

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Thân Thị Phương Trang

**MỘT SỐ BÀI TOÁN PHÂN HOẠCH XÍCH
ĐỐI XỨNG TRÊN CÁC POSET CÓ HẠNG,
HỮU HẠN**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thành phố Hồ Chí Minh - 2010

PHẦN MỞ ĐẦU

Kể từ khi Sperner đưa ra định lý Sperner (1928) về số cực đại các phần tử của một phân xích trên poset các tập con của tập n -phần tử thì định lý này đã được các nhà toán học khác chứng minh lại, tổng quát hóa và mở rộng đến lý thuyết về các poset. Trong đó có một cấu trúc rất đẹp là cấu trúc xích đối xứng, đặc biệt là sự phân hoạch xích đối xứng trên các poset và các ứng dụng của nó. Vì trong các dạng poset, ta thường quan tâm đến các poset có hạn và hữu hạn nên ở luận văn này ta chỉ chú ý đến các poset dạng đó, đặc biệt là poset $P(S)$ các tập con của tập n -phần tử S , poset $P(m)$ các ước nguyên dương của số nguyên m cho trước và poset tích trực tiếp của chúng.

Năm 1951, nhà toán học de Bruijn đã chứng minh poset $P(m)$ các ước nguyên dương của số nguyên m cho trước có một phân hoạch thành các xích đối xứng – tức $P(m)$ có thể biểu diễn như hợp rời rạc các xích đối xứng. Kết quả này được xây dựng nhờ vào phương pháp quy nạp theo số các ước nguyên tố phân biệt của số m . Nhưng khi m có khá nhiều các ước nguyên tố thì phương pháp này trở nên phức tạp. Vì vậy vào năm 1976, trong xu thế tìm kiếm các phương pháp phân hoạch trực tiếp cho poset $P(m)$, hai nhà toán học Greene và Kleitman đã đạt được một kết quả khá đẹp; họ đưa ra được một phân hoạch trực tiếp xích đối xứng cho poset $P(S)$ các tập con của tập n – phần tử S . Kết quả này là lời giải cho một trường hợp đặc biệt ($k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$) của bài toán phân hoạch trực tiếp xích đối xứng poset $P(m)$ với $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, nhưng đồng thời cũng là cơ sở để ta giải quyết bài toán này trong trường hợp tổng quát.

Trong luận văn này, tôi sẽ trình bày cả hai phương pháp (quy nạp và trực tiếp) để phân hoạch hai poset ($P(S)$ và $P(m)$) thành các xích đối xứng và chỉ ra rằng cả hai phương pháp này đều như nhau. Sau đó, tôi sẽ đi sâu vào cấu trúc của một phân hoạch xích đối xứng xét về khía cạnh số lượng xích đối xứng, size của các xích đối xứng và số các xích đối xứng có cùng size i . Cuối cùng, tôi đưa ra một số ứng dụng của phương pháp phân hoạch trực tiếp xích đối xứng để tính số phân xích của poset $P(S)$.

CHƯƠNG 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Quan hệ thứ tự:

Định nghĩa 1.1.1:

“ $\leq$ ” được gọi là quan hệ thứ tự trên tập hợp P nếu $\forall x, y, z \in P$ ta có:

- i) $x \leq x$
- ii) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$
- iii) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Ví dụ 1.1.1: Các quan hệ sau là quan hệ thứ tự:

- Quan hệ bao hàm trên tập các tập con của một tập hợp S .
- Quan hệ chia hết trên tập các ước nguyên dương của một số nguyên m .

1.2. Tập sắp thứ tự bộ phận (poset):

Định nghĩa 1.2.1:

Tập hợp P với quan hệ thứ tự $\leq$ được gọi là một tập sắp thứ tự bộ phận, hay còn gọi là một poset.

Ví dụ 1.2.1: Các tập hợp sau là các poset:

- Tập các tập con của một tập hợp S với quan hệ bao hàm.
- Tập các ước nguyên dương của một số nguyên m với quan hệ chia hết.

1.3. Một số khái niệm cơ bản trên một poset:

Trong một poset $(P, \leq)$ ta có các khái niệm cơ bản sau:

- Hai phần tử $x, y \in P$ được gọi là so sánh được với nhau nếu $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.
- Nếu $x \leq y$ và $x \neq y$ thì ta viết $x < y$.
- Nếu $x < y$ và không có $z \in P: x < z < y$ thì ta nói y phủ x .
- Nếu có duy nhất $z \in P: z \leq x, \forall x \in P$ thì ta gọi z là phần tử bé nhất của P , ký hiệu là 0 .

Ví dụ 1.3.1: +) Phần tử 0 của poset các tập con của tập n phần tử S là tập $\emptyset$.

+) Phần tử 0 của poset các ước nguyên dương của một số nguyên m là 1 .

- $x \in P$ được gọi là phần tử tối tiểu của P nếu không có $y \in P: y < x$.
- $x \in P$ được gọi là phần tử tối đại của P nếu không có $y \in P: x < y$.
- Nếu $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ thì ta nói $x_1, x_2, \dots, x_n$ tạo thành một xích.
- Xích $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ thỏa x_{i+1} phủ $x_i, \forall i < n$ được gọi là một xích bão hòa.

1.4. Hàm hạng, poset có hạng:

Giả sử $(P, \leq)$ là poset có tính chất (*): $\forall x, y \in P, x < y$ thì tất cả những xích bão hòa từ x đến y đều có cùng lực lượng. Đặc biệt, $\forall x \in P$ thì tất cả những xích bão hòa từ 0 đến x cũng sẽ có cùng lực lượng. Khi đó nếu ta định nghĩa độ dài của một xích là lực lượng của xích đó trừ đi 1 thì ta có thể định nghĩa hạng $r(x)$ của một phần tử x là độ dài của một xích bão hòa từ 0 đến x .

Định nghĩa 1.4.1:

Cho $(P, \leq)$ là poset có tính chất (*) như trên. Khi đó hàm số $r: P \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto r(x)$$

được gọi là hàm hạng của P , trong đó $r(x)$ là hạng của phần tử x .

Một poset có tính chất (*) như trên được gọi là poset có hạng, với hàm hạng r .

Để dễ dàng trong việc sử dụng hàm hạng của một poset, ta tìm các tương đương của nó như sau:

Mệnh đề 1.4.1: Cho poset $(P, \leq)$ với hàm hạng r . Khi đó ta có:

- (i) $r(x) \in \mathbb{N}, \forall x \in P$ và $r(0) = 0$; trong đó $\mathbb{N}$ là tập số tự nhiên.
- (ii) Nếu $x, y \in P, x$ phủ y thì $r(x) = r(y) + 1$.

Chứng minh

(i) $\forall x \in P$ thì lực lượng C của tất cả các xích bão hòa từ 0 đến x thỏa $C \geq 1, C \in \mathbb{N}$. Suy ra độ dài của tất cả các xích bão hòa từ 0 đến x là $r(x) = C - 1 \geq 0, r(x) \in \mathbb{N}$. Đặc biệt $r(0) = 0$.

(ii) Giả sử một xích bão hòa từ 0 đến y là: $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_k < y$

$\Rightarrow 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_k < y < x$ là một xích bão hòa từ 0 đến x .

Ta có: $\begin{cases} r(y) = k + 2 - 1 = k + 1 \\ r(x) = k + 3 - 1 = k + 2 \end{cases} \Rightarrow r(x) = r(y) + 1$. ■

Ví dụ 1.4.1 :

- Poset $P(S)$ các tập con của tập n -phần tử S là một poset có hạng, với hàm hạng $r(A) = |A|, \forall A \in P(S)$.
- Poset $P(m)$ các ước nguyên dương của một số nguyên m là một poset có hạng, với hàm hạng $r(d) = \text{số các thừa số nguyên tố trong phân tích của } d, \forall d \in P(m)$.

Ví dụ: Với $m = 100 = 2^2 \cdot 5^2, d = 2^2 \cdot 5 \mid m \Rightarrow r(d) = 3$

1.5. Xích đối xứng:

Định nghĩa 1.5.1:

Cho poset P với hàm hạng r . Khi đó ta nói các phần tử $x_1, x_2, \dots, x_h$ tạo thành một xích đối xứng nếu:

- i) x_{i+1} phủ $x_i, \forall i < h$

ii) $r(x_1) + r(x_h) = r(P)$, với $r(P)$ là hạng lớn nhất trong P .

Ví dụ 1.5.1:

- Trong poset $P(S)$ các tập con của tập n -phần tử S , $A_1, A_2, \dots, A_h \in P(S)$ lập thành một xích đối xứng nếu:

i) $A_i \subset A_{i+1}$ và $|A_{i+1}| = |A_i| + 1, \forall i < h$.

ii) $|A_1| + |A_h| = r(P(S)) = n$.

- Trong poset $P(m)$ các ước nguyên dương của một số nguyên m , $d_1, d_2, \dots, d_h \in P$ lập thành một xích đối xứng nếu:

i) $d_i \mid d_{i+1}$ và $\frac{d_{i+1}}{d_i}$ là một số nguyên tố, $\forall i < h$.

ii) $r(d_1) + r(d_h) = r(P(m)) = r(m)$.

CHƯƠNG 2: MỘT SỐ BÀI TOÁN PHÂN HOẠCH XÍCH ĐỐI XỨNG TRÊN CÁC POSET CÓ HẠNG, HỮU HẠN

Trong chương này, tôi sẽ trình bày cả hai phương pháp (quy nạp và trực tiếp) để phân hoạch hai poset $(P(S))$ và $(P(m))$ thành các xích đối xứng, chỉ ra rằng cả hai phương pháp này đều như nhau và đưa ra một số ví dụ minh họa. Sau đó, tôi sẽ đi sâu vào cấu trúc của một phân hoạch xích đối xứng xét về khía cạnh số lượng xích đối xứng, size của các xích đối xứng và số các xích đối xứng có cùng size i . Cuối cùng, tôi đưa ra một số ứng dụng của phương pháp phân hoạch trực tiếp xích đối xứng để tính số phần xích của poset $P(S)$.

Do tập n -phần tử S hữu hạn nên ta có thể đánh số thứ tự các phần tử của S từ 1 đến n . Vì vậy trong toàn bộ chương này ta có thể quy ước chọn tập n -phần tử S là tập n số tự nhiên khác 0 đầu tiên, tức $S = \{1, 2, \dots, n\}$.

2.1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA:

Định nghĩa 2.1.1:

Một poset P có hạng, hữu hạn được gọi là được phân hoạch thành các xích đối xứng nếu nó được biểu diễn như hợp rời rạc của một số nào đó các xích đối xứng (nghĩa là các xích đối xứng này có giao nhau bằng rỗng và hợp của chúng chính bằng poset P)

Định nghĩa 2.1.2:

Một tập $\mathbf{A}$ các tập con $\{A_s\}_{s \in \overline{1,k}}$ của tập n -phần tử S được gọi là một phân xích nếu $A_i \not\subset A_j, \forall i \neq j; i, j \in \overline{1,k}$.

Định nghĩa 2.1.3:

Một xích đối xứng trong poset P được gọi là có size k nếu nó có lực lượng bằng k .

2.2. PHÂN HOẠCH XÍCH ĐỐI XỨNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP:

2.2.1. Phân hoạch xích đối xứng cho poset $P(S)$ các tập con của tập n -phần tử S :

Định lý 2.2.1.1: Poset $P(S)$ các tập con của tập n -phần tử S có một phân hoạch thành các xích đối xứng.

Chứng minh:

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

* Với $n = 1$ thì $S = \{1\}$ nên $P(S) = \{\emptyset, \{1\}\}$ có một xích đối xứng duy nhất: $\emptyset \subset \{1\}$, chứa tất cả các phần tử của $P(S)$. Do đó định lý đúng với $n = 1$.

* Giả sử định lý đúng với $n = k$, nghĩa là với $S_k = \{1, 2, \dots, k\}$ thì $P(S_k)$ có một phân hoạch thành các xích đối xứng. Ta sẽ chứng minh định lý đúng với $n = k + 1$.

Lấy $S_{k+1} = \{1, 2, \dots, k, k+1\}$, ta sẽ xây dựng một phân hoạch xích đối xứng cho $P(S_{k+1})$ từ phân hoạch xích đối xứng của $P(S_k)$ theo giả thiết quy nạp.

Lấy $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m$ là một xích đối xứng bất kỳ trong phân hoạch xích đối xứng của $P(S_k)$. Ta xét hình chữ nhật sau:

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \subset & A_2 & \subset & \dots & \subset & A_{m-1} & \subset & A_m \\ \hline A_1 \cup \{k+1\} & \subset & A_2 \cup \{k+1\} & \subset & \dots & \subset & A_{m-1} \cup \{k+1\} & \subset & A_m \cup \{k+1\} \end{array}$$

“Bóc” lớp ngoài cùng của hình chữ nhật trên ta được xích:

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m \subset A_m \cup \{k+1\} \quad (2.1)$$

Ta có : +) $A_i \subset A_{i+1}$, $|A_{i+1}| = |A_i| + 1$, $\forall i < m$ và $A_m \subset A_m \cup \{k+1\}$, $|A_m \cup \{k+1\}| = |A_m| + 1$

$$+) |A_1| + |A_m \cup \{k+1\}| = |A_1| + |A_m| + 1 = k + 1$$

Do đó xích (2.1) là một xích đối xứng trong $P(S_{k+1})$.

Tương tự lớp còn lại của hình chữ nhật trên cho ta xích :

$$A_1 \cup \{k+1\} \subset A_2 \cup \{k+1\} \subset \dots \subset A_{m-1} \cup \{k+1\} \quad (2.2)$$

Ta có : +) $A_i \cup \{k+1\} \subset A_{i+1} \cup \{k+1\}$, $\forall i < m-1$, và

$$|A_{i+1} \cup \{k+1\}| = |A_{i+1}| + 1 = |A_i| + 1 + 1 = |A_i \cup \{k+1\}| + 1$$

$$+) |A_1 \cup \{k+1\}| + |A_{m-1} \cup \{k+1\}| = |A_1| + 1 + |A_{m-1}| + 1 = |A_1| + |A_m| + 1 = k + 1$$

Nên (2.2) cũng là một xích đối xứng trong $P(S_{k+1})$.

Mặt khác: $P(S_{k+1}) = P(S_k) \cup \{A_i \cup \{k+1\} | A_i \in P(S_k)\}$ nên khi tiếp tục quá trình trên đối với tất cả các xích đối xứng của $P(S_k)$, ta sẽ tìm được các xích đối xứng của $P(S_{k+1})$ mà chúng chứa tất cả các phần tử của $P(S_{k+1})$.

Như vậy ta đã xây dựng được một phân hoạch xích đối xứng của poset $P(S_{k+1})$. ■

Ví dụ 2.2.1.1: Xây dựng một phân hoạch xích đối xứng của poset $P(S_6)$, với $S_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Giải

Để xây dựng được một phân hoạch xích đối xứng của $P(S_6)$, ta phải xây dựng lần lượt các phân hoạch xích đối xứng của $P(S_1)$, $P(S_2)$, $P(S_3)$, $P(S_4)$ và $P(S_5)$.

- Đối với $P(S_1)$: Ta có: $P(S_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$ có một xích đối xứng duy nhất là $\emptyset \subset \{1\}$ nên $P(S_1)$ có một phân hoạch xích đối xứng là: $\emptyset \subset \{1\}$.
- Đối với $P(S_2)$: Ta xét hình chữ nhật sau:

$$\begin{array}{c} \emptyset \subset \{1\} \\ \hline \{2\} \subset \{1, 2\} \end{array}$$

“Bóc” các lớp của hình chữ nhật trên ta được một phân hoạch xích đối xứng của $P(S_2)$ như sau:

$$\begin{array}{c} \{2\} \\ \emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \end{array}$$

- Đối với $P(S_3)$: Ta xét 2 hình chữ nhật sau:

$$\begin{array}{c} \{2\} \\ \vdots \\ \{2, 3\} \\ \hline \emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \\ \hline \{3\} \subset \{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\} \end{array}$$

“Bóc” các lớp của 2 hình chữ nhật trên ta được một phân hoạch xích đối xứng của $P(S_3)$ như sau:

$$\begin{array}{c} \{2\} \subset \{2, 3\} \\ \{3\} \subset \{1, 3\} \\ \emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \end{array}$$

- Đối với $P(S_4)$: Ta xét 3 hình chữ nhật sau:

$$\begin{array}{c} \{2\} \subset \{2, 3\} \\ \hline \{2, 4\} \subset \{2, 3, 4\} \\ \{3\} \subset \{1, 3\} \\ \hline \{3, 4\} \subset \{1, 3, 4\} \\ \hline \emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \\ \hline \{4\} \subset \{1, 4\} \subset \{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \end{array}$$

“Bóc” các lớp của 3 hình chữ nhật trên ta được một phân hoạch xích đối xứng của $P(S_4)$ như sau:

$$\begin{array}{c} \{2, 4\} \\ \{3, 4\} \end{array}$$

$$\{2\} \subset \{2,3\} \subset \{2,3,4\}$$

$$\{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,3,4\}$$

$$\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,2,4\}$$

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$$

• Đối với $P(S_5)$: Ta xét 6 hình chữ nhật sau:

$$\{2,4\}$$

$$\{2,4,5\}$$

$$\{3,4\}$$

$$\{3,4,5\}$$

$$\{2\} \subset \{2,3\} \subset \{2,3,4\}$$

$$\{2,5\} \subset \{2,3,5\} \subset \{2,3,4,5\}$$

$$\{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,3,4\}$$

$$\{3,5\} \subset \{1,3,5\} \subset \{1,3,4,5\}$$

$$\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,2,4\}$$

$$\{4,5\} \subset \{1,4,5\} \subset \{1,2,4,5\}$$

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$$

$$\{5\} \subset \{1,5\} \subset \{1,2,5\} \subset \{1,2,3,5\} \subset \{1,2,3,4,5\}$$

“Bóc” các lớp của 6 hình chữ nhật trên ta được một phân hoạch xích đối xứng của $P(S_5)$ như sau:

$$\{2,4\} \subset \{2,4,5\}$$

$$\{3,4\} \subset \{3,4,5\}$$

$$\{2,5\} \subset \{2,3,5\}$$

$$\{3,5\} \subset \{1,3,5\}$$

$$\{4,5\} \subset \{1,4,5\}$$

$$\{2\} \subset \{2,3\} \subset \{2,3,4\} \subset \{2,3,4,5\}$$

$$\{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,3,4\} \subset \{1,3,4,5\}$$

$$\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,2,4\} \subset \{1,2,4,5\}$$

$$\{5\} \subset \{1,5\} \subset \{1,2,5\} \subset \{1,2,3,5\}$$

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\} \subset \{1,2,3,4,5\}$$

• Đối với $P(S_6)$: Ta xét 10 hình chữ nhật sau:

$$\{2,4\} \subset \{2,4,5\}$$

$$\{2,4,6\} \subset \{2,4,5,6\}$$

$$\{3,4\} \subset \{3,4,5\}$$

$$\{3,4,6\} \subset \{3,4,5,6\}$$

$$\{2,5\} \subset \{2,3,5\}$$

$$\{2,5,6\} \subset \{2,3,5,6\}$$

$$\{3,5\} \subset \{1,3,5\}$$

$$\{3,5,6\} \subset \{1,3,5,6\}$$

$$\{4,5\} \subset \{1,4,5\}$$

$$\{4,5,6\} \subset \{1,4,5,6\}$$

$$\{2\} \subset \{2,3\} \subset \{2,3,4\} \subset \{2,3,4,5\}$$

$$\{2,6\} \subset \{2,3,6\} \subset \{2,3,4,6\} \subset \{2,3,4,5,6\}$$

$$\{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,3,4\} \subset \{1,3,4,5\}$$

$$\{3,6\} \subset \{1,3,6\} \subset \{1,3,4,6\} \subset \{1,3,4,5,6\}$$

$$\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,2,4\} \subset \{1,2,4,5\}$$

$$\{4,6\} \subset \{1,4,6\} \subset \{1,2,4,6\} \subset \{1,2,4,5,6\}$$

$$\{5\} \subset \{1,5\} \subset \{1,2,5\} \subset \{1,2,3,5\}$$

$$\{5,6\} \subset \{1,5,6\} \subset \{1,2,5,6\} \subset \{1,2,3,5,6\}$$

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\} \subset \{1,2,3,4,5\}$$

$$\{6\} \subset \{1,6\} \subset \{1,2,6\} \subset \{1,2,3,6\} \subset \{1,2,3,4,6\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$$

“Bóc” các lớp của 10 hình chữ nhật trên ta được một phân hoạch xích đối xứng của $P(S_6)$ như sau:

$$\{2,4,6\}$$

$$\{3,4,6\}$$

$$\{2, 5, 6\}$$

$$\{3, 5, 6\}$$

$$\{4, 5, 6\}$$

$$\{2, 4\} \subset \{2, 4, 5\} \subset \{2, 4, 5, 6\}$$

$$\{3, 4\} \subset \{3, 4, 5\} \subset \{3, 4, 5, 6\}$$

$$\{2, 5\} \subset \{2, 3, 5\} \subset \{2, 3, 5, 6\}$$

$$\{3, 5\} \subset \{1, 3, 5\} \subset \{1, 3, 5, 6\}$$

$$\{4, 5\} \subset \{1, 4, 5\} \subset \{1, 4, 5, 6\}$$

$$\{2, 6\} \subset \{2, 3, 6\} \subset \{2, 3, 4, 6\}$$

$$\{3, 6\} \subset \{1, 3, 6\} \subset \{1, 3, 4, 6\}$$

$$\{4, 6\} \subset \{1, 4, 6\} \subset \{1, 2, 4, 6\}$$

$$\{5, 6\} \subset \{1, 5, 6\} \subset \{1, 2, 5, 6\}$$

$$\{2\} \subset \{2, 3\} \subset \{2, 3, 4\} \subset \{2, 3, 4, 5\} \subset \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\{3\} \subset \{1, 3\} \subset \{1, 3, 4\} \subset \{1, 3, 4, 5\} \subset \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\{4\} \subset \{1, 4\} \subset \{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 4, 5\} \subset \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

$$\{5\} \subset \{1, 5\} \subset \{1, 2, 5\} \subset \{1, 2, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

$$\{6\} \subset \{1, 6\} \subset \{1, 2, 6\} \subset \{1, 2, 3, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2.2.2. Phân hoạch xích đối xứng cho poset $P(m)$ các ước nguyên dương của số nguyên m cho trước:

Định lý 2.2.2.1: Poset $P(m)$ các ước nguyên dương của số nguyên m cho trước có một phân hoạch thành các xích đối xứng.

Chứng minh:

Gọi n là số các ước nguyên tố phân biệt của m . Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

* Với $n = 1$ thì m có dạng $m = p^\alpha$. Khi đó $P(m) = \{1, p, p^2, \dots, p^\alpha\}$ có một xích đối xứng duy nhất:

$1 < p < p^2 < \dots < p^\alpha$, chứa tất cả các phần tử của $P(m)$. Do đó định lý đúng với $n = 1$.

* Giả sử định lý đúng với $n = k$, nghĩa là nếu m có k ước nguyên tố phân biệt thì $P(m)$ có một phân hoạch thành các xích đối xứng.

* Ta sẽ chứng minh định lý đúng với $n = k + 1$. Xét số nguyên m có $(k + 1)$ ước nguyên tố phân biệt, tức $m = m_1 p^\alpha$, trong đó m_1 có k ước nguyên tố phân biệt và số nguyên tố p không là ước của m_1 . Ta sẽ chỉ ra cách xây dựng các xích đối xứng của $P(m)$ từ các xích đối xứng của $P(m_1)$.

Lấy $d_1 < d_2 < \dots < d_h$ là một xích đối xứng bất kỳ trong phân hoạch xích đối xứng của $P(m_1)$ theo giả thiết quy nạp.

Xét tất cả các ước của m có dạng $d_i p^\beta$, $1 \leq i \leq h$, $0 \leq \beta \leq \alpha$ và sắp xếp tất cả các ước này theo hình chữ nhật sau:

$$\begin{array}{ccccccc}
 d_1 & < & d_2 & < & \dots & < & d_{h-2} & < & d_{h-1} & < & d_h \\
 \hline
 d_1 p & < & d_2 p & < & \dots & < & d_{h-2} p & < & d_{h-1} p & < & d_h p \\
 \hline
 d_1 p^2 & < & d_2 p^2 & < & \dots & < & d_{h-2} p^2 & < & d_{h-1} p^2 & < & d_h p^2 \\
 \hline
 \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \hline
 d_1 p^{\alpha-1} & < & d_2 p^{\alpha-1} & < & \dots & < & d_{h-2} p^{\alpha-1} & < & d_{h-1} p^{\alpha-1} & < & d_h p^{\alpha-1} \\
 \hline
 d_1 p^\alpha & < & d_2 p^\alpha & < & \dots & < & d_{h-2} p^\alpha & < & d_{h-1} p^\alpha & < & d_h p^\alpha
 \end{array}$$

Ta “bóc” các xích đã được chỉ ra trên hình chữ nhật trên.

- Lớp ngoài cùng của hình chữ nhật trên cho ta xích đầu tiên:

$$d_1 < d_2 < \dots < d_{h-2} < d_{h-1} < d_h < d_h p < d_h p^2 < \dots < d_h p^\alpha \quad (2.3)$$

Ta có: +) $d_i | d_{i+1}$, $\frac{d_{i+1}}{d_i}$ là một số nguyên tố, $\forall i < h$.

$$+) d_h p^i | d_h p^{i+1}, \frac{d_h p^{i+1}}{d_h p^i} = p \text{ cũng là số nguyên tố, } \forall i < \alpha.$$

$$+) r(d_1) + r(d_h p^\alpha) = r(d_1) + r(d_h) + r(p^\alpha) = r(m_1) + r(p^\alpha) = r(m).$$

Vậy (2.3) là một xích đối xứng của $P(m)$.

- Tương tự, lớp thứ hai của hình chữ nhật trên cho ta xích :

$$d_1 p < d_2 p < \dots < d_{h-2} p < d_{h-1} p < d_{h-1} p^2 < \dots < d_{h-1} p^\alpha \quad (2.4)$$

cũng là một xích đối xứng của $P(m)$.

- Cứ tiếp tục như vậy, 2 lớp cuối cùng của hình chữ nhật trên cho ta 2 xích :

$$d_1 p^{\alpha-1} < d_2 p^{\alpha-1} < d_2 p^\alpha \text{ và } d_1 p^\alpha, \text{ cũng là các xích đối xứng của } P(m).$$

- Do $m = m_1 p^\alpha$ (p không là ước của m_1) nên $P(m) = P(m_1) \cup \{dp^j \mid d \in P(m_1), 1 \leq j \leq \alpha\}$.

Do đó, cứ tiếp tục quá trình trên đối với tất cả các xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của $P(m_1)$ thì ta được các xích đối xứng rời nhau của $P(m)$, mà chúng chứa tất cả các phần tử của $P(m)$.

Như vậy, ta đã xây dựng được một phân hoạch xích đối xứng cho poset $P(m)$. ■

Ví dụ 2.2.2.1: Xây dựng một phân hoạch xích đối xứng cho $P(68600) = P(2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$.

Giải

Để xây dựng một phân hoạch xích đối xứng cho $P(2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$, ta phải lần lượt xây dựng các phân hoạch xích đối xứng cho $P(2^3)$ và $P(2^3 \cdot 5^2)$

- Đối với $P(2^3)$: Ta có : $P(2^3) = \{1, 2, 2^2, 2^3\}$ nên ta được một phân hoạch xích đối xứng của $P(2^3)$

là : $1 < 2 < 2^2 < 2^3$.

- Đối với $P(2^3 \cdot 5^2)$: Ta xét hình chữ nhật sau :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & < & 2 & < & 2^2 & < & 2^3 \\ \hline 1.5 & < & 2.5 & < & 2^2.5 & < & 2^3.5 \\ \hline 1.5^2 & < & 2.5^2 & < & 2^2.5^2 & < & 2^3.5^2 \end{array}$$

Sau khi “bóc” các lớp của hình chữ nhật trên ta được một phân hoạch xích đối xứng của $P(2^3 \cdot 5^2)$ là :

$$1.5^2 < 2.5^2$$

$$1.5 < 2.5 < 2^2.5 < 2^2.5^2$$

$$1 < 2 < 2^2 < 2^3 < 2^3.5 < 2^3.5^2$$

- Đối với $P(2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$: Ta xét 3 hình chữ nhật sau :

$$\begin{array}{ccccccc} 1.5^2 & < & 2.5^2 & & & & \\ \hline 1.5^2.7 & < & 2.5^2.7 & & & & \\ 1.5^2.7^2 & < & 2.5^2.7^2 & & & & \\ 1.5^2.7^3 & < & 2.5^2.7^3 & & & & \\ \hline 1.5 & < & 2.5 & < & 2^2.5 & < & 2^2.5^2 \\ \hline 1.5.7 & < & 2.5.7 & < & 2^2.5.7 & < & 2^2.5^2.7 \\ 1.5.7^2 & < & 2.5.7^2 & < & 2^2.5.7^2 & < & 2^2.5^2.7^2 \\ 1.5.7^3 & < & 2.5.7^3 & < & 2^2.5.7^3 & < & 2^2.5^2.7^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & < & 2 & < & 2^2 & < & 2^3 & < & 2^3.5 & < & 2^3.5^2 \\
\hline
1.7 & < & 2.7 & < & 2^2.7 & < & 2^3.7 & < & 2^3.5.7 & < & 2^3.5^2.7 \\
\hline
1.7^2 & < & 2.7^2 & < & 2^2.7^2 & < & 2^3.7^2 & < & 2^3.5.7^2 & < & 2^3.5^2.7^2 \\
\hline
1.7^3 & < & 2.7^3 & < & 2^2.7^3 & < & 2^3.7^3 & < & 2^3.5.7^3 & < & 2^3.5^2.7^3
\end{array}$$

Sau khi “bóc” các lớp của 3 hình chữ nhật trên ta được một phân hoạch xích đối xứng của $P(2^3.5^2.7^3)$ như sau :

$$\begin{array}{c}
1.5.7^3 \\
1.5^2.7 < 1.5^2.7^2 < 1.5^2.7^3 \\
1.5.7^2 < 2.5.7^2 < 2.5.7^3 \\
1.7^3 < 2.7^3 < 2^2.7^3 \\
1.5^2 < 2.5^2 < 2.5^2.7 < 2.5^2.7^2 < 2.5^2.7^3 \\
1.5.7 < 2.5.7 < 2^2.5.7 < 2^2.5.7^2 < 2^2.5.7^3 \\
1.7^2 < 2.7^2 < 2^2.7^2 < 2^3.7^2 < 2^3.7^3 \\
1.5 < 2.5 < 2^2.5 < 2^2.5^2 < 2^2.5^2.7 < 2^2.5^2.7^2 < 2^2.5^2.7^3 \\
1.7 < 2.7 < 2^2.7 < 2^3.7 < 2^3.5.7 < 2^3.5.7^2 < 2^3.5.7^3 \\
1 < 2 < 2^2 < 2^3 < 2^3.5 < 2^3.5^2 < 2^3.5^2.7 < 2^3.5^2.7^2 < 2^3.5^2.7^3
\end{array}$$

2.2.3. Phân hoạch xích đối xứng cho tích trực tiếp các poset:

Định nghĩa 2.2.3.1 :

Nếu P, Q là những poset có hạng, với hàm hạng tương ứng là r, r' thì tích trực tiếp của P và Q , ký hiệu

là $P \times Q = \{(p, q) | p \in P, q \in Q\}$, là một poset với quan hệ thứ tự : $(p_1, q_1) \leq (p_2, q_2) \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 \leq p_2 \text{ trong } P \\ q_1 \leq q_2 \text{ trong } Q \end{cases}$.

Poset tích trực tiếp $P \times Q$ có hàm hạng ρ được định nghĩa bởi $\rho(p, q) = r(p) + r'(q), \forall (p, q) \in P \times Q$

Ví dụ 2.2.3.1 : Cho $P(S)$ là poset tất cả các tập con của tập $S = \{1, 2, 3\}$ và $P(5^2)$ là poset tất cả các ước nguyên dương của số nguyên 5^2 .

Hay $P(S) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}\}$ và $P(5^2) = \{1, 5, 5^2\}$.

Khi đó poset tích trực tiếp của $P(S)$ và $P(5^2)$ là :

$$\begin{array}{l}
P(S) \times P(5^2) = \{(\emptyset, 1); (\emptyset, 5); (\emptyset, 5^2); (\{1\}, 1); (\{1\}, 5); (\{1\}, 5^2); (\{2\}, 1); (\{2\}, 5); (\{2\}, 5^2); \\
(\{3\}, 1); (\{3\}, 5); (\{3\}, 5^2); (\{1, 2\}, 1); (\{1, 2\}, 5); (\{1, 2\}, 5^2); (\{1, 3\}, 1); (\{1, 3\}, 5); (\{1, 3\}, 5^2);
\end{array}$$

$$(\{2,3\},1);(\{2,3\},5);(\{2,3\},5^2);(\{1,2,3\},1);(\{1,2,3\},5);(\{1,2,3\},5^2)\}$$

Trong đó : $\rho(\{2,3\},5) = r(\{2,3\}) + r'(5) = 2 + 1 = 3$

$$\rho(\{1\},1) = r(\{1\}) + r'(1) = 1 + 0 = 1$$

(với r, r', ρ lần lượt là hàm hạng của các poset $P(S)$, $P(5^2)$ và $P(S) \times P(5^2)$)

Ví dụ 2.2.3.2 : Cho $P(3^3)$ là poset tất cả các ước nguyên dương của số nguyên $m_1 = 3^3$ và $P(7^2)$ là poset tất cả các ước nguyên dương của số nguyên $m_2 = 7^2$.

Hay $P(3^3) = \{1, 3, 3^2, 3^3\}$ và $P(7^2) = \{1, 7, 7^2\}$.

Khi đó poset tích trực tiếp của $P(3^3)$ và $P(7^2)$ là : $P(3^3) \times P(7^2) = \{(1,1); (1,7); (1,7^2);$

$$(3,1); (3,7); (3,7^2); (3^2,1); (3^2,7); (3^2,7^2); (3^3,1); (3^3,7); (3^3,7^2)\}$$

Trong đó : $\rho(3^2,7) = r(3^2) + r'(7) = 2 + 1 = 3$

$$\rho(1,7^2) = r(1) + r'(7^2) = 0 + 2 = 2$$

(r, r', ρ lần lượt là hàm hạng của các poset $P(3^3)$, $P(7^2)$ và $P(3^3) \times P(7^2)$).

Trong ví dụ 2.2.3.2 nếu ta đồng nhất (p,q) với $p.q$ thì dễ thấy poset tích trực tiếp $P(3^3) \times P(7^2)$ chính là poset $P(3^3.7^2)$. Từ điều này ta có mệnh đề sau :

Mệnh đề 2.2.3.1 : Cho p, q là hai số nguyên tố phân biệt. Với k, h là hai số nguyên dương bất kỳ thì poset tích trực tiếp $P(p^k) \times P(q^h)$ chính là poset $P(p^k.q^h)$.

Từ mệnh đề 2.2.3.1 ta có thể mở rộng ra mệnh đề sau đây :

Mệnh đề 2.2.3.2 : Cho $p_1, p_2, \dots, p_n$ là n số nguyên tố phân biệt. Với $k_1, k_2, \dots, k_n$ là n số nguyên dương bất kỳ thì poset tích trực tiếp $P(p_1^{k_1}) \times P(p_2^{k_2}) \times \dots \times P(p_n^{k_n})$ chính là poset $P(p_1^{k_1}.p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n})$.

(Ở đây, poset tích trực tiếp của n poset được mở rộng từ định nghĩa 2.2.3.1 như sau: Nếu $P_1, P_2, \dots, P_n$ là các poset có hàm hạng tương ứng là $r_1, r_2, \dots, r_n$ thì poset tích trực tiếp của $P_1, P_2, \dots, P_n$, ký hiệu là

$$P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) | p_i \in P_i, \forall i = 1, \dots, n\}, \text{ là một}$$

poset với quan hệ thứ tự như sau : $(p_1, p_2, \dots, p_n) \leq (p'_1, p'_2, \dots, p'_n) \Leftrightarrow p_i \leq p'_i \text{ trong } P_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Poset $P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$ có hàm hạng ρ được định nghĩa là :

$$\rho(p_1, p_2, \dots, p_n) = r_1(p_1) + r_2(p_2) + \dots + r_n(p_n), \forall (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$$

Theo mệnh đề 2.2.3.1 và định lý 2.2.2.1 : Nếu p, q là hai số nguyên tố phân biệt và k, h là hai số nguyên dương bất kỳ thì các poset $P(p^k), P(q^h)$ có phân hoạch xích đối xứng và ta dễ dàng có được

phân hoạch xích đối xứng của poset $P(p^k) \times P(q^h)$ từ phân hoạch xích đối xứng của poset $P(p^k \cdot q^h)$.
 Vấn đề bây giờ là : Liệu với P,Q là hai poset tùy ý có phân hoạch xích đối xứng thì poset tích trực tiếp $P \times Q$ có phân hoạch xích đối xứng không ? Và nếu có thì chúng được xây dựng như thế nào ?

Định lý 2.2.3.1 : Nếu P, Q là hai poset có hàm hạng tương ứng là r, r' và đều có phân hoạch xích đối xứng thì poset tích trực tiếp $P \times Q$ với hàm hạng ρ cũng có phân hoạch xích đối xứng.

Chứng minh :

Giả sử $P = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$ và $Q = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ là các phân hoạch xích đối xứng của P và Q.
 Ở đây $C_i, i = 1, \dots, m$, là các xích đối xứng trong P và $D_j, j = 1, \dots, n$, là các xích đối xứng trong Q.

Lấy bất kỳ hai xích đối xứng C_i, D_j tương ứng trong P, Q như sau:

$$C_i : c_0 < c_1 < \dots < c_k, \text{ với } r(c_0) = t, r(c_k) = T, t + T = r(P), \text{ và}$$

$$D_j : d_0 < d_1 < \dots < d_h, \text{ với } r'(d_0) = s, r'(d_h) = S, s + S = r'(Q).$$

Ta chứng minh tương tự như định lý 2.2.2.1: Xét hình chữ nhật sau:

$$\begin{array}{cccccc} E_0 & : \rightarrow & (c_0, d_0) & < & (c_1, d_0) & < \dots < & (c_{k-2}, d_0) & < & (c_{k-1}, d_0) & < & (c_k, d_0) \\ E_1 & : \rightarrow & (c_0, d_1) & < & (c_1, d_1) & < \dots < & (c_{k-2}, d_1) & < & (c_{k-1}, d_1) & < & (c_k, d_1) \\ E_2 & : \rightarrow & (c_0, d_2) & < & (c_1, d_2) & < \dots < & (c_{k-2}, d_2) & < & (c_{k-1}, d_2) & < & (c_k, d_2) \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ E_{h-1} & : \rightarrow & (c_0, d_{h-1}) & < & (c_1, d_{h-1}) & < \dots < & (c_{k-2}, d_{h-1}) & < & (c_{k-1}, d_{h-1}) & < & (c_k, d_{h-1}) \\ E_h & : \rightarrow & (c_0, d_h) & < & (c_1, d_h) & < \dots < & (c_{k-2}, d_h) & < & (c_{k-1}, d_h) & < & (c_k, d_h) \end{array}$$

“Bóc” các lớp của hình chữ nhật trên ta được $(h + 1)$ xích $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{h-1}, E_h$ như được chỉ trong hình chữ nhật trên. Ta sẽ chứng minh $(h + 1)$ xích này là các xích đối xứng trong poset tích trực tiếp $P \times Q$.

Xét xích $E_j : (c_0, d_j) < (c_1, d_j) < \dots < (c_{k-j}, d_j) < (c_{k-j}, d_{j+1}) < \dots < (c_{k-j}, d_h); j = 0, 1, \dots, h$

$\forall j = 0, 1, \dots, h$: Ta dễ thấy các xích E_j là các xích bão hòa. Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} \rho(c_0, d_j) + \rho(c_{k-j}, d_h) &= r(c_0) + r'(d_j) + r(c_{k-j}) + r'(d_h) = t + (s + j) + (t + k - j) + S \\ &= t + s + (t + k) + S = t + s + T + S = (t + T) + (s + S) \\ &= r(P) + r'(Q) = \rho(P \times Q). \end{aligned}$$

Vậy các $E_j, j = 0, 1, \dots, h$, là các xích đối xứng trong poset tích trực tiếp $P \times Q$.

Bằng cách xét từng cặp xích đối xứng C_i và $D_j (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ như trên ta sẽ có được một phân hoạch xích đối xứng cho poset tích trực tiếp $P \times Q$. ■

Ví dụ 2.2.3.3 : Tìm một phân hoạch xích đối xứng của poset tích trực tiếp $P(S) \times P(2^3 \cdot 5^2)$, trong đó $P(S)$ là poset tất cả các tập con của tập 4 phần tử $S = \{1, 2, 3, 4\}$ và $P(2^3 \cdot 5^2)$ là poset tất cả các ước nguyên dương của số nguyên $m = 2^3 \cdot 5^2$.

Giải

Theo ví dụ 2.2.1.1 và ví dụ 2.2.2.1 ta có phân hoạch xích đối xứng của poset $P(S)$ và poset $P(2^3 \cdot 5^2)$ như sau :

Phân hoạch xích đối xứng của $P(S)$: $P(S) = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6$

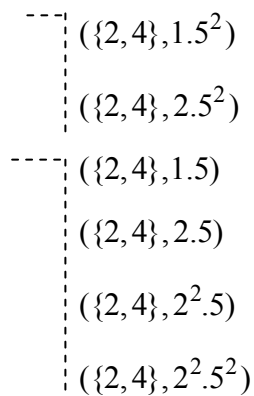
- $C_1:$ $\{2, 4\}$
- $C_2:$ $\{3, 4\}$
- $C_3:$ $\{2\} \subset \{2, 3\} \subset \{2, 3, 4\}$
- $C_4:$ $\{3\} \subset \{1, 3\} \subset \{1, 3, 4\}$
- $C_5:$ $\{4\} \subset \{1, 4\} \subset \{1, 2, 4\}$
- $C_6:$ $\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

Phân hoạch xích đối xứng của $P(2^3 \cdot 5^2)$: $P(2^3 \cdot 5^2) = D_1 \cup D_2 \cup D_3$

- $D_1:$ $1 \cdot 5^2 < 2 \cdot 5^2$
- $D_2:$ $1 \cdot 5 < 2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 5^2$
- $D_3:$ $1 < 2 < 2^2 < 2^3 < 2^3 \cdot 5 < 2^3 \cdot 5^2$

Ta xét các hình chữ nhật hình thành từ các cặp xích đối xứng sau :

* Các cặp xích đối xứng : $(C_1, D_1), (C_1, D_2), (C_1, D_3)$



 ({2,4},1)

 ({2,4},2)

 ({2,4},2²)

 ({2,4},2³)

 ({2,4},2³.5)

 ({2,4},2³.5²)

* Các cặp xích đối xứng : $(C_2, D_1), (C_2, D_2), (C_2, D_3)$

 ({3,4},1.5²)

 ({3,4},2.5²)

 ({3,4},1.5)

 ({3,4},2.5)

 ({3,4},2².5)

 ({3,4},2².5²)

 ({3,4},1)

 ({3,4},2)

 ({3,4},2²)

 ({3,4},2³)

 ({3,4},2³.5)

 ({3,4},2³.5²)

* Các cặp xích đối xứng : $(C_3, D_1), (C_3, D_2), (C_3, D_3)$

({2},1.5²) < ({2,3},1.5²) < ({2,3,4},1.5²)

 ({2},2.5²) < ({2,3},2.5²) < ({2,3,4},2.5²)

({2},1.5) < ({2,3},1.5) < ({2,3,4},1.5)

 ({2},2.5) < ({2,3},2.5) < ({2,3,4},2.5)

 ({2},2².5) < ({2,3},2².5) < ({2,3,4},2².5)

 ({2},2².5²) < ({2,3},2².5²) < ({2,3,4},2².5²)

$(\{2\}, 1)$	$< (\{2, 3\}, 1)$	$< (\{2, 3, 4\}, 1)$
$(\{2\}, 2)$	$< (\{2, 3\}, 2)$	$< (\{2, 3, 4\}, 2)$
$(\{2\}, 2^2)$	$< (\{2, 3\}, 2^2)$	$< (\{2, 3, 4\}, 2^2)$
$(\{2\}, 2^3)$	$< (\{2, 3\}, 2^3)$	$< (\{2, 3, 4\}, 2^3)$
$(\{2\}, 2^3.5)$	$< (\{2, 3\}, 2^3.5)$	$< (\{2, 3, 4\}, 2^3.5)$
$(\{2\}, 2^3.5^2)$	$< (\{2, 3\}, 2^3.5^2)$	$< (\{2, 3, 4\}, 2^3.5^2)$

* Các cặp xích đối xứng : $(C_4, D_1), (C_4, D_2), (C_4, D_3)$

$(\{3\}, 1.5^2)$	$< (\{1, 3\}, 1.5^2)$	$< (\{1, 3, 4\}, 1.5^2)$
$(\{3\}, 2.5^2)$	$< (\{1, 3\}, 2.5^2)$	$< (\{1, 3, 4\}, 2.5^2)$

$(\{3\}, 1.5)$	$< (\{1, 3\}, 1.5)$	$< (\{1, 3, 4\}, 1.5)$
$(\{3\}, 2.5)$	$< (\{1, 3\}, 2.5)$	$< (\{1, 3, 4\}, 2.5)$
$(\{3\}, 2^2.5)$	$< (\{1, 3\}, 2^2.5)$	$< (\{1, 3, 4\}, 2^2.5)$
$(\{3\}, 2^2.5^2)$	$< (\{1, 3\}, 2^2.5^2)$	$< (\{1, 3, 4\}, 2^2.5^2)$

$(\{3\}, 1)$	$< (\{1, 3\}, 1)$	$< (\{1, 3, 4\}, 1)$
$(\{3\}, 2)$	$< (\{1, 3\}, 2)$	$< (\{1, 3, 4\}, 2)$
$(\{3\}, 2^2)$	$< (\{1, 3\}, 2^2)$	$< (\{1, 3, 4\}, 2^2)$
$(\{3\}, 2^3)$	$< (\{1, 3\}, 2^3)$	$< (\{1, 3, 4\}, 2^3)$
$(\{3\}, 2^3.5)$	$< (\{1, 3\}, 2^3.5)$	$< (\{1, 3, 4\}, 2^3.5)$
$(\{3\}, 2^3.5^2)$	$< (\{1, 3\}, 2^3.5^2)$	$< (\{1, 3, 4\}, 2^3.5^2)$

* Các cặp xích đối xứng : $(C_5, D_1), (C_5, D_2), (C_5, D_3)$

$(\{4\}, 1.5^2)$	$< (\{1, 4\}, 1.5^2)$	$< (\{1, 2, 4\}, 1.5^2)$
$(\{4\}, 2.5^2)$	$< (\{1, 4\}, 2.5^2)$	$< (\{1, 2, 4\}, 2.5^2)$

$(\{4\}, 1.5)$	$< (\{1, 4\}, 1.5)$	$< (\{1, 2, 4\}, 1.5)$
$(\{4\}, 2.5)$	$< (\{1, 4\}, 2.5)$	$< (\{1, 2, 4\}, 2.5)$
$(\{4\}, 2^2.5)$	$< (\{1, 4\}, 2^2.5)$	$< (\{1, 2, 4\}, 2^2.5)$

$$(\{4\}, 2^2.5^2) < (\{1, 4\}, 2^2.5^2) < (\{1, 2, 4\}, 2^2.5^2)$$

$(\{4\}, 1)$	$< (\{1, 4\}, 1)$	$< (\{1, 2, 4\}, 1)$
$(\{4\}, 2)$	$< (\{1, 4\}, 2)$	$< (\{1, 2, 4\}, 2)$
$(\{4\}, 2^2)$	$< (\{1, 4\}, 2^2)$	$< (\{1, 2, 4\}, 2^2)$
$(\{4\}, 2^3)$	$< (\{1, 4\}, 2^3)$	$< (\{1, 2, 4\}, 2^3)$
$(\{4\}, 2^3.5)$	$< (\{1, 4\}, 2^3.5)$	$< (\{1, 2, 4\}, 2^3.5)$
$(\{4\}, 2^3.5^2)$	$< (\{1, 4\}, 2^3.5^2)$	$< (\{1, 2, 4\}, 2^3.5^2)$

* Các cặp xích đối xứng : $(C_6, D_1), (C_6, D_2), (C_6, D_3)$

$(\emptyset, 1.5^2)$	$< (\{1\}, 1.5^2)$	$< (\{1, 2\}, 1.5^2)$	$< (\{1, 2, 3\}, 1.5^2)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 1.5^2)$
$(\emptyset, 2.5^2)$	$< (\{1\}, 2.5^2)$	$< (\{1, 2\}, 2.5^2)$	$< (\{1, 2, 3\}, 2.5^2)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 2.5^2)$

$(\emptyset, 1.5)$	$< (\{1\}, 1.5)$	$< (\{1, 2\}, 1.5)$	$< (\{1, 2, 3\}, 1.5)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 1.5)$
$(\emptyset, 2.5)$	$< (\{1\}, 2.5)$	$< (\{1, 2\}, 2.5)$	$< (\{1, 2, 3\}, 2.5)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 2.5)$
$(\emptyset, 2^2.5)$	$< (\{1\}, 2^2.5)$	$< (\{1, 2\}, 2^2.5)$	$< (\{1, 2, 3\}, 2^2.5)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 2^2.5)$
$(\emptyset, 2^2.5^2)$	$< (\{1\}, 2^2.5^2)$	$< (\{1, 2\}, 2^2.5^2)$	$< (\{1, 2, 3\}, 2^2.5^2)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 2^2.5^2)$

$(\emptyset, 1)$	$< (\{1\}, 1)$	$< (\{1, 2\}, 1)$	$< (\{1, 2, 3\}, 1)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 1)$
$(\emptyset, 2)$	$< (\{1\}, 2)$	$< (\{1, 2\}, 2)$	$< (\{1, 2, 3\}, 2)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 2)$
$(\emptyset, 2^2)$	$< (\{1\}, 2^2)$	$< (\{1, 2\}, 2^2)$	$< (\{1, 2, 3\}, 2^2)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 2^2)$
$(\emptyset, 2^3)$	$< (\{1\}, 2^3)$	$< (\{1, 2\}, 2^3)$	$< (\{1, 2, 3\}, 2^3)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 2^3)$
$(\emptyset, 2^3.5)$	$< (\{1\}, 2^3.5)$	$< (\{1, 2\}, 2^3.5)$	$< (\{1, 2, 3\}, 2^3.5)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 2^3.5)$
$(\emptyset, 2^3.5^2)$	$< (\{1\}, 2^3.5^2)$	$< (\{1, 2\}, 2^3.5^2)$	$< (\{1, 2, 3\}, 2^3.5^2)$	$< (\{1, 2, 3, 4\}, 2^3.5^2)$

Sau khi “bóc” các lớp của các hình chữ nhật trên ta được một phân hoạch xích đối xứng của poset tích trực tiếp $P(S) \times P(2^3.5^2)$ là :

$$(\{2, 4\}, 1.5^2) < (\{2, 4\}, 2.5^2)$$

$$(\{3, 4\}, 1.5^2) < (\{3, 4\}, 2.5^2)$$

$$(\{2\}, 2.5^2) < (\{2, 3\}, 2.5^2)$$

$$(\{2\}, 2^2.5) < (\{2\}, 2^2.5^2)$$

$$(\{3\}, 2.5^2) < (\{1, 3\}, 2.5^2)$$

$$(\{3\}, 2^2.5) < (\{3\}, 2^2.5^2)$$

$$(\{4\}, 2.5^2) < (\{1, 4\}, 2.5^2)$$

$$(\{4\}, 2^2.5) < (\{4\}, 2^2.5^2)$$

$$(\emptyset, 2^2.5^2) < (\{1\}, 2^2.5^2)$$

$$(\emptyset, 2^3.5) < (\emptyset, 2^3.5^2)$$

$$(\{2, 4\}, 1.5) < (\{2, 4\}, 2.5) < (\{2, 4\}, 2^2.5) < (\{2, 4\}, 2^2.5^2)$$

$$(\{3, 4\}, 1.5) < (\{3, 4\}, 2.5) < (\{3, 4\}, 2^2.5) < (\{3, 4\}, 2^2.5^2)$$

$$(\{2\}, 1.5^2) < (\{2, 3\}, 1.5^2) < (\{2, 3, 4\}, 1.5^2) < (\{2, 3, 4\}, 2.5^2)$$

$$(\{2\}, 2.5) < (\{2, 3\}, 2.5) < (\{2, 3\}, 2^2.5) < (\{2, 3\}, 2^2.5^2)$$

$$(\{2\}, 2^2) < (\{2\}, 2^3) < (\{2\}, 2^3.5) < (\{2\}, 2^3.5^2)$$

$$(\{3\}, 1.5^2) < (\{1, 3\}, 1.5^2) < (\{1, 3, 4\}, 1.5^2) < (\{1, 3, 4\}, 2.5^2)$$

$$(\{3\}, 2.5) < (\{1, 3\}, 2.5) < (\{1, 3\}, 2^2.5) < (\{1, 3\}, 2^2.5^2)$$

$$(\{3\}, 2^2) < (\{3\}, 2^3) < (\{3\}, 2^3.5) < (\{3\}, 2^3.5^2)$$

$$(\{4\}, 1.5^2) < (\{1, 4\}, 1.5^2) < (\{1, 2, 4\}, 1.5^2) < (\{1, 2, 4\}, 2.5^2)$$

$$(\{4\}, 2.5) < (\{1, 4\}, 2.5) < (\{1, 4\}, 2^2.5) < (\{1, 4\}, 2^2.5^2)$$

$$(\{4\}, 2^2) < (\{4\}, 2^3) < (\{4\}, 2^3.5) < (\{4\}, 2^3.5^2)$$

$$(\emptyset, 2.5^2) < (\{1\}, 2.5^2) < (\{1, 2\}, 2.5^2) < (\{1, 2, 3\}, 2.5^2)$$

$$(\emptyset, 2^2.5) < (\{1\}, 2^2.5) < (\{1, 2\}, 2^2.5) < (\{1, 2\}, 2^2.5^2)$$

$$(\emptyset, 2^3) < (\{1\}, 2^3) < (\{1\}, 2^3.5) < (\{1\}, 2^3.5^2)$$

$$(\{2, 4\}, 1) < (\{2, 4\}, 2) < (\{2, 4\}, 2^2) < (\{2, 4\}, 2^3) < (\{2, 4\}, 2^3.5) < (\{2, 4\}, 2^3.5^2)$$

$$(\{3, 4\}, 1) < (\{3, 4\}, 2) < (\{3, 4\}, 2^2) < (\{3, 4\}, 2^3) < (\{3, 4\}, 2^3.5) < (\{3, 4\}, 2^3.5^2)$$

$$(\{2\}, 1.5) < (\{2, 3\}, 1.5) < (\{2, 3, 4\}, 1.5) < (\{2, 3, 4\}, 2.5) < (\{2, 3, 4\}, 2^2.5) < (\{2, 3, 4\}, 2^2.5^2)$$

$$(\{2\}, 2) < (\{2, 3\}, 2) < (\{2, 3\}, 2^2) < (\{2, 3\}, 2^3) < (\{2, 3\}, 2^3.5) < (\{2, 3\}, 2^3.5^2)$$

$$(\{3\}, 1.5) < (\{1, 3\}, 1.5) < (\{1, 3, 4\}, 1.5) < (\{1, 3, 4\}, 2.5) < (\{1, 3, 4\}, 2^2.5) < (\{1, 3, 4\}, 2^2.5^2)$$

$$(\{3\}, 2) < (\{1, 3\}, 2) < (\{1, 3\}, 2^2) < (\{1, 3\}, 2^3) < (\{1, 3\}, 2^3.5) < (\{1, 3\}, 2^3.5^2)$$

$$(\{4\}, 1.5) < (\{1, 4\}, 1.5) < (\{1, 2, 4\}, 1.5) < (\{1, 2, 4\}, 2.5) < (\{1, 2, 4\}, 2^2.5) < (\{1, 2, 4\}, 2^2.5^2)$$

$$(\{4\}, 2) < (\{1, 4\}, 2) < (\{1, 4\}, 2^2) < (\{1, 4\}, 2^3) < (\{1, 4\}, 2^3.5) < (\{1, 4\}, 2^3.5^2)$$

$$(\emptyset, 1.5^2) < (\{1\}, 1.5^2) < (\{1, 2\}, 1.5^2) < (\{1, 2, 3\}, 1.5^2) < (\{1, 2, 3, 4\}, 1.5^2) < (\{1, 2, 3, 4\}, 2.5^2)$$

$$(\emptyset, 2.5) < (\{1\}, 2.5) < (\{1, 2\}, 2.5) < (\{1, 2, 3\}, 2.5) < (\{1, 2, 3\}, 2^2.5) < (\{1, 2, 3\}, 2^2.5^2)$$

$$(\emptyset, 2^2) < (\{1\}, 2^2) < (\{1, 2\}, 2^2) < (\{1, 2\}, 2^3) < (\{1, 2\}, 2^3.5) < (\{1, 2\}, 2^3.5^2)$$

$$(\{2\}, 1) < (\{2, 3\}, 1) < (\{2, 3, 4\}, 1) < (\{2, 3, 4\}, 2) < (\{2, 3, 4\}, 2^2) < (\{2, 3, 4\}, 2^3) < (\{2, 3, 4\}, 2^3.5) < (\{2, 3, 4\}, 2^3.5^2)$$

$$(\{3\}, 1) < (\{1, 3\}, 1) < (\{1, 3, 4\}, 1) < (\{1, 3, 4\}, 2) < (\{1, 3, 4\}, 2^2) < (\{1, 3, 4\}, 2^3) < (\{1, 3, 4\}, 2^3.5) < (\{1, 3, 4\}, 2^3.5^2)$$

$$(\{4\}, 1) < (\{1, 4\}, 1) < (\{1, 2, 4\}, 1) < (\{1, 2, 4\}, 2) < (\{1, 2, 4\}, 2^2) < (\{1, 2, 4\}, 2^3) < (\{1, 2, 4\}, 2^3.5) < (\{1, 2, 4\}, 2^3.5^2)$$

$$(\emptyset, 1.5) < (\{1\}, 1.5) < (\{1, 2\}, 1.5) < (\{1, 2, 3\}, 1.5) < (\{1, 2, 3, 4\}, 1.5) < (\{1, 2, 3, 4\}, 2.5) < (\{1, 2, 3, 4\}, 2^2.5) < (\{1, 2, 3, 4\}, 2^2.5^2)$$

$$(\emptyset, 2) < (\{1\}, 2) < (\{1, 2\}, 2) < (\{1, 2, 3\}, 2) < (\{1, 2, 3\}, 2^2) < (\{1, 2, 3\}, 2^3) < (\{1, 2, 3\}, 2^3.5) < (\{1, 2, 3\}, 2^3.5^2)$$

$$(\emptyset, 1) < (\{1\}, 1) < (\{1, 2\}, 1) < (\{1, 2, 3\}, 1) < (\{1, 2, 3, 4\}, 1) < (\{1, 2, 3, 4\}, 2) < (\{1, 2, 3, 4\}, 2^2) <$$

$$< (\{1, 2, 3, 4\}, 2^3) < (\{1, 2, 3, 4\}, 2^3.5) < (\{1, 2, 3, 4\}, 2^3.5^2)$$

Bằng cách sử dụng định lý 2.2.3.1 nhiều lần ta có hệ quả sau :

Hệ quả 2.2.3.1 : Nếu $P_1, P_2, \dots, P_n$ là các poset có phân hoạch xích đối xứng thì poset tích trực tiếp

$P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$ cũng có phân hoạch xích đối xứng.

2.3. PHÂN HOẠCH XÍCH ĐỐI XỨNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP :

2.3.1. Phân hoạch trực tiếp xích đối xứng cho poset $P(S)$ các tập con của tập n -phần tử S :

Như lúc đầu ta quy ước tập n -phần tử S là tập n số tự nhiên khác 0 đầu tiên nên trong phần này ta luôn ngầm định là trên S , cũng như mọi tập con A của tập số tự nhiên N luôn được trang bị thứ tự tự nhiên, cảm sinh từ tập số tự nhiên N .

Như trong chương 1 ta đã trình bày, poset $P(S)$ là một poset có hạng, với hàm hạng $r(A) = |A|, \forall A \in P(S)$. Và các tập con của tập n -phần tử S , $A_1, A_2, \dots, A_h \in P(S)$ lập thành một xích đối xứng nếu:

$$i) A_i \subset A_{i+1} \text{ và } |A_{i+1}| = |A_i| + 1, \forall i < h.$$

$$ii) |A_1| + |A_h| = r(P(S)) = n.$$

Nhờ thứ tự tự nhiên trên S nên ta có thể đưa thêm vào khái niệm xích đối xứng tăng, nhằm tạo thuận lợi cho việc chứng minh sau này.

Định nghĩa 2.3.1.1:

Một xích đối xứng $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_h, (h \geq 3)$ trong S được gọi là tăng nếu dãy các phần tử sai biệt của hai thành viên liên tiếp trong xích $a_i = A_i \setminus A_{i-1}, \forall i = 2, \dots, h$ là một dãy tăng trong S . Xích đối xứng có ít hơn 3 thành viên ta quy ước là xích đối xứng tăng.

Ví dụ 2.3.1.1: $\{5\} \subset \{1, 5\} \subset \{1, 2, 5\} \subset \{1, 2, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 5, 6\}$ là một xích đối xứng tăng trong poset $P(S_6)$, với $S_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Định nghĩa 2.3.1.2: Cho các tập con của tập số tự nhiên: $A \subset T$.

* Phần tử $k \in A$ được gọi là phần tử cơ sở của A trong T , đối lập với phần tử lỗ hổng $l < k, l \in T \setminus A$ nếu trong T : hoặc khoảng $(l, k) = \emptyset$, hoặc khoảng (l, k) chỉ bao gồm các phần tử cơ sở của A trong T và các phần tử lỗ hổng đối lập của chúng, đã được xác định ở các bước trước đó. Nếu l là phần tử lỗ hổng đối lập với phần tử cơ sở $k \in A$ thì ta viết $l = k^-$.

* Tập tất cả các phần tử cơ sở của A trong T được gọi là phần gốc của A trong T , ký hiệu là A_T^+ . Tập tất cả các phần tử lỗ hổng của A trong T được gọi là phần khuyết của A trong T , ký hiệu là $A_T^- = \{k^- \mid k \in A_T^+\}$.

* Tập con $D \subset S$ thỏa $D = D^+$ được gọi là tập sơ cấp.

Ví dụ 2.3.1.2: Tìm phần gốc và phần khuyết của tập con $A = \{4, 5, 10, 11, 18, 22, 23, 25\}$ trong tập $T = \{2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 17, 18, 20, 22, 23, 25, 26\}$.

Giải

Theo định nghĩa, ta thấy:

4 là phần tử cơ sở của A trong T , đối lập với phần tử lỗ hổng 2

10 là phần tử cơ sở của A trong T , đối lập với phần tử lỗ hổng 8

11 là phần tử cơ sở của A trong T , đối lập với phần tử lỗ hổng 7

18 là phần tử cơ sở của A trong T , đối lập với phần tử lỗ hổng 17

22 là phần tử cơ sở của A trong T , đối lập với phần tử lỗ hổng 20

23 là phần tử cơ sở của A trong T , đối lập với phần tử lỗ hổng 14

Vậy: Phần gốc của A trong T là $A_T^+ = \{4, 10, 11, 18, 22, 23\}$

Phần khuyết của A trong T là $A_T^- = \{2, 7, 8, 14, 17, 20\}$

Từ cách định nghĩa phần tử cơ sở và phần tử lỗ hổng của tập con $A \subset T$ trong tập T , ta thấy rằng nếu $k \in A_T^+$ với phần tử lỗ hổng $k^- \in A_T^-$ thì mỗi phần tử cơ sở của $A \setminus \{k\}$ trong $T \setminus \{k, k^-\}$ cũng là phần tử cơ sở của A trong T . Tổng quát kết quả này ta được mệnh đề sau :

Mệnh đề 2.3.1.1 : Cho các tập con của tập số tự nhiên: $A \subset T$, với phần gốc $A_T^+ \neq \emptyset$. Cho $B \subset A_T^+$ và $B^- = \{k^- \in A_T^- \mid k \in B\}$. Khi đó mỗi phần tử cơ sở của $A \setminus B$ trong $T \setminus \{B \cup B^-\}$ cũng là phần tử cơ sở của A trong T .

Mệnh đề 2.3.1.2 : Cho các tập con của tập số tự nhiên: $A \subset T$. Khi đó nếu tồn tại các phần tử $k, s \in T$, $s < k$, $k \in A$, $s \notin A$ thì phần gốc $A_T^+ \neq \emptyset$.

Chứng minh

Gọi $t \in T$ là phần tử lớn nhất trong các phần tử $l \in T \setminus A$ và $l < k$. Đồng thời chọn $h \in A$ là phần tử bé nhất trong các phần tử $l \in A$ và $l > t$. Ta dễ thấy khoảng $(t, h) \subset T$ là rỗng. Thật vậy, giả sử khoảng $(t, h) \subset T$ là không rỗng. Khi đó tồn tại $g \in T$, $t < g < h$ sao cho hoặc $g \in A$ hoặc $g \in T \setminus A$. Nếu $g \in A$ thì mâu thuẫn với việc chọn h . Nếu $g \in T \setminus A$ thì mâu thuẫn với việc chọn t . Vậy khoảng $(t, h) \subset T$ là rỗng, suy ra $h \in A_T^+$, hay $A_T^+ \neq \emptyset$.

■

Từ mệnh đề này ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.3.1.1: Cho các tập con của tập số tự nhiên: $A \subset T$. Khi đó $A_T^+ = \emptyset$ khi và chỉ khi A là một đoạn đầu của T (nghĩa là tồn tại phần tử $s \in T$ sao cho $A = \{t \in T \mid t \leq s\}$).

Chứng minh

($\Leftarrow$) Ta có : A là một đoạn đầu của $T \Rightarrow \exists s \in T : A = \{t \in T : t \leq s\} \Rightarrow$ không tồn tại phần tử $l \in T \setminus A : l < t, \forall t \in A \Rightarrow A_T^+ = \emptyset$ (theo định nghĩa)

($\Rightarrow$) Ta có : $A_T^+ = \emptyset$, áp dụng mệnh đề 2.3.1.2 ta suy ra

$\forall k, s \in T, s \geq k, \forall k \in A, \forall s \notin A \Rightarrow \exists s \in T : A = \{k \in T : k \leq s\}$.

Hay A là một đoạn đầu của T . ■

Quay lại với tập n -phần tử $S = \{1, 2, \dots, n\}$, với tập con $A \subset S$, ta ký hiệu phần gốc và phần khuyết của A trong S đơn giản là A^+ và A^- . Từ hệ quả 2.3.1.1, nếu $A^+ = \emptyset$ thì A là một đoạn đầu trong S . Do các đoạn đầu trong một tập sắp tốt thì so sánh được với nhau nên họ tất cả các tập con của S có chung

phần gốc rỗng lập thành một xích, và chính xác là xích đối xứng tăng sau :
 $\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \dots \subset \{1,2,\dots,n-1\} \subset \{1,2,\dots,n\}.$

Kết quả này được mở rộng cho họ các tập con của S có chung phần gốc khác rỗng. Đó chính là mệnh đề sau :

Mệnh đề 2.3.1.3 : Nếu hai tập con $A, B \in P(S)$ có chung phần gốc $A^+ = B^+ = D$ thì chúng so sánh được với nhau. Hơn nữa, họ tất cả các tập con của S có chung phần gốc D lập thành một xích đối xứng tăng trong poset $P(S)$.

Chứng minh

Đặt $A' = A \setminus A^+$, $B' = B \setminus B^+$ và $D^- = \{k^- : k \in D\}$ là tập các lỗ hổng chung của A và B. Theo mệnh đề

2.3.1.1 thì mỗi phần tử cơ sở của tập $A' = A \setminus A^+$ trong $S \setminus (D \cup D^-)$ đều là phần tử cơ sở của tập A trong

S. Mà mọi phần tử cơ sở của tập A trong S đều thuộc phần gốc A^+ nên phần gốc của tập A' trong $S \setminus (D \cup D^-)$ là rỗng. Tương tự, phần gốc của B' trong $S \setminus (D \cup D^-)$ cũng là rỗng. Theo hệ quả 2.3.1.2

thì A', B' là các đoạn đầu trong $S \setminus (D \cup D^-)$ nên chúng so sánh được với nhau. Vì vậy $A = D \cup A'$ và

$B = D \cup B'$ cũng so sánh được với nhau.

Từ các lập luận trên ta thấy rằng, họ tất cả các tập con có chung phần gốc D trong S được hình thành bằng cách bổ sung vào D các đoạn đầu của $S \setminus (D \cup D^-)$. Nếu $|D| = m$ thì $|S \setminus (D \cup D^-)| = n - 2m$ và số

các đoạn đầu trong $S \setminus (D \cup D^-)$ là $(n - 2m + 1)$, nên số các tập con có chung phần gốc D trong S là

$(n - 2m + 1)$. Do $S \setminus (D \cup D^-)$ cũng là tập sắp tốt nên các đoạn đầu của nó so sánh được với nhau và ta

sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần bắt đầu bởi tập rỗng và cuối cùng là $S \setminus (D \cup D^-)$. Vì vậy khi bổ

sung lần lượt vào D các đoạn đầu của $S \setminus (D \cup D^-)$ theo thứ tự tăng dần từ tập $\emptyset$ đến tập $S \setminus (D \cup D^-)$

ta được họ tất cả các tập con có chung phần gốc D trong S, và theo thứ tự đó chúng lập thành một xích đối xứng tăng trong $P(S)$ mở đầu bởi tập D và kết thúc bởi tập $S \setminus D^-$.

■

Hiển nhiên là hai xích đối xứng được hình thành như trên với các phần gốc là các tập sơ cấp khác nhau thì rời nhau ; đồng thời mỗi tập con $A \subset S$ phải thuộc vào một xích đối xứng tăng của $P(S)$ bao gồm các tập có chung phần gốc A^+ .

Kết hợp mệnh đề 2.3.1.3 và lập luận trên đây ta có định lý sau :

Định lý 2.3.1.1: Tồn tại một phân hoạch xích đối xứng tăng cho poset $P(S)$ các tập con của tập $S = \{1, 2, \dots, n\}$ mà mở đầu mỗi xích trong phân hoạch là một tập sơ cấp và các thành viên của xích là các tập con của S có chung phần gốc là tập sơ cấp đó.

Từ định lý 2.3.1.1 ta đưa ra phương pháp phân hoạch trực tiếp xích đối xứng cho poset $P(S)$ như sau :

❖ **Phương pháp phân hoạch trực tiếp xích đối xứng cho poset $P(S)$ với S là tập n -phần tử :**

Bước 1 : Dựa vào định nghĩa phần tử cơ sở của một tập $A \subset S$ trong S , ta tìm ra tất cả s_i tập sơ cấp hạng $i : \{A_{ij}\}_{j \in \overline{1, s_i}}$, với $i = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$.

Bước 2 : Ứng với mỗi tập sơ cấp hạng $i : A_{ij}, i = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor, j = 1, 2, \dots, s_i$, ta tìm tập $S \setminus (A_{ij} \cup A_{ij}^-)$ và $(n - 2i + 1)$ đoạn đầu của nó theo thứ tự tăng dần. Sau đó ta lập ra 1 xích đối xứng tăng bằng cách lần lượt bổ sung $(n - 2i + 1)$ đoạn đầu của $S \setminus (A_{ij} \cup A_{ij}^-)$ theo thứ tự trên vào A_{ij} .

Bước 3 : Tổng hợp tất cả $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} s_i$ xích đối xứng tăng trên ta được một phân hoạch xích đối cho poset $P(S)$.

Ví dụ 2.3.1.3 : Phân hoạch trực tiếp xích đối xứng cho poset $P(S)$, với $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Giải :

* Một tập sơ cấp duy nhất có hạng 0 là $\emptyset$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi tập $\emptyset$ là :

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

* Các tập sơ cấp có hạng 1 là : $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{2\}$: Tập $S \setminus (\{2\} \cup \{2\}^-) = \{3, 4, 5, 6\}$ và 5 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{3, 4, 5, 6\}$ là : $\emptyset, \{3\}, \{3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{2\}$ là : $\{2\} \subset \{2, 3\} \subset \{2, 3, 4\} \subset \{2, 3, 4, 5\} \subset \{2, 3, 4, 5, 6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{3\}$: Tập $S \setminus (\{3\} \cup \{3\}^-) = \{1, 4, 5, 6\}$ và 5 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1, 4, 5, 6\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{3\}$ là : $\{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,3,4\} \subset \{1,3,4,5\} \subset \{1,3,4,5,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{4\}$: Tập $S \setminus (\{4\} \cup \{4\}^-) = \{1,2,5,6\}$ và 5 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1,2,5,6\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,5\}, \{1,2,5,6\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{4\}$ là : $\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,2,4\} \subset \{1,2,4,5\} \subset \{1,2,4,5,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{5\}$: Tập $S \setminus (\{5\} \cup \{5\}^-) = \{1,2,3,6\}$ và 5 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1,2,3,6\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,6\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{5\}$ là : $\{5\} \subset \{1,5\} \subset \{1,2,5\} \subset \{1,2,3,5\} \subset \{1,2,3,5,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{6\}$: Tập $S \setminus (\{6\} \cup \{6\}^-) = \{1,2,3,4\}$ và 5 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1,2,3,4\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{6\}$ là : $\{6\} \subset \{1,6\} \subset \{1,2,6\} \subset \{1,2,3,6\} \subset \{1,2,3,4,6\}$

* Các tập sơ cấp có hạng 2 là: $\{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{2,4\}$: Tập $S \setminus (\{2,4\} \cup \{2,4\}^-) = \{5,6\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{5,6\}$ là : $\emptyset, \{5\}, \{5,6\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{2,4\}$ là : $\{2,4\} \subset \{2,4,5\} \subset \{2,4,5,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{2,5\}$: Tập $S \setminus (\{2,5\} \cup \{2,5\}^-) = \{3,6\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{3,6\}$ là : $\emptyset, \{3\}, \{3,6\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{2,5\}$ là : $\{2,5\} \subset \{2,3,5\} \subset \{2,3,5,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{2,6\}$: Tập $S \setminus (\{2,6\} \cup \{2,6\}^-) = \{3,4\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{3,4\}$ là : $\emptyset, \{3\}, \{3,4\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{2,6\}$ là : $\{2,6\} \subset \{2,3,6\} \subset \{2,3,4,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{3,4\}$: Tập $S \setminus (\{3,4\} \cup \{3,4\}^-) = \{5,6\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{5,6\}$ là : $\emptyset, \{5\}, \{5,6\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{3,4\}$ là : $\{3,4\} \subset \{3,4,5\} \subset \{3,4,5,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{3,5\}$: Tập $S \setminus (\{3,5\} \cup \{3,5\}^-) = \{1,6\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1,6\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1,6\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{3,5\}$ là : $\{3,5\} \subset \{1,3,5\} \subset \{1,3,5,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{3,6\}$: Tập $S \setminus (\{3,6\} \cup \{3,6\}^-) = \{1,4\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1,4\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1,4\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{3,6\}$ là : $\{3,6\} \subset \{1,3,6\} \subset \{1,3,4,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{4,5\}$: Tập $S \setminus (\{4,5\} \cup \{4,5\}^-) = \{1,6\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1,6\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1,6\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{4,5\}$ là : $\{4,5\} \subset \{1,4,5\} \subset \{1,4,5,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{4,6\}$: Tập $S \setminus (\{4,6\} \cup \{4,6\}^-) = \{1,2\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1,2\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1,2\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{4,6\}$ là : $\{4,6\} \subset \{1,4,6\} \subset \{1,2,4,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{5,6\}$: Tập $S \setminus (\{5,6\} \cup \{5,6\}^-) = \{1,2\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1,2\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1,2\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{5,6\}$ là : $\{5,6\} \subset \{1,5,6\} \subset \{1,2,5,6\}$

* Các tập sơ cấp có hạng 3 là: $\{2,4,6\}, \{2,5,6\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}, \{4,5,6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{2,4,6\}$: Tập $S \setminus (\{2,4,6\} \cup \{2,4,6\}^-) = \emptyset$ và 1 đoạn đầu của tập $\emptyset$ là : $\emptyset$
 $\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{2,4,6\}$ là : $\{2,4,6\}$

+) Tương tự 4 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi các tập sơ cấp : $\{2,5,6\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}, \{4,5,6\}$ là:
 $\{2,5,6\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}, \{4,5,6\}$

Vậy phân hoạch trực tiếp cho poset $P(S)$ gồm 20 xích đối xứng sau:

$$\{2,4,6\}$$

$$\{2,5,6\}$$

$$\{3,4,6\}$$

$$\{3,5,6\}$$

$$\{4,5,6\}$$

$$\{2,4\} \subset \{2,4,5\} \subset \{2,4,5,6\}$$

$$\{2,5\} \subset \{2,3,5\} \subset \{2,3,5,6\}$$

$$\{2,6\} \subset \{2,3,6\} \subset \{2,3,4,6\}$$

$$\{3,4\} \subset \{3,4,5\} \subset \{3,4,5,6\}$$

$$\{3,5\} \subset \{1,3,5\} \subset \{1,3,5,6\}$$

$$\{3,6\} \subset \{1,3,6\} \subset \{1,3,4,6\}$$

$$\{4,5\} \subset \{1,4,5\} \subset \{1,4,5,6\}$$

$$\{4,6\} \subset \{1,4,6\} \subset \{1,2,4,6\}$$

$$\{5,6\} \subset \{1,5,6\} \subset \{1,2,5,6\}$$

$$\{2\} \subset \{2,3\} \subset \{2,3,4\} \subset \{2,3,4,5\} \subset \{2,3,4,5,6\}$$

$$\{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,3,4\} \subset \{1,3,4,5\} \subset \{1,3,4,5,6\}$$

$$\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,2,4\} \subset \{1,2,4,5\} \subset \{1,2,4,5,6\}$$

$$\{5\} \subset \{1,5\} \subset \{1,2,5\} \subset \{1,2,3,5\} \subset \{1,2,3,5,6\}$$

$$\{6\} \subset \{1,6\} \subset \{1,2,6\} \subset \{1,2,3,6\} \subset \{1,2,3,4,6\}$$

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\} \subset \{1,2,3,4,5\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$$

Sau khi đưa ra 2 phương pháp phân hoạch xích đối xứng cho poset $P(S)$ và qua ví dụ ta thấy rằng các xích đối xứng trong phân hoạch bằng phương pháp quy nạp (cũng là các xích đối xứng tăng) cũng như phương pháp trực tiếp hoàn toàn giống nhau. Sau đây ta sẽ khẳng định điều đó qua định lý sau:

Định lý 2.3.1.2: Xây dựng phân hoạch xích đối xứng cho poset $P(S_n)$ bằng phương pháp quy nạp cũng như phương pháp trực tiếp đều giống nhau.

Chứng minh:

Ta chứng minh bằng lập luận quy nạp theo số phần tử n của S_n như sau:

* $n=1$: $S_1 = \{1\}$: Theo phương pháp quy nạp ta có 1 xích đối xứng duy nhất cho $P(S_1)$ là: $\emptyset \subset \{1\}$.

Còn theo phương pháp trực tiếp thì 1 xích đối xứng duy nhất bắt đầu bởi 1 tập sơ cấp duy nhất hạng 0

là: $\emptyset \subset \{1\}$. Vậy xây dựng phân hoạch xích đối xứng của cả 2 phương pháp là giống nhau nên định lý đúng với $n = 1$.

* Giả sử định lý đúng với $n = k$, nghĩa là tất cả các xích đối xứng tăng của $P(S_k)$ trong 2 phương pháp phân hoạch là giống nhau. Ta sẽ chứng minh định lý đúng với $n = k + 1$.

Gọi $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_h$ (2.5)

là một xích đối xứng tăng trong phương pháp phân hoạch quy nạp của $P(S_k)$.

Theo phương pháp quy nạp ta có hình chữ nhật sau:

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & & \subset & A_2 & & \subset \dots \subset & A_{h-1} & & \subset & A_h \\ \hline A_1 \cup \{k+1\} & \subset & A_2 \cup \{k+1\} & \subset & \dots \subset & A_{h-1} \cup \{k+1\} & \subset & A_h \cup \{k+1\} \end{array}$$

“Bóc” các lớp của hình chữ nhật trên ta được 2 xích đối xứng tăng của $P(S_{k+1})$ theo phương pháp quy nạp là:

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_h \subset A_h \cup \{k+1\} \quad (2.6)$$

$$A_1 \cup \{k+1\} \subset A_2 \cup \{k+1\} \subset \dots \subset A_{h-1} \cup \{k+1\} \quad (2.7)$$

Ta sẽ chỉ ra rằng bằng phương pháp phân hoạch trực tiếp thì $P(S_{k+1})$ cũng có chứa 2 xích đối xứng tăng (2.6) và (2.7).

- Đối với xích đối xứng tăng (2.6): Theo giả thiết quy nạp thì (2.5) là một xích đối xứng tăng trong phân hoạch trực tiếp của $P(S_k)$, nên $A_1, A_2, \dots, A_h$ có chung phần gốc là A_1 . Trong $P(S_{k+1})$, các phần tử có chung phần gốc A_1 là: $A_1, A_2, \dots, A_h$ và $A_h \cup \{k+1\}$.

(Chú ý: $A_h \cup \{k+1\}$ có phần gốc A_1 vì A_h có phần gốc A_1 và $(k+1)$ không là phần tử cơ sở của $A_h \cup \{k+1\}$ trong S_{k+1} . Thật vậy, do A_h chỉ chứa A_1 và các phần tử thuộc $S_k \setminus (A_1 \cup A_1^-)$ nên tất cả những phần tử $l \in S_{k+1}$ thỏa $l < k+1$, $l \notin A_h \cup \{k+1\}$ là những phần tử thuộc A_1^- , do đó không tồn tại phần tử lỗ hổng nào đối lập với $(k+1)$)

Hiển nhiên ta có một xích đối xứng tăng của $P(S_{k+1})$ từ $\{A_1, A_2, \dots, A_h, A_h \cup \{k+1\}\}$ là: $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_h \subset A_h \cup \{k+1\}$. Hay (2.6) là một xích đối xứng tăng nằm trong phân hoạch xích đối xứng của $P(S_{k+1})$ bằng phương pháp trực tiếp.

- Đối với xích đối xứng (2.7): Do xích đối xứng (2.7) chỉ tồn tại khi $h \geq 2$ nên với $h \geq 2$ ta chứng minh xích đối xứng (2.7) nằm trong phân hoạch trực tiếp của $P(S_{k+1})$.

➤ Ta có: $A_1 \cup \{k+1\}$ là một tập sơ cấp trong S_{k+1} .

Thật vậy: Do A_1 là một tập sơ cấp trong S_{k+1} nên ta chỉ cần chứng minh rằng $(k+1)$ là phần tử cơ sở của $A_1 \cup \{k+1\}$ trong S_{k+1} .

+) Nếu $k \notin A_1$ thì hiển nhiên $(k+1)$ là phần tử cơ sở của $A_1 \cup \{k+1\}$ trong S_{k+1} .

+) Nếu $k \in A_1$ thì luôn có một phần tử l là phần tử đứng liền trước phần tử nhỏ nhất thuộc phần khuyết A_1^- thỏa $(l, k+1)$ chỉ chứa A_1 và A_1^- nên $(k+1)$ là phần tử cơ sở của $A_1 \cup \{k+1\}$ trong S_{k+1} .

➤ Tương tự chứng minh trên ta cũng có $(k+1)$ là một phần tử cơ sở của $A_2 \cup \{k+1\}, \dots, A_{h-1} \cup \{k+1\}$ trong S_{k+1} . Mặt khác $A_2, A_3, \dots, A_{h-1}$ có chung phần gốc A_1 nên $A_2 \cup \{k+1\}, \dots, A_{h-1} \cup \{k+1\}$ cũng có chung phần gốc là $A_1 \cup \{k+1\}$.

Hiển nhiên ta có một xích đối xứng tăng của $P(S_{k+1})$ từ $\{A_2 \cup \{k+1\}, \dots, A_{h-1} \cup \{k+1\}\}$ là: $A_2 \cup \{k+1\} \subset A_3 \cup \{k+1\} \subset \dots \subset A_{h-1} \cup \{k+1\}$. Hay (2.7) là một xích đối xứng tăng nằm trong phân hoạch xích đối xứng của $P(S_{k+1})$ bằng phương pháp trực tiếp.

Lần lượt lấy tất cả các xích đối xứng trong $P(S_k)$ ta sẽ xây dựng được phân hoạch xích đối xứng cho $P(S_{k+1})$ bằng phương pháp quy nạp và các xích đối xứng này nằm hoàn toàn trong phân hoạch xích đối xứng bằng phương pháp trực tiếp của $P(S_{k+1})$. Hay các xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng bằng phương pháp quy nạp và phương pháp trực tiếp là như nhau.

■

2.3.2. Phân hoạch trực tiếp xích đối xứng cho poset $P(m)$ các ước nguyên dương của số nguyên m cho trước:

Với $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, đặt $s_1 = 1; s_2 = 1 + k_1; \dots; s_n = 1 + k_1 + \dots + k_{n-1}$ và $l = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

Với S là tập l phần tử, $S = \{1, 2, \dots, l\}$, ta xây dựng ánh xạ sau:

$$\varphi: P(m) \rightarrow P(S)$$

đặt tương ứng mỗi ước nguyên dương $d = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \dots p_n^{t_n}$ của m với một tập con $A \in P(S)$, chỉ gồm các phần tử được xác định theo mỗi $t_i \neq 0$ là $s_i, s_i + 1, \dots, s_i + t_i - 1$; còn các phần tử khác thì không thuộc A .

Ta dễ thấy φ là một đơn ánh, bảo toàn thứ tự:

+) Ta có: $\varphi(d) = \varphi(p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \dots p_n^{t_n}) = \emptyset \Rightarrow t_i = 0, \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow d = 1$

$\Rightarrow \text{Ker} \varphi = \left\{ d = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \dots p_n^{t_n} \in P(m) : \varphi(d) = O_{P(S)} = \emptyset \right\} = 1 = O_{P(m)}$

$\Rightarrow \varphi$ là một đơn ánh

+) Mặt khác: $\forall d, d' \in P(m); d < d' \Rightarrow \varphi(d) = A \subset B = \varphi(d')$.

Thật vậy: với $d, d' \in P(m); d < d'$

$$\Rightarrow d = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \dots p_n^{t_n}, d' = p_1^{t_1'} \cdot p_2^{t_2'} \dots p_n^{t_n'}, (0 \leq t_i \leq t_i' \leq k_i, \forall i = 1, \dots, n)$$

$\Rightarrow$ ứng với mỗi $t_i \neq 0$ thì $s_i, s_i + 1, \dots, s_i + t_i - 1 \in B$ (do $t_i \leq t_i'$). Do đó: $A \subset B$.

$\Rightarrow \varphi$ bảo toàn thứ tự.

Vì φ là một đơn ánh, bảo toàn thứ tự nên φ nhúng poset $P(m)$ vào poset $P(S)$ như là một poset con. Khi đồng nhất ảnh $\varphi(P(m))$ với $P(m)$ trong poset $P(S)$ ta có quyền xem $P(m) \subset P(S)$.

Xét ước nguyên dương $d = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \dots p_n^{t_n}$ của m như là tập $A = \varphi(d) \in P(S)$. Ứng với mỗi $t_i \neq 0$ nếu phần tử $s_i + q \in A$ (với $0 \leq q < t_i$) là phần tử cơ sở của A trong S thì do cách định nghĩa phần tử cơ sở trong định nghĩa 2.3.1.2 buộc các phần tử $s_i, s_i + 1, \dots, s_i + q$ phải là phần tử cơ sở của A trong S . Kết quả này cho ta mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.3.2.1: Với mỗi tập $A \in P(m)$ thì phần gốc $A_S^+ \in P(m)$.

Trong phân hoạch poset $P(S)$ thành các xích đối xứng tăng, lấy một xích đối xứng với thành viên đầu tiên là tập sơ cấp $A \in P(m)$. Khi đó dễ dàng thấy rằng các thành viên còn lại của xích đối xứng trên đều là các tập thuộc $P(m)$. Do mỗi xích đối xứng tăng gồm các tập thuộc $P(m)$ trong poset $P(S)$ là một xích đối xứng tăng trong chính $P(m)$ nên tổng hợp các kết quả trên ta được định lý sau:

Định lý 2.3.2.1: Tồn tại một phân hoạch trực tiếp poset $P(m)$ thành các xích đối xứng tăng, trong đó, mỗi xích bao gồm các tập có chung phần gốc là một tập sơ cấp $A \in P(m)$.

* **Nhận xét:** Nếu tập $\emptyset \neq A \in P(m) \subset P(S)$ thì A có những tính chất sau:

$$+) A \cap \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \neq \emptyset$$

$$+) \text{ Với } i = 1, \dots, n \text{ thì } A \cap \{s_i, s_i + 1, \dots, s_i + k_i - 1\} = \left[\begin{array}{l} \emptyset \\ \{s_i, s_i + 1, \dots, s_i + j\}, j \leq k_i - 1 \end{array} \right.$$

Dựa vào các tính chất của tập $A \in P(m) \subset P(S)$ ta có ví dụ sau:

Ví dụ 2.3.4: Phân hoạch trực tiếp poset $P(2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ thành các xích đối xứng tăng.

Giải:

Ta có: $m = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \Rightarrow s_1 = 1, s_2 = 4, s_3 = 6, l = 8, S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Áp dụng nhận xét trên, nếu $\emptyset \neq A \in P(2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ thì A có các tính chất sau:

$$+) A \cap \{1, 4, 6\} \neq \emptyset$$

$$+) A \cap \{1, 2, 3\} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \{1\} \vee \{1, 2\} \vee \{1, 2, 3\} \end{bmatrix}; \text{ hoặc } A \cap \{4, 5\} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \{4\} \vee \{4, 5\} \end{bmatrix}; \text{ hoặc}$$

$$A \cap \{6, 7, 8\} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \{6\} \vee \{6, 7\} \vee \{6, 7, 8\} \end{bmatrix}$$

Từ các tính chất trên, ta sẽ tìm ra tất cả các tập sơ cấp thuộc $P(2^3.5^2.7^3)$ như sau:

* Một tập sơ cấp duy nhất hạng 0: $\emptyset$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng trong $P(2^3.5^2.7^3)$ bắt đầu bởi tập $\emptyset$ là :

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

* Các tập sơ cấp hạng 1: $\{4\}, \{6\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{4\}$: Tập $S \setminus (\{4\} \cup \{4\}^-) = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ và 7 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 6, 7\}, \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{4\}$ là :

$$\{4\} \subset \{1, 4\} \subset \{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 4, 5\} \subset \{1, 2, 4, 5, 6\} \subset \{1, 2, 4, 5, 6, 7\} \subset \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

+) Đối với tập sơ cấp $\{6\}$: Tập $S \setminus (\{6\} \cup \{6\}^-) = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$ và 7 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{6\}$ là :

$$\{6\} \subset \{1, 6\} \subset \{1, 2, 6\} \subset \{1, 2, 3, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 7\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$$

* Các tập sơ cấp hạng 2 : $\{4, 5\}, \{4, 6\}, \{6, 7\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{4, 5\}$: Tập $S \setminus (\{4, 5\} \cup \{4, 5\}^-) = \{1, 6, 7, 8\}$ và 5 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1, 6, 7, 8\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1, 6\}, \{1, 6, 7\}, \{1, 6, 7, 8\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{4, 5\}$ là :

$$\{4, 5\} \subset \{1, 4, 5\} \subset \{1, 4, 5, 6\} \subset \{1, 4, 5, 6, 7\} \subset \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

+) Đối với tập sơ cấp $\{4, 6\}$: Tập $S \setminus (\{4, 6\} \cup \{4, 6\}^-) = \{1, 2, 7, 8\}$ và 5 đoạn đầu theo thứ tự tăng dần của tập $\{1, 2, 7, 8\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 2, 7, 8\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{4, 6\}$ là :

$$\{4, 6\} \subset \{1, 4, 6\} \subset \{1, 2, 4, 6\} \subset \{1, 2, 4, 6, 7\} \subset \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$$

+) Đối với tập sơ cấp $\{6, 7\}$: Tập $S \setminus (\{6, 7\} \cup \{6, 7\}^-) = \{1, 2, 3, 8\}$ và 5 đoạn đầu theo thứ tự tăng

dần của tập $\{1, 2, 3, 8\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 8\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{6, 7\}$ là :

$$\{6, 7\} \subset \{1, 6, 7\} \subset \{1, 2, 6, 7\} \subset \{1, 2, 3, 6, 7\} \subset \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$$

* Các tập sơ cấp hạng 3: $\{4, 5, 6\}, \{4, 6, 7\}, \{6, 7, 8\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{4, 5, 6\}$: Tập $S \setminus (\{4, 5, 6\} \cup \{4, 5, 6\}^-) = \{7, 8\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng

dần của tập $\{7, 8\}$ là : $\emptyset, \{7\}, \{7, 8\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{4, 5, 6\}$ là : $\{4, 5, 6\} \subset \{4, 5, 6, 7\} \subset \{4, 5, 6, 7, 8\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{4, 6, 7\}$: Tập $S \setminus (\{4, 6, 7\} \cup \{4, 6, 7\}^-) = \{1, 8\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng

dần của tập $\{1, 8\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1, 8\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{4, 6, 7\}$ là : $\{4, 6, 7\} \subset \{1, 4, 6, 7\} \subset \{1, 4, 6, 7, 8\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{6, 7, 8\}$: Tập $S \setminus (\{6, 7, 8\} \cup \{6, 7, 8\}^-) = \{1, 2\}$ và 3 đoạn đầu theo thứ tự tăng

dần của tập $\{1, 2\}$ là : $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{6, 7, 8\}$ là : $\{6, 7, 8\} \subset \{1, 6, 7, 8\} \subset \{1, 2, 6, 7, 8\}$

* Các tập sơ cấp hạng 4: $\{4, 6, 7, 8\}$

+) Đối với tập sơ cấp $\{4, 6, 7, 8\}$: Tập $S \setminus (\{4, 6, 7, 8\} \cup \{4, 6, 7, 8\}^-) = \emptyset$

$\Rightarrow$ 1 xích đối xứng tăng bắt đầu bởi $\{4, 6, 7, 8\}$ là : $\{4, 6, 7, 8\}$

Vậy phân hoạch trực tiếp xích đối xứng tăng của poset $P(2^3.5^2.7^3)$ gồm 10 xích đối xứng tăng sau:

$$\{4, 6, 7, 8\}$$

$$\{4, 5, 6\} \subset \{4, 5, 6, 7\} \subset \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{4, 6, 7\} \subset \{1, 4, 6, 7\} \subset \{1, 4, 6, 7, 8\}$$

$$\{6, 7, 8\} \subset \{1, 6, 7, 8\} \subset \{1, 2, 6, 7, 8\}$$

$$\{4, 5\} \subset \{1, 4, 5\} \subset \{1, 4, 5, 6\} \subset \{1, 4, 5, 6, 7\} \subset \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{4, 6\} \subset \{1, 4, 6\} \subset \{1, 2, 4, 6\} \subset \{1, 2, 4, 6, 7\} \subset \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$$

$$\{6, 7\} \subset \{1, 6, 7\} \subset \{1, 2, 6, 7\} \subset \{1, 2, 3, 6, 7\} \subset \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$$

$$\{4\} \subset \{1, 4\} \subset \{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 4, 5\} \subset \{1, 2, 4, 5, 6\} \subset \{1, 2, 4, 5, 6, 7\} \subset \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{6\} \subset \{1, 6\} \subset \{1, 2, 6\} \subset \{1, 2, 3, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 7\} \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$$

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Ta viết lại phân hoạch trực tiếp xích đối xứng tăng này dưới dạng các ước nguyên dương của $m = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$ như sau :

$$5 \cdot 7^3$$

$$5^2 \cdot 7 < 5^2 \cdot 7^2 < 5^2 \cdot 7^3$$

$$5 \cdot 7^2 < 2 \cdot 5 \cdot 7^2 < 2 \cdot 5 \cdot 7^3$$

$$7^3 < 2 \cdot 7^3 < 2^2 \cdot 7^3$$

$$5^2 < 2 \cdot 5^2 < 2 \cdot 5^2 \cdot 7 < 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 < 2 \cdot 5^2 \cdot 7^3$$

$$5 \cdot 7 < 2 \cdot 5 \cdot 7 < 2^2 \cdot 5 \cdot 7 < 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 < 2^2 \cdot 5 \cdot 7^3$$

$$7^2 < 2 \cdot 7^2 < 2^2 \cdot 7^2 < 2^3 \cdot 7^2 < 2^3 \cdot 7^3$$

$$5 < 2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 5^2 < 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 < 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 < 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3$$

$$7 < 2 \cdot 7 < 2^2 \cdot 7 < 2^3 \cdot 7 < 2^3 \cdot 5 \cdot 7 < 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 < 2^3 \cdot 5 \cdot 7^3$$

$$1 < 2 < 2^2 < 2^3 < 2^3 \cdot 5 < 2^3 \cdot 5^2 < 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 < 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 < 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$$

Và các xích đối xứng tăng này hoàn toàn giống với các xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset $P(2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ bằng phương pháp quy nạp ở ví dụ 2.2.2.1.

2.4. SỐ LƯỢNG VÀ SIZE CỦA XÍCH ĐỐI XỨNG TRONG MỘT PHÂN HOẠCH XÍCH ĐỐI XỨNG:

Cho P là một poset có hàm hạng r . Giả sử P có một phân hoạch xích đối xứng. Do định nghĩa của xích đối xứng nên mỗi xích đối xứng của P phải chứa đúng một phần tử có hạng là $\left\lceil \frac{r(P)}{2} \right\rceil$. Do đó số xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của P chính bằng số phần tử có hạng $\left\lceil \frac{r(P)}{2} \right\rceil$ trong P . Nếu gọi N_α là số phần tử có hạng α trong P thì số xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của P là $N_{\left\lceil \frac{r(P)}{2} \right\rceil}$. Từ điều này ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.4.1: Nếu poset P , với hàm hạng r , có một phân hoạch xích đối xứng thì trong phân hoạch xích đối xứng đó có đúng $N_{\left\lceil \frac{r(P)}{2} \right\rceil}$ xích đối xứng.

Đối với poset $P(S)$, với S là tập n -phần tử, thì $r(P(S)) = n$ và số phần tử có hạng $[n/2]$ là $C_n^{[n/2]}$ nên số xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của $P(S)$ là $N_{[n/2]} = C_n^{[n/2]}$. Do đó ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.4.2: Số xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset $P(S)$, với S là tập n -phần tử, là $C_n^{[n/2]}$.

Tương tự poset $P(S)$, ta cũng tìm số xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset $P(m)$ tất cả các ước nguyên dương của số nguyên m , với $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$ (trong đó các $p_i (i=1, \dots, n)$ là các số nguyên tố phân biệt, $k_j \in \mathbb{Z}^+ (j=1, \dots, n)$). Ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.4.3: Số xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset $P(m)$, với $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, là:

$$N_\alpha = C_{\alpha+n-1}^{n-1} - \left\{ \sum_{j=1}^n C_{\alpha-(k_j+1)+n-1}^{n-1} - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} C_{\alpha-(k_i+k_j+2)+n-1}^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot C_{\alpha-(\beta+n)+n-1}^{n-1} \right\}$$

Trong đó $\beta = r(m) = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ và $\alpha = \left\lfloor \frac{r(m)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{2} \right\rfloor$.

Để chứng minh mệnh đề 2.4.3 ta cần các bổ đề sau:

Bổ đề 2.4.1: Số nghiệm nguyên dương của phương trình: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ (2.8)

, với $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m \geq n$, là C_{m-1}^{n-1} .

Chứng minh:

Vẽ m ngôi sao trên một dòng. Sau đó ta dùng $(n-1)$ vạch thẳng đứng “|” để ngăn m ngôi sao trên thành n ngăn sao cho mỗi ngăn có ít nhất một ngôi sao. Vì có tất cả $(m-1)$ vạch thẳng đứng “|” để ngăn m ngôi sao trên thành m ngăn mà mỗi ngăn có đúng một ngôi sao nên số nghiệm nguyên dương của phương trình (2.8) chính là số cách chọn $(n-1)$ vạch thẳng đứng “|” trong $(m-1)$ vạch thẳng đứng “|” trên để ngăn m ngôi sao thành n ngăn. Hay số nghiệm nguyên dương của phương trình (2.8) là C_{m-1}^{n-1} . Khi đó thành phần thứ i , x_i , trong bộ nghiệm $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ của phương trình (2.8) chính là số ngôi sao nằm trong ngăn thứ nhất tính từ trái sang phải. ■

Ví dụ 2.4.1: Số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$ là $C_7^4 = 35$. Ta tìm một nghiệm trong 35 nghiệm của phương trình trên bằng cách dùng 4 vạch thẳng đứng “|” để ngăn 8 ngôi sao trên thành 5 ngăn sao cho mỗi ngăn có ít nhất một ngôi sao, chẳng hạn với cách ngăn: * | ** | *** | * | *, ta có một nghiệm nguyên dương của phương trình trên là $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 1, 1)$.

Bổ đề 2.4.2: Số nghiệm nguyên không âm của phương trình: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ (2.9), với $n \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$, là C_{m+n-1}^{n-1} .

Chứng minh:

Đặt $y_i = x_i + 1, i = 1, \dots, n$, thì khi đó ta có sự tương ứng 1 – 1 giữa các bộ nghiệm nguyên không âm $\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ của phương trình (2.9) với các bộ nghiệm nguyên dương $\{(y_1, y_2, \dots, y_n)\}$ của phương trình: $y_1 + y_2 + \dots + y_n = m + n$. Do đó số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2.9) chính bằng số nghiệm nguyên dương của phương trình $y_1 + y_2 + \dots + y_n = m + n$. Áp dụng bổ đề 2.4.1 ta có: Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2.9) là C_{m+n-1}^{n-1} . ■

Bổ đề 2.4.3: Cho phương trình: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ (2.10)

, với $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó, với $r = 1, \dots, n$ thì số nghiệm nguyên không âm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của phương trình (2.10) thỏa $x_i \geq k_i \in \mathbb{Z}^+, i = 1, \dots, r; k_1 + k_2 + \dots + k_r \leq m$, là $C_{m-(k_1+k_2+\dots+k_r)+n-1}^{n-1}$.

Chứng minh:

Đặt $\begin{cases} y_i = x_i - k_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, r \\ y_i = x_i, \forall i = r+1, \dots, n \end{cases}$ thì ta có sự tương ứng 1 – 1 giữa các bộ nghiệm nguyên không âm $\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ thỏa $x_i \geq k_i \in \mathbb{Z}^+, i = 1, \dots, r; k_1 + k_2 + \dots + k_r \leq m$ của phương trình (2.10) với các bộ nghiệm nguyên không âm của phương trình: $y_1 + y_2 + \dots + y_n = m - (k_1 + k_2 + \dots + k_r)$. Áp dụng bổ đề 2.4.2 ta có: Số nghiệm nguyên không âm của phương trình $y_1 + y_2 + \dots + y_n = m - (k_1 + k_2 + \dots + k_r)$ là $C_{m-(k_1+k_2+\dots+k_r)+n-1}^{n-1}$. Hay số nghiệm nguyên không âm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của phương trình (2.10) thỏa $x_i \geq k_i \in \mathbb{Z}^+, i = 1, \dots, r; k_1 + k_2 + \dots + k_r \leq m$, là $C_{m-(k_1+k_2+\dots+k_r)+n-1}^{n-1}$. ■

Bổ đề 2.4.4: Cho các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$. Khi đó ta có:

$$\left| \bigcup_{j=1}^n A_j \right| = \sum_{j=1}^n |A_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{j=1}^n A_j \right|.$$

Chứng minh:

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n.

* $n = 1: |A_1| = |A_1| - 0 = |A_1|$. Vậy bổ đề đúng với $n = 1$.

* Giả sử bổ đề đúng với $n = k$, nghĩa là: $\left| \bigcup_{j=1}^k A_j \right| = \sum_{j=1}^k |A_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{k-1} \left| \bigcap_{j=1}^k A_j \right|$

Ta sẽ chứng minh bổ đề đúng với $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } \left| \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j \right| &= \left| \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \cup A_{k+1} \right| = \left| \bigcup_{j=1}^k A_j \right| + |A_{k+1}| - \left| \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \cap A_{k+1} \right| \\
&= \left| \bigcup_{j=1}^k A_j \right| + |A_{k+1}| - \left| \bigcup_{j=1}^k (A_j \cap A_{k+1}) \right| \\
&= \left| \bigcup_{j=1}^k A_j \right| + |A_{k+1}| - \left\{ \sum_{j=1}^k |A_j \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| + \dots + (-1)^{k-1} \left| \bigcap_{j=1}^{k+1} A_j \right| \right\} \\
&= \sum_{j=1}^k |A_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{k-1} \left| \bigcap_{j=1}^k A_j \right| + |A_{k+1}| - \sum_{j=1}^k |A_j \cap A_{k+1}| + \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| + \dots + (-1)^k \left| \bigcap_{j=1}^{k+1} A_j \right| \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} |A_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < l \leq k+1} |A_i \cap A_j \cap A_l| + \dots + (-1)^k \left| \bigcap_{j=1}^{k+1} A_j \right|. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Chứng minh mệnh đề 2.4.3:

Trong poset $P(m)$ với $m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$ ta có:

$$\begin{aligned}
N_\alpha &= \left| \left\{ p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \dots p_n^{x_n} \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = \alpha; 0 \leq x_i \leq k_i, x_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \dots, n \right\} \right| \\
&= \left| \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = \alpha; 0 \leq x_i \leq k_i, \forall i = 1, \dots, n \right\} \right|
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt: } A = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = \alpha; 0 \leq x_i \leq k_i, \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

$$A_j = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = \alpha; x_i \geq 0, \forall i \neq j; x_j > k_j; \forall i = 1, \dots, n; \forall j = 1, \dots, n \right\}$$

$$A^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = \alpha; x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

Ta có: $A = A^* \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right)$. Áp dụng bổ đề 2.4.4 ta có:

$$N_\alpha = |A| = |A^*| - \left\{ \sum_{j=1}^n |A_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \right\}.$$

Với $r=1,...,n; j_l \in \{1,2,...,n\}, \forall l=1,...,r$ ta có:

$$\begin{aligned} |A_{j_1} \cap ... \cap A_{j_r}| &= \left| \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in Z^n \left| \sum_{i=1}^n x_i = \alpha; x_i \geq 0, \forall i=1,...,n; x_{j_l} > k_{j_l}, \forall l=1,...,r \right. \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in Z^n \left| \sum_{i=1}^n x_i = \alpha; x_i \geq 0, \forall i=1,...,n; x_{j_l} \geq k_{j_l} + 1, \forall l=1,...,r \right. \right\} \right| \end{aligned}$$

Ta thấy, nếu $\sum_{l=1}^r k_{j_l} + r > \alpha$ thì $\sum_{l=1}^r x_{j_l} \geq \sum_{l=1}^r k_{j_l} + r > \alpha$, nên $A_{j_1} \cap ... \cap A_{j_r} = \emptyset$, hay $|A_{j_1} \cap ... \cap A_{j_r}| = 0$.

Ngược lại, nếu $\sum_{l=1}^r k_{j_l} + r \leq \alpha$ thì áp dụng bổ đề 2.4.3 (với cách đặt $\begin{cases} y_i = x_i, \forall i \notin \{j_1, ..., j_r\} \\ y_{j_l} = x_{j_l} - k_{j_l} - 1, \forall l=1,...,r \end{cases}$) ta có:

$$|A_{j_1} \cap ... \cap A_{j_r}| = C_{\alpha - (k_{j_1} + k_{j_2} + ... + k_{j_r} + r) + n - 1}^{n-1}.$$

Áp dụng bổ đề 2.4.2 ta có: $|A^*| = C_{\alpha + n - 1}^{n-1}$.

$$\text{Vậy ta có: } N_\alpha = C_{\alpha + n - 1}^{n-1} - \left\{ \sum_{j=1}^n C_{\alpha - (k_j + 1) + n - 1}^{n-1} - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} C_{\alpha - (k_i + k_j + 2) + n - 1}^{n-1} + ... + (-1)^{n-1} \cdot C_{\alpha - (\beta + n) + n - 1}^{n-1} \right\}. \quad \blacksquare$$

Ví dụ 2.4.2: Tính số xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset $P = P(2^3.5^2.7^3)$.

Giải

Ta có: $n=3, r(P)=8, \alpha=4, k_1=3=k_3, k_2=2$ nên số xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của $P = P(2^3.5^2.7^3)$ là: $N_\alpha = C_6^2 - (C_2^2 + C_3^2 + C_2^2) = 15 - (1+3+1) = 10$. Và trong phân hoạch xích đối xứng của poset $P = P(2^3.5^2.7^3)$ đã được xây dựng trong ví dụ 2.2.2.1, ta cũng có tất cả là 10 xích đối xứng.

Mệnh đề 2.4.4: Cho $P_1, P_2, ..., P_n$ là các poset có các hàm hạng tương ứng là $r_1, r_2, ..., r_n$; và $P_1, P_2, ..., P_n$ có phân hoạch xích đối xứng. Khi đó, số xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset tích trực tiếp $P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$ với hàm hạng ρ là: $N_\alpha = \sum_{\substack{\alpha_1 + ... + \alpha_n = \alpha \\ 0 \leq \alpha_i \leq r_i(P_i), i=1, ..., n}} N_{\alpha_1} \cdot N_{\alpha_2} \cdot ... \cdot N_{\alpha_n}$.

Trong đó N_{α_i} là số phần tử hạng α_i trong poset $P_i, i=1, ..., n$ và

$$\alpha = \left\lfloor \frac{\rho(P_1 \times P_2 \times ... \times P_n)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r_1(P_1) + r_2(P_2) + ... + r_n(P_n)}{2} \right\rfloor.$$

Chứng minh

Đặt A là tập tất cả các phần tử có hạng α trong poset $P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$.

Giả sử $x = (p_1, p_2, ..., p_n) \in A$ thì $\rho(x) = r_1(p_1) + r_2(p_2) + ... + r_n(p_n) = \alpha$.

Đặt $\alpha_i = r_i(p_i)$, $i = 1, \dots, n$ thì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \alpha$, $0 \leq \alpha_i \leq r_i(P_i)$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Khi đó, với mỗi bộ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ như trên ta có: $N_{\alpha_1} \cdot N_{\alpha_2} \dots N_{\alpha_n}$ phần tử có hạng α trong $P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$.

$$\text{Vậy } N_\alpha = |A| = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \alpha \\ 0 \leq \alpha_i \leq r_i(P_i), i=1, \dots, n}} N_{\alpha_1} \cdot N_{\alpha_2} \dots N_{\alpha_n} . \quad \blacksquare$$

Ví dụ 2.4.3: Tính số xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset tích trực tiếp $P(S) \times P(2^3 \cdot 5^2)$, với S là tập 4 phần tử.

Giải

Gọi r_1, r_2, ρ lần lượt là các hàm hạng của các poset $P(S), P(2^3 \cdot 5^2), P(S) \times P(2^3 \cdot 5^2)$.

Ta có: $r_1(P(S)) = 4$, $r_2(P(2^3 \cdot 5^2)) = 5$, $\rho(P(S) \times P(2^3 \cdot 5^2)) = 4 + 5 = 9$, $\alpha = 4$ nên

$$\begin{aligned} N_4 &= \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ 0 \leq \alpha_1 \leq 4 \\ 0 \leq \alpha_2 \leq 5}} N_{\alpha_1} \cdot N_{\alpha_2} = N_0 N_4 + N_1 N_3 + N_2 N_2 + N_3 N_1 + N_4 N_0 \\ &= N_4 + 4N_3 + 6N_2 + 4N_1 + N_0 = 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 = 41. \end{aligned}$$

Trong đó: $N_4 = 2 = \left| \left\{ 2^3 \cdot 5, 2^2 \cdot 5^2 \right\} \right|$, $N_3 = 3 = \left| \left\{ 2^5, 2^2 \cdot 5, 2^3 \right\} \right|$, $N_2 = 3 = \left| \left\{ 2 \cdot 5, 2^2, 5^2 \right\} \right|$

$$N_1 = 2 = \left| \left\{ 2, 5 \right\} \right|, N_0 = 1 = \left| \left\{ 1 \right\} \right|.$$

Và trong phân hoạch xích đối xứng của poset tích trực tiếp $P(S) \times P(2^3 \cdot 5^2)$ đã được xây dựng ở ví dụ 2.2.3.3 cũng có đúng 41 xích đối xứng.

Mệnh đề 2.4.5: Cho poset P với hàm hạng r có một phân hoạch xích đối xứng. Khi đó:

- +) Nếu $r(P)$ là số chẵn thì size của các xích đối xứng trong P đều là số lẻ.
- +) Nếu $r(P)$ là số lẻ thì size của các xích đối xứng trong P đều là số chẵn.

Chứng minh

Giả sử $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ là một xích đối xứng có size n bất kỳ trong poset P. Khi đó theo định nghĩa của xích đối xứng ta có: $r(c_1) + r(c_n) = r(P) \Rightarrow r(c_1) + r(c_1) + n - 1 = r(P) \Rightarrow 2r(c_1) + n - 1 = r(P)$

(2.11)

Từ (2.11) ta có:

- +) Nếu $r(P)$ là số chẵn thì $(n-1)$ là số chẵn, nên n phải là số lẻ, hay size của các xích đối xứng trong P đều là số lẻ.
- +) Nếu $r(P)$ là số lẻ thì $(n-1)$ là số lẻ, nên n phải là số chẵn, hay size của các xích đối xứng trong P đều là số chẵn. ■

Mệnh đề 2.4.6: Nếu P là một poset với hàm hạng r , P có một phân hoạch xích đối xứng và $r(P) = n$ thì size của các xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của P có dạng: $n+1-2k$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$.

Chứng minh

Do tính chất đối xứng của xích đối xứng nên với $k = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ thì một xích đối xứng bắt đầu bởi một phần tử hạng k phải kết thúc bởi phần tử hạng $(n-k)$, tức xích đối xứng này có dạng: $u_k < u_{k+1} < \dots < u_{n-k}$, với $r(u_k) = k$, $r(u_{n-k}) = n-k$. Khi đó size của xích đối xứng này là $(n+1-2k)$.

Ngược lại, một xích đối xứng có size $(n+1-2k)$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$, thì xích đối xứng này phải bắt đầu bởi phần tử hạng k . Vì nếu xích đối xứng này bắt đầu bởi phần tử hạng t thì nó phải kết thúc bởi phần tử hạng: $t + (n+1-2k) - 1 = n+t-2k$. Mặt khác ta có: $t + n + t - 2k = n \Rightarrow 2t = 2k \Rightarrow t = k$.

Vậy trong phân hoạch xích đối xứng của P , một xích đối xứng có size $(n+1-2k)$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$, khi và chỉ khi xích đối xứng này bắt đầu bởi phần tử hạng k . Do đó ta có: size của các xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của P có dạng: $n+1-2k$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$.

■

Từ mệnh đề 2.4.7 ta có ngay hệ quả sau:

Hệ quả 2.4.1: Cho P là một poset với hàm hạng r , P có một phân hoạch xích đối xứng và $r(P) = n$. Khi đó:

(a) Nếu n là số chẵn thì size của các xích đối xứng trong P là các số lẻ có dạng:

$$n+1, n-1, n-3, \dots, 1.$$

(b) Nếu n là số lẻ thì size của các xích đối xứng trong P là các số chẵn có dạng:

$$n+1, n-1, n-3, \dots, 2.$$

Mệnh đề 2.4.7: Số xích đối xứng có size $(n+1-2k)$, $k = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ trong một phân hoạch xích đối xứng của poset P là $N_k - N_{k-1}$.

Chứng minh

Theo mệnh đề 2.4.7 ta có: Với $k = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ thì một xích đối xứng có size $(n+1-2k)$ khi và chỉ khi nó bắt đầu bởi phần tử hạng k . Nên số xích đối xứng có size $(n+1-2k)$ chính bằng số xích đối xứng bắt đầu bởi một phần tử hạng k . Mặt khác, số xích đối xứng bắt đầu bởi một phần tử hạng k lại bằng số xích đối xứng chứa một phần tử hạng k trừ đi số xích đối xứng chứa một phần tử hạng k nhưng không bắt đầu bởi phần tử hạng k đó. Mà trong P có N_k phần tử hạng k , và một phần tử hạng

$(k-1)$ luôn nằm trong một xích đối xứng có chứa 1 phần tử hạng k đứng liền sau nó. Do đó, số xích đối xứng bắt đầu bởi một phần tử hạng k là $N_k - N_{k-1}$. ■

Đặc biệt, nếu poset $P = P(S)$, với S là tập n -phần tử thì ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.4.8: Số xích đối xứng size i trong một phân hoạch xích đối xứng của poset $P(S)$ là:

$$C_n^{\left[\frac{n+i-1}{2}\right]} - C_n^{\left[\frac{n+i+1}{2}\right]}.$$

Chứng minh

$$\text{Ta có: } i = n - (n-i) = n+1 - (n-i+1) = n+1 - 2\left(\frac{n-i+1}{2}\right).$$

Vì trong $P(S)$, xích đối xứng có size lớn nhất là $(n+1)$, là xích bắt đầu bởi tập $\emptyset$ và kết thúc bởi tập S nên $i \leq n+1$. Mặt khác theo hệ quả 2.4.1 ta có : nếu n là số chẵn thì size của các xích đối xứng trong $P(S)$ đều là số lẻ, và nếu n là số lẻ thì size của các xích đối xứng trong $P(S)$ đều là số chẵn, nên $0 \leq (n+1-i)$ là số chẵn và do đó $\frac{n-i+1}{2}$ là số nguyên không âm.

Áp dụng mệnh đề 2.4.8 ta có: Số xích đối xứng size i trong một phân hoạch xích đối xứng của poset

$$P(S) \text{ là : } N_{\frac{n+1-i}{2}} - N_{\frac{n+1-i}{2}-1} = N_{\frac{n+1-i}{2}} - N_{\frac{n-1-i}{2}} = C_n^{\left[\frac{n+1-i}{2}\right]} - C_n^{\left[\frac{n-1-i}{2}\right]} = C_n^{\left[\frac{n+i-1}{2}\right]} - C_n^{\left[\frac{n+i+1}{2}\right]}. \quad \blacksquare$$

Ví dụ 2.4.4: Theo ví dụ 2.2.1.1 ta có một phân hoạch xích đối xứng của poset $P(S)$, với $S = \{1, 2, 3, 4\}$, là:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \{2, 4\} \\ \{3, 4\} \end{array} \right\} 2 \text{ xích đối xứng có size 1} \\ & \left. \begin{array}{l} \{2\} \subset \{2, 3\} \subset \{2, 3, 4\} \\ \{3\} \subset \{1, 3\} \subset \{1, 3, 4\} \\ \{4\} \subset \{1, 4\} \subset \{1, 2, 4\} \end{array} \right\} 3 \text{ xích đối xứng có size 3} \\ & \left. \emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \right\} 1 \text{ xích đối xứng có size 5} \end{aligned}$$

Ta thấy $r(P(S)) = 4$ là số chẵn nên các xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset $P(S)$ đều có size là số lẻ: 1, 3, 5.

Và số xích đối xứng size 1 là: $C_4^2 - C_4^3 = 6 - 4 = 2$; số xích đối xứng size 3 là: $C_4^3 - C_4^4 = 4 - 1 = 3$.

Ví dụ 2.4.5: Theo ví dụ 2.2.2.1 ta có một phân hoạch xích đối xứng của poset $P(2^3.5^2)$ là:

$$1.5^2 < 2.5^2 \quad \left. \right\} 1 \text{ xích đối xứng có size 2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1.5 < 2.5 < 2^2.5 < 2^2.5^2 \\ 1 < 2 < 2^2 < 2^3 < 2^3.5 < 2^3.5^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{1 xích đối xứng có size 4} \\ \text{1 xích đối xứng có size 6} \end{array}$$

Ta thấy $r(P(2^3.5^2)) = 5$ là số lẻ nên các xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset $P(2^3.5^2)$ đều có size là số chẵn : 2, 6, 8.

2.5. MỘT SỐ ỨNG DỤNG :

Định lý 2.5.1 : Cho $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_r$ là một xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset $P(S)$. Khi đó ta có :

- (a) Số các phần tử cơ sở trong mỗi $A_i, i = 1, 2, \dots, r$ là $\frac{1}{2}(n+1-r)$
- (b) Với mỗi i , có một tập $B_i \in P(S)$ sao cho $A_{i-1} \subset B_i \subset A_{i+1}$, trong đó B_i nằm trong một xích đối xứng có size ngắn hơn của $P(S)$.

Chứng minh

(a) Trong phương pháp phân hoạch trực tiếp xích đối xứng cho poset $P(S)$ các tập con của tập n -phần tử S , ta đã biết mở đầu của mỗi xích đối xứng trong phân hoạch là một tập sơ cấp và các thành viên còn lại của xích đều có chung phần gốc là tập sơ cấp đó. Do $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_r$ là một xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset $P(S)$ nên các $A_i, i = 1, 2, \dots, r$ đều có chung phần gốc là tập sơ cấp A_1 , hay các $A_i, i = 1, 2, \dots, r$ đều có chung số phần tử cơ sở là $|A_1|$.

Mặt khác ta có : $|A_1| + |A_r| = n$ (vì $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_r$ là một xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của poset $P(S)$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow |A_1| + |A_1| + r - 1 &= n \\ \Rightarrow 2|A_1| &= n + 1 - r \\ \Rightarrow |A_1| &= \frac{1}{2}(n + 1 - r) \end{aligned}$$

Vậy số phần tử cơ sở trong mỗi $A_i, i = 1, 2, \dots, r$ chính là $\frac{1}{2}(n + 1 - r)$.

(b) Tập $S \setminus (A_1 \cup A_1^-)$ có $n - (n + 1 - r) = r - 1$ phần tử. Ta xếp $(r - 1)$ phần tử đó theo thứ tự tăng dần là : $q_1 < q_2 < \dots < q_{r-1}$.

Theo phương pháp phân hoạch trực tiếp xích đối xứng cho poset $P(S)$ các tập con của tập n -phần tử S thì với $i = 2, \dots, n - 1$, ta có :

* Tập A_{i-1} có được bằng cách bổ sung vào A_1 $(i - 2)$ phần tử $q_1, q_2, \dots, q_{i-2}$.

* Tập A_i có được bằng cách bổ sung vào A_1 ($i-1$) phần tử $q_1, q_2, \dots, q_{i-2}, q_{i-1}$.

* Tập A_{i+1} có được bằng cách bổ sung vào A_i phần tử $q_1, q_2, \dots, q_{i-2}, q_{i-1}, q_i$.

Ta xét tập $B_i = A_1 \cup \{q_1, q_2, \dots, q_{i-2}, q_i\}$ thì rõ ràng $B_i \in P(S)$ và $A_{i-1} \subset B_i \subset A_{i+1}$.

Mặt khác : +) Nếu $q_i - 1 \notin B_i \Rightarrow q_i$ là phần tử cơ sở của B_i trong S , ứng với phần tử lỗ hổng $q_i - 1$. Do đó B_i có nhiều phần tử cơ sở hơn A_i .

+) Nếu $q_i - 1 \in B_i \Rightarrow q_i - 1 \in A_1$ (vì nếu $q_i - 1 \in \{q_1, q_2, \dots, q_{i-2}, q_i\}$ thì do cách xếp theo thứ tự tăng dần của các q_i nên $q_i - 1 = q_{i-2} < q_{i-1} < q_i$ (vô lý)) $\Rightarrow q_i$ là phần tử cơ sở của B_i trong S , ứng với phần tử lỗ hổng q_{i-1} . Do đó B_i có nhiều phần tử cơ sở hơn A_i .

Giả sử B_i nằm trong xích đối xứng $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_s$ của $P(S)$ thì theo (a) số phần tử cơ sở của B_i là :

$$\frac{1}{2}(n+1-s) > \frac{1}{2}(n+1-r) \Rightarrow n+1-s > n+1-r \Rightarrow s < r.$$

Vậy B_i nằm trong xích đối xứng có size ngắn hơn xích đối xứng chứa A_i . ■

Định lý 2.5.2 : (Sperner) : Nếu $\mathbf{A}$ là một phản xích các tập con của tập n -phần tử S thì $|\mathbf{A}| \leq C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Chứng minh :

Phân hoạch poset $P(S)$ tất cả các tập con của tập n -phần tử thành các xích đối xứng.

Do định nghĩa của xích đối xứng nên mỗi xích đối xứng trong $P(S)$ sẽ chứa đúng một tập con hạng

$\lfloor n/2 \rfloor$ của S . Mà có $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ tập con hạng $\lfloor n/2 \rfloor$ của S nên số xích đối xứng trong phân hoạch của $P(S)$ là $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Vì $\mathbf{A}$ là một phản xích nên $\mathbf{A}$ có thể chứa tối đa một phần tử trong mỗi xích đối xứng của $P(S)$.

$$\text{Do đó } |\mathbf{A}| \leq C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}. \quad \blacksquare$$

Định lý 2.5.3 : Số phản xích trong $P(S)$ chính bằng số ánh xạ tăng từ $P(S) \rightarrow \{0,1\}$.

Chứng minh :

Ở đây, một ánh xạ $f: P(S) \rightarrow \{0,1\}$ được gọi là tăng nếu $f(X) \leq f(Y), \forall X \subseteq Y; X, Y \in P(S)$.

Đặt $A(S)$: tập tất cả phản xích trong $P(S)$.

$F(S)$: tập tất cả ánh xạ tăng từ $P(S) \rightarrow \{0,1\}$

Ta xây dựng ánh xạ $\phi: A(S) \rightarrow F(S)$

$$\mathbf{A} \mapsto \phi(\mathbf{A}) = f$$

Với $f: P(S) \rightarrow \{0,1\}$

{

$B \mapsto f(B) = 0$ nếu B nằm trong một thành viên của phản xích **A**

1 nếu B không nằm trong bất kỳ thành viên nào của phản xích **A**

Kiểm tra f tăng : Để chứng minh f tăng ta cần chỉ ra rằng : nếu $B \subseteq D ; B, D \in P(S)$ và $f(D) = 0$ thì $f(B) = 0$. (Vì nếu $f(D) = 1$ thì $f(B) = 0$ hay $f(B) = 1$ vẫn thỏa $f(B) \leq f(D)$)

Thật vậy : Nếu $f(D) = 0$ thì $\exists A \in \mathbf{A} : D \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A \in \mathbf{A} \Rightarrow f(B) = 0$.

Từ chứng minh trên ta thấy rằng các thành viên trong phản xích **A** chính là các phần tử tối đại của $P(S)$ mà f tác động lên bằng 0.

Xét $\psi : F(S) \rightarrow A(S)$

$$f \mapsto \psi(f) = \mathbf{A}$$

Trong đó $\psi(f) = \mathbf{A}$ là tập tất cả các phần tử tối đại của $P(S)$ mà f tác động lên bằng 0. Do đó **A** lập thành một phản xích. Thật vậy, nếu có 2 phần tử tối đại B, C của $P(S)$ thỏa $f(B) = f(C) = 0$ thì $B \not\subset C$ và $C \not\subset B$ (vì nếu $B \subset C$ thì mâu thuẫn với tính tối đại của B và nếu $C \subset B$ thì mâu thuẫn với tính tối đại của C)

(**Chú ý** : Nếu $f(B) = 1, \forall B \in P(S)$ thì f là ánh xạ tăng và $\psi(f) = \emptyset$ - được xem như một phản xích rỗng.)

Ta thấy ψ là ánh xạ ngược của ϕ nên ϕ là song ánh. Do đó $|A(S)| = |F(S)|$. ■

* Xuất phát từ định lý 2.5.3 ta nghĩ đến bài toán : Có thể xây dựng được tối đa bao nhiêu ánh xạ tăng $f : P(S) \rightarrow \{0,1\}$, hay số phản xích trong $P(S)$ tối đa là bao nhiêu ? Đáp án của bài toán này chính là nội dung của định lý sau :

Định lý 2.5.4 : Số phản xích trong $P(S)$ tối đa là $3^{C_h^{[n/2]}}$.

Chứng minh

Giả sử chúng ta đã phân hoạch poset $P(S)$ thành các xích đối xứng và cố gắng xây dựng ánh xạ tăng f bởi việc định nghĩa nó trên các tập trong một xích đối xứng của $P(S)$. Ta chứng minh quy nạp theo size của các xích đối xứng trong $P(S)$.

Giả sử đã định nghĩa thành công một ánh xạ tăng f không có mâu thuẫn trên tất cả các xích đối xứng size bé hơn k của $P(S)$. Bây giờ ta sẽ mở rộng định nghĩa của f cho một xích đối xứng có size k cho trước của $P(S)$.

* Nếu $k = 2$ thì bất kỳ xích đối xứng size k nào cũng có dạng $X \subset Y$. Để mở rộng định nghĩa ánh xạ f , ta có tối đa 3 sự lựa chọn có thể đối với giá trị của $f(X), f(Y)$ như sau :

$f(X)=f(Y)=0$; $f(X)=f(Y)=1$ hay $f(X)=0$ và $f(Y)=1$. Do tính chất tăng của f nên sự lựa chọn $f(X)=1$ và $f(Y)=0$ là không thể.

Vậy trường hợp này ta có tối đa 3 khả năng để mở rộng định nghĩa ánh xạ f .

* Nếu $k > 2$ thì ta xét bất kỳ hai tập X, Y trong một xích đối xứng của $P(S)$ thỏa $|Y|=|X|+2$. Khi đó tồn tại $Z \in P(S)$ sao cho $X \subset Z \subset Y$.

Áp dụng phần (b) của định lý 2.4.1, ta có một tập $U \in P(S)$ sao cho $X \subset U \subset Y$, với U nằm trong một xích đối xứng có size ngắn hơn xích đối xứng chứa X, Y ; và do đó $f(U)$ đã được định nghĩa rồi.

Với suy luận trên, nếu ta xét một xích đối xứng size k trong $P(S)$ có dạng: $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_k$ thì với mỗi $i = 2, 3, \dots, k-1$, sẽ có một tập $U_i \in P(S)$ sao cho $X_{i-1} \subset U_i \subset X_{i+1}$, và $f(U_i)$ đã được định nghĩa rồi.

- Nếu $f(U_i)=0, \forall i = 2, 3, \dots, k-1$ thì ta có $f(X_{i-1})=0, \forall i \leq k-1$ (do tính chất tăng của ánh xạ f).

Do đó ta có thể tự do định nghĩa f trên X_{k-1} và X_k . Giống như trường hợp $k=2$, ta cũng có tối đa 3 sự lựa chọn có thể về giá trị của $f(X_{k-1})$ và $f(X_k)$. Vậy ta lại có tối đa 3 cách để mở rộng f .

- Nếu $f(U_i)=1, \forall i = 2, 3, \dots, k-1$ thì ta có $f(X_{i+1})=1, \forall i \geq 2$ (do tính chất tăng của ánh xạ f).

Tương tự như trên ta cũng có thể tự do lựa chọn giá trị cho $f(X_1)$ và $f(X_2)$. Vậy một lần nữa ta có tối đa 3 cách để mở rộng f .

- Cuối cùng, nếu f không nhận giá trị hằng trên các U_i thì ta chọn j là chỉ số i đầu tiên mà tại đó $f(U_i)=1$. Khi đó ta có $f(X_i)=0, \forall i < j-1$ và $f(X_i)=1, \forall i > j$. Do đó ta cũng có thể tự do định nghĩa f trên X_{j-1} và X_j .

Giống như trên ta cũng có tối đa 3 cách mở rộng f .

Khi mỗi xích đối xứng được xét luân phiên thì ta có tối đa 3 cách mở rộng định nghĩa của f không có mâu thuẫn đến một xích đối xứng khác. Mà số xích đối xứng trong phân hoạch xích đối xứng của $P(S)$ là $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ nên ta có tổng số ánh xạ tăng f có thể là $3^{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}}$. Áp dụng định lý 2.5.3 ta có số phần xích trong $P(S)$ tối đa là $3^{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}}$.

Định lý 2.5.5 : Số phần xích trong $P(S)$ tối thiểu là $2^{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}}$.

Chứng minh

Ta có : Số các tập con hạng $\lfloor n/2 \rfloor$ trong $P(S)$ là $m = C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Do định nghĩa của phản xích nên với $0 \leq r \leq m$ thì bất kỳ r tập con phân biệt hạng $[n/2]$ trong $P(S)$ cũng lập nên một phản xích trong $P(S)$. Và số phản xích như thế là $\sum_{r=0}^m C_m^r = (1+1)^m = 2^m$. Do đó số phản xích trong $P(S)$ tối thiểu là $2^{C_n^{[n/2]}}$. ■

* Kết hợp định lý 2.5.4 và định lý 2.5.5 ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.5.1 : Nếu M là số các phản xích trong $P(S)$ thì $2^{C_n^{[n/2]}} \leq M \leq 3^{C_n^{[n/2]}}$.

PHẦN KẾT LUẬN

Luận văn này đã đưa ra hai phương pháp phân hoạch xích đối xứng (phương pháp quy nạp và phương pháp trực tiếp) cho hai poset có hạng và hữu hạn: Poset $P(S)$ tất cả các tập con của tập n - phần tử S và poset $P(m)$ tất cả các ước nguyên dương của số nguyên m cho trước. Ở mỗi phương pháp đều có những ví dụ cụ thể cho từng poset. Sau đó ta cũng chứng minh được hai phương pháp phân hoạch xích đối xứng này đều như nhau, nghĩa là dù sử dụng phương pháp nào ta cũng có cùng một kết quả. Tiếp theo ta đi sâu vào size và số lượng của các xích đối xứng trong một phân hoạch xích đối xứng. Sau cùng ta đưa ra một vài ứng dụng của các vấn đề trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Tổng Minh Hải (2006), *Phân hoạch xích đối xứng trên một vành Bool hữu hạn*, Luận văn Thạc sĩ Toán học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.
2. TS.Trần Huyền, *Phân hoạch trực tiếp xích đối xứng poset các ước số nguyên dương của số nguyên m cho trước*, Khoa Toán – Tin, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.

Tiếng Anh

1. Anderson, J. (1989), *Combinatorics of finite set*, Clarendon Press, Oxford.
2. Greene, C; and Kleitman, D.J (1976), *Strong versions of Sperner's theorem*. J. combinat.Theory A20.