



**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

---

**ĐINH CÔNG MINH**

**MỘT SỐ LỚP ẢNH XẠ LỖI VÀ LỖM  
TRONG KHÔNG GIAN CÓ THỨ TỰ**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**



**Thành phố Hồ Chí Minh – 2011**

---



**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

---

**ĐINH CÔNG MINH**

# **MỘT SỐ LỚP ẢNH XẠ LỖI VÀ LỖM TRONG KHÔNG GIAN CÓ THỨ TỰ**

Chuyên ngành: **Toán Giải Tích**  
Mã số: **60 46 01**

## **LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC  
TS. TRẦN ĐÌNH THANH**



**Thành phố Hồ Chí Minh – 2011**

---

## **LỜI CẢM ƠN**

**Tôi gửi cảm ơn sâu sắc đến Thầy TS. Trần Đình Thanh đã tận tình hướng dẫn tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn này.**

**Tôi xin chân thành cảm ơn quý Thầy, Cô khoa Toán trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh và trường ĐHKHTN TP Hồ Chí Minh đã trang bị cho tôi nhiều kiến thức quý báu trong Toán học cũng như trong cuộc sống.**

**Tôi xin cảm ơn bạn bè và người thân đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn.**

**Tp. Hồ Chí Minh, tháng 10 năm 2011**

**Học viên**

**Đinh Công Minh**

## MỤC LỤC

|                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>LỜI CẢM ƠN .....</b>                                               | <b>0</b>  |
| <b>MỤC LỤC .....</b>                                                  | <b>0</b>  |
| <b>MỞ ĐẦU .....</b>                                                   | <b>1</b>  |
| 1. Lý do chọn đề tài:.....                                            | 1         |
| 2. Nội dung luận văn .....                                            | 1         |
| 3. Phương pháp nghiên cứu .....                                       | 2         |
| <b>Chương 1: CÁC KẾT QUẢ CHUẨN BỊ .....</b>                           | <b>3</b>  |
| 1.1 Không gian banach có thứ tự .....                                 | 3         |
| 1.2 Nguyên lí Entropy và Định lí điểm bất động của ánh xạ tăng .....  | 8         |
| 1.2.1 Nguyên lí Entropy .....                                         | 8         |
| 1.2.2 Định lí điểm bất động của ánh xạ tăng .....                     | 9         |
| <b>Chương 2: MỘT SỐ LỚP ÁNH XẠ LỖI, LỖM. ....</b>                     | <b>12</b> |
| 2.1 Ánh xạ $u_0$ – lõm hoặc $u_0$ – lỗi. ....                         | 12        |
| 2.1.2 Sự duy nhất của điểm bất động. ....                             | 13        |
| 2.1.3 Xây dựng dãy lặp đơn điệu hội tụ về điểm bất động .....         | 14        |
| 2.1.4 Tính chất của vectơ riêng, giá trị riêng. ....                  | 17        |
| 2.2 Một số ánh xạ lỗi, lõm. ....                                      | 20        |
| 2.2.1 Ánh xạ dưới tuyến tính.....                                     | 20        |
| 2.2.2 Ánh xạ $u_0$ – đơn điệu.....                                    | 21        |
| 2.2.3 Ánh xạ $\alpha$ – lỗi, $\alpha$ – lõm. ....                     | 22        |
| 2.3 Ánh xạ $u_0$ – lõm tổ hợp .....                                   | 30        |
| 2.3.1 Ánh xạ đơn điệu tổ hợp .....                                    | 30        |
| 2.3.2 Ánh xạ $u_0$ – lõm tổ hợp. ....                                 | 32        |
| 2.3.3 Một số ứng dụng.....                                            | 34        |
| <b>Chương 3: MỘT SỐ LỚP ÁNH XẠ LỖM ĐA TRỊ.....</b>                    | <b>37</b> |
| 3.1 Sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ $u_0$ – lõm đều đơn trị ..... | 37        |
| 3.2 Sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ lõm đều đa trị. ....          | 39        |
| <b>KẾT LUẬN .....</b>                                                 | <b>43</b> |
| <b>TÀI LIỆU THAM KHẢO .....</b>                                       | <b>44</b> |

# MỞ ĐẦU

## 1. Lý do chọn đề tài:

Lý thuyết phương trình trong không gian có thứ tự ra đời từ những năm 1940, được phát triển và hoàn thiện cho đến ngày nay. Lý thuyết này tìm được những ứng dụng rộng rãi trong việc nghiên cứu các phương trình xuất phát từ khoa học Tự nhiên, Y học, Kinh tế học.

Trong lý thuyết về phương trình trong không gian có thứ tự thì lớp phương trình với ánh xạ lồi hoặc lõm đóng vai trò quan trọng. Đối với lớp phương trình với ánh xạ lồi hoặc lõm ta có thể chứng minh sự duy nhất của nghiệm, xây dựng hai dãy lặp Picard là dãy tăng hoặc giảm hội tụ về nghiệm; chứng minh được tập giá trị riêng là khoảng,...

Vì sự quan trọng của nó nên lớp phương trình với ánh xạ lồi được nhiều nhà Toán học quan tâm nghiên cứu. Một số lớp ánh xạ lõm hoặc lồi mới được đưa vào nghiên cứu và thu được các định lý mới về điểm bất động, về xây dựng dãy lặp xấp xỉ nghiệm,...

Việc hệ thống lại các lớp ánh xạ lồi, lõm đã được nghiên cứu, các tính chất của chúng, so sánh mối liên hệ giữa chúng,... là việc làm cần thiết và có ý nghĩa.

Luận văn chỉ trình bày các kết quả lý thuyết. Sau khi thu thập tài liệu từ nhiều nguồn, chúng tôi sẽ phân loại, tổng hợp các tài liệu để trình bày các kết quả theo một hệ thống hoàn chỉnh, chi tiết.

## 2. Nội dung luận văn

Nội dung luận văn gồm có ba chương:

**Chương 1.** Nhắc lại các khái niệm, các kết quả được sử dụng. Trong đó gồm có các khái niệm về không gian Banach với thứ tự sinh bởi nón; Nguyên lý Entropy; Định lý điểm bất động của ánh xạ tăng. Các kết quả này được trích dẫn từ các tài liệu tham khảo.

**Chương 2.** Trình bày một số kết quả của một số lớp ánh xạ lồi, lõm. Tính chất của vectơ riêng, giá trị riêng. Ánh xạ lõm tổ hợp.

**Chương 3.** Khảo sát sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ lõm đa trị.

### **3. Phương pháp nghiên cứu**

1. Sử dụng các tính chất của thứ tự sinh bởi nón, nguyên lý Entropy, định lý điểm bất động của ánh xạ tăng.

2. Phương pháp lặp liên tiếp.

# Chương 1: CÁC KẾT QUẢ CHUẨN BỊ

## 1.1 Không gian banach có thứ tự

### Định nghĩa 1.1.1

Tập  $K$  trong không gian Banach thực  $X$  gọi là nón nếu

- i)  $K$  là tập đóng, khác rỗng và  $K \neq \emptyset$
- ii)  $K + K \subset K, \lambda K \subset K \quad \forall \lambda \geq 0$ .
- iii)  $K \cap (-K) = \{\theta\}$

### Định nghĩa 1.1.2

Trong không gian Banach thực  $X$  với nón  $K$ , ta xét quan hệ " $\leq$ " sau:

$$\forall x, y \in X, x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$$

Khi đó quan hệ " $\leq$ " có các tính chất:

- 1) Phản xạ:  $x - x = \theta \in K \Rightarrow x \leq x, \forall x \in X$ .
- 2) Phản xứng:  $\forall x, y \in X$ , nếu  $x \leq y$  và  $y \leq x$  thì  $y - x \in K$  và  $x - y \in K$

Do iii) ta có:  $y - x = \theta$  nên  $x = y$

- 3) bắc cầu:  $\forall x, y, z \in X$  nếu  $x \leq y$  và  $y \leq z$  thì  $y - x \in K$  và  $z - y \in K$

Do ii) ta có:  $z - x = (y - x) + (z - y) \in K$ . Do đó  $x \leq z$ .

Vậy " $\leq$ " là một quan hệ thứ tự trên  $X$ .

Mỗi  $x \in K \setminus \{\theta\}$  gọi là dương.

### Mệnh đề 1.1.1

Cho  $X$  là không gian Banach thực sinh bởi nón  $K$ . Khi đó:

- 1)  $\forall x, y, z \in X, \forall \lambda \geq 0; x \leq y \Rightarrow \begin{cases} x + z \leq y + z \\ \lambda x \leq \lambda y \end{cases}$
- 2) Nếu  $(x_n \leq y_n (n \in \mathbb{N}^*), \lim x_n = x, \lim y_n \leq y)$  thì  $x \leq y$ .
- 3) Nếu  $\{x_n\}$  là dãy tăng, hội tụ về  $x$  thì  $x_n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

### Chứng minh

- 1) Ta có  $x \leq y \Rightarrow y - x \in K \Rightarrow \lambda y - \lambda x = \lambda(y - x) \in K \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$ .

Tương tự:

$$x \leq y \Rightarrow y - x \in K \Rightarrow y - x = (y + z) - (x + z) \in K \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

2) Do  $x_n \leq y_n \Rightarrow y_n - x_n \in K$

Do  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = y - x$  và  $K$  đóng nên  $y - x \in K$ . Vì thế  $x \leq y$ .

3) Giả sử dãy  $\{x_n\}$  là tăng. Với mỗi  $n$  ta có:  $x_n \leq x_{n+m}$ .

Cho  $m \rightarrow +\infty$ , ta có:  $x_n \leq x, \forall n$ .

### Định nghĩa 1.1.3

i) Nón  $K$  trong  $X$  được gọi là nón miniheral mạnh nếu mọi tập  $M$  bị chặn trên trong  $X$  đều tồn tại  $\sup M$ .

ii) Nón  $K$  trong không gian Banach  $X$  được gọi là nón chuẩn nếu

$$\exists N > 0 \text{ sao cho } \forall x, y \in X, x \leq y \text{ thì } \|x\| \leq N\|y\|$$

(số  $N$  được gọi là hằng số chuẩn của  $K$ )

iii) Nón  $K$  trong  $X$  được gọi là nón chính qui nếu mọi dãy tăng bị chặn trên trong  $X$  đều hội tụ.

iv) Nón  $K$  trong  $X$  được gọi là nón sinh nếu  $\forall x \in X, \exists u, v \in K: x = u - v$

### Mệnh đề 1.1.2

Cho  $K$  là nón chuẩn trong  $X$ . Khi đó:

1)  $\forall u, v \in X; u \leq v$  thì  $\langle u, v \rangle = \{x \in X: u \leq x \leq v\}$  là tập đóng và bị chặn.

2) Nếu  $x_n \leq y_n \leq z_n, (n=1, 2, \dots)$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$

3) Nếu dãy đơn điệu  $(x_n)_n$  có dãy con  $(x_{n_k})_k$  hội tụ về  $x$  thì  $(x_n)_n$  hội tụ về  $x$

### Chứng minh

1)  $\langle u, v \rangle$  là tập đóng.

Giả sử  $x_n \in \langle u, v \rangle, \forall n$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

Ta có:  $u \leq x_n \leq v, \forall n \Rightarrow u \leq x \leq v \Rightarrow x \in \langle u, v \rangle$ .

$\langle u, v \rangle$  bị chặn:

$\forall x \in \langle u, v \rangle$  thì  $u \leq x \leq v \Rightarrow x - u \in K, v - u \in K$  và  $x - u \leq v - u$

Do  $K$  là nón chuẩn nên  $\|x - u\| \leq N\|v - u\| \Rightarrow \|x\| - \|u\| \leq N\|v - u\|$

Vì vậy  $\|x\| \leq N\|v - u\| + \|u\| = M$

2) Giả sử  $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \Rightarrow \theta \leq y_n - x_n \leq z_n - v_n$

Do  $K$  là nón chuẩn nên  $\|y_n - x_n\| \leq N \|z_n - v_n\| \quad (*)$

Mà  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$  nên  $z_n - x_n \rightarrow \theta$

từ (\*) cho  $n \rightarrow \infty$  thì  $y_n - x_n \rightarrow \theta$

Do đó  $y_n = (y_n - x_n) + x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$ .

3) Giả sử  $(x_n)_n$  là dãy tăng có dãy con  $(x_{n_k})_k$  hội tụ về  $x$

Ta có:  $x_{n_k} \rightarrow x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 : \|x - x_{n_{k_0}}\| < \frac{\varepsilon}{N}$ .

Ta lại có:  $x_{n_k} \leq x, \forall k$  và  $x_n \leq x_{n_k}$  nên  $x_n \leq x, \forall n$

Khi đó:  $\forall n \geq n_{k_0}$  thì  $x_{n_{k_0}} \leq x_n \leq x \Rightarrow \theta \leq x - x_n \leq x - x_{n_{k_0}}$

Do đó:  $\|x - x_n\| \leq N \|x - x_{n_{k_0}}\| < \varepsilon$

Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

### Định lí 1.1.1

Trong không gian Banach  $X$  với nón chuẩn  $K$  tồn tại chuẩn  $\|\cdot\|^*$  tương đương với chuẩn ban đầu  $\|\cdot\|$  sao cho  $\forall x, y \in X, \theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\|^* \leq \|y\|^*$

#### Chứng minh

Đặt  $A = [B(0,1) + K] \cap [B(0,1) - K]$

Ta chứng minh:  $B(0,1) \subset A \subset B(0,r)$ , với  $r > 0$  đủ lớn.

+ Do  $\theta \in K \cap (-K)$  nên  $B(0,1) \subset A$

+ Chứng minh  $A \subset B(0;r), r > 0$ .

Thật vậy, nếu trái lại ta có thể xây dựng dãy  $(x_n)_n \subset A$  với  $\|x_n\| \geq n$  và

$y_n, z_n \in B(0,1); u_n, v_n \in K$  sao cho  $x_n = y_n + u_n = z_n - v_n$

Vì  $u_n + v_n = z_n - v_n$  nên  $\|u_n + v_n\| \leq 2$

mà  $K$  là nón chuẩn nên  $\|u_n\| \leq N \|u_n + v_n\| \leq 2N$ .

Do đó  $n \leq \|x_n\| \leq \|y_n\| + \|u_n\| \leq 1 + 2N, \forall n$  (điều này vô lí)

\* Xét phiếm hàm Minkovski của tập  $A$ :

$$\|x\|^* = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in A \right\} \quad x \in A$$

\*  $\forall x \in X, x \neq 0$ , gọi  $\lambda_0 = \|x\|^*$  thì  $\frac{x}{2\|x\|} \in B(0,1)$  và  $\frac{x}{\lambda_0} \in A$ .

Theo trên ta có:  $\frac{x}{2\|x\|} \in A$  và  $\frac{x}{\lambda_0} \in B(0,r)$

Do đó:  $\|x\|^* < 2\|x\|$  và  $\frac{\|x\|}{\|x\|^*} < r$

Suy ra  $\frac{1}{2}\|x\|^* < \|x\| < r\|x\|^*$

Khi  $x=0$  thì đẳng thức xảy ra.

Do đó chuẩn  $\|\cdot\|^*$  tương đương với chuẩn ban đầu  $\|\cdot\|$

\* Giả sử  $0 \leq x \leq y$ , ta có:  $\left\{ \lambda > 0 : \frac{y}{\lambda} \right\} \subset \left\{ \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \right\}$

Thật vậy, xét  $\lambda$  sao cho  $\frac{y}{\lambda} \in A$

Do  $x \geq 0$  nên  $\frac{x}{\lambda} \in K \Rightarrow 0 + \frac{x}{\lambda} \in B(0,1) + K$

Do  $x \leq y$  nên  $\frac{x}{\lambda} \leq \frac{y}{\lambda} \Rightarrow \frac{y}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \in K$

Mà  $\frac{y}{\lambda} \in A$  nên theo định nghĩa  $A$  ta có  $\frac{y}{\lambda} = u - v$  với  $u \in B(0,1) - K$

Do đó  $\frac{x}{\lambda} \in A$

Vì vậy  $\|x\|^* \leq \|y\|^*$ .

### **Định lí 1.1.2**

- i)  $K$  là nón chính qui khi và chỉ khi mọi dãy đơn điệu giảm bị chặn dưới đều hội tụ.
- ii)  $K$  là nón chính qui thì  $K$  là nón chuẩn.

### Chứng minh

i)  $(\Rightarrow)$  Giả sử  $K$  là nón chính qui.

Xét dãy  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots \geq x$

Ta có dãy  $(x_1 - x_n)_n$  đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi  $x_1 - x$  nên hội tụ.

Vậy dãy  $(x_n)_n$  hội tụ.

$(\Leftarrow)$  Xét dãy  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq x$

Ta thấy dãy  $(x_1 - x_n)_n$  đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên hội tụ.

Vậy dãy  $(x_n)_n$  hội tụ..

ii) Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử  $K$  không là nón chuẩn. Khi đó:

$$\forall N, \exists x_N \in K, \exists y_N \in K, \theta \leq x_N \leq y_N \text{ mà } \|x_N\| > N \|y_N\|$$

Cho  $N = n^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ta được các dãy  $(x_n)_n \subset K, (y_n)_n \subset K$  thoả

$$\theta \leq x_n \leq y_n, \|x_n\| > n^2 \|y_n\|$$

Rõ ràng  $x_n \neq \theta$ . Xét các dãy  $x'_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, y'_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$

Ta có:  $\theta \leq x'_n \leq y'_n, \|x'_n\| = 1, \|y'_n\| < \frac{1}{n^2}$  nên chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} y'_n$  hội tụ.

Đặt  $y = \sum_{n=1}^{\infty} y'_n$  thì  $y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n \leq y$  ( $\forall n$ )

Ta thấy dãy  $z_n = x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n$  tăng và bị chặn trên bởi  $y$ .

Mà  $K$  là nón chính qui nên  $(z_n)_n$  hội tụ. Dẫn đến  $x'_n = z_n - z_{n-1} \rightarrow \theta$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện  $\|x'_n\| = 1$ . Vậy  $K$  là nón chuẩn.

### Mệnh đề 1.1.3

Nếu nón  $K$  trong  $X$  có điểm trong  $u_0$  thì

i)  $\exists \alpha > 0$  sao cho  $\forall x \in X$  thì  $-\alpha \|x\| u_0 \leq x \leq \alpha \|x\| u_0$

ii)  $K$  là nón sinh.

### Chứng minh

i)  $u_0 \in \text{int } K \Rightarrow \exists r > 0 : B(u_0, r) \subset K$ .

\* với  $x \neq \theta$ , ta có  $u_0 \pm \frac{rx}{2\|x\|} \in B(u_0, r)$  nên  $u_0 \pm \frac{rx}{2\|x\|} \geq \theta$

$$\text{Do đó } -\frac{2}{r}\|x\|u_0 \leq x \leq \frac{2}{r}\|x\|u_0$$

\* Khi  $x = \theta$  thì bất đẳng thức trên vẫn đúng.

ii) theo i)  $\exists \alpha > 0$  sao cho  $\forall x \in X$  thì  $-\alpha\|x\|u_0 \leq x \leq \alpha\|x\|u_0$

$$\text{Đặt } u = \frac{\alpha\|x\|u_0 + x}{2} \text{ và } v = \frac{\alpha\|x\|u_0 - x}{2} \text{ thì } u \geq \theta, v \geq \theta, x = u - v$$

Do đó  $u, v \in K$  và  $x = u - v$ .

Vậy  $K$  là nón sinh.

### Định lí 1.1.3

Nếu  $K$  là nón sinh thì tồn tại hằng số sao cho  $\forall x \in X, \exists u, v \in K$  :

$$x = u - v, \|u\| \leq M\|x\|, \|v\| \leq M\|x\|$$

## 1.2 Nguyên lí Entropy và Định lí điểm bất động của ánh xạ tăng.

### 1.2.1 Nguyên lí Entropy

Giả sử:

i)  $X$  là tập sắp thứ tự sao cho mỗi dãy đơn điệu tăng trong  $X$  có cận trên.

ii)  $S : X \rightarrow [-\infty; +\infty)$  là một hàm đơn điệu tăng ( $u \leq v \Rightarrow S(u) \leq S(v)$ ) và bị chặn trên.

Khi đó tồn tại phần tử  $u_0 \in X$  có tính chất:

$$\forall u \in X, u \geq u_0 \Rightarrow S(u) = S(u_0)$$

### Chứng minh

Lấy tùy ý  $u_1 \in X$  rồi xây dựng các phần tử  $u_1 \leq u_2 \leq \dots$  như sau.

Giả sử đã có  $u_n$ , ta đặt  $M_n = \{u \in X : u \geq u_n\}$ ,  $\beta_n = \sup_{u \in M_n} S(u)$ .

\* Nếu  $\beta_n = S(u_n)$  thì  $u_n$  cần tìm. Nếu  $\beta_n > S(u_n)$  ta tìm được  $u_{n+1}$  thỏa:

$$\begin{cases} u_{n+1} \in M_n \\ S(u_{n+1}) > \beta_n - \frac{1}{2}(\beta_n - S(u_n)). \end{cases}$$

\* Nếu quá trình trên vô hạn thì ta có dãy tăng  $\{u_n\}$  thỏa:

$$2S(u_{n+1}) - S(u_n) > \beta_n \quad \forall n \in N^*.$$

Gọi  $u_o$  là một cận trên của  $\{u_n\}$ , với  $u \geq u_o$ , ta có:

$$u \in M_n \quad \forall n \in N^* \quad (\text{do } u \geq u_n)$$

$$\Rightarrow S(u) \leq \beta_n \leq 2S(u_{n+1}) - S(u_n)$$

$$\Rightarrow S(u) \leq \lim S(u_n)$$

$$\Rightarrow S(u) \leq S(u_o) \text{ hay } S(u) = S(u_o)$$

### 1.2.2 Định lí điểm bất động của ánh xạ tăng.

#### Định lí

Giả sử  $X$  là không gian Banach được sắp bởi nón  $K$ ,  $M \subset X$  là tập đóng và  $F: M \rightarrow X$  là ánh xạ tăng thỏa mãn:

$$\text{i) } F(M) \subset M, \quad \exists x_0 \in M : x_0 \leq F(x_0)$$

ii)  $F$  biến mỗi dãy tăng thuộc  $M$  thành dãy hội tụ.

Khi đó  $F$  có điểm bất động trong  $M$ .

#### Chứng minh.

Đặt  $M_0 = \{x \in M : x \leq F(x)\}$ ,  $g(x) = \sup \{\|F(y) - F(z)\| : y, z \in M_0, y \geq z \geq x\}$

\* Ta áp dụng nguyên lí Entropy cho tập  $M_0$  và hàm  $(-g)$

$$\text{i) } \forall \{x_n\} \subset M_0, \{x_n\} \text{ tăng} \Rightarrow \exists x := \lim F(x_n), x \in M.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n \leq x & (\text{do } x_n \leq F(x_n) \leq x) \\ x \in M_0 & (\text{do } F(x_n) \leq F(x) \text{ và cho } n \rightarrow \infty) \end{cases}$$

ii) Với  $x_1, x_2 \in M_0$ , giả sử  $x_1 \leq x_2$  ta có

$$\{z, y \in M_0, y \geq z \geq x_2\} \subset \{z, y \in M_0, y \geq z \geq x_1\}$$

Do đó  $g(x_2) \leq g(x_1)$ .

Vì thế theo nguyên lí Entropy ta có:

$$\exists a \in M_0 : \forall u \in M_0, u \geq a \Rightarrow g(u) = g(a).$$

\* Ta chứng minh  $g(a) = 0$ . Nếu trái lại  $g(a) > c > 0$  ta có

$$\exists y_1, y_2 \in M_0 : y_2 \geq y_1 \geq a, \|F(y_2) - F(y_1)\| > c$$

Do  $g(y_2) = g(a) > c$  nên  $\exists y_3, y_4 \in M_0 : y_4 \geq y_3 \geq y_2, \|F(y_4) - F(y_3)\| > c, \dots$

Tiếp tục như trên ta có dãy tăng  $\{y_n\} \subset M, \|F(y_{2n}) - F(y_{2n-1})\| > c$ , ta gặp mâu thuẫn với giả thuyết ii) của định lí.

\* Do  $g(a) = 0$  nên  $F(y) = F(a), \forall y \geq a, y \in M_0$ . Vì  $a \in M_0$  nên  $a \leq F(a)$ .

Vì thế  $F(F(a)) = F(a)$  hay  $b := F(a)$  là điểm bất động.

Vậy định lí được chứng minh.

Từ định lí trên ta có hai hệ quả sau

### Hệ quả 1.

Giả sử  $F : \langle u, v \rangle \rightarrow X$  là ánh xạ tăng thỏa mãn:

$$\text{i) } u \leq F(u), F(v) \leq v$$

$$\text{ii) } F(\langle u, v \rangle) \text{ là tập compact tương đối, } K \text{ là nón chuẩn.}$$

Khi đó  $F$  có điểm bất động trong  $\langle u, v \rangle$ .

### Chứng minh

Ta áp dụng định lí cho tập  $M = \langle u, v \rangle$ .

$$\text{Từ giả thuyết i) ta có: } F(\langle u, v \rangle) \subset \langle u, v \rangle.$$

Với  $\{x_n\} \subset \langle u, v \rangle$  là dãy tăng ta có:

$$\{F(x_n)\} \text{ có dãy con hội tụ ( vì } F(\langle u, v \rangle) \text{ là tập compact tương đối )}$$

$$\Rightarrow \{F(x_n)\} \text{ hội tụ ( do } \{F(x_n)\} \text{ tăng và } K \text{ là nón chuẩn )}$$

Theo định lí trên thì  $F$  có điểm bất động trong  $\langle u, v \rangle$ .

## Hệ quả 2.

Giả sử  $F : \langle u, v \rangle \rightarrow X$  là ánh xạ tăng thỏa mãn:

i)  $u \leq F(u), F(v) \leq v$

ii)  $K$  là nón chính qui

Khi đó  $F$  có điểm bất động trong  $\langle u, v \rangle$ .

## Chứng minh

Ta áp dụng định lí cho tập  $M = \langle u, v \rangle$ .

Từ giả thuyết i) ta có:  $F(\langle u, v \rangle) \subset \langle u, v \rangle$ .

Với  $\{x_n\} \subset \langle u, v \rangle$  là dãy tăng ta có  $\{F(x_n)\}$  là dãy tăng và bị chặn trên.

Do  $K$  là nón chính qui nên  $\{F(x_n)\}$  hội tụ.

Theo định lí trên thì  $F$  có điểm bất động trong  $\langle u, v \rangle$ .

## Chương 2: MỘT SỐ LỚP ÁNH XẠ LỖI, LỖM.

Trong chương này ta xét  $X$  là không gian Banach với thứ tự sinh bởi nón  $K$

### 2.1 Ánh xạ $u_0$ –lỗm hoặc $u_0$ –lỗi.

#### Định nghĩa 2.1.1

Ánh xạ  $A: K \rightarrow K$  và  $u_0 > \theta$ . Giả sử:

i) Với mỗi  $x > \theta$ ,  $\exists \alpha(x) > 0, \beta(x) > 0$  sao cho

$$\alpha u_0 \leq Ax \leq \beta u_0 \quad (2.1.1)$$

ii) Với mỗi  $x \in K$  thoả  $\alpha_1 u_0 \leq x \leq \beta_1 u_0$  ( $\alpha_1(x) > 0, \beta_1(x) > 0$ ) và mỗi  $0 < t < 1$ , tồn tại số  $\eta = \eta(x, t) > 0$  sao cho

$$A(tx) \geq (1 + \eta)tAx \quad (2.1.2)$$

Khi đó: Ánh xạ  $A$  được gọi là  $u_0$  lỗm.

Nếu ta thay điều kiện ii) bởi ii') như sau:

ii') Với mỗi  $x \in K$  thoả  $\alpha_1 u_0 \leq x \leq \beta_1 u_0$  ( $\alpha_1(x) > 0, \beta_1(x) > 0$ ) và mỗi  $0 < t < 1$ , tồn tại số  $\eta = \eta(x, t) > 0$  sao cho  $A(tx) \leq (1 - \eta)tAx$  (2.1.3)

Khi đó ánh xạ  $A$  gọi là  $u_0$  –lỗi.

#### 2.1.1 Tính chất

##### Định lí 2.1.1

Ánh xạ  $A: K \rightarrow K$  là tăng và  $u_0$  –lỗm. Giả sử  $A$  có điểm bất động dương  $x^* > \theta$  và  $K$  là nón chuẩn. Khi đó tồn tại cặp số  $R > r > 0$  sao cho:

$$Ax \leq x, \forall x \in K, 0 < \|x\| < r \quad (2.1.4)$$

$$Ax \geq x, \forall x \in K, \|x\| > R \quad (2.1.5)$$

#### Chứng minh

Trước tiên, ta chứng minh:  $x > \theta, Ax \leq x \Rightarrow x \geq x^*$  (2.1.6)

Thật vậy, do  $A$  là  $u_0$  –lỗm nên ta có

$$x \geq Ax \geq \alpha u_0 = \frac{\alpha}{\beta^*} \beta^* u_0 \geq \frac{\alpha}{\beta^*} Ax^* = \frac{\alpha}{\beta^*} x^* \quad (\text{với } \alpha, \beta^* > 0)$$

Đặt  $t_0 = \sup \{t > 0 : x \geq tx^*\}$ , ta có:  $0 < t_0 < \infty$

Ta chứng minh  $t_0 \geq 1$ .

Nếu  $0 < t_0 < 1$  thì do  $A$  là  $u_0$  – lõm và tăng nên có số  $\eta_0 > 0$  sao cho

$$x \geq Ax \geq A(t_0 x^*) \geq (1 + \eta_0)t_0 Ax^* = (1 + \eta_0)t_0 x^*$$

Điều này mâu thuẫn với cách đặt  $t_0$ . Do đó  $t_0 \geq 1$

Vậy  $x > \theta, Ax \leq x \Rightarrow x \geq x^*$ .

Tương tự, ta có:  $x > \theta, Ax \geq x \Rightarrow x^* \geq x$  (2.1.7)

\* Đặt  $r = \inf_{z \in K} \|z + x^*\|$ . Do  $x^* > \theta$  nên ta có  $r > 0$ .

Với cách đặt như trên thì số  $r$  thoả mãn (2.1.4)

Thật vậy, nếu  $\exists x \in K, 0 < \|x\| < r$  mà  $Ax \leq x$  thì do (2.1.6) ta có:

$$x = z + x^* \quad (\text{với } z = x - x^* \geq \theta)$$

$$\Rightarrow \|x\| \geq r \quad (\text{vô lí})$$

Vậy  $Ax \leq x, \forall x \in K, 0 < \|x\| < r$ .

\* Do  $K$  là nón chuẩn nên  $[\theta, x^*]$  bị chặn. Ta đặt  $R = \sup_{z \in [\theta, x^*]} \|z\|$ .

Với cách đặt như trên thì số  $R$  thoả (2.1.5)

Thật vậy, nếu  $\exists x \in K, \|x\| > R$  mà  $Ax \geq x$  thì do (2.1.7) ta có:  $x \leq x^*$

$$\Rightarrow x \in [\theta, x^*] \Rightarrow \|x\| \leq R \quad (\text{ta gặp mâu thuẫn})$$

Vậy định lí được chứng minh.

## 2.1.2 Sự duy nhất của điểm bất động.

### Định lí 2.1.2

Nếu ánh xạ  $A: K \rightarrow K$  là tăng và  $u_0$  – lõm thì  $A$  có nhiều nhất một điểm bất động dương.

### Chứng minh

Giả sử  $x_1 > \theta, x_2 > \theta$  là hai điểm bất động dương của  $A$ .

Do ánh xạ  $A$  là  $u_0$  – lõm nên ta có:

$$x_1 = Ax_1 \geq \alpha_1 u_0 = \frac{\alpha_1}{\beta_2} \cdot \beta_2 u_0 \geq \frac{\alpha_1}{\beta_2} Ax_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_2} x_2 \quad (\text{với } \alpha_1, \beta_2 > 0)$$

Đặt  $t_0 = \sup \{t > 0 : x_1 \geq tx_2\}$ . Ta có  $0 < t_0 < \infty$

Ta cần chứng minh  $t_0 \geq 1$ .

Nếu trái lại  $0 < t_0 < 1$  thì do  $A$  là  $u_0$ -lõm và tăng nên có số  $\eta_0 > 0$  sao cho

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_1 \geq A(t_0 x_2) \geq (1 + \eta_0)t_0 Ax_2 = (1 + \eta_0)t_0 x_2 \\ \Rightarrow x_1 &\geq (1 + \eta_0)t_0 x_2 \quad (\text{mâu thuẫn với định nghĩa của } t_0) \end{aligned}$$

Do đó:  $x_1 \geq x_2$  (\*)

Tương tự như trên, ta có:

$$x_2 = Ax_2 \geq \alpha_2 u_0 = \frac{\alpha_2}{\beta_1} \cdot \beta_1 u_0 \geq \frac{\alpha_2}{\beta_1} Ax_1 = \frac{\alpha_2}{\beta_1} x_1 \quad (\text{với } \alpha_2, \beta_1 > 0)$$

Đặt  $t_1 = \sup \{t > 0 : x_2 \geq tx_1\}$ . Ta có  $0 < t_1 < \infty$

Ta cần chứng minh  $t_1 \geq 1$ .

Giả sử  $0 < t_1 < 1$

Do  $A$  là  $u_0$ -lõm nên tồn tại số  $\eta_1 > 0$  sao cho:

$$\begin{aligned} x_2 &= Ax_2 \geq A(t_1 x_1) \geq (1 + \eta_1)t_1 Ax_1 = (1 + \eta_1)t_1 x_1 \\ \Rightarrow x_2 &\geq (1 + \eta_1)t_1 x_1 \quad (\text{mâu thuẫn với định nghĩa của } t_1) \end{aligned}$$

Do đó:  $x_2 \geq x_1$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) ta có:  $x_1 = x_2$ .

Vậy định lý được chứng minh.

### 2.1.3 Xây dựng dãy lập đơn điệu hội tụ về điểm bất động.

Với  $K$  là nón trong không gian Banach thực  $X$  và  $u_0 > \theta$ . Đặt

$$X_{u_0} = \{x \in X : \exists \lambda > 0 \text{ để } -\lambda u_0 \leq x \leq \lambda u_0\}$$

$$\text{và } \|x\|_{u_0} = \inf \{ \lambda > 0 : -\lambda u_0 \leq x \leq \lambda u_0 \}, \forall x \in X_{u_0}$$

Ta có  $X_{u_0}$  là không gian định chuẩn với chuẩn  $\|\cdot\|_{u_0}$ .

Ta gọi  $\|x\|_{u_0}$  là  $u_0$ -chuẩn của phần tử  $x \in X_{u_0}$ .

### Định lí 1.5.1 [2]

Với  $K$  là nón chuẩn thì  $X_{u_0}$  là không gian Banach với  $u_0$ -chuẩn và tồn tại số  $M > 0$  sao cho  $\|x\| \leq M \|x\|_{u_0}$  với mỗi  $x \in X_{u_0}$ .

### Định lí 2.1.3

Với ánh xạ  $A: K \rightarrow K$  là  $u_0$ -lõm và tăng. Giả sử  $A$  có điểm bất động dương  $x^* > \theta$ . Với  $x_0 > \theta$  ban đầu, ta xây dựng dãy  $x_n = Ax_{n-1}$  ( $n=1,2,\dots$ ).

$$\text{Khi đó: } \|x_n - x^*\|_{u_0} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.1.8)$$

### Chứng minh

Giả sử  $x^* > \theta$  là điểm bất động dương của ánh xạ  $A$ .

**\*Bước 1:** Với mỗi  $0 < t_1 < 1$

$$\text{Đặt } v_0 = t_1 x^*, \quad v_{n+1} = Av_n \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$\text{Ta có: } t_1 x^* = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq x^* \quad (2.1.9)$$

Đặt  $\rho_n = \sup\{t > 0: tx^* \leq v_n\}$  thì ta có:

$$0 < t_1 = \rho_0 \leq \rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_n \leq \dots \leq 1 \quad (2.1.10)$$

$$\text{và } \rho_n x^* \leq v_n \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (2.1.11)$$

$$\text{Ta chứng minh } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 1 \quad (2.1.12)$$

Nếu trái lại  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \gamma < 1$  ( $\gamma \geq t_1 > 0$ ) thì tồn tại số  $\eta > 0$  sao cho:

$$A(\gamma x^*) \geq (1+\eta)\gamma Ax^* = (1+\eta)\gamma x^*$$

$$\text{Vì vậy khi } 0 < t \leq \gamma < 1 \text{ thì } A(tx^*) = A\left(\frac{t}{\gamma} \cdot \gamma x^*\right) \geq \frac{t}{\gamma} A(\gamma x^*) \geq (1+\eta)tx^*$$

$$\text{hay } A(tx^*) \geq (1+\eta)tx^*.$$

$$\text{Đặc biệt } A(\rho_n x^*) \geq (1+\eta)\rho_n x^* \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (2.1.13)$$

$$\text{Từ (2.1.11) và (2.1.13) suy ra: } v_{n+1} = Av_n \geq A(\rho_n x^*) \geq (1+\eta)\rho_n x^*$$

$$\text{Do đó theo định nghĩa } \rho_n \text{ thì: } \rho_{n+1} \geq (1+\eta)\rho_n \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$\text{Bằng qui nạp ta có: } \rho_n \geq (1+\eta)^n \cdot \rho_0 \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Mà điều này mâu thuẫn với (2.1.10).

Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 1$ .

**\* Bước 2.** Với  $t_2 > 1$

Đặt  $\omega_0 = t_2 x^*$ ,  $\omega_{n+1} = A\omega_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

Ta có:  $t_2 x^* = \omega_0 \geq \omega_1 \geq \dots \geq \omega_n \geq \dots \geq x^*$  (2.1.14)

Đặt  $\zeta_n = \inf \{t > 0: tx^* \geq \omega_n\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) thì ta có:

$$t_2 \geq \zeta_0 \geq \zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \dots \geq \zeta_n \geq \dots \geq 1 \quad (2.1.15)$$

$$\text{và} \quad \zeta_n x^* \geq \omega_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.1.16)$$

Ta chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 1$  (2.1.17)

Nếu trái lại  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \gamma_0 > 1$ , thì khi đó tồn tại số  $\eta_0 > 0$  sao cho:

$$x^* = Ax^* = A\left(\frac{1}{\gamma_0} \gamma_0 x^*\right) \geq \frac{1}{\gamma_0} (1 + \eta_0) A(\gamma_0 x^*)$$

$$\text{Suy ra: } A(\gamma_0 x^*) \leq \frac{\gamma_0}{1 + \eta_0} x^*$$

$$\text{Vì thế khi } t \geq \gamma_0 \text{ ta có } A(\gamma_0 x^*) = A\left(\frac{\gamma_0}{t} tx^*\right) \geq \frac{\gamma_0}{t} A(tx^*)$$

$$\text{hay } A(tx^*) \leq \frac{t}{\gamma_0} A(\gamma_0 x^*) \leq \frac{t}{\gamma_0} \cdot \frac{\gamma_0}{1 + \eta_0} x^* = \frac{t}{1 + \eta_0} x^*.$$

$$\text{Đặt biệt } A(\zeta_n x^*) \leq \frac{\zeta_n}{(1 + \eta_0)} x^* \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.1.18)$$

$$\text{Từ (2.1.16) và (2.1.18) suy ra: } \omega_{n+1} = A\omega_n \leq A(\zeta_n x^*) \leq \frac{\zeta_n}{(1 + \eta_0)} x^*$$

$$\text{Vì thế ta có: } \zeta_{n+1} \leq \frac{\zeta_n}{(1 + \eta_0)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{Qui nạp ta được: } \zeta_n \leq \frac{\zeta_0}{(1 + \eta_0)^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Điều này mâu thuẫn với (2.1.15).

Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 1$ .

**\* Bước 3.** Trở lại chứng minh định lí

Với  $x_0 > \theta$  cho trước, ta xây dựng dãy :

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n=1,2,3...)$$

Do (2.1.1) ta có:  $\alpha_0 u_0 \leq x^* = Ax^* \leq \beta_0 u_0$ ,  $\alpha_1 u_0 \leq x_1 = Ax_0 \leq \beta_1 u_0$  (2.1.19)  
( với  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$  là các số dương)

Suy ra:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_0} x^* \leq \frac{\alpha_1}{\beta_0} \beta_0 u_0 = \alpha_1 u_0 \leq x_1 \leq \beta_1 u_0 = \frac{\beta_1}{\alpha_0} \alpha_0 u_0 \leq \frac{\beta_1}{\alpha_0} x^*$$

$$\text{hay } \frac{\alpha_1}{\beta_0} x^* \leq x_1 \leq \frac{\beta_1}{\alpha_0} x^*.$$

Ta chọn hai số  $t_1, t_2$  sao cho:  $0 < t_1 < \min \left\{ 1, \frac{\alpha_1}{\beta_0} \right\}$ ,  $t_2 > \max \left\{ 1, \frac{\beta_1}{\alpha_0} \right\}$

Khi đó ta có:  $0 < t_1 < 1$ ,  $t_2 > 1$ ,  $v_0 = t_1 x^* \leq x_1 \leq t_2 x^* = \omega_0$

Từ (2.1.11) và (2.1.16) ta có:

$$\rho_n x^* \leq v_n \leq x_{n+1} \leq \omega_n \leq \zeta_n x^* \quad (n=0,1,2...)$$

Do đó:  $-(1-\rho_n)\beta_0 u_0 \leq x_{n+1} - x^* \leq (\zeta_n - 1)\beta_0 u_0$  (n=0,1,2...) (2.1.20)

Từ (2.1.20), (2.1.12) và (2.1.17) suy ra:

$$\|x_n - x^*\|_{u_0} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Vậy định lí được chứng minh.

**Hệ quả:**

Nếu  $K$  là nón chuẩn và giả thuyết của **định lí 2.1.3** thoả mãn thì

$$\|x_n - x^*\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Thật vậy, áp dụng định lí 1.5.1[2] ta suy ra ngay kết quả.

## 2.1.4 Tính chất của vector riêng, giá trị riêng.

### Định lí 2.1.4

Giả sử  $A: K \rightarrow K$  là ánh xạ  $u_0$  – lõm và tăng. Khi đó:

1) Nếu  $x_1 = \lambda_1 Ax_1, x_2 = \lambda_2 Ax_2$  ( $x_i \in K \setminus \{\theta\}$ ) và  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  thì  $x_1 \leq x_2$ .

2) Giả sử  $A$  có ít nhất hai giá trị riêng thì tập các giá trị riêng của  $A$  là một khoảng trong các trường hợp sau:

a)  $K$  là nón chính qui

b)  $K$  là nón chuẩn,  $A$  compact.

### Chứng minh 1)

Từ giả thuyết ta có  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .

Đặt  $t_0 = \sup \{t > 0 : x_2 \geq tx_1\}$  thì ta có  $t_0 > 0$ .

Ta chứng minh  $t_0 \geq 1$ . Giả sử trái lại  $t_0 < 1$  ta có

$$Ax_1 \in Ku_0 \Rightarrow \exists \alpha, \beta > 0 : \alpha u_0 \leq Ax_1 \leq \beta u_0$$

$$(Ku_0 := \{y \in K : \exists \alpha, \beta > 0, \alpha u_0 \leq y \leq \beta u_0\})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \alpha u_0 \leq \lambda_1 Ax_1 \leq \lambda_1 \beta u_0 \quad (\text{do } \lambda_1 > 0)$$

$$\Rightarrow x_1 = \lambda_1 Ax_1 \in Ku_0.$$

Lí luận tương tự ta cũng có  $x_2 = \lambda_2 Ax_2 \in Ku_0$

Do vậy với  $t \in (0, 1)$  do  $A$  là  $u_0$  – lõm nên tồn tại  $\eta_1 > 0, \eta_2 > 0$  sao cho

$$A(tx_1) \geq (1 + \eta_1)tAx_1, \quad A(tx_2) \geq (1 + \eta_2)tAx_2$$

Do  $A$  tăng nên từ  $x_2 \geq t_0 x_1$  ta có  $Ax_2 \geq A(t_0 x_1)$

$$\Rightarrow Ax_2 \geq (1 + \eta_1)t_0 Ax_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_2} x_2 \geq (1 + \eta_1)t_0 \cdot \frac{1}{\lambda_1} x_1$$

$$\Rightarrow x_2 \geq (1 + \eta_1)t_0 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_1$$

Ta gặp mâu thuẫn với định nghĩa của  $t_0$  vì  $(1 + \eta_1) \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t_0 > t_0$

Vậy phải có  $t_1 \geq 1$  hay  $x_1 \leq x_2$ .

## Chứng minh 2)

\* Giả sử  $A$  có ít nhất hai giá trị riêng  $\alpha_1, \alpha_2$  ( $\alpha_2 < \alpha_1$ ) tương ứng với hai vector riêng  $x_1, x_2$ , nghĩa là:

$$Ax_1 = \alpha_1 x_1 \Leftrightarrow \lambda_1 Ax_1 = x_1 \quad (\text{đặt } \lambda_1 = \frac{1}{\alpha_1})$$

$$Ax_2 = \alpha_2 x_2 \Leftrightarrow \lambda_2 Ax_2 = x_2 \quad (\text{đặt } \lambda_2 = \frac{1}{\alpha_2})$$

Ta có:  $\alpha_2 < \alpha_1 \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow x_1 \leq x_1$  (do 1)

\* Ta chứng minh:  $\forall \alpha \in [\alpha_2; \alpha_1]$  đều là giá trị riêng của  $A$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in [\lambda_1; \lambda_2], \lambda A \text{ có điểm bất động trong đoạn } \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Vì  $A$  tăng và  $\lambda > 0$  nên  $\lambda A: \langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow K$  là ánh xạ tăng.

Ta có:  $x_1 \leq \lambda Ax_1$  (\*)

Thật vậy, với  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$  ta có  $\lambda_1 \leq \lambda$

Suy ra  $\lambda_1 Ax_1 \leq \lambda Ax_1$  hay  $x_1 \leq \lambda Ax_1$  (do  $\lambda_1 Ax_1 = x_1$ )

Ta có:  $\lambda Ax_2 \leq x_2$  (\*\*)

90

Thật vậy, với  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$  ta có  $\lambda \leq \lambda_2$

Suy ra  $\lambda Ax_2 \leq \lambda_2 Ax_2$  hay  $\lambda Ax_2 \leq x_2$  (do  $\lambda_2 Ax_2 = x_2$ )

a) Do  $K$  là chính qui nên từ (\*), (\*\*) ta thấy  $\lambda A$  thỏa các giả thuyết của hệ quả 2 của định lý điểm bất động của ánh xạ tăng nên  $\lambda A$  có điểm bất động trong đoạn  $\langle x_1, x_2 \rangle$ .

b) Do  $K$  là nón chuẩn,  $A$  compact suy ra  $\lambda A(\langle x_1, x_2 \rangle)$  là tập compact tương đối. Kết hợp với (\*), (\*\*) ta thấy  $\lambda A$  thỏa các giả thuyết của hệ quả 1 của định lý điểm bất động của ánh xạ tăng nên  $\lambda A$  có điểm bất động trong đoạn  $\langle x_1, x_2 \rangle$ .

Vậy định lý được chứng minh.

## 2.2 Một số ánh xạ lồi, lõm.

Nón  $K$  trong không gian Banach  $X$  gọi là thể nón nếu  $K$  có chứa điểm trong.

### 2.2.1 Ánh xạ dưới tuyến tính

#### Định nghĩa

Cho thể nón  $K$  và ánh xạ  $A: K \rightarrow K$ . Khi đó:

Ánh xạ  $A$  gọi là dưới tuyến tính mạnh nếu

$$A(tx) \gg tAx, \forall x > \theta, 0 < t < 1 \quad (2.2.1)$$

Ánh xạ  $A$  gọi là trên tuyến tính mạnh nếu

$$A(tx) \ll tAx, \forall x > \theta, 0 < t < 1 \quad (2.2.2)$$

#### Định lý 2.2.1

Cho thể nón  $K$ ,  $u_0 \in K^0$  và ánh xạ  $A: K \rightarrow K$ . Khi đó, ta có:

i) Nếu  $A$  là dưới tuyến tính mạnh thì  $A$  là  $u_0$ -lõm.

ii) Nếu  $A$  là trên tuyến tính mạnh thì  $A$  là  $u_0$ -lồi.

#### Chứng minh i)

$$+ \text{ Với } x > \theta, \text{ ta có } Ax = A\left(\frac{1}{2} \cdot 2x\right) \gg \frac{1}{2} A(2x) \geq \theta \text{ hay } Ax \in K^0.$$

Do đó tồn tại số dương  $\alpha$  đủ nhỏ sao cho  $Ax - \alpha u_0 \in K$  (nghĩa là  $Ax \geq \alpha u_0$ )

Tương tự, do  $u_0 \in K^0$  nên ta có thể chọn số  $\beta$  dương đủ lớn để  $Ax \leq \beta u_0$ .

Vậy với  $x > \theta$ ,  $\exists \alpha = \alpha(x) > 0, \beta = \beta(x) > 0$  sao cho  $\alpha u_0 \leq Ax \leq \beta u_0$

+ Với  $x > \theta, 0 < t < 1$ . Vì  $A(tx) \gg tAx$  nên ta có thể chọn số dương  $\eta$  đủ nhỏ sao cho:

$$A(tx) - tAx - \eta tAx \in K$$

$$\text{hay } A(tx) \geq (1 + \eta)tAx$$

Vậy ánh xạ  $A$  là  $u_0$ -lõm.

#### chứng minh ii)

$$\text{Với } x > \theta, \text{ ta có } Ax = A\left(\frac{1}{2} \cdot 2x\right) \gg 2A(2x) \geq \theta \text{ hay } Ax \in K^0.$$

Do đó tồn tại số dương  $\alpha_0$  đủ nhỏ sao cho:

$$Ax - \alpha_0 u_0 \in K \text{ (nghĩa là } Ax \geq \alpha_0 u_0)$$

Do  $u_0 \in \overset{0}{K}$  nên ta có thể chọn số  $\beta_0$  dương đủ lớn sao cho  $Ax \leq \beta_0 u_0$ .

Vậy với  $x > \theta$ ,  $\exists \alpha_0 = \alpha_0(x) > 0, \beta_0 = \beta_0(x) > 0$  sao cho  $\alpha_0 u_0 \leq Ax \leq \beta_0 u_0$

Với  $x > \theta$ ,  $0 < t < 1$ . Vì  $A(tx) \ll tAx$  (hay  $tAx - A(tx) \in \overset{0}{K}$ ) nên ta có thể chọn số dương  $\eta_0$  đủ nhỏ sao cho:

$$tAx - A(tx) - \eta_0 tAx \in K \text{ (hay } A(tx) \leq (1 + \eta_0)tAx)$$

Vậy ánh xạ  $A$  là  $u_0$ -lồi.

### 2.2.2 Ánh xạ $u_0$ -đơn điệu.

**Định nghĩa:**

Với  $u_0 > \theta$ , ánh xạ  $A: K \rightarrow K$  được gọi là  $u_0$ -tăng nếu

$$\theta \leq x < y, \exists \alpha(x; y) > 0 \text{ sao cho } Ay - Ax \geq \alpha u_0$$

Với  $u_0 > \theta$ , ánh xạ  $A: K \rightarrow K$  được gọi là  $u_0$ -giảm nếu

$$\theta \leq x < y, \exists \alpha(x; y) > 0 \text{ sao cho } Ay - Ax \leq \alpha u_0$$

### Định lí 2.2.2

Nếu ánh xạ  $A: K \rightarrow K$  là  $u_0$ -lồi và  $u_0$ -tăng thì  $A$  không thể có hai điểm bất động dương so sánh được với nhau.

### Chứng minh

Giả sử  $x_1 > \theta, x_2 > \theta$  là hai điểm bất động dương của  $A$  mà chúng so sánh được với nhau, ta có thể coi  $x_1 < x_2$ .

Do  $A$  là  $u_0$ -tăng nên tồn tại số  $\alpha > 0$  sao cho:  $x_2 - x_1 = Ax_2 - Ax_1 \geq \alpha u_0$

Do  $A$  là  $u_0$ -lồi, ta có

$$\alpha_2 u_0 \leq x_2 = Ax_2 \leq \beta_2 u_0 \quad (\alpha_2 > 0, \beta_2 > 0)$$

$$\text{Vì thế } x_1 \leq x_2 - \alpha u_0 = x_2 - \frac{\alpha}{\beta_2} \beta_2 u_0 \leq x_2 - \frac{\alpha}{\beta_2} x_2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta_2}\right) x_2$$

$$\text{hay } x_1 \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\beta_2}\right) x_2. \quad (2.2.3)$$

Đặt  $t_0 = \inf \{t > 0: x_1 \leq tx_2\}$ . Từ (2.2.3), ta có  $0 < t_0 < 1 - \frac{\alpha}{\beta_2} < 1$ ,  $x_1 \leq t_0 x_2$

Mà  $A$  là  $u_0$ -lồi nên tồn tại số dương  $\eta$  sao cho

$$x_1 = Ax_1 \leq A(t_0 x_2) \leq (1 - \eta)t_0 Ax_2 = (1 - \eta)t_0 x_2$$

Ta gặp mâu thuẫn với định nghĩa của  $t_0$ . Vậy định lí được chứng minh.

### 2.2.3 Ánh xạ $\alpha$ -lồi, $\alpha$ -lõm.

#### Định nghĩa 2.2.3

Cho thể nón  $K$ , ánh xạ  $A: \overset{0}{K} \rightarrow \overset{0}{K}$ . Với  $0 \leq \alpha < 1$ , ta định nghĩa:

Ánh xạ  $A$  gọi là  $\alpha$ -lõm nếu

$$A(tx) \geq t^\alpha Ax, \quad \forall x \in \overset{0}{K}, 0 < t < 1 \quad (2.2.4)$$

Ánh xạ  $A$  gọi là  $\alpha$ -lồi nếu

$$A(tx) \leq \frac{1}{t^\alpha} Ax, \quad \forall x \in \overset{0}{K}, 0 < t < 1 \quad (2.2.5)$$

Theo định nghĩa trên ta có :

$$A \text{ là } \alpha\text{-lõm} \Leftrightarrow A(sx) \leq s^\alpha Ax, \quad \forall x \in \overset{0}{K}, s > 1 \quad (2.2.6)$$

$$A \text{ là } \alpha\text{-lồi} \Leftrightarrow A(sx) \geq \frac{1}{s^\alpha} Ax, \quad \forall x \in \overset{0}{K}, s > 1 \quad (2.2.7)$$

#### Định lí 2.2.3

Với  $K$  là nón chuẩn, ánh xạ  $A: \overset{0}{K} \rightarrow \overset{0}{K}$  là  $\alpha$ -lõm và tăng ( hoặc  $\alpha$ -lồi và giảm ) Khi đó:

Ánh xạ  $A$  có điểm bất động duy nhất  $x^* \in \overset{0}{K}$ . Hơn nữa, với  $x_0 \in \overset{0}{K}$  ban đầu, ta xây dựng dãy  $x_n = Ax_{n-1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) thì

$$\|x_n - x^*\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.2.8)$$

$$\text{và tốc độ hội tụ là } \|x_n - x^*\| = 0(1 - \gamma^{\alpha^n}) \quad (2.2.9)$$

( với  $0 < \gamma < 1$  và độc lập với phần tử  $x_0$  ban đầu )

### Chứng minh

**TH 1** Giả sử ánh xạ  $A$  là  $\alpha$ -lõm và tăng.

Với  $x_0 \in K$  cho trước, chọn  $t_0$  và  $s_0$  sao cho:

$$0 < t_0 < 1 < s_0, \quad t_0^{1-\alpha} x_0 \leq Ax_0 \leq s_0^{1-\alpha} x_0$$

Đặt  $u_0 = t_0 x_0$ ,  $v_0 = s_0 x_0$  thì  $u_0 \ll v_0$  và

$$Au_0 \geq t_0^\alpha Ax_0 \geq t_0 x_0 = u_0, \quad Av_0 \leq s_0^\alpha Ax_0 \leq s_0 x_0 = v_0 \quad (2.2.10)$$

Đặt  $u_n = Au_{n-1}$ ,  $v_n = Av_{n-1}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Từ (2.2.10) ta có:

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0 \quad (2.2.11)$$

Ta thấy rằng  $u_0 = \gamma v_0$ , với  $\gamma = \frac{t_0}{s_0}$ ,  $0 < \gamma < 1$

$$\text{Bằng qui nạp ta có: } u_n \geq \gamma^{\alpha^n} v_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.2.12)$$

Từ (2.2.11) và (2.2.12) suy ra

$$\theta \leq u_{n+p} - u_n \leq v_n - u_n \leq v_n - \gamma^{\alpha^n} v_n = (1 - \gamma^{\alpha^n}) v_n \leq (1 - \gamma^{\alpha^n}) v_0 \quad (2.2.13)$$

Từ (2.2.13) ta có  $\theta \leq u_{n+p} - u_n \leq (1 - \gamma^{\alpha^n}) v_0$

Vì  $K$  là nón chuẩn nên tồn tại số  $N > 0$  sao cho

$$\|u_{n+p} - u_n\| \leq N \cdot (1 - \gamma^{\alpha^n}) \cdot \|v_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Suy ra  $\{u_n\}_n$  là dãy Cauchy trong không gian Banach  $X$  nên hội tụ.

Do đó tồn tại  $u^* \in X$  sao cho  $u_n$  hội tụ về  $u^*$

Tương tự ta cũng có  $v_n$  hội tụ về  $v^* \in X$ .

$$\text{Do (2.2.11) ta có } u_n \leq u^* \leq v^* \leq v_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.2.14)$$

$$\text{Suy ra } u_{n+1} = Au_n \leq Au^* \leq Av^* \leq Av_n = v_{n+1}$$

$$\text{Cho } n \rightarrow \infty, \text{ ta được } u^* \leq Au^* \leq Av^* \leq v^* \quad (2.2.15)$$

Từ (2.2.13) và (2.2.14) suy ra:  $\theta \leq v^* - u^* \leq v_n - u_n \leq (1 - \gamma^{\alpha^n})v_0$

Dẫn đến  $u^* = v^*$  và do đó, từ (2.2.15) suy ra

$$u^* = Au^* = Av^* = v^* \quad (2.2.16)$$

Đặt  $x^* = u^* = v^*$  ta thấy  $x^*$  là điểm bất động của  $A$  trong  $\overset{0}{K}$ .

Mà  $u_0 \leq x_0 \leq v_0$  nên  $u_n \leq x_n \leq v_n$  ( $n=1,2,3,\dots$ )

Do (2.2.13) và (2.2.14) ta có

$$\|x_n - x^*\| \leq \|x_n - u_n\| + \|u_n - x^*\| \leq 2N\|v_n - u_n\| \leq 2N^2(1 - \gamma^{\alpha^n})\|v_0\|$$

(trong đó  $N$  là hằng số chuẩn của  $K$ )

Vậy ta có  $\|x_n - x^*\| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) và  $\|x_n - x^*\| = 0 \cdot (1 - \gamma^{\alpha^n})$ .

\* Tiếp theo ta chứng minh ánh xạ  $A$  có điểm bất động duy nhất trong  $\overset{0}{K}$ .

Ta dùng phản chứng. Giả sử  $\bar{x} \in \overset{0}{K}$  là điểm bất động khác của  $A$ .

Đặt  $t_1 = \sup\{t > 0 : \bar{x} \geq tx^*\}$ , ta có  $0 < t_1 < \infty$ .

Ta chứng minh  $t_1 \geq 1$ .

Thật vậy, nếu  $0 < t_1 < 1$  thì  $\bar{x} = A\bar{x} \geq A(t_1 x^*) \geq t_1^\alpha A x^* = t_1^\alpha x^*$

(mâu thuẫn định nghĩa  $t_1$  vì  $t_1^\alpha > t_1$ )

Do đó  $t_1 \geq 1$  và  $\bar{x} \geq x^*$ .

Tương tự ta cũng có  $\bar{x} \leq x^*$

Vậy ánh xạ  $A$  có điểm bất động duy nhất trong  $\overset{0}{K}$ .

**TH2.** Giả sử  $A$  là  $\alpha$ -lồi và giảm.

Khi đó ta có  $A^2 : \overset{0}{K} \rightarrow \overset{0}{K}$  là  $\alpha^2$ -lõm và tăng.

Thật vậy,

Do ánh xạ  $A$  giảm nên  $A^2$  là tăng

Với  $x \in \overset{0}{K}$ ,  $t \in (0,1)$  do ánh xạ  $A$  là  $\alpha$ -lồi nên ta có

$$A(tx) \leq \frac{1}{t^\alpha} Ax$$

$$\text{Suy ra } t^\alpha A(tx) \leq Ax$$

$$\text{Do ánh xạ } A \text{ giảm nên ta có } \frac{1}{(t^\alpha)^\alpha} A(A(tx)) \geq A(t^\alpha A(tx)) \geq A^2 x$$

$$\text{Suy ra } A^2(tx) \geq t^{\alpha^2} A^2 x$$

Do đó: Ánh xạ  $A^2$  là  $\alpha^2$ -lõm và tăng.

Theo chứng minh trên thì  $A^2$  có điểm bất động duy nhất  $x^* \in \overset{0}{K}$ .

Với phần tử  $z_0 \in \overset{0}{K}$  ban đầu, ta có  $z_n = A^{2n} z_0 \rightarrow x^*$

$$\text{và } \|z_n - x^*\| = 0 \left(1 - \gamma^{\alpha^{2n}}\right) \quad (\text{với } 0 < \gamma < 1) \quad (2.2.17)$$

Do  $A^2(Ax^*) = A(A^2 x^*) = Ax^*$  và tính duy nhất của  $x^*$  nên  $Ax^* = x^*$ .

Chọn  $z_0 = x_0$  và  $z_0 = Ax_0$  trong (2.2.17), ta có

$$x_{2n} = A^{2n} x_0 \rightarrow x^*, \quad x_{2n+1} = A^{2n+1} x_0 \rightarrow x^*$$

$$\text{và } \|x_{2n} - x^*\| = 0 \left(1 - \gamma_1^{\alpha^{2n}}\right), \quad \|x_{2n+1} - x^*\| = 0 \left(1 - \gamma_2^{\alpha^{2n}}\right) = 0 \left(1 - \left(\gamma_2^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha^{2n+1}}\right)$$

(với  $0 < \gamma_1 < 1, \quad 0 < \gamma_2 < 1$ )

Chọn  $\gamma = \min \left\{ \gamma_1, \left(\gamma_2^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right\}$  thì (2.2.9) được thỏa mãn.

Vậy định lí được chứng minh.

#### **Định lí 2.2.4**

Với  $\overset{0}{K}$  là nón chuẩn, ánh xạ  $A: \overset{0}{K} \rightarrow \overset{0}{K}$  là  $\alpha$ -lõm và tăng, phương trình

$Ax = \lambda x$  có nghiệm duy nhất trong  $\overset{0}{K}$  là  $x_\lambda$ . Khi đó:

$x_\lambda$  giảm mạnh (nghĩa là  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow x_{\lambda_1} \gg x_{\lambda_2}$ )

$x_\lambda$  liên tục (nghĩa là  $\lambda \rightarrow \lambda_0, (\lambda_0 > 0) \Rightarrow \|x_\lambda - x_{\lambda_0}\| \rightarrow 0$ )

$$\text{và } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|x_\lambda\| = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \|x_\lambda\| = +\infty \quad (2.2.18)$$

### Chứng minh

Theo định lí 2.2.3 thì phương trình  $Ax = \lambda x$  ( $\lambda > 0$ ) có nghiệm duy nhất  $x_\lambda \in \overset{0}{K}$ .

Với  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , đặt  $t_0 = \sup \{t > 0 : x_{\lambda_1} \geq tx_{\lambda_2}\}$  thì  $0 < t_0 < +\infty$ .

Ta chứng minh  $t_0 \geq 1$ .

Thật vậy, nếu  $0 < t_0 < 1$  thì ta có:

$$x_{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} Ax_{\lambda_1} \geq \frac{1}{\lambda_1} A(t_0 x_{\lambda_2}) \geq \frac{t_0^\alpha}{\lambda_1} Ax_{\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t_0^\alpha x_{\lambda_2}$$

(ta gặp mâu thuẫn với định nghĩa của  $t_0$  vì  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} t_0^\alpha > t_0$ )

Suy ra  $t_0 \geq 1$  và  $x_{\lambda_1} \geq x_{\lambda_2}$ .

$$\text{Do đó } x_{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} Ax_{\lambda_1} \geq \frac{1}{\lambda_1} Ax_{\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_{\lambda_2} \gg x_{\lambda_2}, \quad \forall 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \quad (2.2.19)$$

Vậy  $x_\lambda$  giảm mạnh.

+ Chọn  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda$  trong (2.2.19), ta có:  $x_1 \geq \lambda x_\lambda, \forall \lambda > 1$ .

$$\text{Suy ra: } \|x_\lambda\| \leq \frac{N}{\lambda} \|x_1\|, \quad \forall \lambda > 1 \quad (\text{với } N \text{ là hằng số chuẩn của } K) \quad (2.2.20)$$

Do đó:  $\|x_\lambda\| \rightarrow 0$  khi  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

+ Tương tự, chọn  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 1$  trong (2.2.19), ta có:  $x_\lambda \geq \frac{1}{\lambda} x_1, (\forall 0 < \lambda < 1)$

$$\text{Suy ra: } \|x_1\| \leq \lambda N \|x_\lambda\| \quad (\text{hay } \|x_\lambda\| \geq \frac{1}{\lambda N} \|x_1\|, \quad \forall 0 < \lambda < 1)$$

Do đó:  $\|x_\lambda\| \rightarrow +\infty$  khi  $\lambda \rightarrow 0^+$ .

Cuối cùng, ta chứng minh tính liên tục của  $x_\lambda$ .

Với  $\lambda_0 > 0$  cho trước, từ (2.2.19) ta có

$$x_\lambda \ll x_{\lambda_0}, \quad \forall \lambda > \lambda_0 \quad (2.2.21)$$

Đặt  $\gamma_\lambda = \sup \{t > 0 : x_\lambda \geq tx_{\lambda_0}\}$  ( $\lambda > \lambda_0$ ), ta có:  $0 < \gamma_\lambda < 1$ .

Khi đó  $\lambda x_\lambda = Ax_\lambda \geq A(\gamma_\lambda x_{\lambda_0}) \geq \gamma_\lambda^\alpha A(x_{\lambda_0}) \geq \gamma_\lambda^\alpha \lambda_0 x_{\lambda_0}$ .

Theo định nghĩa của  $\gamma_\lambda$  ta có  $\frac{\lambda_0}{\lambda} \gamma_\lambda^\alpha \leq \gamma_\lambda$  (hay  $\gamma_\lambda \geq \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ )

$$\text{vì thế } x_\lambda \geq \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot x_{\lambda_0}, \quad \forall \lambda > \lambda_0 \quad (2.2.22)$$

Từ (2.2.21) và (2.2.22) suy ra:

$$\|x_{\lambda_0} - x_\lambda\| \leq N \left[ 1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] \cdot \|x_{\lambda_0}\| \rightarrow 0 \text{ khi } \lambda \rightarrow \lambda_0^+.$$

Tương tự ta cũng có:  $\|x_\lambda - x_{\lambda_0}\| \rightarrow 0$  khi  $\lambda \rightarrow \lambda_0^-$ .

Do đó  $x_\lambda$  liên tục tại  $\lambda = \lambda_0$ .

Vậy định lí được chứng minh.

Với  $x_0 \in \overset{0}{K}$  thỏa  $0 < \|x_0\| < 1$ , ta định nghĩa  $K(x_0) = \{x \in K : x \geq \|x\|x_0\}$ .

Ta có định lí sau:

### Định lí 2.2.5

Với  $K$  là nón chuẩn, ta có các kết quả sau:

a) Nếu  $A: \overset{0}{K} \rightarrow \overset{0}{K}$  là  $\alpha$ -lõm và tăng thì  $\exists R > r > 0$  sao cho:

$$Ax \leq x, \quad \forall x \in \overset{0}{K}, \quad 0 < \|x\| < r \quad (2.2.23)$$

$$Ax \geq x, \quad \forall x \in \overset{0}{K}, \quad \|x\| > R \quad (2.2.24)$$

b) Nếu  $A: \overset{0}{K} \rightarrow \overset{0}{K}$  là  $\alpha$ -lồi và giảm, khi đó

Với  $x_0 \in \overset{0}{K}$  mà  $0 < \|x_0\| < 1$  thì  $\exists R > r > 0$  sao cho

$$Ax \gg x, \quad \forall x \in \overset{0}{K}, \quad 0 < \|x\| < r \quad (2.2.25)$$

$$Ax \ll x, \forall x \in K(x_0), \|x\| > R \quad (2.2.26)$$

(  $R$  phụ thuộc vào  $x_0$ ,  $r$  độc lập với  $x_0$  )

### Chứng minh a)

Theo định lí 2.2.3 thì  $A$  có điểm bất động duy nhất  $x^* \in \overset{0}{K}$ .

Trước tiên ta chứng minh:

$$x \in \overset{0}{K}, Ax \leq x \Rightarrow x \geq x^* \quad (*)$$

Với  $x \in \overset{0}{K}$  thỏa  $x \geq Ax$ . Ta xây dựng dãy  $\{x_n\}$  như sau:

$$\text{Đặt } x_1 = Ax; \quad x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

Do  $A$  là ánh xạ tăng nên ta có:

$$x \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$$

Theo định lí 2.2.3 ta có:

$$\|x_n - x^*\| \rightarrow 0$$

Do đó:  $x \geq x^*$

Vậy ta có:  $x \in \overset{0}{K}, Ax \leq x \Rightarrow x \geq x^*$ .

Tương tự như trên ta cũng có:

$$x \in \overset{0}{K}, Ax \geq x \Rightarrow x \leq x^* \quad (**)$$

Trở lại chứng minh định lí.

Đặt  $r = \inf_{z \in K} \|z + x^*\|$ . Ta có  $r > 0$ .

Với cách đặt trên thì số  $r$  thỏa:  $Ax \leq x, \forall x \in \overset{0}{K}, 0 < \|x\| < r$

Thật vậy, nếu tồn tại  $x \in \overset{0}{K}$  thỏa  $0 < \|x\| < r$  mà  $Ax \leq x$  thì do (\*) ta có:

$$x = z + x^* \text{ với } z = x - x^*$$

$$\Rightarrow \|x\| \geq r \quad (\text{mâu thuẫn với } 0 < \|x\| < r)$$

Vậy  $Ax \leq x, \forall x \in \overset{0}{K}, 0 < \|x\| < r$ .

Do  $K$  là nón chuẩn nên  $[\theta; x^*]$  bị chặn.

Đặt  $R = \sup_{z \in [\theta; x^*]} \|z\|$  thì số  $R$  thỏa  $Ax \geq x, \forall x \in \overset{0}{K}, \|x\| > R$ .

Thật vậy

Nếu tồn tại  $x \in \overset{0}{K}$  thỏa  $\|x\| > R$  mà  $Ax \geq x$  thì do  $(**)$  ta có:

$$x \leq x^*.$$

Suy ra  $x \in [\theta; x^*]$

Suy ra  $\|x\| \leq R$  (mâu thuẫn với cách chọn  $x$ )

Vậy a) được chứng minh..

**Chứng minh b)**

Theo định lí 2.2.3 thì  $A$  có điểm bất động duy nhất  $x^* \in \overset{0}{K}$ .

+ Ta có thể chọn  $r > 0$  sao cho  $x^* - x \in \overset{0}{K}, \forall x \in \overset{0}{K}, 0 < \|x\| < r$  (2.2.27)

Khi đó số  $r$  thỏa mãn (2.2.25).

Thật vậy

Với  $x \in \overset{0}{K}$  mà  $0 < \|x\| < r$  suy ra  $x \ll x^*$

và do đó  $Ax \geq Ax^* = x^* \gg x$ .

+ Với  $x_0 \in \overset{0}{K}$  mà  $0 < \|x_0\| < 1$  cho trước. Ta chọn  $R > r$  sao cho  $x_0 - \frac{x^*}{R} \in \overset{0}{K}$ .

Khi đó số  $R$  thỏa (2.2.26).

Thật vậy,  $x \in K(x_0)$  mà  $\|x\| > R$ , ta có

$$x - x^* = \|x\| \cdot \left( \frac{x}{\|x\|} - \frac{x^*}{\|x\|} \right) \geq \|x\| \cdot \left( x_0 - \frac{x^*}{R} \right) \gg \theta$$

Do đó:  $Ax \leq Ax^* = x^* \ll x$

Vậy định lí được chứng minh.

## 2.3 Ánh xạ $u_o$ – lõm tổ hợp

### 2.3.1 Ánh xạ đơn điệu tổ hợp

Cho  $X$  là không gian Banach thực với thứ tự sinh bởi nón chính qui  $K$  và các họ ánh xạ  $P_i : X \rightarrow X, i \in I, Q_i = E - P_i$  (với  $E : X \rightarrow X$  là ánh xạ đồng nhất) thỏa mãn điều kiện  $x, y \in \langle u; v \rangle \Rightarrow P_i(x) + Q_i(y) \in \langle u; v \rangle \quad \forall i \in I$ .

Cho họ ánh xạ  $R_i : X \rightarrow G_i, i \in I$  thỏa điều kiện

$$x \neq y \Rightarrow \exists i \in I : R_i(x) \neq R_i(y)$$

và ánh xạ  $J : D \subset \prod_{i \in I} G_i \rightarrow X$  thỏa mãn điều kiện

$$x_i \in \langle u, v \rangle, \{R_i(x_i) : i \in I\} \in D \Rightarrow J[\{R_i(x_i)\}] \in \langle u, v \rangle, J[\{R_i P_i(x_i)\}] = x.$$

#### Định nghĩa 2.3.1.1

Ánh xạ  $T$  gọi là đơn điệu tổ hợp nếu  $\forall u, v \in X$  thỏa

$$\{R_i T(P_i u + Q_i v)\} \in D \quad (1)$$

và  $x' \geq x, y' \leq y$  thì

$$J[\{R_i T(P_i x' + Q_i y')\}] \geq J[\{R_i T(P_i x + Q_i y)\}] \quad (2)$$

Nhận xét

Giả sử tập chỉ số  $I$  chỉ một phần tử và  $\{P_i : i \in I\} = \{P\}, R_i = E, GX = X, J = E$  ( $E$  là ánh xạ đồng nhất) thì (2) có dạng

$$T(Px' + Qy') \geq T(Px + Qy).$$

Nếu  $P = E$  ta có  $T$  là ánh xạ tăng, nếu  $P(x) = \theta$  hay  $Q = E$  thì  $T$  là ánh xạ giảm.

#### Định lí 2.3.1.1

Giả sử  $T : \langle u^o, v^o \rangle \rightarrow \langle u^o, v^o \rangle$  là ánh xạ đơn điệu tổ hợp. Ta xây dựng các dãy truy hồi  $\{u^n\}, \{v^n\}$  như sau

$$u^{n+1} = J\left(\left\{R_i T\left(P_i u^n + Q_i v^n\right)\right\}\right), \quad u^{n+1} = J\left(\left\{R_i T\left(P_i v^n + Q_i u^n\right)\right\}\right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

Khi đó tồn tại các giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = u^*, \lim_{n \rightarrow \infty} v^n = v^*$  và

$$u^o \leq u^1 \leq \dots \leq u^n \leq \dots \leq u^* \leq v^* \leq \dots \leq v^n \leq \dots \leq v^1 \leq v^o$$

$$T(\langle u^n, v^n \rangle) \subset \langle u^n, v^n \rangle \quad (4)$$

$$\text{Ngoài ra, nếu } x^o \in \langle u^o, v^o \rangle, x^{n+1} = T(x^n) \quad (5)$$

$$\text{thì ta có } u^n \leq x^n \leq v^n, n \geq 0. \quad (6)$$

### Chứng minh

Đầu tiên ta kiểm tra  $u^o \leq u^1 \leq v^1 \leq v^o$ . Ta có

$$P_i u^o + Q_i v^o \in \langle u^o, v^o \rangle, T(\langle u^o, v^o \rangle) \subset \langle u^o, v^o \rangle$$

$$\Rightarrow T(P_i u^o + Q_i v^o) \in \langle u^o, v^o \rangle$$

$$\Rightarrow u^1 = J\left(\left\{R_i T(P_i u^o + Q_i v^o)\right\}\right) \in \langle u^o, v^o \rangle$$

Tương tự  $v^1 \in \langle u^o, v^o \rangle$  và do (2) ta có  $u^1 \leq v^1$ .

Tiếp theo ta chứng minh  $T(\langle u^1, v^1 \rangle) \subset \langle u^1, v^1 \rangle$ . Với  $x \in \langle u^1, v^1 \rangle$  ta có

$$\begin{aligned} u^1 &= J\left(\left\{R_i T(P_i u^o + Q_i v^o)\right\}\right) \leq J\left(\left\{R_i T(P_i u^1 + Q_i v^1)\right\}\right) \leq \\ &\leq J\left(\left\{R_i T(P_i x + Q_i x)\right\}\right) = T(x) \leq J\left(\left\{R_i T(P_i v^1 + Q_i u^1)\right\}\right) \leq \\ &\leq J\left(\left\{R_i T(P_i v^o + Q_i u^o)\right\}\right) = v^1 \end{aligned}$$

Do  $K$  chính qui ta có  $\lim u^n, \lim v^n$  tồn tại và dùng qui nạp ta chứng minh (4) đúng.

Cuối cùng ta chứng minh (6). Hiển nhiên (6) đúng cho  $n=0$ , giả sử (6) đã đúng cho  $n$ . Ta có

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= J\left(\left\{R_i T(P_i u^n + Q_i v^n)\right\}\right) \leq J\left(\left\{R_i T(P_i x^n + Q_i x^n)\right\}\right) = x^{n+1} \leq \\ &\leq J\left(\left\{R_i T(P_i v^n + Q_i u^n)\right\}\right) = v^{n+1} \end{aligned}$$

Vậy (6) đúng cho  $n+1$ . Định lí được chứng minh.

### Hệ quả

Nếu  $T: \langle u^o, v^o \rangle \rightarrow \langle u^o, v^o \rangle$  là đơn điệu tổ hợp và có điểm bất động  $x^*$  thì  $u^n \leq x^* \leq v^n$ .

Chứng minh. Ta chỉ cần chọn  $x^o = x^*$ .

### Định nghĩa 2.3.1.2

Ta nói họ  $\{P_i\}, \{R_i\}$  có tính chất liên tục nếu

1) Từ  $\lim x^n = x, \lim y^n = y$  ta luôn có

$$\lim(P_i x^n + Q_i y^n) = P_i x + Q_i y. \quad \forall i \in I$$

2) Từ  $\lim x_i^n = x_i \quad \forall i \in I$  và  $(R_i(x_i^n)) \in D \quad \forall n \geq 0$  thì

$$\lim J(\{R_i(x_i^n)\}) = J(\{R_i(x_i)\}).$$

### Định lí 2.3.1.2

Giả sử họ  $\{P_i\}, \{R_i\}$  có tính chất liên tục,  $T: \langle u^o, v^o \rangle \rightarrow \langle u^o, v^o \rangle$  là liên tục, đơn điệu tổ hợp và có duy nhất điểm bất động  $x^* \in T: \langle u^o, v^o \rangle$ . Giả sử hệ phương trình

$$\begin{cases} u = J(\{R_i T(P_i u + Q_i v)\}) \\ v = J(\{R_i T(P_i v + Q_i u)\}) \end{cases} \quad (7)$$

có duy nhất nghiệm trong tập  $\{(u, v): u \leq v\}$ . Khi đó dãy lặp (5) hội tụ về  $x^*$  với mọi cách chọn  $x^o \in \langle u^o, v^o \rangle$ .

### Chứng minh

Cho  $n \rightarrow \infty$  trong (3) và sử dụng tính liên tục của họ  $\{P_i\}, \{R_i\}$  ta có  $(u^*, v^*)$  là nghiệm của hệ (7). Nhưng  $(x^*, x^*)$  là nghiệm của (7) và là nghiệm duy nhất nên  $u^* = v^* = x^*$ . Từ (6) và  $K$  là nón chuẩn ta có  $\lim x^n = x^*$ .

### 2.3.2 Ánh xạ $u_o$ – lõm tổ hợp.

#### Định nghĩa 2.3.2.1

Cho  $u_o \in K \setminus \{\theta\}$ . Ánh xạ  $T: K \rightarrow K$  gọi là  $u_o$  – lõm tổ hợp nếu nó là đơn điệu tổ hợp và

$$i) \forall x \in K \setminus \{\theta\} \exists c, d > 0: cu_o \leq T(x) \leq du_o.$$

$$ii) \forall x \in K(u_o) = \{x | \exists \alpha > 0, x \geq \alpha u_o\}, \forall [a, b] \subset (0, 1) \exists \varepsilon = \varepsilon(x, a, b) > 0:$$

$$\forall t \in [a, b] \Rightarrow \begin{cases} J \left( \left\{ R_i T \left( P_i(tx) + Q_i \left( \frac{1}{t}x \right) \right) \right\} \right) \geq (1 + \varepsilon)tT(x) \\ J \left( \left\{ R_i T \left( P_i \left( \frac{1}{t}x \right) + Q_i(tx) \right) \right\} \right) \leq \frac{1}{(1 + \varepsilon)t}T(x) \end{cases}$$

### Bổ đề

Giả sử  $T$  là  $u_o$  – lõm tổ hợp,  $x \in K(u_o)$ ,  $[a, b] \subset [0, 1]$  và  $\varepsilon > 0$  là số tương ứng trong định nghĩa. Khi đó với  $t, s \in [a, b]$  ta có

$$J \left( \left\{ R_i T \left( P_i(tx) + Q_i \left( \frac{1}{s}x \right) \right) \right\} \right) \geq (1 + \varepsilon) \min\{t, s\}T(x)$$

### Chứng minh

Coi  $t < s$  ta có

$$\begin{aligned} J \left( \left\{ R_i T \left( P_i(tx) + Q_i \left( \frac{1}{s}x \right) \right) \right\} \right) &\geq J \left( \left\{ R_i T \left( P_i(tx) + Q_i \left( \frac{1}{t}x \right) \right) \right\} \right) \geq \\ &\geq (1 + \varepsilon)tT(x) = (1 + \varepsilon) \min\{t, s\}T(x) \end{aligned}$$

### Định lí 2.3.2.1

Giả sử  $T$  là ánh xạ  $u_o$  – lõm tổ hợp trên  $K$  và có điểm bất động  $x^* \in K \setminus \{\theta\}$ . Khi đó  $x^*$  là điểm bất động duy nhất của  $T$  trong  $K \setminus \{\theta\}$  và dãy lập (5) hội tụ tới  $x^*$  với mọi cách chọn  $x^o \in K(u_o)$ .

### Chứng minh

Cố định  $t \in (0, 1)$  và xét dãy lập (3) với  $u^o = tx^*$ ,  $v^o = \frac{1}{t}x^*$ .

Ta kiểm tra  $T(\langle u^o, v^o \rangle) \subset \langle u^o, v^o \rangle$ . Với  $x \in \langle u^o, v^o \rangle$  ta có

$$T(x) = J \left( \left\{ R_i T(P_i x + Q_i x) \right\} \right) \geq J \left( \left\{ R_i T \left( P_i(tx^*) + Q_i \left( \frac{1}{t}x^* \right) \right) \right\} \right) \geq tT(x^*) = tx^*$$

$$T(x) \leq J \left( \left\{ R_i T \left( P_i \left( \frac{1}{t}x^* \right) + Q_i(tx^*) \right) \right\} \right) \leq \frac{1}{t}T(x^*) = \frac{1}{t}x^*.$$

Áp dụng hệ quả và định lí 2.3.1.1, ta có (4). Gọi  $t_n$  là số lớn nhất thỏa  $u^n \geq t_n x^*$  và

$s_n$  là số bé nhất thỏa  $v^n \leq \frac{1}{s_n} x^*$  ta có

$$0 < t = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq \dots \leq 1$$

$$0 < t = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq t_n \leq \dots \leq 1$$

Suy ra tồn tại  $\lim t_n = t' \leq 1$ ,  $\lim s_n = s' \leq 1$ . Ta sẽ chứng minh  $t' = s' = 1$ . Thật vậy, nếu

$t' \neq 1$  hoặc  $s' \neq 1$  thì  $r := \min\{t', s'\} < 1$ . Xét số  $\delta$  thỏa  $0 < \delta < r$  thì do

$\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{t_n, s_n\} = \min\{t', s'\} = r$ , ta tìm được số  $N$  sao cho

$$\forall n \geq N \Rightarrow \delta \leq \min\{t_n, s_n\} \leq r$$

Từ định nghĩa của  $t_n, s_n$  và bổ đề, ta có

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= J\left(\left\{R_i T\left(P_i u^n + Q_i v^n\right)\right\}\right) \geq J\left(\left\{R_i T\left(P_i\left(t_n x^*\right) + Q_i\left(\frac{1}{s_n} x^*\right)\right)\right\}\right) \geq \\ &\geq \left[1 + \varepsilon\left(x^*, \delta, r\right)\right] \min\{t_n, s_n\} x^* \end{aligned}$$

Do đó  $t^{n+1} \geq (1 + \varepsilon)\delta$ ; tương tự  $s^{n+1} \geq (1 + \varepsilon)\delta$ . Dùng qui nạp ta được

$t_{N+k} \geq (1 + \varepsilon)^k \delta$ ,  $s_{N+k} \geq (1 + \varepsilon)^k \delta$ . Điều này mâu thuẫn với tính bị chặn của  $\{t_n\}, \{s_n\}$ . Vậy  $t' = s' = 1$ .

Từ  $t_n x^* \leq u^n \leq x^n \leq v^n \leq \frac{1}{s_n} x^*$  và tính chuẩn của nón  $K$  ta có  $\lim x^n = x^*$ .

### 2.3.3 Một số ứng dụng

#### 2.3.3.1 Trường hợp không gian hữu hạn chiều

Cho các hàm  $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in I = \{1, \dots, m\}$ ,  $f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_m)$  đơn điệu (có thể không ngặt) theo từng biến.

Đặt  $G_i = \{j \in I : f_i \text{ tăng theo biến } x_j\}$ ,  $H_i = I \setminus G_i$ .

Giả sử  $P_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  là ánh xạ tuyến tính cho bởi ma trận  $(p_{jk}^i)$  với  $p_{jj}^i = 1$  nếu

$j \in G_i$ ,  $p_{jk}^i = 0$  trong các trường hợp còn lại.

Gọi  $R_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  là phép chiếu  $x = (x_i) \mapsto x_i$  và  $J: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  là ánh xạ đồng nhất.

Trong  $\mathbb{R}^m$  ta xét nón  $K = \{x = (x_i): x_i \geq 0, i = \overline{1, m}\}$  và xét ánh xạ

$$F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

Với  $x' \geq x, y' \leq y$  ta có

$$R_i F(P_i x' + Q_i y') = f_i(P_i x' + Q_i y') \geq f_i(P_i x + Q_i y) = R_i F(P_i x + Q_i y)$$

Do đó  $J(\{R_i F(P_i x' + Q_i y')\}) = J(\{R_i F(P_i x + Q_i y)\})$ . Vậy  $F$  là đơn điệu tổ hợp.

Giả sử các hàm  $f_i$  thỏa mãn thêm các giả thuyết sau

1)  $f_i(x) > 0 \forall i \in \text{Int} \mathbb{R}_+^m$ ;  $f_i$  khả vi

2)  $\forall i \in I, \forall x \in \text{Int} \mathbb{R}_+^m$  ta có

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left( P_i(t_1 x) + Q_i \left( \frac{1}{t_1} x \right) \right) \geq \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left( P_i(t_2 x) + Q_i \left( \frac{1}{t_2} x \right) \right), \forall j \in G_i, 0 < t_1 < t_2$$

3)  $\forall i \in I, \forall x \in \text{Int} \mathbb{R}_+^m$  ta có

$$\frac{1}{t_1^2} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left( P_i(t_1 x) + Q_i \left( \frac{1}{t_1} x \right) \right) \right| > \frac{1}{t_2^2} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left( P_i(t_2 x) + Q_i \left( \frac{1}{t_2} x \right) \right) \right|$$

$$\forall j \in H_i, 0 < t_1 < t_2 < 1.$$

### Định lí 2.3.3.1

Nếu các hàm  $f_i$  thỏa mãn các điều kiện nêu trên thì  $F$  là ánh xạ  $u_o$  – lõm tổ hợp.

### Chứng minh

Ta lấy  $u_o = (1, \dots, 1)$ . Sử dụng các giả thuyết 2), 3) nêu trên ta có

$$\begin{aligned} f_i \left( P_i(tx) + Q_i \left( \frac{1}{t} x \right) \right) &> t \sum_{j \in G_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left( P_i(tx) + Q_i \left( \frac{1}{t} x \right) \right) \cdot x_j - \\ &\quad - \frac{1}{t} \sum_{j \in H_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left( P_i(tx) + Q_i \left( \frac{1}{t} x \right) \right) \cdot x_j \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{t} f_i \left( P_i(tx) + Q_i \left( \frac{1}{t} x \right) \right) \right] < 0$$

Vậy  $\forall x \in \text{Int} \mathbb{R}_+^m, \forall [a, b] \subset (0, 1)$  sẽ tồn tại  $\varepsilon_i > 0$  sao cho

$$\frac{1}{t} f_i \left( P_i(tx) + Q_i \left( \frac{1}{t} x \right) \right) > f_i(x) + \varepsilon_i$$

Đặt  $\varepsilon = \min_{i \in I} \frac{\varepsilon_i}{f_i(x)}$  thì  $\varepsilon$  là số cần tìm nói trong định nghĩa ánh xạ  $u_o$  – lõm tổ hợp.

### 2.3.3.2 Toán tử tích phân Urysohn.

Xét ánh xạ  $A: L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ ,  $Ax(t) = \int_{\Omega} K(t, s, x(s)) ds$

trong đó  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  là tập đo được, bị chặn,  $K(t, s, u) > 0 \forall t, s \in \Omega, \forall u > 0$ .

Hàm  $K(t, s, u)$  gọi là đơn điệu suy rộng nếu đối với hầu hết  $(s, t) \in \Omega \times \Omega$  thì hàm  $u \mapsto K(t, s, u)$  đơn điệu.

Với  $t \in \Omega$ , đặt  $G_t = \{s \in \Omega \mid u \mapsto K(t, s, u) \text{ tăng}\}$ ; Xét ánh xạ  $P_t: L^p \mapsto L^p$  như sau:

$$P_t(x) = 1_{G_t} \cdot x$$

Với mỗi  $t \in \Omega$  kí hiệu  $R_t$  là ánh xạ từ  $\mathbb{R}^p$  vào  $\mathbb{R}$ , định bởi  $R_t(x) = x(t)$ . Kí hiệu  $J$  là ánh xạ xác định trên  $L^p$ , coi như là tập con của  $\mathbb{R}^{\Omega}$  (xét như là tập hợp các hàm từ  $\Omega$  vào  $\mathbb{R}$ ) và  $J(x) = x$ .

### Định lí 2.3.3.2

1) Giả sử  $K(t, s, u)$  là hàm đơn điệu suy rộng theo biến  $u$  và thỏa mãn điều kiện Caratheodory, nghĩa là  $\forall u \geq 0$  thì hàm  $(t, s) \mapsto K(t, s, u)$  là đo được và với hầu hết  $(t, s) \in \Omega \times \Omega$  thì hàm  $(t, s) \mapsto K(t, s, u)$  liên tục. Khi đó ánh xạ Urysohn là đơn điệu tổ hợp trên nón các hàm không âm.

2) Giả sử  $K(t, s, u)$  thỏa mãn các điều kiện trong 1) và

i)  $\forall t \in \Omega$  và với hầu hết  $s \in G_t$  thì  $u \mapsto K(t, s, u)$  là hàm lõm.

ii)  $\forall t \in \Omega$  và với hầu hết  $s \in \Omega \setminus G_t$  thì

$$\frac{1}{t_1^2} \left| \frac{\partial K}{\partial u} \left( t, s, \frac{1}{t_1} u \right) \right| > \frac{1}{t_2^2} \left| \frac{\partial K}{\partial u} \left( t, s, \frac{1}{t_2} u \right) \right| \text{ với } 0 < t_1 < t_2 < 1$$

Khi đó ánh xạ Urysohn là  $u_o$  – lõm tổ hợp với  $u_o(t) \equiv 1$

### Chương 3: MỘT SỐ LỚP ẢNH XẠ LỖM ĐA TRỊ

Trong chương này chúng ta khảo sát sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ đa trị  $u_0$  – lõm đều. Trước tiên ta nhắc lại vài kết quả có trong đơn trị.

Cho  $X$  là không gian Banach với thứ tự sinh bởi nón  $K$ .

$$\text{Đặt } P = [u, v] = \{x \in X : u \leq x \leq v\}$$

#### 3.1 Sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ $u_0$ – lõm đều đơn trị

##### Định nghĩa 3.1.1

Cho  $u_0 \geq \theta$ . Ánh xạ  $A: P \rightarrow P$  gọi là  $u_0$  – lõm đều trên  $P$  nếu:

- i)  $A$  đơn điệu trên  $P$ .
- ii)  $\forall x \in P, \exists \alpha, \beta : \alpha u_0 \leq Ax \leq \beta u_0$
- iii)  $\forall [a, b] \subset (0, 1), \exists \eta > 0$  sao cho  $\forall x \in P, \forall t \in (a, b)$  thì

$$A(tx) \geq (1 + \eta)tAx$$

##### Định lí 3.1.1

Giả sử

- i)  $K$  là nón chuẩn.
- ii)  $A: P \rightarrow P$  là ánh xạ  $u_0$  – lõm đều trên  $P$ .
- iii)  $u \leq Au; Av \leq v$ .

Khi đó  $A$  có điểm bất động trên  $P$ .

##### Chứng minh

Do  $K$  là nón chuẩn nên  $P$  đóng và bị chặn.

Do đó: Tồn tại số dương  $N$  sao cho  $\forall x, y \in K; x \leq y$  thì  $\|x\| \leq N\|y\|$

Tồn tại số dương  $M$  sao cho  $\forall x \in P$  thì  $\|x\| \leq M$

Ta xét hai dãy lập sau:  $x_{n+1} = Ax_n; y_{n+1} = Ay_n$  với  $x_0 = u; y_0 = v$

Do  $A$  đơn điệu và  $x_0 \leq y_0$  nên

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_1 \leq y_0$$

Suy ra  $\{x_n\}_n$  là dãy tăng,  $\{y_n\}_n$  là dãy giảm và  $x_n \leq y_n, \forall n$

Ta chứng minh dãy  $\{x_n\}_n$  và dãy  $\{y_n\}_n$  hội tụ. Vì  $X$  là không gian Banach nên ta chỉ cần chứng minh  $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$  là dãy Cauchy.

Chọn  $\lambda \in (0;1)$  sao cho  $x_0 \geq \lambda y_0$

Chọn  $\varepsilon$  đủ nhỏ sao cho  $\lambda < 1 - \frac{\varepsilon}{MN}$

Do ánh xạ  $A$  là  $u_0$  lõm đều nên  $\exists \delta > 0$  sao cho  $\forall x \in P, \forall t \in \left[ \lambda; 1 - \frac{\varepsilon}{MN} \right]$

ta có  $A tx \geq (1 + \delta) t Ax$

Chọn số tự nhiên  $N_0$  thỏa điều kiện 
$$\begin{cases} \lambda(1 + \delta)^{N_0-1} < 1 - \frac{\varepsilon}{MN} \\ \lambda(1 + \delta)^{N_0} > 1 - \frac{\varepsilon}{MN} \end{cases}$$

Bằng cách giảm  $\delta$  ta có thể xem  $\lambda(1 + \delta)^{N_0} < 1$ .

Ta có:  $x_0 \geq \lambda y_0$

Suy ra  $Ax_0 \geq (1 + \delta) \lambda Ay_0$  hay  $x_1 \geq (1 + \delta) \lambda y_1$

Tiếp tục như trên ta được  $x_{N_0} \geq (1 + \delta)^{N_0} \lambda y_{N_0} \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{MN}\right) y_{N_0}$ .

Do  $x_{N_0} \leq y_{N_0}$  nên  $\theta \leq y_{N_0} - x_{N_0} \leq \frac{\varepsilon}{MN} y_{N_0}$ .

Khi đó  $\forall n \geq N_0$  ta có  $\theta \leq x_{n+p} - x_n \leq y_n - x_n \leq y_{N_0} - x_{N_0} \leq \frac{\varepsilon}{MN} y_{N_0}$

Do đó  $\|x_{n+p} - x_n\| \leq N \cdot \frac{\varepsilon}{MN} \|y_{N_0}\| \leq N \cdot \frac{\varepsilon}{MN} \cdot M = \varepsilon$

Tương tự ta cũng có  $\theta \leq y_n - y_{n+p} \leq y_n - x_n \leq \frac{\varepsilon}{MN} y_{N_0}$

Suy ra  $\|y_n - y_{n+p}\| \leq N \cdot \frac{\varepsilon}{MN} \|y_{N_0}\| \leq N \cdot \frac{\varepsilon}{MN} \cdot M = \varepsilon$

Vậy  $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$  là các dãy Cauchy nên hội tụ.

Giả sử  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*; \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$

Do  $\theta \leq x_{n+p} - x_n \leq y_n - x_n \leq \frac{\varepsilon}{MN} y_{N_0}$  nên  $\|y_n - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{MN} \|y_{N_0}\|$

Cho  $n \rightarrow \infty$  ta có  $x^* = y^*$ . Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x^*$ .

Do  $x_n \leq x^* \leq y_n$  nên  $x_{n+1} \leq Ax^* \leq y_{n+1}$

Cho  $n \rightarrow \infty$  ta có  $x^* = Ax^*$  hay  $x^*$  là điểm bất động của  $A$  trên  $P$ .

Vậy định lí được chứng minh.

### 3.2 Sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ lõm đều đa trị.

#### Định nghĩa 3.2.1

Với  $A, B \subset X$  ta định nghĩa  $A \leq B \Leftrightarrow \forall a \in A; \exists b \in B : a \leq b$ .

Ánh xạ  $F : X \rightarrow 2^X$  gọi là tăng nếu  $x \leq y$  thì  $Fx \leq Fy$ .

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$$

#### Định nghĩa 3.2.2

Cho  $u_0 \geq \theta$ . Ánh xạ  $A : P \rightarrow 2^P$  gọi là  $u_0$ -lõm đều trên  $P$  nếu

- i)  $A$  đơn điệu trên  $P$ .
- ii)  $\forall x \in P, \exists \alpha, \beta : \{\alpha u_0\} \leq Ax \leq \{\beta u_0\}$ .
- iii)  $\forall [a; b] \subset (0; 1), \exists \delta > 0$  sao cho  $\forall x \in P, \forall t \in (a, b)$  thì  $Atx \geq (1 + \delta)Ax$

#### Định lí 3.2.1

Giả sử

- i)  $K$  là nón chuẩn.
- ii)  $A : P \rightarrow P$  là ánh xạ  $u_0$ -lõm đều trên  $P$ .
- iii)  $\{u\} \leq Au; Av \leq \{v\}$
- iv)  $\sup Ax$  tồn tại và thuộc  $Ax \quad \forall x \in P$

Khi đó  $A$  có điểm bất động trên  $P$ .

#### Chứng minh

Xét ánh xạ đơn trị  $f : P \rightarrow P$  định bởi  $f(x) = \sup Ax$ . Rõ ràng  $f$  được định nghĩa tốt và nếu  $x^*$  là điểm bất động của  $f$  thì nó cũng là điểm bất động của  $A$ . Ta kiểm tra  $f$  thỏa các điều kiện của định lý 3.1.1

Do  $A$  là tăng nên ta có  $f$  cũng tăng.

$$\forall x \in P, \exists \alpha, \beta : \{\alpha u_0\} \leq Ax \leq \{\beta u_0\} \text{ suy ra } \alpha u_0 \leq f(x) \leq \beta u_0$$

$$\forall [a; b] \subset (0, 1), \exists \delta > 0 \text{ sao cho } \forall x \in P, \forall t \in (a, b) \text{ thì } Atx \geq (1 + \delta)tAx$$

$$\text{Do đó } f(tx) \geq (1 + \delta)tx$$

Vậy theo định lý 3.1.1 thì  $f$  có điểm bất động  $x^*$  cũng là điểm bất động của  $A$ .

Trong định lý 3.2.1 ta có thể giảm bớt giả thuyết  $\sup Ax$  tồn tại và thuộc  $Ax \ \forall x \in P$  nếu trên  $X$  ta xét thứ tự mạnh hơn theo định nghĩa sau

### Định nghĩa 3.2.3

Với  $A, B \subset X$  ta định nghĩa  $A \preceq B \Leftrightarrow \forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$ .

Ánh xạ  $F : X \rightarrow 2^X$  gọi là tăng nếu  $x \leq y$  thì  $Fx \preceq Fy$ .

### Định nghĩa 3.2.4

Cho  $u_0 \geq \theta$ . Ánh xạ  $A : P \rightarrow 2^P$  gọi là  $u_0$ -lỗm đều trên  $P$  nếu

i)  $A$  đơn điệu trên  $P$ .

$$\text{ii) } \forall x \in P, \exists \alpha, \beta : \{\alpha u_0\} \preceq Ax \preceq \{\beta u_0\}$$

$$\text{iii) } \forall [a; b] \subset (0, 1), \exists \delta > 0 \text{ sao cho } \forall x \in P, \forall t \in (a, b) \text{ thì } Atx \succeq (1 + \delta)tAx$$

### Định lý 3.2.2

Giả sử

i)  $K$  là nón chuẩn.

ii)  $A : P \rightarrow P$  là ánh xạ  $u_0$ -lỗm đều trên  $P$ .

$$\text{iii) } \{u\} \preceq Au; \quad Av \preceq \{v\}$$

Khi đó  $A$  có điểm bất động trên  $P$ .

### Chứng minh

Do  $K$  là nón chuẩn nên  $P$  đóng và bị chặn.

Do đó: Tồn tại số dương  $N$  sao cho  $\forall x, y \in K; x \leq y$  thì  $\|x\| \leq N\|y\|$

Tồn tại số dương  $M$  sao cho  $\forall x \in P$  thì  $\|x\| \leq M$

Ta xét hai dãy lập sau:  $x_{n+1} = Ax_n$ ;  $y_{n+1} = Ay_n$  với  $x_0 = u$ ;  $y_0 = v$

Do  $A$  đơn điệu và  $x_0 \leq y_0$  nên  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_1 \leq y_0$

Suy ra  $\{x_n\}_n$  là dãy tăng,  $\{y_n\}_n$  là dãy giảm và  $x_n \leq y_n, \forall n$

Ta chứng minh dãy  $\{x_n\}_n$  và dãy  $\{y_n\}_n$  hội tụ. Vì  $X$  là không gian Banach nên ta chỉ cần chứng minh  $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$  là dãy Cauchy.

Chọn  $\lambda \in (0;1)$  sao cho  $x_0 \geq \lambda y_0$ . Chọn  $\varepsilon$  đủ nhỏ sao cho  $\lambda < 1 - \frac{\varepsilon}{MN}$

Do ánh xạ  $A$  là  $u_0$ -lõm đều nên  $\exists \delta > 0$  sao cho  $\forall x \in P, \forall t \in \left[ \lambda; 1 - \frac{\varepsilon}{MN} \right]$

ta có  $A(tx) \succeq (1 + \delta)tAx$

Chọn số tự nhiên  $N_0$  thỏa điều kiện 
$$\begin{cases} \lambda(1 + \delta)^{N_0-1} < 1 - \frac{\varepsilon}{MN} \\ \lambda(1 + \delta)^{N_0} > 1 - \frac{\varepsilon}{MN} \end{cases}$$

Bằng cách giảm  $\delta$  ta có thể xem  $\lambda(1 + \delta)^{N_0} < 1$ .

Ta có  $x_0 \geq \lambda y_0$ . Suy ra  $Ax_0 \succeq (1 + \delta)\lambda Ay_0$

Do đó  $x_1 \geq (1 + \delta)\lambda y_1$

Tiếp tục như trên ta được  $x_{N_0} \geq (1 + \delta)^{N_0} \lambda y_{N_0} \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{MN}\right) y_{N_0}$ .

Do  $x_{N_0} \leq y_{N_0}$  nên  $\theta \leq y_{N_0} - x_{N_0} \leq \frac{\varepsilon}{MN} y_{N_0}$ .

Khi đó  $\forall n \geq N_0$  ta có  $\theta \leq x_{n+p} - x_n \leq y_n - x_n \leq y_{N_0} - x_{N_0} \leq \frac{\varepsilon}{MN} y_{N_0}$

Do đó  $\|x_{n+p} - x_n\| \leq N \cdot \frac{\varepsilon}{MN} \|y_{N_0}\| \leq N \cdot \frac{\varepsilon}{MN} \cdot M = \varepsilon$

Tương tự ta cũng có  $\theta \leq y_n - y_{n+p} \leq y_n - x_n \leq \frac{\varepsilon}{MN} y_{N_0}$

Suy ra  $\|y_n - y_{n+p}\| \leq N \cdot \frac{\varepsilon}{MN} \|y_{N_0}\| \leq N \cdot \frac{\varepsilon}{MN} \cdot M = \varepsilon$

Vậy  $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$  là các dãy Cauchy nên hội tụ.

Giả sử  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*; \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$

Do  $\theta \leq x_{n+p} - x_n \leq y_n - x_n \leq \frac{\varepsilon}{MN} y_{N_0}$  nên  $\|y_n - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{MN} \|y_{N_0}\|$

Cho  $n \rightarrow \infty$  ta có  $x^* = y^*$ . Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x^*$ .

Do  $x_n \leq x^* \leq y_n$  nên  $Ax_n \preceq Ax^* \preceq Ay_n$

Suy ra  $\{x_{n+1}\} \preceq Ax^* \preceq \{y_{n+1}\}$

Do đó  $x_{n+1} \leq x \leq y_{n+1} \quad \forall x \in Ax^*$

Cho  $n \rightarrow \infty$  ta có  $x = x^*, \forall x \in Ax^*$  hay  $\{x^*\} = Ax^*$

Vậy định lí được chứng minh.

## KẾT LUẬN

Trong luận văn này, chúng tôi hệ thống lại các kết quả lí thuyết về một số lớp ánh xạ lồi, lõm đã được nghiên cứu, ánh xạ lõm tổ hợp, khảo sát sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ lõm đa trị tăng. Tuy nhiên chúng tôi chưa có điều kiện trình bày các ứng dụng của kết quả trên vào các lớp phương trình cụ thể.

Một số hướng có thể phát triển của luận văn là

- 1) Tìm các ứng dụng của kết quả lí thuyết vào lớp phương trình cụ thể.
- 2) Nghiên cứu sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ lồi đa trị.
- 3) Làm giảm nhẹ các điều kiện của các kết quả trình bày trong luận văn.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. K.Deimling  
Nonlinear Funtional Analysis  
Springer-Verlag, 1985
2. D.Guo, V.Lakshmikantham  
Nonlinear Problems in Abstract Cones  
Aeademic Press, 1988
3. MA.Krasnoselskii  
Positive Solutions of Operator Equation  
Noordhoff, Groningen, 1964.
4. MA.Krasnoselskii, P.P.Zabreiko  
Geometrical Methods of Nonlinear Analysis  
Springer-Verlag, 1984.
5. V.I.Opoitsev  
Geterogene and combine-concave operators,  
Sib.Math J.,16(1975), 781-792.