BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

PHẠM THỊ BÍCH PHƯỢNG

MỘT SỐ DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC VÀ CÁC ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG, 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **PGS.TS ĐINH THANH ĐỨC**

Phản biện 1: **TS. Cao Văn Nuôi**

Phản biện 2: **PGS.TS Huỳnh Thế Phùng**

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ Khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 29 tháng 5 năm 2011.

* Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Từ khi Euler thiết lập bất đẳng thức $R \geq 2r$ vào năm 1765, những bất đẳng thức hình học liên quan đến các yếu tố R, r, p đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học.

Vào năm 1851, Rouché đã đưa ra bất đẳng thức

$$\begin{aligned}&2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}\\ &\quad\leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}.\end{aligned}$$

Chúng ta đã biết rằng bất đẳng thức này đưa ra điều kiện cần và đủ để tồn tại một tam giác theo các yếu tố R, r, p, và nó được gọi là "bất đẳng thức cơ bản trong tam giác". Đây là một trong những bất đẳng thức quan trọng nhất trong lớp các bất đẳng thức hình học trong tam giác. Đến nay đã có rất nhiều bài báo nghiên cứu về các phương pháp chứng minh, ứng dụng bất đẳng thức này để thiết lập các bất đẳng thức hình học cho tam giác.

Trong bài báo [7] (2008), Shan-He Wu đã đưa ra một dạng "chặt" của bất đẳng thức cơ bản như sau:

$$\begin{aligned}&2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}cos\phi\\ &\quad\leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}cos\phi,\end{aligned}$$

với $\phi = min\left\{\mid A-B\mid, \mid B-C\mid, \mid A-C\mid\right\}$.

Sau đó, vào năm 2009, Shan-He Wu cùng Mihály Benzce đã đưa ra một dạng tương đương của bất đẳng thức cơ bản trong bài báo [8].

Luận văn "Một số dạng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các ứng dụng" sẽ trình bày một cách chi tiết những kết quả trong hai bài báo trên cùng các ứng dụng của nó. Hơn nữa, chúng tôi sử dụng bất đẳng thức cơ bản để thiết lập các bất đẳng thức liên hệ giữa (R, r, p) và các yếu tố khác trong tam giác.

Đề tài phù hợp với sở thích của bản thân, là một trong những nội dung quan trọng trong chương trình môn Toán trung học phổ thông. Nó có đóng góp thiết thực cho việc dạy và học bất đẳng thức trong tam giác ở trường phổ thông, đem lại niềm đam mê và kích thích tư duy sáng tạo của học sinh.

2. Mục đích nghiên cứu

Trình bày chi tiết các kiến thức về bất đẳng thức cơ bản trong tam giác, từ đó thiết lập lớp các bất đẳng thức theo (R, r, p) trong tam giác.

Hệ thống các dạng của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác, đặc biệt trình bày chi tiết dạng "chặt", dạng tương đương mới cùng các ứng dụng của nó.

Nâng cao năng lực tư duy cho học sinh trong việc nhận dạng, chứng minh và sáng tác các bất đẳng thức mới trong tam giác từ bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các dạng tương đương của nó.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Bất đẳng thức cơ bản trong tam giác, dạng " chặt ", các dạng tương đương và các ứng dụng của chúng.

4. Phương pháp nghiên cứu

Phân tích, tổng hợp, hệ thống kiến thức từ các tài liệu của giáo viên hướng dẫn, của các bạn học viên trong lớp cung cấp; các tài liệu sưu tầm được trên các trang web Toán học; các bài báo và sách có liên quan đến bất đẳng thức cơ bản trong tam giác.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Đề tài nghiên cứu về một số dạng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các ứng dụng của chúng, là một trong những nội dung quan trọng của bất đẳng thức trong tam giác, một phần không thể thiếu trong chương trình Toán trung học phổ thông, các cuộc thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế. Đề tài sẽ là một tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên và học sinh ở bậc phổ thông trung học, đặc biệt là đối với học sinh khối chuyên toán.

6. Cấu trúc luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1. Phương trình bậc ba và các hệ thức trong tam giác.

Trong chương này, chúng tôi nêu Định lý Viète và một số tính chất nghiệm của phương trình bậc ba. Đồng thời, chúng tôi xây dựng các phương trình bậc ba nhận các biểu thức theo (R, r, p) làm hệ số và nhận các bộ ba (a, b, c), $(sinA, sinB, sinC)$, $(h_a, h_b, h_c), ...$ làm nghiệm. Vận dụng Định lý Viète đối với các phương trình này chúng tôi đưa ra hệ thống các đẳng thức trong tam giác. Các đẳng thức này sẽ được sử dụng trong việc thiết lập các bất đẳng thức trong tam giác ở Chương 3.

Chương 2. Một số dạng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác.

Trong chương này, chúng tôi sẽ phát biểu, chứng minh và mô tả hình học bất đẳng thức cơ bản trong tam giác. Ngoài ra, chúng tôi sẽ xây dựng một lớp các bất đẳng thức rất quan trọng trong tam giác có dạng $M(R, r) \leq K(p) \leq N(R, r)$. Chúng tôi trình bày dạng "chặt" của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác được đề cập trong bài báo [7] của Shan-He Wu. Phần cuối của chương, chúng tôi sẽ trình bày các dạng tương đương của bất đẳng thức cơ bản, trong đó chúng tôi sẽ đặc biệt chú ý đến một dạng tương đương đã được Shan-He Wu và Mihály Benzce trình bày trong bài báo [8].

Chương 3. Một số ứng dụng.

Từ hệ thống các đẳng thức trong tam giác ở Chương 1, sử dụng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các bất đẳng thức dạng $M(R,r) \leq K(p) \leq N(R,r)$ đã được thiết lập trong Chương 2, chúng tôi trình bày hàng loạt các bất đẳng thức theo (R,r,p) và các yếu tố trong tam giác như (a,b,c), $(sinA, sinB, sinC)$, (h_a, h_b, h_c)... thể hiện việc hình thành và sáng tạo các bất đẳng thức trong tam giác thông qua các ví dụ tiêu biểu cho từng dạng cụ thể. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng trình bày một lớp các bất đẳng thức liên quan giữa các đường phân giác và các cạnh của tam giác áp dụng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác. Hơn nữa, chúng tôi trình bày chứng minh của bất đẳng thức Garfunkel - Bankoff và phát triển bất đẳng thức Leuenberger áp dụng dạng tương đương của bất đẳng thức cơ bản được Shan-He Wu và Mihály Benzce trình bày trong bài báo [8].

Chương 1

Phương trình bậc ba và các hệ thức trong tam giác

Trong chương này, chúng tôi nêu Định lý Viète và một số tính chất nghiệm của phương trình bậc ba. Vận dụng Định lý Viète, chúng tôi xây dựng hệ thống các đẳng thức trong tam giác ([2],[6]). Các kiến thức này được sử dụng ở những chương sau.

1.1 Phương trình bậc ba và một số tính chất nghiệm

1.1.1 Định lý Viète về nghiệm của phương trình bậc ba

1.1.2 Một số tính chất nghiệm của phương trình bậc ba

1.2 Phương trình bậc ba và một số hệ thức trong tam giác

1.2.1 Phương trình bậc ba với các nghiệm là bộ ba theo độ dài các cạnh của một tam giác

Định lý 1.2.1. ([2],[6]) *Các cạnh a, b, c của tam giác ABC là ba nghiệm của phương trình*

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4pRr = 0. \tag{1.6}$$

Định lý 1.2.3. ([2],[6]) *Cho tam giác ABC, ta có* $p-a, p-b, p-c$ *là các nghiệm của phương trình*

$$x^3 - px^2 + r(4R+r)x - pr^2 = 0. \tag{1.8}$$

1.2.2 Phương trình bậc ba với các nghiệm là bộ ba theo số đo các góc của một tam giác

Định lý 1.2.5. ([2],[6]) *Cho tam giác ABC, ta có* $sinA, sinB, sinC$ *là ba nghiệm của phương trình*

$$4R^2x^3 - 4Rpx^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 2pr = 0. \tag{1.10}$$

Định lý 1.2.7. ([2],[6]) *Cho tam giác ABC, ta có* $cosA, cosB, cosC$ *là ba nghiệm của phương trình*

$$4R^2x^3 - 4R(R+r)x^2 + (p^2 + r^2 - 4R^2)x + (2R+r)^2 - p^2 = 0. \tag{1.12}$$

Định lý 1.2.9. ([2],[6]) *Cho tam giác ABC, ta có* $sin^2\frac{A}{2}, sin^2\frac{B}{2}, sin^2\frac{C}{2}$ *là ba nghiệm của phương trình*

$$16R^2x^3 - 8R(2R-r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0. \tag{1.14}$$

Định lý 1.2.11. ([2],[6]) *Cho tam giác ABC, ta có* $cos^2\frac{A}{2}, cos^2\frac{B}{2}, cos^2\frac{C}{2}$ *là ba nghiệm của phương trình*

$$16R^2x^3 - 8R(4R+r)x^2 + [p^2 + (4R+r)^2]x - p^2 = 0. \tag{1.16}$$

Định lý 1.2.13. ([2],[6]) *Cho tam giác ABC, ta có* $cotA, cotB, cotC$ *là ba nghiệm của phương trình*

$$2prx^3 - (p^2 - r^2 - 4Rr)x^2 + 2prx + (2R+r)^2 - p^2 = 0. \tag{1.18}$$

Định lý 1.2.14. ([2],[6]) *Cho tam giác ABC, ta có* $tanA, tanB, tanC$ *là ba nghiệm của phương trình*

$$[p^2 - (2R+r)^2]x^3 - 2prx^2 + (p^2 - 4Rr - r^2)x - 2pr = 0. \tag{1.19}$$

Định lý 1.2.15. ([2],[6]) *Cho tam giác ABC,* $tan\frac{A}{2}, tan\frac{B}{2}, tan\frac{C}{2}$ *là ba nghiệm của phương trình*

$$px^3 - (4R+r)x^2 + px - r = 0. \tag{1.20}$$

Định lý 1.2.16. ([2],[6]) *Cho tam giác ABC,* $cot\frac{A}{2}, cot\frac{B}{2}, cot\frac{C}{2}$ *là ba nghiệm của phương trình*

$$rx^3 - px^2 + (4R + r)x - p = 0. \quad (1.21)$$

1.2.3 Phương trình bậc ba với các nghiệm là bộ ba theo yếu tố khác của một tam giác

Định lý 1.2.17. ([2],[6]) *Cho tam giác ABC, ta có* r_a, r_b, r_c *là ba nghiệm của phương trình*

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0. \quad (1.22)$$

Định lý 1.2.19. ([2],[6]) *Cho tam giác ABC, ta có* h_a, h_b, h_c *là ba nghiệm của phương trình*

$$2Rx^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4p^2rx - 4p^2r^2 = 0. \quad (1.24)$$

Kết luận của Chương 1: Chúng tôi đã xây dựng được các phương trình bậc ba nhận các bộ ba theo cạnh, góc, đường cao,... làm nghiệm và các biểu thức theo (R, r, p) làm hệ số. Bằng cách áp dụng Định lý Viète và các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, ta có thể sáng tác (đồng thời cũng là phương pháp chứng minh) hàng loạt các đẳng thức trong tam giác. Các đẳng thức này thể hiện mối quan hệ của (a, b, c), $(sinA, sinB, sinC), (h_a, h_b, h_c)$, ... với (R, r, p).

Chương 2

Một số dạng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác

Trong Chương 1, chúng tôi đã chỉ ra rằng tất cả các yếu tố của tam giác là nghiệm của phương trình bậc ba với các hệ số chỉ chứa ba yếu tố (R, r, p). Lớp các bất đẳng thức liên quan đến các yếu tố này đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Bất đẳng thức được xem là một trong các bất đẳng thức làm nền móng của lớp các bất đẳng thức hình học trong tam giác đã được Rouché đưa ra vào năm 1851, và được gọi là bất đẳng thức cơ bản trong tam giác. Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày bất đẳng thức cơ bản trong tam giác, dạng "chặt" và một số dạng tương đương của nó.

2.1 Bất đẳng thức cơ bản trong tam giác

2.1.1 Bất đẳng thức cơ bản trong tam giác

Định lý 2.1.1. ([6])(Bất đẳng thức cơ bản trong tam giác) *Điều kiện cần và đủ để tồn tại một tam giác theo các yếu tố (R, r, p) là*

$$\begin{aligned} &2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \\ &\quad \le p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dấu "=" xảy ra tại mỗi bất đẳng thức của (2.1) khi và chỉ khi tam giác cân.
Dấu "=" xảy ra tại cả hai bất đẳng thức của (2.1) khi và chỉ khi tam giác đều.

Nhận xét 2.1.

Trong [6], Bludon đã khẳng định rằng bất đẳng thức mạnh nhất có thể của dạng bất đẳng thức

$$f(R,r) \le p^2 \le F(R,r)$$

($f(R,r)$ và $F(R,r)$ là các hàm thực thuần nhất bậc hai với $R, r > 0$) chính là bất đẳng thức cơ bản (2.1). Khi đó

$$f(R,r) = 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr},$$
$$F(R,r) = 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Định lý 2.1.2. ([6])(Bất đẳng thức Gerretsen) *Cho tam giác ABC, ta có*

$$16Rr - 5r^2 \le p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2. \tag{2.3}$$

Dấu "=" tại mỗi bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Nhận xét 2.2.

Nhìn vào bất đẳng thức (2.3) ta thấy lớp bất đẳng thức vế trái của nó có dạng

$$p^2 \ge \lambda R^2 + \mu Rr + \nu r^2. \tag{2.5}$$

Dấu "=" xảy ra trong trường hợp tam giác đều, khi đó ta có

$$R : r : p :: 2 : 1 : 3\sqrt{3}.$$

Từ đó suy ra

$$4\lambda + 2\mu + \nu = 27.$$

Khi đó (2.5) trở thành

$$p^2 \ge \lambda R^2 + \frac{27 - 4\lambda - \nu}{2} Rr + \nu r^2. \tag{2.6}$$

Tương tự, lớp bất đẳng thức vế phải của (2.3) có dạng

$$p^2 \le \lambda' R^2 + \frac{27 - 4\lambda' - \nu'}{2} Rr + \nu' r^2. \tag{2.7}$$

Khi đó ta có định lí sau.

Định lý 2.1.3. ([5]) *Bất đẳng thức (2.6) xảy ra trong tam giác bất kì khi*

$$(a) \qquad \nu \geq -5 \text{ và } \lambda \leq 0,$$

hoặc

$$(b) \qquad \nu < -5 \text{ và } \lambda \leq \frac{(\nu+5)^2}{4(\nu+1)}.$$

Bất đẳng thức (2.7) xảy ra trong tam giác bất kì khi

$$(c) \qquad \nu' \leq 3 \text{ và } \lambda' \geq 4,$$

hoặc

$$(d) \qquad \nu' > 3 \text{ và } \lambda' \geq \frac{(\nu'+5)^2}{4(\nu'+1)}.$$

Nhận xét 2.3.

Trong [4], Bludon đã khẳng định rằng bất đẳng thức Gerretsen là mạnh nhất trong lớp các bất đẳng thức $q(R,r) \leq p^2 \leq Q(R,r)$, trong đó $q(R,r)$, $Q(R,r)$ là các dạng toàn phương theo $R, r > 0$ với các hệ số thực. Từ Định lý 2.1.3, ta thấy rõ rằng phát biểu của Bludon là sai. Thật vậy, giả sử từ (2.6) lấy $\lambda = -0,1, \nu = -6$, ta có

$$p^2 \geq -0,1R^2 + 16,7Rr - 6r^2. \tag{2.8}$$

Nếu $R \geq 5r$ thì vế trái của bất đẳng thức Gerretsen (2.3) mạnh hơn (2.8) nhưng nếu $2r < R < 5r$ thì (2.8) mạnh hơn. Ngoài ra, ta có thể xét tam giác vuông có các cạnh $6, 8, 10$. Khi đó $R = 5, r = 2, p = 12$ và (2.8) sẽ trở thành $p^2 \geq 140,5$ mạnh hơn vế trái của (2.3) $p^2 \geq 140$.

Tương tự, từ (2.7) lấy $\lambda' = 4,75, \nu' = 7$ ta được bất đẳng thức

$$p^2 \leq 4,75R^2 + 0,5Rr + 7r^2. \tag{2.9}$$

Bất đẳng thức (2.9) yếu hơn vế phải của bất đẳng thức Gerretsen (2.3) khi $R > \frac{8r}{3}$ nhưng nếu $2r < R \leq \frac{8r}{3}$ thì (2.9) mạnh hơn.

Từ Định lý 2.1.3, ta có thể dễ dàng suy ra định lý sau

Định lý 2.1.4. ([6]) *a) Một bất đẳng thức của (2.6) xảy ra trong tam giác bất kì khi nó có dạng*

$$p^2 \geq (1-\omega^2)^{-1}[-4\omega^2R^2+4(4+\omega-\omega^2)Rr-(5+8\omega+3\omega^2)r^2]-\epsilon r(R-2r), \tag{2.10}$$

trong đó $0 \leq \omega < 1$ *và* $\epsilon \geq 0$.
b) Một bất đẳng thức của (2.7) xảy ra trong tam giác bất kì khi nó có dạng

$$p^2 \leq (1-\theta^2)^{-1}[4R^2+4(1-\theta-4\theta^2)Rr+(3+8\theta+5\theta^2)r^2]+\epsilon r(R-2r), \tag{2.11}$$

trong đó $0 \leq \theta < 1$ *và* $\epsilon \geq 0$.

Hệ quả 2.1.1. *Cho ABC là tam giác tùy ý. Ta có*

$$3\sqrt{3}r \leq p \leq 2R + (3\sqrt{3}-4)r, \tag{2.12}$$

dấu "=" tại mỗi bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Nhận xét 2.4.

Bất đẳng thức (2.12) là mạnh nhất của lớp các bất đẳng thức tuyến tính thuần nhất $\lambda' R + \mu' r \leq p \leq \lambda R + \mu r$. Việc chứng minh sẽ được thể hiện trong phần mô tả hình học.

Thay $\theta = \omega = \epsilon = 0$ vào (2.10) và (2.11) ta được bất đẳng thức Gerretsen. Định lý 2.1.4 được gọi là dạng tổng quát hóa của bất đẳng thức Gerretsen.

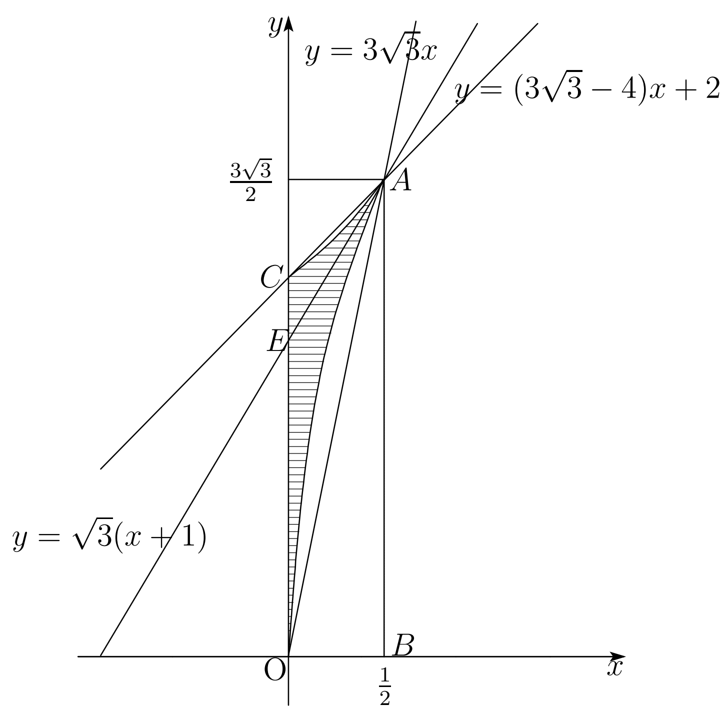
Thay các giá trị của θ, ω, ϵ thích hợp vào các bất đẳng thức (2.10), (2.11) của Định lý 2.1.4 ta thu được nhiều bất đẳng thức đẹp theo (R, r, p). Hệ quả dưới đây thể hiện một số bất đẳng thức tiêu biểu theo (R, r, p) thường được sử dụng trong việc sáng tác bất đẳng thức trong tam giác. Hệ quả này cũng có thể suy ra từ bất đẳng thức Gerretsen và bất đẳng thức Euler.

Hệ quả 2.1.2. *Cho tam giác ABC tùy ý. Ta có*

$$\begin{aligned}
27r^2 &\le 11r^2 + 8Rr \le \frac{27}{5}r(r+2R) \le 3r^2 + 12Rr \le r(7r+10R) \le \\
&\le \frac{27}{2}Rr \le 14Rr - r^2 \le 16Rr - 5r^2 \le p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \le \\
&\le 4R^2 + r^2 + 5Rr \le \frac{9}{2}R^2 + r^2 + 4Rr \le 5R^2 + 2Rr + 3r^2 \le \\
&\le 5R^2 + 4Rr - r^2 \le \frac{(r+4R)^2}{3} \le 6R^2 + 3r^2 \le \frac{27}{4}R^2 \le \\
&\le 8R^2 - r^2 - 2Rr \le 9R^2 - r^2 - 4Rr. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Dấu "=" tại mỗi bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

2.1.2 Mô tả hình học



Hình 2.3: Mô tả hình học của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác

2.2 Dạng "chặt" của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác

Từ Nhận xét 2.1, chúng ta biết rằng bất đẳng thức cơ bản là tốt nhất trong lớp các bất đẳng thức $f(R, r) \le p^2 \le F(R, r)$, với $f(R, r), F(R, r)$

là các hàm thực thuần nhất bậc hai theo $R, r > 0$ cho trước. Vậy, liệu có dạng "chặt" nào khác của (2.1) nếu ta không xét với lớp hàm thuần nhất không? Câu hỏi này đã được Shan-He Wu trả lời trong bài báo [7]. Ông đã đưa ra một dạng "chặt " của bất đẳng thức cơ bản (2.1) bằng cách đưa thêm tham số vào các biểu thức theo R, r của nó. Đây cũng là nội dung chúng tôi trình bày trong mục này. Để cho gọn khi trình bày, chúng tôi sẽ sử dụng kí hiệu $\prod$ để chỉ tích tuần hoàn, chẳng hạn như $\prod f(A) = f(A)f(B)f(C)$.

Trước tiên, ta xét bổ đề sau.

Bổ đề 2.1. ([7]) *Cho tam giác ABC bất kì. Nếu $A \geq B \geq C$ thì ta có các bất đẳng thức sau*

$$\begin{aligned}&2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}cos(B-C)\\ &\qquad \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}cos(A-B). \quad (2.16)\end{aligned}$$

Dấu "=" của bất đẳng thức bên trái xảy ra khi và chỉ khi $B = C$.
Dấu "=" của bất đẳng thức bên phải xảy ra khi và chỉ khi $A = B$.

Định lý 2.2.1. ([7]) *Cho $\phi = min\{| A - B |, | B - C |, | A - C |\}$. Khi đó với tam giác ABC bất kì, ta có*

$$\begin{aligned}&2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}cos\phi\\ &\qquad \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}cos\phi. \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Dấu "=" trong (2.24) xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Nhận xét 2.6.

Từ bất đẳng thức Euler $R - 2r \geq 0$ và bất đẳng thức $cos\phi \leq 1$ đã chỉ ra rằng bất đẳng thức (2.24) là một dạng "chặt" của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác (2.1).

2.3 Một số dạng tương đương của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác

Trong mục 2.1, ta đã có (2.2) và (2.14) là các dạng tương đương của bất đẳng thức cơ bản (2.1). Bằng các phép biến đổi đơn giản với (2.1) và sử dụng công thức $S = pr$, ta có được một số dạng tương đương khác của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác.

Định lý 2.3.1. ([6]) *Cho tam giác ABC bất kì, ta có*

$$p^4 - 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R + r)^3 \leq 0. \tag{2.25}$$

Dấu "=" trong (2.25) xảy ra khi và chỉ khi tam giác cân.

Định lý 2.3.2. ([6]) *Cho tam giác ABC bất kì, ta có*

$$(r^2 + p^2)^2 + 12Rr^3 - 20Rrp^2 + 48R^2r^2 - 4R^2p^2 + 64R^3r \leq 0. \tag{2.26}$$

Dấu "=" trong (2.26) xảy ra khi và chỉ khi tam giác cân.

Định lý 2.3.3. ([6]) *Cho tam giác ABC bất kì, ta có*

$$S^4 - 2r^2(2R^2 + 10Rr - r^2)S^2 + r^5(4R + r)^3 \leq 0. \tag{2.27}$$

Dấu "=" trong (2.27) xảy ra khi và chỉ khi tam giác cân.

Định lý 2.3.4. ([6]) *Cho tam giác ABC bất kì, ta có*

$$p^4 - 2(2R^2 + 10R\frac{S}{p} - \frac{S^2}{p^2})p^2 + \frac{S}{p}(4R + \frac{S}{p})^3 \leq 0. \tag{2.28}$$

Dấu "=" trong (2.28) xảy ra khi và chỉ khi tam giác cân.

Định lý 2.3.5. ([6]) *Cho tam giác ABC bất kì, ta có*

$$\begin{aligned} &r[2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}]^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad \leq S \leq r[2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Dấu "=" trong mỗi bất đẳng thức của (2.29) xảy ra khi và chỉ khi tam giác cân. Dấu "=" trong cả hai bất đẳng thức của (2.29) xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều.

Định lý 2.3.6. ([6]) *Cho tam giác ABC bất kì, ta có*

$$4R(R - \frac{2S}{p})^3 \geq (p^2 + \frac{S^2}{p^2} - 2R^2 - \frac{10RS}{p})^2. \tag{2.30}$$

Dấu "=" trong (2.30) xảy ra khi và chỉ khi tam giác cân.

Tiếp theo chúng tôi sẽ trình bày một dạng tương đương nữa của bất đẳng thức cơ bản. Bất đẳng thức này có rất nhiều ứng dụng trong việc chứng minh một số bất đẳng thức quen thuộc sẽ được trình bày ở chương sau.

Định lý 2.3.7. ([8]) *Cho tam giác ABC bất kì, ta có*

$$\frac{1}{4}\delta(4-\delta)^3 \leq \frac{p^2}{R^2} \leq \frac{1}{4}(2-\delta)(2+\delta)^3, \tag{2.31}$$

trong đó $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{2r}{R}}$. *Dấu "=" xảy ra ở mỗi bất đẳng thức khi và chỉ khi tam giác cân.*

Kết luận của Chương 2: Trong chương này chúng tôi đã phát biểu, chứng minh và mô tả hình học của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác. Hơn nữa, từ bất đẳng thức cơ bản trong tam giác chúng tôi đã xây dựng được lớp các bất đẳng thức dạng $M(R,r) \leq K(p) \leq N(R,r)$. Nội dung chính của chương này là trình bày dạng "chặt" của bất đẳng thức cơ bản (2.1) được đưa ra bởi tác giả Shan-He Wu trong bài báo [7] và dạng tương đương của bất đẳng thức cơ bản (2.1) được đưa ra bởi các tác giả Shan-He Wu và Mihály Bencze trong bài báo [8].

Chương 3

Một số ứng dụng

Bằng các phép biến đổi đại số sơ cấp kết hợp với các hệ thức trong tam giác đã trình bày trong Chương 1, chúng ta có thể thiết lập các đẳng thức tổng quát như sau

$$F(f_1(u_1,v_1,w_1),f_2(u_2,v_2,w_2),...,f_n(u_n,v_n,w_n)) = G(R,r,p), \qquad (3.1)$$

trong đó $f_i(u_i,v_i,w_i),(i=1,...,n)$ là các biểu thức đối xứng theo các bộ ba $(a,b,c),(h_a,h_b,h_c),(sinA,sinB,sinC),...$ còn $G(R,r,p)$ là biểu thức theo (R,r,p).

Giả sử rằng $G(R,r,p) = g(H(R,r),K(p))$, trong đó g là hàm không giảm theo biến thứ hai. Từ bất đẳng thức cơ bản trong tam giác ta đã thiết lập được các bất đẳng thức $M(R,r) \leq K(p) \leq N(R,r)$ trong Chương 2. Như vậy ta sẽ có được

$$g(H(R,r),M(R,r)) \leq G(R,r,p) \leq g(H(R,r),N(R,r)).$$

Thay các bất đẳng thức này vào đẳng thức (3.1) ta thu được bất đẳng thức

$$\begin{aligned} g(H(R,r),M(R,r)) &\leq F(f_1(u_1,v_1,w_1),f_2(u_2,v_2,w_2),...,f_n(u_n,v_n,w_n)) \\ &\leq g(H(R,r),N(R,r)). \end{aligned}$$

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày các ứng dụng của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác là các bất đẳng thức có dạng như trên. Bên cạnh đó, từ dạng tương đương (2.31) của bất đẳng thức cơ bản được trình bày ở mục 2.3, chúng ta sẽ tìm hiểu các ứng dụng của nó trong việc chứng minh bất đẳng thức quen thuộc như Garfunkel - Bankoff và phát triển bất đẳng thức Leuenberger.

3.1 Một số ứng dụng của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản (2.1) kết hợp với các bất đẳng thức (2.12), (2.13) và bất đẳng thức Euler thay vào các đẳng thức trong tam giác đã trình bày trong Chương 1 ta thu được hàng loạt các bất đẳng thức trong tam giác thể hiện mối liên hệ giữa (R, r, p) và các yếu tố của tam giác. Trong mỗi dạng cụ thể, chúng tôi chỉ trình bày các ví dụ tiêu biểu.

Trong phần này, dấu "=" của các bất đẳng thức trong các ví dụ xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. Để cho gọn khi trình bày, chúng tôi sẽ không nhắc lại điều này. Đồng thời, chúng tôi sẽ sử dụng các kí hiệu $\prod$ và $\sum$ để chỉ tích và tổng tuần hoàn, chẳng hạn như $\prod f(a,b) = f(a,b)f(b,c)f(c,a), \sum f(a,b) = f(a,b) + f(b,c) + f(c,a)$.

3.1.1 Một số bất đẳng thức liên hệ giữa (R, r, p) và các cạnh của tam giác

Ví dụ 3.1. *Cho tam giác ABC, chứng minh rằng*

$$\begin{aligned}
36r^2 \le 18Rr \le 12r(2R - r) \le 4\left[R^2 + 3Rr - r^2 - (R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}\right] \le \\
\le a^2 + b^2 + c^2 \le 4\left[R^2 + 3Rr - r^2 + (R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}\right] \le \\
\le 8R^2 + 4r^2 \le 9R^2.
\end{aligned}$$

Nhận xét 3.1.

Nếu chúng ta sử dụng Định lý 2.1.4 để tìm các bất đẳng thức tổng quát hóa của dạng

$$a^2 + b^2 + c^2 \le uR^2 + vRr + wr^2 (u, v, w \in \mathbb{R})$$

và

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq u'R^2 + v'Rr + w'r^2 (u', v', w' \in \mathbb{R}).$$

Ta được các kết quả sau

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 \leq & 4(1-\theta^2)^{-1}[2R^2 - 2Rr\theta(1+3\theta) + r^2(1+4\theta+3\theta^2)] \\ & + \epsilon r(R-2r) \quad (0 \leq \theta < 1, \epsilon \geq 0), \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 \geq & 4(1-\omega^2)^{-1}[-2\omega^2 R^2 + 2Rr(3+\omega) - r^2(3+4\omega+\omega^2)] \\ & - \epsilon r(R-2r) \quad (0 \leq \omega < 1, \epsilon \geq 0). \end{aligned}$$

Từ kết quả này ta có thể đưa ra hàng loạt bất đẳng thức có dạng trên ứng với từng giá trị ω, θ, ϵ cụ thể. Tương tự, ta có thể áp dụng Định lý 2.1.4 cho các đẳng thức trong Chương 1 để đưa ra hàng loạt bất đẳng thức với mỗi dạng cụ thể.

Ví dụ 3.2. *Cho tam giác ABC và số thực $k, (0 < k \leq 9)$. Tam giác ABC thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = kR^2$ được gọi là $k-$ tam giác. Khi đó, chứng minh rằng: "Điều kiện cần và đủ để tồn tại $k-$ tam giác theo các yếu tố (R, r, p) là $p^2 = r^2 + 4Rr + \frac{1}{2}kR^2$ với $0 < k \leq 9$". Hơn nữa, tam giác ABC là tam giác tù khi và chỉ khi $0 < k < 8$, vuông khi và chỉ khi $k = 8$, nhọn khi và chỉ khi $8 < k < 9$ và đều khi và chỉ khi $k = 9$.*

Nhận xét 3.2.

Từ Ví dụ trên chúng tôi đã phân loại các tam giác tù, vuông, nhọn hoặc tam giác đều tùy theo $k \in (0; 9]$. Ngoài ra, ta còn có thể rút ra được nhận xét sau: "Tam giác ABC không tù (tam giác không có góc nào lớn hơn $\frac{\pi}{2}$) khi và chỉ khi $p \geq 2R + r$; tam giác ABC không nhọn (tam giác có một góc lớn hơn hoặc bằng $\frac{\pi}{2}$) khi và chỉ khi $p \leq 2R + r$. Dấu "=" trong các bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông." Dựa vào các kết quả này và các đẳng thức trong Chương 1 ta có thể sáng tác hàng loạt bất đẳng thức cho tam giác tù, vuông, nhọn, đều.

3.1.2 Một số bất đẳng thức liên hệ giữa (R, r, p) và các góc của tam giác

Ví dụ 3.9. *Cho tam giác ABC, chứng minh rằng*

$$\frac{15}{8} \leq 2 - \frac{r^2}{2R^2} \leq \frac{5R^2 - 3Rr + r^2 - (R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R^2} \leq$$
$$\leq \sum (sin^4\frac{A}{2} + cos^4\frac{B}{2}) \leq \frac{5R^2 - 3Rr + r^2 + (R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R^2} \leq$$
$$\leq 3\left(1 - \frac{r}{R} + \frac{r^2}{2R^2}\right) < 3.$$

3.1.3 Một số bất đẳng thức liên hệ giữa $(a, b, c), (A, B, C)$ và (R, r, p)

Ví dụ 3.11. *Cho tam giác ABC, chứng minh rằng*

$$9r \leq 10r(1 - \frac{r}{5R}) \leq \frac{R^2 + 7Rr - (R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R} \leq asinB+$$
$$+ bsinC + csinA \leq \frac{R^2 + 7Rr + (R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R} \leq \frac{2(R+r)^2}{R} \leq \frac{9R}{2}.$$

3.1.4 Một số bất đẳng thức liên hệ giữa (R, r, p) và các yếu tố khác của tam giác

Ví dụ 3.16. *Cho tam giác ABC, chứng minh rằng*

$$32Rr^2 \leq 4r^2(9R - 2r) \leq 24Rr^2 + 4R^2r - 4r(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq$$
$$\leq (r + r_a)(r + r_b)(r + r_c) \leq 24Rr^2 + 4R^2r + 4r(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$$
$$\leq 4r(2R^2 + 3Rr + 2r^2) \leq 8R^3.$$

3.1.5 Một lớp các bất đẳng thức liên quan đến đường phân giác của các góc và các cạnh của tam giác

Định lý 3.1.1. ([9]) *Trong tam giác ABC bất kì, bất đẳng thức sau luôn xảy ra*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{r} + \sqrt{3}\right) \leq \sum \frac{a}{l_a} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{p}{r} + 2\sqrt{6} - 3\sqrt{3}\right). \tag{3.9}$$

Dấu "=" trong (3.9) xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. Hơn nữa, $\frac{1}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}}{2}$ là các hệ số tốt nhất trong (3.9).

Nhận xét 3.4.

Từ bất đẳng thức tổng quát của (3.9)

$$\lambda\left(\frac{p}{r}+\frac{2\sqrt{3}}{\lambda}-3\sqrt{3}\right)\leq\sum\frac{a}{l_a}\leq k\left(\frac{p}{r}+\frac{2\sqrt{3}}{k}-3\sqrt{3}\right),(\lambda\leq\frac{1}{2},k\geq\frac{\sqrt{2}}{2})$$

kết hợp với các bất đẳng thức dạng $M(R,r)\leq K(p)\leq N(R,r)$ (trong Chương 2) ta sẽ thu được hàng loạt các bất đẳng thức trong tam giác.

Hệ quả 3.1.1. ([9]) *Trong tam giác ABC bất kì, ta luôn có*

$$2\sqrt{3}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{2r}{R}\right)\leq\sum\frac{a}{l_a}\leq 2\sqrt{3}+2\sqrt{2}\left(\frac{R}{2r}-1\right). \tag{3.20}$$

Dấu "=" trong (3.20) xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. Hơn nữa, $2\sqrt{2}$ là hệ số tốt nhất trong vế phải của bất đẳng thức (3.20).

3.2 Một số ứng dụng của dạng tương đương của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày một số ứng dụng của dạng tương đương (2.31) của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác đã được Shan-He Wu và Mihály Bencze nêu ra trong bài báo [8].

3.2.1 Một chứng minh mới của bất đẳng thức Garfunkel - Bankoff

Định lý 3.2.1. ([8])(Bất đẳng thức Garfunkel - Bankoff) *Cho tam giác ABC bất kì, ta có*

$$tan^2\frac{A}{2}+tan^2\frac{B}{2}+tan^2\frac{C}{2}\geq 2-8sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}. \tag{3.23}$$

Dấu "=" trong (3.23) xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

3.2.2 Một sự phát triển của bất đẳng thức Leuenberger

Định lý 3.2.2. ([4])(Bất đẳng thức Leuenberger) *Cho tam giác ABC bất kì, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}. \tag{3.24}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bất đẳng thức này đã được nhiều nhà toán học quan tâm và phát triển, Steinig đã đưa ra bất đẳng thức chặt hơn sau (xem [4])

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2(R+r)}. \tag{3.25}$$

Mitrinovic cũng đưa ra một bất đẳng thức chặt khác của (3.24) (xem [6])

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{5R-r}{2R^2+(3\sqrt{3}-4)Rr}. \tag{3.26}$$

Trong định lý dưới đây, chúng tôi sẽ trình bày một dạng phát triển mới của các bất đẳng thức (3.25) và (3.26) do Shan-He Wu và Mihály Bencze đưa ra.

Định lý 3.2.3. ([8]) *Với tam giác ABC bất kì, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{\sqrt{25Rr-2r^2}}{4Rr}. \tag{3.27}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Nhận xét 3.5.

Bất đẳng thức (3.27) mạnh hơn các bất đẳng thức (3.24), (3.25) và (3.26) vì theo bất đẳng thức Euler $R\geq 2r$ ta dễ dàng kiểm tra được các bất đẳng thức sau đúng cho tam giác bất kì

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{\sqrt{25Rr-2r^2}}{4Rr}\geq\frac{5R-r}{2R^2+(3\sqrt{3}-4)Rr}\geq\frac{\sqrt{3}}{R},$$

và

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{\sqrt{25Rr-2r^2}}{4Rr}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2(R+r)}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}.$$

Kết luận của Chương 3: Từ hệ thống các đẳng thức trong tam giác ở Chương 1, sử dụng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các bất đẳng thức dạng $M(R,r) \leq K(p) \leq N(R,r)$ đã được thiết lập trong Chương 2 chúng tôi đã xây dựng được hàng loạt các bất đẳng thức theo (R,r,p) và các yếu tố trong tam giác như $(a,b,c), (sinA, sinB, sinC), (h_a, h_b, h_c)$... Bên cạnh đó, chúng tôi cũng trình bày một lớp các bất đẳng thức liên quan giữa các đường phân giác và các cạnh của tam giác áp dụng bất đẳng thức cơ bản (2.1). Hơn nữa, chúng tôi trình bày một chứng minh mới của bất đẳng thức Garfunkel - Bankoff và phát triển bất đẳng thức Leuenberger áp dụng dạng tương đương (2.31) của bất đẳng thức cơ bản được trình bày ở mục 2.3.

Kết luận

Luận văn đã tập trung nghiên cứu được các vấn đề sau:

1. Chứng minh điều kiện cần và đủ để một phương trình bậc ba có ba nghiệm là ba cạnh của một tam giác (Tính chất 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3). Sử dụng Định lý Viète đối với phương trình bậc ba, chúng tôi đã xây dựng một hệ thống các hệ thức trong tam giác.

2. Phát biểu, chứng minh và mô tả hình học bất đẳng thức cơ bản trong tam giác (Định lý 2.1.1, mục 2.1.2), chứng minh bất đẳng thức cơ bản (2.1) là bất đẳng thức mạnh nhất của dạng bất đẳng thức $f(R,r) \leq p^2 \leq F(R,r)$ ($f(R,r), F(R,r)$ là các hàm thực thuần nhất bậc hai với $R, r > 0$) (Nhận xét 2.1).

3. Từ bất đẳng thức cơ bản, chúng tôi xây dựng lớp các bất đẳng thức dạng $M(R,r) \leq K(p) \leq N(R,r)$ (Định lý 2.1.2, Định lý 2.1.4), đưa ra một số bất đẳng thức thuộc dạng trên thường sử dụng cho việc sáng tác các bất đẳng thức trong tam giác (Hệ quả 2.1.1, Hệ quả 2.1.2).

4. Trình bày dạng "chặt" của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác khi đưa thêm tham số vào các biểu thức theo R, r của nó được đề cập trong bài báo [7] của Shan-He Wu (Định lý 2.2.1).

5. Bằng các phép biến đổi đơn giản với bất đẳng thức (2.1), chúng tôi đưa ra một số dạng tương đương của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác (các định lý 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6) bên cạnh các dạng tương đương (2.2) và (2.14). Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày một dạng tương đương của bất đẳng thức cơ bản được Shan-He

Wu và Mihály Bencze đưa ra trong bài báo [8] (Định lý 2.3.7).

6. Từ hệ thống các đẳng thức trong Chương 1, áp dụng bất đẳng thức cơ bản và các bất đẳng thức dạng $M(R,r) \leq K(p) \leq N(R,r)$ được xây dựng ở Chương 2, chúng tôi trình bày việc hình thành và sáng tác các bất đẳng thức mới trong tam giác liên quan giữa (R,r,p) và các yếu tố $(a,b,c), (sinA, sinB, sinC), (h_a, h_b, h_c), ...$ thông qua các ví dụ cho từng dạng cụ thể (các ví dụ trong các mục 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4). Trong các ví dụ này, chúng ta bắt gặp lại các bất đẳng thức trong tam giác thường có mặt trong các tài liệu ôn thi đại học và ôn thi học sinh giỏi. Không những thế, Luận văn còn mở rộng và làm mạnh hơn các bất đẳng thức này. Ngoài ra, chúng tôi trình bày một lớp các bất đẳng thức liên quan giữa các đường phân giác và các cạnh của tam giác áp dụng bất đẳng thức cơ bản (2.1) (Định lý 3.1.1).

7. Sử dụng dạng tương đương (2.31) của bất đẳng thức cơ bản trong tam giác (Định lý 2.3.7), chúng tôi trình bày một chứng minh mới của bất đẳng thức Garfunkel - Bankoff (Định lý 3.2.1) và phát triển bất đẳng thức Leuenberger (Định lý 3.2.3).

Trong quá trình thực hiện đề tài, chúng tôi còn nhận thấy một số hướng mở cần nghiên cứu tiếp như sau:

- Nghiên cứu bất đẳng thức cơ bản trong tam giác trong hình học phi Euclide.

- Dùng nguyên lý tam giác cân - PIT và các tính chất cực trị toàn cục trong Giải tích để thiết lập bất đẳng thức cơ bản trong tam giác theo một cách hoàn toàn mới.

Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ tập trung tìm hiểu kĩ lưỡng và sâu sắc hơn về những vấn đề này. Chúng tôi hy vọng luận văn sẽ là tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên, học sinh cũng như những ai quan tâm đến bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các vấn đề liên quan.