tại hay không tồn tại
Nếu chỉ chọn những giá trị x mà tại đó ĐH của hàm số $y = f(x)$ luôn tồn tại thì chiến lược **CL1** có thể không xuất hiện và các chiến lược **CL2, CL3, CL4** được ưu tiên
Nếu chỉ chọn các giá trị x mà tại đó ĐH không tồn tại thì chiến lược **CL1** có thể xuất hiện và các chiến lược **CL2, CL3, CL4** có thể không xuất hiện
- Trong thực nghiệm, chúng tôi chọn $x = 0$ (tại điểm này hàm số có ĐH) và tại $x = -1$ (hàm số không có ĐH)

b)

Có hai biến didactic giống như câu a

- V_{a1} : dạng hàm số $f(x)$

Giá trị của biến chúng tôi chọn là hàm phân thức lượng giác

- V_{a4} : giá trị để tính đạo hàm của $f(x)$ tại đó

Giá trị biến chúng tôi chọn là $x = \frac{\pi}{4}$ (tại điểm này hàm số có ĐH) và tại $x = \pi$ (hàm số không có ĐH)

Ngoài ra còn có thêm biến didactic

- V_b : chọn hàm số ở tử và mẫu
- Giá trị của biến là: chọn hàm số ở tử và mẫu có (hay không có) nhân tử chung với nhau.
Nếu chọn hàm số ở tử và mẫu có nhân tử chung với nhau thì tạo điều kiện cho chiến lược **CL2** và chiến lược **CL4** xuất hiện.
- Trong thực nghiệm, chúng tôi chọn hàm số $y = \frac{\tan x}{\sin x}$, tử và mẫu của hàm số này có nhân tử chung là: $\sin x$

c)

Có các biến didactic giống như câu b

- V_{a1} : dạng hàm số $f(x)$

Giá trị của biến chúng tôi chọn là hàm phân thức hữu tỉ

- V_{a4} : giá trị để tính đạo hàm của $f(x)$ tại đó.

Giá trị biến chúng tôi chọn là $x = 2$ (tại điểm này hàm số có ĐH) và tại $x = 1$ (hàm số không có ĐH)

➤ V_b : chọn hàm số ở tử và mẫu

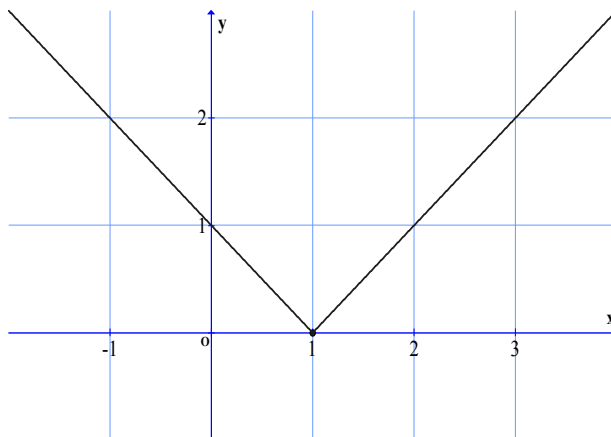
Giá trị của biến: chúng tôi chọn hàm số $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

(tử và mẫu của hàm số này có nhân tử chung là: $(x - 1)$)

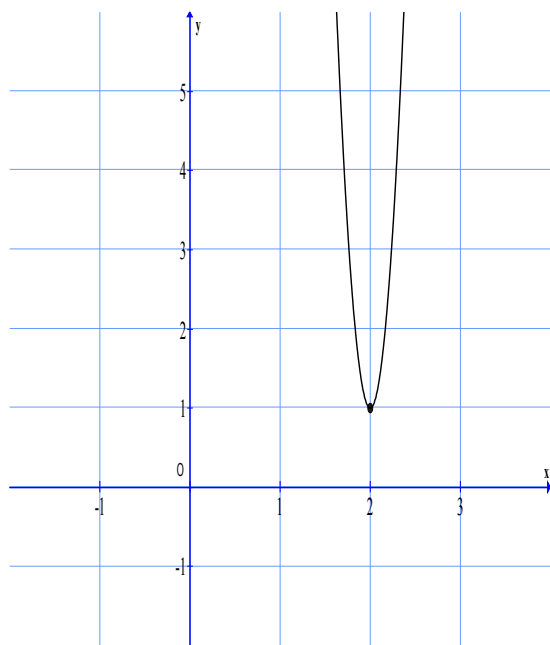
3.3.4. Bài tập 4

Cho các hàm số và đồ thị tương ứng dưới đây. Dựa vào hình vẽ, hãy cho biết tại điểm x_0 đã chỉ ra các hàm số đã cho có đạo hàm không ? Giải thích ?

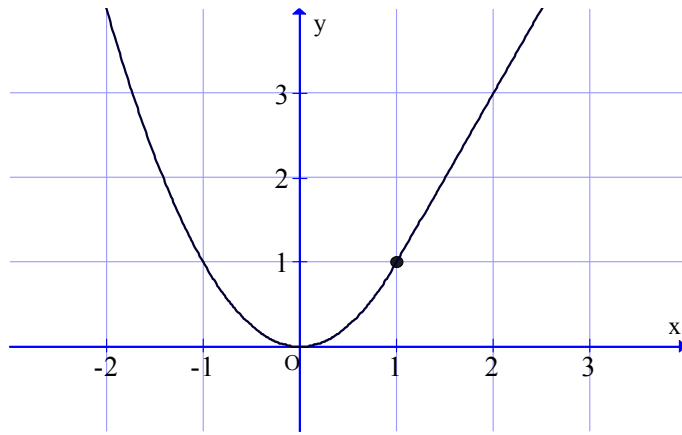
a) $y = f(x)$ tại $x_0 = 1$



b) $y = g(x)$ tại $x_0 = 2$

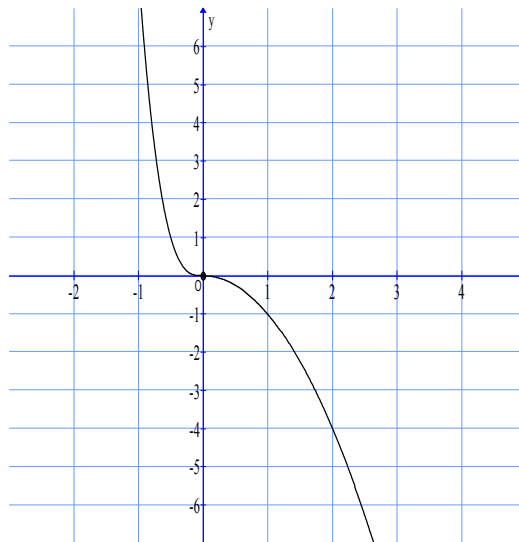


c) $y = h(x)$ tại $x_0 = 1$

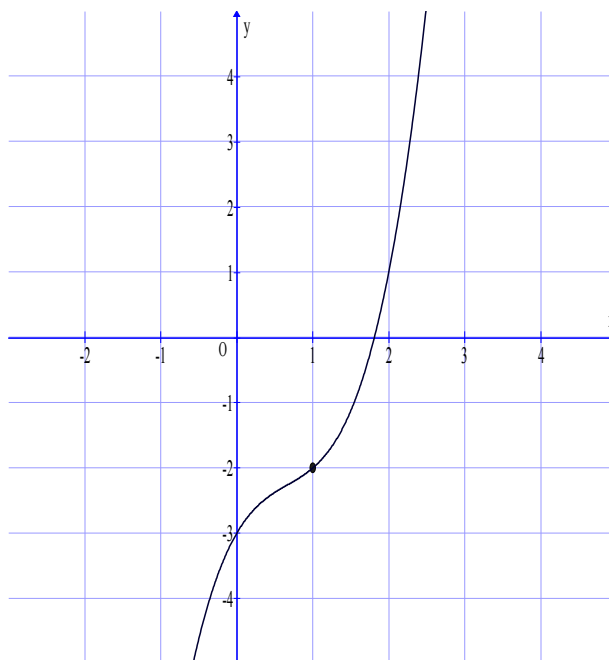


d) $y = u(x)$

tại $x_0 = 0$



e) $y = v(x)$ tại $x_0 = 1$



❖ Mục đích: kiểm chứng một số kết luận sau

+ Khái niệm “đồ thị gãy tại một điểm” chưa được các SGK hiện hành xây dựng một cách chặt chẽ (**SGKC11** không xây dựng, còn **SGKNC11** thì đưa vào bài đọc thêm với kết luận như sau: “Nếu tại điểm x_0 hàm số f có ĐH bên phải và ĐH bên trái, nhưng chúng không bằng nhau thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ gọi là gãy tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ ”. Tuy nhiên hình ảnh một đồ thị như thế nào gọi là bị gãy tại một điểm thì lại không được đề cập nên HS sẽ vận dụng một cách “cảm tính” và máy móc về khái niệm này để kết luận về sự không tồn tại ĐH của hàm số tại điểm x_0 .

+ Để giải thích về sự tồn tại của đạo hàm tại một điểm nào đó bằng đồ thị, HS thường chỉ dự đoán theo “cảm giác” dựa trên các quan niệm như : đồ thị gãy, đồ thị liền nét hay đồ thị có tiếp tuyến tại đó. Đặc biệt, khi gặp những đồ thị mà hình dạng của nó tại điểm xét sự tồn tại ĐH bị *gấp khúc* hay *nhọn* theo trực giác thì quan niệm đồ thị gãy xuất hiện nhiều hơn ở HS.

❖ Các chiến lược giải có thể quan sát được

Chiến lược S_{TT} : “ chiến lược tiếp tuyến ”

Nếu “ nhìn thấy ” trên hình vẽ tại điểm đó mà đồ thị hàm số có tiếp tuyến thì có ĐH và không có tiếp thì không có ĐH tại điểm đó

- a) Không có ĐH tại $x_0 = 1$ vì tại đó đồ thị hàm số không có tiếp tuyến
(Hoặc HS có thể trả lời là có tiếp tuyến tại $x_0 = 1$ nên có ĐH tại điểm đó)
- b) Không có ĐH tại $x_0 = 2$ vì tại đó đồ thị hàm số không có tiếp tuyến
(Hoặc HS có thể trả lời là có tiếp tuyến tại $x_0 = 2$ nên có ĐH tại điểm đó)
- c) Không có ĐH tại $x_0 = 1$ vì tại đó đồ thị hàm số không có tiếp tuyến
(Hoặc HS có thể trả lời là có tiếp tuyến tại $x_0 = 1$ nên có ĐH tại điểm đó)
- d) Không có ĐH tại $x_0 = 0$ vì tại đó đồ thị hàm số không có tiếp tuyến
(Hoặc HS có thể trả lời là có tiếp tuyến tại $x_0 = 0$ nên có ĐH tại điểm đó)
- e) Không có ĐH tại $x_0 = 1$ vì tại đó đồ thị hàm số không có tiếp tuyến
(Hoặc HS có thể trả lời là có tiếp tuyến tại $x_0 = 1$ nên có ĐH tại điểm đó)

Chiến lược S_{Gay} : “ chiến lược đồ thị gãy ”

Nếu bằng trực giác “ nhìn thấy ” trên hình đồ thị “bị gãy” (hay liền nét không bị gãy) tại một điểm nào đó thì hàm số không có (hay có) ĐH tại đó.

- a) Tại $x_0 = 1$ đồ thị hàm số bị gãy nên hàm số không có ĐH tại đó
(hoặc HS có thể trả lời đồ thị liền nét không bị gãy tại $x_0 = 1$ nên có ĐH tại đó)
- b) Tại $x_0 = 2$ đồ thị hàm số bị gãy nên hàm số không có ĐH tại đó
(hoặc HS có thể trả lời đồ thị liền nét không bị gãy tại $x_0 = 2$ nên có ĐH tại đó)

- c) Tại $x_0 = 1$ đồ thị hàm số bị gãy nên hàm số không có ĐH tại đó
(hoặc HS có thể trả lời đồ thị liên nét không bị gãy tại $x_0 = 1$ nên có ĐH tại đó)
- d) Tại $x_0 = 0$ đồ thị hàm số bị gãy nên hàm số không có ĐH tại đó
(hoặc HS có thể trả lời đồ thị liên nét không bị gãy tại $x_0 = 0$ nên có ĐH tại đó)
- e) Tại $x_0 = 1$ đồ thị hàm số bị gãy nên hàm số không có ĐH tại đó
(hoặc HS có thể trả lời đồ thị liên nét không bị gãy tại $x_0 = 1$ nên có ĐH tại đó)

Ngoài ra, chúng tôi dự kiến có một số HS không có câu trả lời hoặc trả lời nhưng không giải thích được. Điều này có thể là do HS không chắc chắn kết quả khi chỉ dựa vào đồ thị.

❖ **Biến didactic**

Chúng ta có các biến didactic như sau

➤ V_{4a} : đồ thị hàm số

- Giá trị của biến là : *cho đồ thị hàm số hay không cho đồ thị hàm số*

Chẳng hạn, nếu chọn cho đồ thị hàm số kèm theo thì sẽ tạo thuận lợi cho chiến lược S_{TT} : “ chiến lược tiếp tuyến ” và chiến lược S_{Gay} : “ chiến lược đồ thị gãy ” xuất hiện.

Nếu không có đồ thị hàm số kèm theo, khi đó phải cho công thức hàm số $y = f(x)$. Như vậy, tạo điều kiện xuất hiện cho chiến lược S_{GH} : “ giới hạn một bên ” (kỹ thuật giải như sau: Tìm

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Nếu chúng tồn tại và bằng nhau thì có ĐH tại x_0 , nếu chúng

không tồn tại hai giới hạn hoặc hai giới hạn có kết quả khác nhau thì không có ĐH tại x_0).

- Trong bài toán thực nghiệm, chúng tôi chọn giá trị của biến là : cho đồ thị hàm số kèm theo.

➤ V_{4b} : công thức hàm số

- Giá trị của biến là : *cho công thức hàm số hay không cho công thức hàm số*

Chẳng hạn, nếu cho công thức hàm số thì tạo điều kiện cho chiến lược S_{GH} : “ giới hạn một bên ” xuất hiện.

Nếu không cho công thức hàm số thì chiến lược S_{GH} hầu như không xuất hiện và các chiến lược S_{TT} , S_{Gay} sẽ được HS lựa chọn. Vì khi đó chỉ có sự xuất hiện của đồ thị hàm số.

- Chúng tôi chọn trong thực nghiệm giá trị của biến là : không cho công thức hàm số.

Ở câu a) công thức hàm số tương ứng với đồ thị đã cho là $y = |x - 1|$. Do đó tại điểm $x_0 = 1$ thì hàm số này không có ĐH. Chúng ta có thể kiểm tra điều này bằng kỹ thuật S_{GH} .

Ở câu b) công thức hàm số tương ứng với đồ thị đã cho là $y = 36(x - 2)^2 + 1$. Do đó tại điểm $x_0 = 2$ thì hàm số này có ĐH.

Ở câu c) công thức hàm số tương ứng với đồ thị đã cho là $y = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

Do đó tại điểm $x_0 = 1$ thì hàm số này có ĐH. Chúng ta có thể kiểm tra điều này bằng kỹ thuật S_{GH} .

Ở câu d) công thức hàm số tương ứng với đồ thị đã cho là $y = \begin{cases} -8x^3 & \text{khi } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$.

Do đó tại điểm $x_0 = 0$ thì hàm số này có ĐH. Chúng ta có thể kiểm tra điều này bằng kỹ thuật S_{GH} .

Ở câu d) công thức hàm số tương ứng với đồ thị đã cho là $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 3$. Do đó tại điểm $x_0 = 1$ thì hàm số này có ĐH.

➤ V_{4c} : hình dáng đồ thị tại điểm yêu cầu xét sự tồn tại ĐH.

- Giá trị của biến là: chọn đồ thị có hình dáng “bị gãy” hay “không bị gãy” tại điểm yêu cầu xét sự tồn tại ĐH.

Nếu chỉ chọn những dạng đồ thị mà tại giá trị x_0 hàm số $y = f(x)$ “nhìn thấy” liền nét, không bị gãy thì tạo điều kiện cho chiến lược S_{TT} : “chiến lược tiếp tuyến” xuất hiện. Ngược lại, nếu chọn dạng đồ thị mà tại giá trị x_0 nhìn thấy có cảm giác “bị gãy” sẽ tạo thuận lợi cho việc sử dụng chiến lược S_{Gay} .

- Trong thực nghiệm, Chúng tôi chọn giá trị của biến như sau

Câu a) chúng tôi chọn hình dáng đồ thị hàm số “bị gãy” theo như quan sát hình vẽ tại điểm yêu cầu xét sự tồn tại ĐH. Hàm số này đúng là không có ĐH tại điểm đó (hàm số $y = |x - 1|$).

Câu b) chúng tôi chọn hình dáng đồ thị hàm số có cảm giác “bị gãy” theo như quan sát hình vẽ tại điểm yêu cầu xét sự tồn tại ĐH. Nhưng thực ra hàm số đã cho có ĐH tại đó (hàm số $y = 36(x - 2)^2 + 1$).

Câu c) chúng tôi chọn hình dáng đồ thị hàm số có cảm giác “bị gãy” theo như quan sát hình vẽ tại điểm yêu cầu xét sự tồn tại ĐH. Nhưng thực ra hàm số đã cho có ĐH tại đó (hàm số

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}.$$

Câu d) chúng tôi chọn hình dáng đồ thị hàm số có cảm giác “bị gãy” theo như quan sát hình vẽ tại điểm yêu cầu xét sự tồn tại ĐH. Nhưng thực ra hàm số đã cho có ĐH tại đó (hàm số

$$y = \begin{cases} -8x^3 & \text{khi } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}.$$

Câu e) chúng tôi chọn hình dáng đồ thị hàm số có cảm giác “bị gãy” theo như quan sát hình vẽ tại điểm yêu cầu xét sự tồn tại ĐH. Nhưng thực ra hàm số đã cho có ĐH tại đó (hàm số

$$y = x^3 - 2x^2 + 2x - 3).$$

3.4. Phân tích a posteriori

Chúng tôi đã tiến hành thực nghiệm tại năm lớp 11 khá giỏi của ba trường THPT Ngô Quyền, THPT Long Thành, THPT Tam Phước (thuộc tỉnh Đồng Nai). Cụ thể như sau:

Tổng cộng HS thực nghiệm là : **185**

- Trường THPT Ngô Quyền gồm 2 lớp: 11a3, 11a5. Trong đó lớp 11a3 có 38 HS (kí hiệu NQ1 đến NQ38) và lớp 11a5 có 41 HS (kí hiệu NQ39 đến NQ79).
- Trường THPT Long Thành gồm 2 lớp : 11a4, 11a5. Trong đó lớp 11a5 có 40 HS(kí hiệu LT1 đến LT40) và lớp 11a4 có 32 HS (kí hiệu LT41 đến LT72).
- Trường THPT Tam Phước có 34 HS lớp 11a2 tham gia thực nghiệm (kí hiệu TP1 đến TP34).

Sau khi thực nghiệm chúng tôi tiến hành thống kê số liệu trên từng lớp về các chiến lược giải mà HS đã thể hiện trong các phiếu trả lời. Sau đó chúng tôi tổng hợp lại toàn bộ để có số liệu thống kê của tất cả 185 HS.

3.4.1. Phân tích sản phẩm thu được ở Bài tập 1

- Bảng thống kê về chiến lược giải câu 1a

	Chiến lược S1	Chiến lược S2	Chiến lược khác	Không trả lời
Câu 1a	123	59	1	2

Qua bảng thống kê chúng ta thấy có một lượng lớn gồm 123 HS chọn chiến lược S1: “ tính ĐH bằng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ” để giải bài toán trên, trong khi đó có 59 HS sử dụng **Chiến lược S2** : “

tính ĐH bằng $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ”.

Ở câu 1a, hàm số cho rất đơn giản là $y = 2x - 3$. Nhưng khi tính ĐH của hàm số này tại $x_0 = 2$ bằng định nghĩa, phần lớn HS vẫn chọn trình bày theo chiến lược S1, điều này có thể thấy rằng việc tính ĐH bằng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tạo thuận lợi hơn cho HS trong việc trình bày lời giải. HS dễ thấy được

giới hạn của tỉ số số gia khi x dần đến x_0 , giới hạn này quen thuộc với HS vì HS đã gặp nhiều trong phần tính giới hạn hàm số đã học ngay trước đó.

Trích dẫn bài làm của TP26 (dùng chiến lược S1)

“ Theo định nghĩa ta có :

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(2x - 3) - (2x_0 - 3)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2 \end{aligned}$$

- Bảng thống kê về chiến lược câu 1b

	Chiến lược S1	Chiến lược S2	Chiến lược khác	Không trả lời
Câu 1b	108	39	5	33

Qua bảng thống kê, chúng ta thấy có đến 108 HS chọn chiến lược S1 để giải. Ngoài ra cũng có 33 HS không có câu trả lời, như vậy có thể thấy:

- Đối với hàm số cho bởi nhiều biểu thức, việc trình bày theo chiến lược S2 để giải quyết KNV nói trên là khó thực hiện hơn so với hàm số cho bởi một biểu thức. Phần lớn HS chọn chiến lược S1 để giải vì dễ thấy được giới hạn của tỉ số số gia khi x dần đến x_0 . Điều này sẽ khó hình dung nếu trình bày bằng $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ như chiến lược S2

(HS phải qua một bước trung gian, từ $\Delta x \rightarrow 0$ chuyển sang $x \rightarrow x_0$).

- Kiểu nhiệm vụ: “ Tính ĐH của hàm số tại một điểm bằng định nghĩa” trong đó dạng hàm số cho bởi nhiều biểu thức ít được GV đề cập.

Trích dẫn bài làm của NQ68 (dùng chiến lược S1)

$$\text{“ } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{9x - 4 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{9(x - 1)}{x - 1} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 3x^2 + 1 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x^2 + 4x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 4x + 4) = 9$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 9$$

$$\Rightarrow f'(1) = 9 \text{ ”}$$

Như vậy qua câu 1 chúng tôi đã kiểm chứng được kết luận : Khi tính ĐH của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ bằng định nghĩa, việc tính $y'(x_0)$ bằng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ chiếm ưu thế so với việc tính

$$y'(x_0) \text{ bằng } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

3.4.2. Phân tích sản phẩm thu được ở Bài tập 2

Bảng thống kê về chiến lược giải câu 2b

	Chiến lược S_{DN}	Chiến lược S_{CT}	Không trả lời
Câu 2b	8	176	2

Qua bảng thống kê, chúng ta thấy chiến lược S_{CT} : “công thức ĐH” chiếm ưu thế tuyệt đối (176 HS lựa chọn) và chiến lược S_{DN} : “ định nghĩa ĐH ” chỉ có 8 HS lựa chọn. Điều này cho thấy rằng:

- Đối với bài toán tính đạo hàm của một hàm số, HS thường sử dụng công thức ĐH đã biết.

- Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ (ở câu a) chính là ĐH của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ tại $x_0 = 3$. Nhưng hầu như HS không phát hiện ra điều đó. HS không quan tâm đến điều này do định nghĩa ĐH có vai trò rất mờ nhạt.

Trích dẫn bài làm của LT9 (dùng chiến lược S_{DN})

$$“ y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3+1}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \frac{1}{4} (đã tính ở trên) ”.$$

Như vậy chúng tôi đã kiểm chứng được kết luận : Định nghĩa ĐH có vai trò rất mờ nhạt đối với HS khi học khái niệm ĐH, mối quan hệ giữa ĐH và giới hạn hàm số được nêu trong định nghĩa ĐH dường như không tồn tại đối với cá nhân HS.

Mặt khác, chúng tôi cũng kiểm chứng được qui tắc hợp đồng

RE1: “ Tính đạo hàm của một hàm số là sử dụng các công thức đạo hàm đã có”

3.4.3. Phân tích sản phẩm thu được ở Bài tập 3

➤ Bảng thống kê về chiến lược giải câu 3a

Câu 3a	Chiến lược CL1	Chiến lược CL2	Chiến lược CL3	Chiến lược CL4	Không trả lời
	7	0	64	111	3

Chiến lược CL4. “ Dùng công thức tính ĐH, rút gọn biểu thức và thay giá trị x vào ”

Được đa số được HS sử dụng (111 HS). Ngoài ra chiến lược CL3 cũng có 64 HS lựa chọn. Chỉ có 7 HS chọn chiến lược CL1 để giải quyết câu 3a). Điều này cho thấy:

- HS thường chỉ gặp bài toán yêu cầu tính đạo hàm tại điểm mà tại điểm đó ĐH đã tồn tại. Điều này, làm cho HS không lưu ý việc kiểm tra hàm số đã cho có tồn tại ĐH tại điểm đang xét hay không ?
- HS có thói quen rút gọn các biểu thức hàm số trong quá trình tính toán mà không quan tâm đến điều kiện rút gọn được.

Trích dẫn bài làm của NQ10 (dùng **Chiến lược CL4**)

$$“ y' = \sqrt{x+1} + (x+1) \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3\sqrt{x+1}}{2}$$

$$\Rightarrow y'(0) = \frac{3}{2} \quad y'(-1) = 0 ”.$$

➤ Bảng thống kê về chiến lược giải câu 3b

Câu 3b	Chiến lược	Chiến lược	Chiến lược	Chiến lược	Không trả lời
	CL1	CL2	CL3	CL4	
	5	68	26	77	9

Chiến lược CL2. “ Rút gọn biểu thức hàm số và áp dụng công thức tính ĐH rồi thay giá trị x vào ” cùng với **Chiến lược CL4:** “ Dùng công thức tính ĐH, rút gọn biểu thức và thay giá trị x vào ” được đa số được HS sử dụng. Tổng cộng có 145 HS dùng một trong hai chiến lược trên. Chỉ có 5 HS chọn lựa chiến lược CL1 để giải.

Kết quả này cho thấy:

- HS không kiểm tra sự tồn tại đạo hàm tại điểm đang xét trước khi tính.
- Hàm số $y = \frac{\tan x}{\sin x}$ tạo thuận lợi cho HS rút gọn trước khi tính ĐH.
- Nếu không rút gọn từ đầu, sau khi tính ĐH, hàm số trên vẫn thuận lợi cho việc rút gọn biểu thức y' . Điều này phù hợp theo thói quen rút gọn biểu thức hàm số ở HS.

Trích dẫn bài làm của LT32 (dùng Chiến lược CL2)

$$\begin{aligned} \text{“ } y &= \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos x} \\ \Rightarrow y' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \quad y'(\pi) = \frac{\tan \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0 \text{ ”.} \end{aligned}$$

Trích dẫn bài làm của NQ21 (dùng Chiến lược CL4)

$$\begin{aligned} \text{“ } y &= \frac{\tan x}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\tan x)' \sin x - (\sin x)' \tan x}{\sin^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ y' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \sqrt{2} \quad y'(\pi) = \frac{\sin \pi}{\cos^2 \pi} = 0 \text{ ”.} \end{aligned}$$

➤ Bảng thống kê về chiến lược giải câu 3c

Câu 3c	Chiến lược	Chiến lược	Chiến lược	Chiến lược	Không trả lời
	CL1	CL2	CL3	CL4	
	7	117	26	29	6

Chiến lược CL2. “ Rút gọn biểu thức hàm số và áp dụng công thức tính ĐH rồi thay giá trị x vào ” chiếm ưu thế khá lớn (117 HS). Điều này cho thấy:

- Hàm số $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ mà chúng tôi lựa chọn tạo cho HS thể hiện rõ thói quen rút gọn biểu thức hàm số trước khi tính ĐH.
- HS không quan tâm đến sự tồn tại của ĐH tại điểm đang xét trước khi tính ĐH.

Trích dẫn bài làm của NQ1 (dùng **Chiến lược CL2**)

$$“ y = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1 \Rightarrow y' = 2x + 1$$

$$Tại x = 2 \Rightarrow y' = 2.2 + 1 = 5$$

$$Tại x = 1 \Rightarrow y' = 2.1 + 1 = 3 ”.$$

Qua bài tập 3, chúng ta kiểm chứng được qui tắc hợp đồng

RE2: “Trong các bài toán tìm đạo hàm của một hàm số, HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số đã cho có đạo hàm hay không mà chỉ việc tính đạo hàm” .

3.4.4. Phân tích sản phẩm thu được ở Bài tập 4

Bảng thống kê về chiến lược giải

Câu 4	Chiến lược S_{TT}	Chiến lược S_{Gay}	Chiến lược khác	Không giải thích	Không trả lời
4a)	18	140	11	9	7
4b)	51	84	23	15	12
4c)	41	97	22	10	15
4d)	46	93	14	19	13
4e)	45	90	10	22	18

Hầu hết các HS sử dụng hai chiến lược : S_{TT} , S_{Gay} để giải thích cho kết luận của mình.

🚩 Câu 4a) có đến 140 HS dùng chiến lược S_{Gay} . Trong đó có đến 123 HS kết luận đúng : Hàm số không có ĐH tại điểm $x_0 = 1$. Điều này cho thấy:

- Đồ thị đã cho *bị gãy mạnh* tại điểm $x_0 = 1$.
- Kết luận theo trực giác hình vẽ về sự tồn tại ĐH của hàm số tại điểm đang xét trong trường hợp này khá chính xác.

Trích dẫn bài làm 4a)

▪ LT19 (dùng **Chiến lược S_{Gay}**)

“ Hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 = 1$ không có đạo hàm vì đồ thị gãy khúc tại $x_0 = 1$ ”.

▪ TP11(dùng **Chiến lược S_{TT}**)

“ Không có đạo hàm tại $x_0 = 1$ vì hàm số không có tiếp tuyến tại $x_0 = 1$ ”.

- ✚ Câu 4b) có 84 HS dùng chiến lược S_{Gay}. Trong số này có 56 HS kết luận: Hàm số không có ĐH tại $x_0 = 2$ (kết luận sai). Điều này cho thấy, việc dựa vào đồ thị kết luận về sự tồn tại ĐH của hàm số theo chiến lược S_{Gay} trong trường hợp này là không thật sự chính xác. Tại điểm $x_0 = 2$, đồ thị “nhọn” nên HS kết luận sai dựa vào trực giác hình vẽ.
- ✚ Câu 4c), Trong số 97 HS lựa chọn chiến lược S_{Gay} để giải thích, có đến 64 HS kết luận : Hàm số không có ĐH tại điểm $x_0 = 1$ (kết luận sai). Tại điểm này theo trực giác hình vẽ nhiều HS lầm tưởng đồ thị gãy.
- ✚ Câu 4d) có 93 HS sử dụng chiến lược S_{Gay}. Trong số này có 62 HS kết luận: Hàm số không có ĐH tại điểm $x_0 = 0$ (kết luận sai). Trên đồ thị, khi qua điểm (0,0) cảm giác gãy khá mạnh nên HS dựa vào trực giác đã cho kết luận sai khá đông.
- ✚ Câu 4e) có 90 HS sử dụng chiến lược S_{Gay}. Trong đó có 46 HS kết luận: Hàm số không có ĐH tại điểm $x_0 = 1$ (kết luận sai). Trên đồ thị, khi qua điểm (1,-2) cảm giác gãy không nhiều nên HS dựa vào trực giác đã cho kết luận sai ít hơn.

Chúng tôi chỉ trích dẫn một số bài làm câu 4b, 4c, 4d, 4e của HS sử dụng chiến lược S_{Gay}

Trích dẫn bài làm 4b) của LT63

“ Đồ thị bị gãy khúc $\Rightarrow$ hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 2$ ”.

Trích dẫn bài làm 4c) của NQ5

“ Tại $x_0 = 1$ không có đạo hàm vì đồ thị hàm số bị đứt gãy tại $x_0 = 1$ ”.

Trích dẫn bài làm 4d) của LT69

“ không vì đồ thị bị gãy tại vị trí $x_0 = 0$ ”.

Trích dẫn bài làm 4e) của NQ45

“ Đồ thị hàm số trên không có đạo hàm vì bị gãy khúc tại $x_0 = 1$ ”.

Qua thực nghiệm bài tập 4, chúng tôi thấy rằng, đối với kiểu bài toán: Dựa vào đồ thị xét sự tồn tại ĐH của hàm số tại một điểm. HS thường giải thích dựa theo các quan niệm : đồ thị gãy, đồ thị liên nét, đồ thị có tiếp tuyến. Đặc biệt, khi gặp những đồ thị mà hình dạng của nó tại điểm xét sự tồn tại ĐH bị gãy, gấp khúc hay nhọn theo trực giác thì quan niệm đồ thị gãy xuất hiện nhiều hơn ở HS. Việc dựa vào đồ thị xác định sự tồn tại ĐH chỉ được HS giải quyết theo trực giác, chính vì vậy kết quả có thể không đảm bảo là luôn chính xác.

3.5. Kết luận về thực nghiệm

Qua thực nghiệm, chúng tôi đã kiểm chứng được các kết luận:

- Định nghĩa đạo hàm có vai trò mờ nhạt đối với cá nhân học sinh, mối quan hệ giữa đạo hàm và giới hạn hàm số được nêu trong định nghĩa đạo hàm hầu như không tồn tại đối với HS.
- Khi tính ĐH của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ bằng định nghĩa, việc tính $y'(x_0)$ bằng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ chiếm ưu thế so với việc tính $y'(x_0)$ bằng $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Để giải thích về sự tồn tại của đạo hàm tại một điểm nào đó bằng đồ thị HS thường chỉ dự đoán theo “cảm giác” dựa trên nhiều quan niệm như : đồ thị gãy, đồ thị liền nét hay đồ thị có tiếp tuyến tại đó. Đặc biệt, khi gặp những đồ thị mà hình dạng của nó tại điểm xét sự tồn tại ĐH bị *gãy, gấp khúc* hay *nhọn* theo trực giác thì quan niệm đồ thị gãy xuất hiện nhiều hơn ở HS. Việc dựa vào đồ thị xác định sự tồn tại ĐH chỉ được HS giải quyết theo trực giác, chính vì vậy kết quả có thể không đảm bảo là luôn chính xác.

Đồng thời qua thực nghiệm, chúng tôi đã kiểm chứng được hai qui tắc hợp đồng

Qui tắc RE1: “ *Tính đạo hàm của một hàm số là sử dụng các công thức đạo hàm đã có*”

Qui tắc RE2: “*Trong các bài toán tìm đạo hàm của một hàm số, HS không có trách nhiệm kiểm tra hàm số đã cho có đạo hàm hay không mà chỉ việc tính đạo hàm*”

KẾT LUẬN CHUNG

Một số điểm chính trong những kết quả nghiên cứu đã đạt được của luận văn

- Trong chương 1, nghiên cứu việc xây dựng khái niệm đạo hàm trong một số giáo trình ở đại học cho chúng ta thấy rằng:
 - + Trước khi xây dựng khái niệm đạo hàm thì đã xây dựng một cách chặt chẽ về khái niệm giới hạn hàm số và hàm số liên tục(theo ngôn ngữ ε, δ).
 - + Định nghĩa đạo hàm có quan hệ mật thiết với các khái niệm giới hạn hàm số, hàm số liên tục , khái niệm vô cùng bé.
 - + Khái niệm đạo hàm còn được các giáo trình mở rộng cho hàm số nhiều biến, hàm số biến số phức.
 - + Xây dựng đầy đủ các định lý về giá trị trung bình, qui tắc L'Hospital, công thức Taylor và công thức Khai triển Mac Laurin. Do đó việc ứng dụng đạo hàm trong các giáo trình nêu trên rất đa dạng và phong phú.
- Trong chương 2, Việc nghiên cứu mối quan hệ thể chế đối với khái niệm đạo hàm đã cho phép làm rõ được những đặc trưng cơ bản của mối quan hệ thể chế với khái niệm đạo hàm. Cụ thể chúng tôi đã có các kết quả sau:
 - + Phân tích việc xây dựng khái niệm đạo hàm trong chương trình lớp 11, 12 hiện hành thuộc cả hai bộ sách nâng cao và cơ bản. Đồng thời đưa ra những điểm thay đổi so với chương trình lớp 12 chính lý hợp nhất năm 2000.
 - + Phân tích các tổ chức toán học liên quan đến khái niệm đạo hàm trong chương trình lớp 11, 12 hiện hành. Những ràng buộc của thể chế đã được ghi nhận từ nghiên cứu các tổ chức toán học hiện diện trong SGK và SBT.Kết quả phân tích mối quan hệ thể chế cũng đã dẫn chúng tôi đến giả thiết về sự tồn tại ngầm ẩn các qui tắc hợp đồng **RE1, RE2, RE3, RE4** cùng một số kết luận.
- Nghiên cứu thực nghiệm được trình bày trong chương 3 đã cho phép làm rõ một phần mối quan hệ cá nhân của HS đối với khái niệm đạo hàm và ảnh hưởng của mối quan hệ thể chế trên mối quan hệ cá nhân. Ảnh hưởng này thể hiện rõ nét nhất qua việc xác nhận sự tồn tại của các qui tắc hợp đồng didactic **RE1, RE2**.

Việc hợp thức hóa các qui tắc của hợp đồng didactic đã nêu sẽ đầy đủ hơn nếu thực nghiệm được tiến hành đồng thời trên cả hai chủ thể giáo viên và học sinh. Tuy nhiên vì lý do thời gian chúng tôi đã không tiến hành được thực nghiệm trên đối tượng giáo viên. Đó là một khiếm khuyết của nghiên cứu trong chương 3.

Hướng nghiên cứu mở ra từ luận văn

Từ kết quả thực nghiệm và phân tích ở chương 2 cho thấy: Tiến trình đưa vào khái niệm đạo hàm trong SGK làm hạn chế bớt nghĩa của khái niệm này. Từ đó, chúng tôi thấy có thể có một số hướng nghiên cứu mới sau đây:

- Xây dựng một tiểu đồ án didactic dẫn đến việc hình thành khái niệm đạo hàm mang đầy đủ nghĩa của nó.
- Nghiên cứu thực hành của GV trong việc dạy học khái niệm đạo hàm nhằm thấy rõ hơn ảnh hưởng của thể chế lên việc giảng dạy khái niệm này ở GV.

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên:.....

Lớp:.....Trường:.....

➤ **Lưu ý :** Học sinh làm bài ngay trên giấy đã phát và không được dùng bút xóa

Bài tập 1

Dùng định nghĩa tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0

a) $y = 2x - 3$ tại $x_0 = 2$

b) $y = \begin{cases} 9x-4 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

Lời giải

[illegible]

Bài tập 2

a) Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

b) Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ tại $x_0 = 3$

Lời giải

Bài tập 3

Tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm đã chỉ ra

a) $y = (x + 1)\sqrt{x + 1}$ tại $x = 0$; $x = -1$

b) $y = \frac{\tan x}{\sin x}$ tại $x = \frac{\pi}{4}$; $x = \pi$

c) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ tại $x = 2$; $x = 1$

Lời giải

Bài tập 4

a) $y = f(x)$ tại $x_0 = 1$

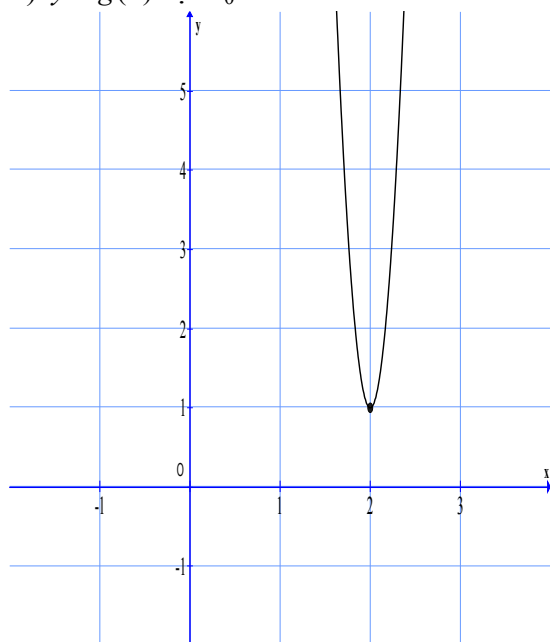


.....

.....

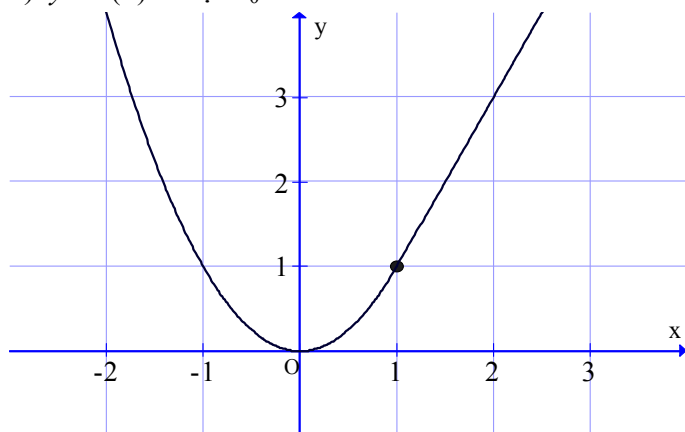
.....

b) $y = g(x)$ tại $x_0 = 2$



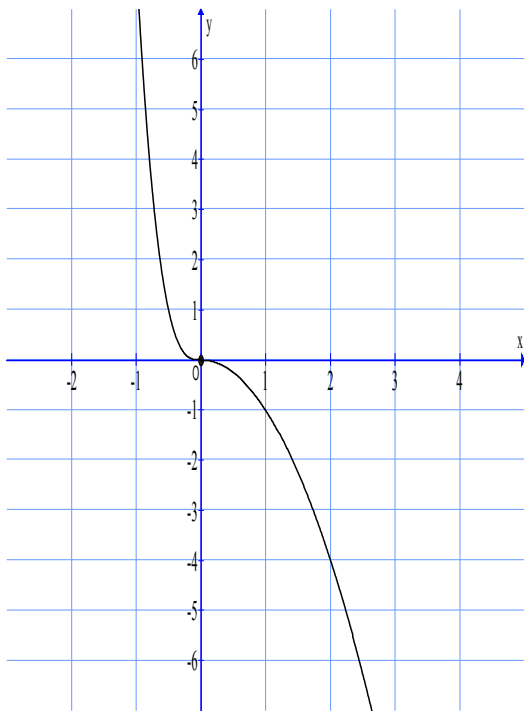
Trả lời

c) $y = h(x)$ tại $x_0 = 1$



Trả lời

d) $y = u(x)$ tại $x_0 = 0$



Trả lời

.....

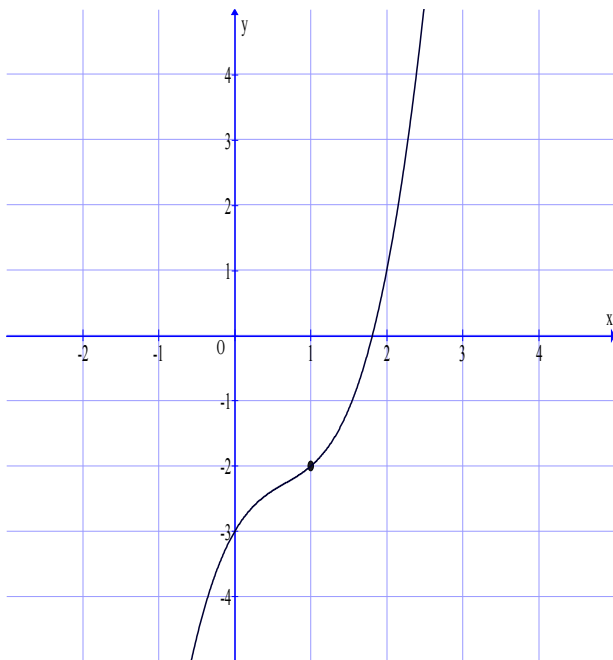
.....

.....

.....

.....

e) $y = v(x)$ tại $x_0 = 1$



Trả lời

.....

.....

.....

.....

TP26

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Phạm Ngọc Thuận
Lớp: 11A2 Trường: THPT Tam Phú

➤ **Lưu ý** : Học sinh làm bài ngay trên giấy đã phát và không được dùng bút xóa

Bài tập 1

Dùng định nghĩa tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0

a) $y = 2x - 3$ tại $x_0 = 2$

b) $y = \begin{cases} 9x - 4 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + 3x^2 + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

Lời giải

a) Đặt $y = f(x)$

Thao định nghĩa đạo hàm :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 3) - (2 \cdot 2 - 3)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2$$

NG 68
BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Nguyễn Văn Anh Sáng
Lớp: 11A5 Trường: Ngô Quyền

➤ Lưu ý: Học sinh làm bài ngay trên giấy đã phát và không được dùng bút xóa

Bài tập 1

Dùng định nghĩa tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0

a) $y = 2x - 3$ tại $x_0 = 2$

b) $y = \begin{cases} 9x - 4 & \text{khí } x \geq 1 \\ x^3 + 3x^2 + 1 & \text{khí } x < 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

Lời giải

a) $y = 2x - 3$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3 - 1}{x - 2} = 2 \Rightarrow f'(2) = 2$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{9x - 4 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{9x - 9}{x - 1} = 9$

51

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 3x^2 + 1 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x^2 + 4x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 4x + 4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 9$$

$$\Rightarrow f'(1) = 9$$

LT9

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Trần Lan Hương
Lớp: MA₅ Trường: THPT Long Thành

➤ Lưu ý: Học sinh làm bài ngay trên giấy đã phát và không được dùng bút xóa

Bài tập 2

a) Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

b) Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ tại $x_0 = 3$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$$

$$b) y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2 - (\sqrt{3+1} - 2)}{x - 3} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \frac{1}{4} \text{ (đã tính ở trên)}$$

NQ10

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Nguyễn Thảo Uyên
Lớp: M¹³ Trường: THPT Ngô Quyền

➤ **Lưu ý :** Học sinh làm bài ngay trên giấy đã phát và không được dùng bút xóa

Bài tập 3

Tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm đã chỉ ra

a) $y = (x+1)\sqrt{x+1}$ tại $x=0$; $x=-1$

b) $y = \frac{\tan x}{\sin x}$ tại $x = \frac{\pi}{4}$; $x = \pi$

c) $y = \frac{x^3-1}{x-1}$ tại $x=2$; $x=1$

Lời giải

a) $y = (x+1)\sqrt{x+1}$

$$y' = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x+1)$$

CL4 $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$

$$\Rightarrow y'(0) = \frac{3}{2} \quad y'(-1) = 0$$

NQ 21

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Nguyễn Phạm Hoàng Yên
 Lớp: 11A3 Trường Ngô Quyền

➤ Lưu ý: Học sinh làm bài ngay trên giấy đã phát và không được dùng bút xóa

$$\begin{aligned}
 b) \quad y &= \frac{\tan x}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\tan x)' \sin x - (\sin x)' \tan x}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x} \sin x - \cos x \tan x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x \sin x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin x} \\
 &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\
 y' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{2} \\
 y'(-\frac{\pi}{4}) &= \frac{\sin(-\frac{\pi}{4})}{\cos^2(-\frac{\pi}{4})} = 0
 \end{aligned}$$

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: HOÀNG HỮU GIA HÂN
Lớp: 11A5 Trường THPT LONG THÀNH

$$b) \quad y = \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\tan(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = \frac{1}{(\sqrt{2}/2)} = \sqrt{2}$$

$$\bullet \quad y'(\pi) = \frac{\tan(\pi)}{\cos(\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

NQ1

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Nguyễn Thị Hoàng Sơn
Lớp: 11A8 Trường: Ngô Quyền

➤ **Lưu ý** : Học sinh làm bài ngay trên giấy đã phát và không được dùng bút xóa

$$c) \quad y = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

12 $\Rightarrow y' = 2x + 1$

Tại $x = 2 \Rightarrow y' = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

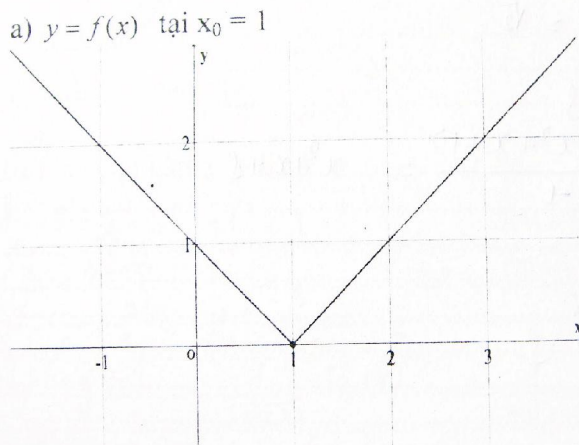
$x = 1 \Rightarrow y' = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

LT19

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Nguyễn Thu Ngân
Lớp: 11A5 Trường: TTHPT Long Thành

➤ **Lưu ý** : Học sinh làm bài ngay trên giấy đã phát và không được dùng bút xóa



Trả lời

Sgày

Hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 = 1$ không có đạo hàm vì đồ thị
gãy khúc tại $x_0 = 1$

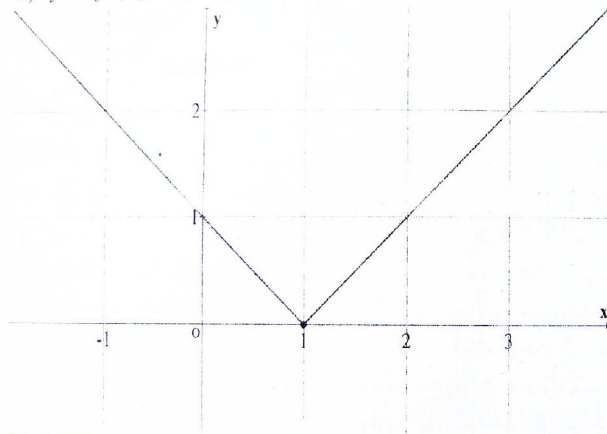
TP11

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Nguyễn Thị Thanh Hoa
Lớp: 11A Trường: THPT Tên: Thước

➤ **Lưu ý** : Học sinh làm bài ngay trên giấy đã phát và không được dùng bút xóa

a) $y = f(x)$ tại $x_0 = 1$



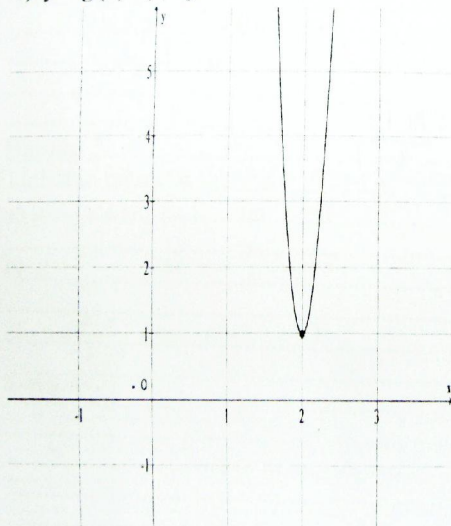
Trả lời

không có đạo hàm tại $x_0 = 1$
vì hàm số không có tiếp tuyến tại $x_0 = 1$

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Phạm Lê Thanh Tuấn
Lớp: 11A4 Trường: THPT LONG THANH

b) $y = g(x)$ tại $x_0 = 2$



Trả lời

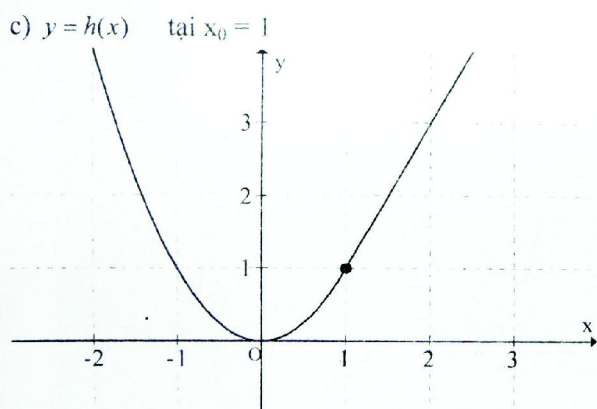
Sgày

Đồ thị bị gãy khúc $\Rightarrow$ hàm số không có đạo
hàm tại $x_0 = 2$

NQ5

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Võ Thị Phương Trâm
Lớp: 11.A7 Trường Võ Nguyên



Trả lời

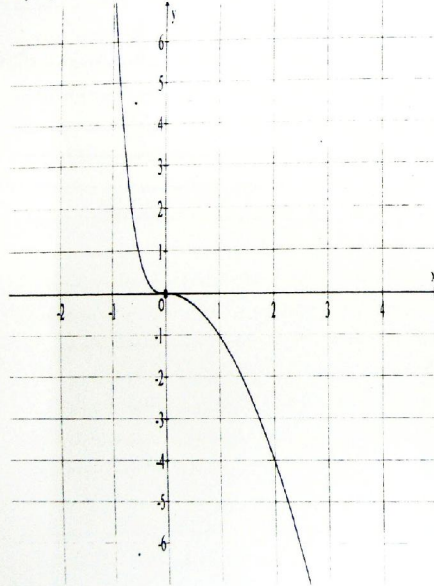
tại $x_0 = 1$ có đạo hàm vì đồ thị hàm số ~~không~~
đứt gãy tại $x_0 = 1$

LT69

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Đông Hoàng Ngân
Lớp: MA 4 Trường: T.H.P.T. Long Thành

d) $y = u(x)$ tại $x_0 = 0$



Trả lời

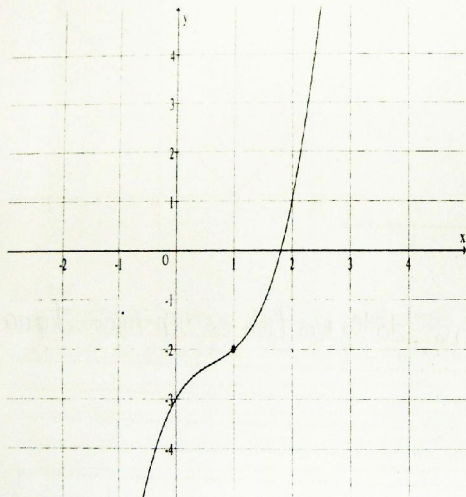
Sgay không vì đồ thị bị gãy tại vị trí $x_0 = 0$

NQ45

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Họ và tên: Trần Duy Bảo
Lớp: 11A⁵ Trường: Ngô Quyền

e) $y = v(x)$ tại $x_0 = 1$



Sguy

Trả lời

..... Đồ thị hàm số trên không có đạo hàm vì bị gãy khúc tại
..... $x_0 = 1$
.....