

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Huỳnh Minh Lễ

**MỘT SỐ NGHIÊN CỨU VỀ NHÓM
BRAUER VÀ ỨNG DỤNG CỦA NÓ**

Chuyên ngành: **Đại số và lý thuyết số**

Mã số: **60 46 05**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. BÙI TƯỜNG TRÍ

LỜI CẢM ƠN



Trước tiên qua luận văn này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và lời chúc sức khỏe tốt đẹp nhất đến các thầy : PGS.TS BÙI TUỜNG TRÍ, PGS.TS MỸ VINH QUANG, TS. TRẦN HUYỀN, PGS.TS BÙI XUÂN HẢI và các thầy cô đã trực tiếp giảng dạy truyền đạt kiến thức cho tôi cùng các bạn học viên cao học khóa 18.

Đặc biệt là thành kính gửi lòng biết ơn sâu sắc đến thầy PGS.TS BÙI TUỜNG TRÍ đã tận tình chỉ bảo tôi trong quá trình thực hiện luận văn này.

Qua đây tôi cũng xin chân thành cảm ơn đến tất cả các bạn học viên cao học khóa 18 đã gắng bó với tôi trong quá trình học tập tại trường và quý thầy cô trong khoa Toán và Phòng KHCN – Sau Đại Học đã tạo điều kiện thuận lợi để tôi học tập, nghiên cứu.

Và cuối cùng xin cảm ơn gia đình tôi cùng những người bạn đã hỗ trợ, động viên tôi để hoàn thành luận văn này !

TP Hồ Chí Minh , tháng 10 năm 2010

Tác giả luận văn

Huỳnh Minh Lễ

LỜI MỞ ĐẦU

Do có vai trò quan trọng, nên Cấu trúc đại số trên trường được nhiều nhà Toán học quan tâm và một trong những nghiên cứu quan trọng là về các Đại số đơn tâm trên trường.

Nhóm Brauer là kết quả của việc nghiên cứu các đại số đơn tâm. Việc hiểu rõ, cấu trúc và tính chất của nhóm Brauer giúp cho ta có thể ứng dụng nhóm Brauer trong các lĩnh vực khác của Toán học : Trong Lý Thuyết số, hình học đại số, lý thuyết biểu diễn.... Nên tôi đã chọn đề tài : “Một số nghiên cứu về nhóm Brauer và ứng dụng của nó”.

Trong luận văn trình bày cách xây dựng nhóm Brauer và nêu lên một số ví dụ về nhóm Brauer của một trường cụ thể, giúp hệ thống hóa về Cấu trúc đại số đơn tâm. Từ đó nắm vững kiến thức hơn về cấu trúc đại số phục vụ cho công tác nghiên cứu và học tập. Do luận văn được làm trong thời gian có hạn nên không thể tránh khỏi sai sót, nếu có điều kiện tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu sâu về nhóm Brauer.

Nội dung luận văn gồm 3 chương

Chương 1 : Những vấn đề cơ bản của Lý thuyết các vành các Đại số không giao hoán trên 1 trường (Khái niệm Đại số, Định lý dây đặc, Wedderburn's – Artin , đối với vành , đại số ...)

Chương 2 : Đại số đơn tâm trên 1 trường và xây dựng khái niệm nhóm Brauer.

Chương 3 : Mô tả nhóm Brauer trên các trường đại số đóng, trường hữu hạn chiều và trường số thực $\mathbb{R}$.

CHƯƠNG 1 : CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.1. VÀNH

1.1.1. NHÓM

Cho R và phép toán 2 ngôi trên R , Ký hiệu : $(R, .)$ là nửa nhóm nếu thỏa đồng nhất thức

- i) $x(yz) = (xy)z$.
- ii) $\exists e \in R$ và $\forall x \in R$ ta có $e.x = x$; $x.e = x$
- iii) $\forall x \in R, \exists y \in R$ thỏa $x.y = y.x = e$

Khi đó e được gọi là phần tử đơn vị và thường được ký hiệu là 1, phần tử y tương ứng với x gọi là nghịch đảo của x và thường được ký hiệu là x^{-1} .

Một nhóm $(R,.)$ là aben (giao hoán) nếu thỏa đồng nhất thức: $x.y = y.x, \forall x,y \in R$

1.1.2. ĐỊNH NGHĨA VÀNH

Cho tập R cùng phép toán hai ngôi $+, ., (R,+, .)$ là một vành nếu thỏa :

- $(R,+)$ là một nhóm abel.
- $(R, .)$ là nửa nhóm.
- $x(y + z) = xy + xz$ và $(y + z)x = yx + zx \quad \forall x, y, z \in R$.

Khi R là một vành,

- Phần tử đơn vị của phép toán $+$ ký hiệu là 0 và gọi là phần tử không.
- Nghịch đảo của phần tử x trong phép toán $+$ là $-x$ và gọi là đối của x

Tồn tại tự nhiên phép toán $-$ trên R thỏa $x - y = x + (-y)$

Vành R là giao hoán nếu phép toán nhân giao hoán, có đơn vị 1 nếu phép toán nhân có đơn vị 1.

1.1.2.1. Tâm vành

Cho vành R , tập hợp $Z(R) = \{ a \in R \mid ax = xa, \forall x \in R \}$ được gọi là tâm của R , hiển nhiên tâm của R là một vành con giao hoán.

1.1.2.2. Ước của 0

Phần tử $a \neq 0$ của vành R được gọi là ước của 0 nếu tồn tại $b \neq 0$ trong R sao cho $ab = 0$.

1.1.2.3. Miền nguyên

Miền nguyên là vành giao hoán có đơn vị 1 và không có ước của 0.

1.1.2.4. **Thế**

Thế là vành R sao cho $R \setminus \{0\}$ là một nhóm nhân. Trường là một thế giao hoán.

1.1.2.5. **Phần tử Lũy đẳng**

Trong vành R , phần tử $e \neq 0$ thỏa $e^2 = e$ được gọi là phần tử lũy đẳng.

1.1.2.6. **Phần tử lũy linh**

Phần tử $a \in R$ được gọi là lũy linh nếu có $m \in \mathbb{N}$ sao cho $a^m = 0$.

1.1.2.7. **Tựa chính quy phải _ tựa nghịch đảo phải**

Phần tử a được gọi là tựa chính quy phải nếu có $b \in R$ sao cho $a + b + ab = 0$. Khi đó b được gọi là tựa nghịch đảo phải của a .

Định nghĩa tương tự cho bên trái.

1.1.2.8. **Mệnh đề**

Tựa nghịch đảo phải và tựa nghịch đảo trái của một phần tử a nếu có thì trùng nhau. Khi đó a được gọi là tựa chính quy.

Hiển nhiên, nếu x là lũy linh thì x là tựa chính quy.

1.1.2.9. **Vành đối**

Cho vành R , vành R^* xây dựng từ R , giữ nguyên phép toán cộng, thay phép nhân trong R bằng phép nhân được định nghĩa như sau : $a*b$ (trong R^*) = $b.a$ (trong R)

R^* được gọi là vành đối của vành R .

1.1.3. **IDEAL VÀ VÀNH CON**

1.1.3.1. **Vành con**

Trong vành R , giả sử có $A \subseteq R$ và $B \subseteq R$ thì :

$$AB = \{ ab \mid a \in A, b \in B \}$$

Một bộ phận $A \neq \emptyset$ của vành R là vành con của R nếu A cùng hai phép toán trên R cũng là một vành.

1.1.3.2. **Ideal**

Vành con A là ideal trái (phải) của vành R nếu thỏa bao hàm thức : $AR \subseteq A$ ($RA \subseteq A$)

Vành con A là ideal hai phía nếu A vừa là ideal trái, vừa là ideal phải. Một ideal của vành R là ideal thực sự nếu $A \neq R$ và $A \neq \{ 0 \}$

Phần tử $a \in R$ thỏa $Aa = \{0\}$ được gọi là linh hóa tử phải của A .

1.1.3.3. Ideal tối đại

Ideal A của R là tối đại nếu : $A \neq R$ và thỏa $\forall B$ ideal của R , $A \subset B$, $A \neq B$ thì phải có $B = R$.

1.1.3.4. Ideal tối tiểu

Ideal A của R là tối tiểu nếu $A \neq \{0\}$, và thỏa : $\forall B$ ideal của R , $B \subset A$, $A \neq B$ thì phải có $B = \{0\}$

1.1.3.5. Mệnh đề

Nếu A là một ideal phải tối tiểu của vành R thì hoặc $A^2 = \{0\}$ hoặc A chứa phần tử lũy đẳng e sao cho $A = eR$.

Chứng minh

Giả sử $A^2 \neq \{0\}$, Vậy có $a \in A$, $a \neq 0$ sao cho $aA \neq \{0\}$. Hiển nhiên aA là ideal phải của R chứa trong A , do A tối tiểu phải có $aA = A$.

Mặt khác $(0:a) = \{x \in R : ax = 0\}$ là R -ideal phải

Vậy $A \cap (0:a)$ là R -ideal phải khác A , suy ra $A \cap (0:a) = \{0\}$

Do $A = aA$ có $e \in A$ sao cho $a = a.e \Rightarrow ae = ae^2 \Rightarrow a(e - e^2) = 0$

Vậy $e - e^2 \in A \cap (0:a) = \{0\}$ hay $e = e^2$, vì $a \neq 0$ nên có $e \neq 0$.

Bây giờ eR là R -ideal phải chứa trong A , $eR \neq \{0\}$ nên phải có $eR = A$.

1.1.3.6. Ideal chính qui

Một ideal phải J của vành R được gọi là ideal chính qui nếu có phần tử $a \in R$ sao cho $x - ax \in J$, $\forall x \in R$. Phần tử a gọi là đơn vị phải của J

Hiển nhiên là nếu vành R có đơn vị 1 thì mọi ideal phải của R đều chính qui.

1.1.3.7. Mệnh đề

Mọi ideal thực sự chính qui đều chứa trong một ideal tối đại chính qui.

Hệ quả

Mọi vành có đơn vị đều có ideal thực sự chính qui.

1.1.3.8. Mệnh đề

- Nếu J là ideal phải tối đại chính qui và B là ideal phải chính qui thì $A \cap B$ là chính qui.
- Giao một số hữu hạn các ideal phải tối đại chính qui là chính qui.

1.1.3.9. Nil-ideal, Ideal lũy linh

Cho A là ideal phải của vành R , thì :

- A là nil ideal nếu mọi phần tử của A đều lũy linh
- A là ideal lũy linh nếu có $m \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall a_1, \dots, a_m \in A$ thì $a_1, \dots, a_m = 0$ (điều kiện tương đương là $A^m = \{0\}$)

Các khái niệm tương tự cho ideal trái là hiển nhiên, trong phạm vi tài liệu, thuật ngữ ideal dùng để chỉ ideal phải nếu không chỉ định gì thêm.

1.1.3.10. Định nghĩa

Cho ideal A , ta định nghĩa tập $(A : R)$ như sau :

$$(A : R) = \{x \in R \mid Rx \subset A\}$$

1.1.3.11. Mệnh đề

Nếu A là tối đại chính qui thì $(A : R)$ là ideal hai phía lớn nhất còn chứa trong A .

1.1.3.12. Ideal tựa chính qui phải

Ideal A là tựa chính qui phải nếu $\forall x \in A$, x là tựa chính qui phải.

1.1.3.13. Vành đơn

Vành R được gọi là đơn nếu $R^2 \neq \{0\}$ và R không có ideal hai phía thực sự (Ideal khác (0) và R).

1.1.4. ĐỒNG CẤU VÀNH

1.1.4.1. Định nghĩa

Cho $(X, +, \cdot), (Y, +, \cdot)$ là các vành. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là một đồng cấu vành nếu với mọi $a, b \in X$, các điều sau được thỏa mãn

$$1) f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$2) f(a.b) = f(a).f(b)$$

$$3) f(1_X) = 1_Y$$

Đồng cấu vành f được gọi là đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu nếu f lần lượt là đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Nếu giữa $(X, +, \cdot)$ và $(Y, +, \cdot)$ tồn tại một đẳng cấu vành, thì ta nói chúng đẳng cấu với nhau, và viết $X \cong Y$.

Nhận xét

Nếu $f : (X, +, \cdot) \rightarrow (Y, +, \cdot)$ là một đồng cấu vành thì $f : (X, +) \rightarrow (Y, +)$ là đồng cấu nhóm.

VÍ DỤ

1) Cho $(X, +, \cdot)$ là một vành và $\text{End}(X)$ là vành các đồng tự cấu của nhóm $(X, +)$. Khi đó ánh xạ

$$f : (X, +, \cdot) \rightarrow (\text{End}(X), +, \cdot),$$

$$a \mapsto f_a \text{ với } f_a(x) = a \cdot x$$

là một đồng cấu vành.

2) Giả sử I là một ideal của vành X . Xét ánh xạ

$$\theta : X \rightarrow X / I,$$

$$\theta(x) = x + I$$

θ là một toàn cấu vành, gọi là **toàn cấu chính tắc**.

1.1.4.2. Các tính chất của đồng cấu vành

Các tính chất sau đây là tương tự như trong nhóm mà việc chứng minh nó là tương tự hoặc được trực tiếp suy ra từ kết quả về đồng cấu nhóm.

• **Tính chất 1** Hợp của hai đồng cấu vành là một đồng cấu vành. Hơn nữa hợp của hai đẳng cấu là một đẳng cấu.

• **Tính chất 2** Cho $(X, +, \cdot)$ và $(Y, +, \cdot)$ là các vành và $f : X \rightarrow Y$ là một đồng cấu vành. Khi đó

a) Nếu A là vành con (tương ứng : ideal) của X thì $f(A)$ là vành con (tương ứng : ideal) của Y .

b) Nếu B là vành con (tương ứng : ideal) của Y thì $f^{-1}(B)$ là vành con (tương ứng : ideal) của X .

Đặc biệt ta có $\text{Ker } f = \{x \in X : f(x) = 0_Y\}$ là một ideal của X .

• **Tính chất 3** Cho $(X, +, \cdot)$ và $(Y, +, \cdot)$ là các vành và $f : X \rightarrow Y$ là một đồng cấu vành. Khi đó

a) f là đơn cấu khi và chỉ khi $\text{Ker } f = \{0\}$.

b) f là toàn cấu khi và chỉ khi $\text{Im } f = Y$.

1.1.5. MODUL

1.1.5.1. Định nghĩa Modul :

Cho R vành, một R -modul phải M_R là nhóm cộng abel M đã xác định một ánh xạ

$$\sigma : M \times R \rightarrow M$$

$$(m, r) \mapsto \sigma(m, r) = mr \in M$$

Sao cho $\forall m, m_1, m_2 \in M$ và $\forall a, b \in R$ ta có :

$$m(a + b) = ma + mb$$

$$(m_1 + m_2)a = m_1a + m_2a$$

$$(ma)b = m(ab)$$

Đặc biệt nếu R có đơn vị 1 và $x1 = 1x, \forall x \in M$ thì M là R -modul unita.

Trường hợp đặc biệt khi R là một thể thì một R modul phải gọi là một không gian vector phải trên trường R

Khái niệm modul trái ${}_R M$ định nghĩa tương tự.

Một bộ phận A của M_R là R -modul con nếu như bản thân A là R -modul.

Modul con A là thực sự nếu $A \neq M$ và $A \neq \{0\}$.

Từ nay nếu như không có chú thích gì thêm, thuật ngữ R -modul dùng để chỉ một R -modul phải M

1.1.5.2. Định nghĩa $\text{End}(M)$, T_r

Giả sử M là một R -modul, đặt $\text{End}(M)$ là tập các tự đồng cấu nhóm cộng của M thì $\text{End}(M)$ là vành với hai phép toán $+$ và $\cdot$ được định nghĩa như sau :

$$\begin{aligned}(g_1 + g_2)(m) &= g_1(m) + g_2(m) \\ (g_1 g_2)(m) &= g_1(g_2(m)), \forall m \in M, g_1 g_2 \in \text{End}(M)\end{aligned}$$

Khi M là R -modul thì $\forall r \in R$, ánh xạ

$$\begin{aligned}T_r : M &\rightarrow M \\ m &\mapsto mr, \forall m \in M\end{aligned}$$
 là một tự đồng cấu nhóm của M .

Vậy $T_r \in \text{End}(M)$, $\forall r \in R$.

Ánh xạ $f(r) = T_r$ xác định một đồng cấu vành từ R vào $\text{End}(M)$

Ta định nghĩa tương tự cho lớp các ánh xạ bên trái $L_r(m) = rm$

1.1.5.3. Modul trung thành

Cho R -modul M , đặt $A(M) = \{r \in R \mid Mr = 0\} = \text{Ker} f$, với $f(r) = T_r$ định nghĩa như trên

M được gọi là modul trung thành nếu có $A(M) = \{0\}$

Nếu M là R -modul trung thành thì R được nhúng đơn cấu vào $\text{End}(M)$ qua ánh xạ f vì vậy có thể xem R là vành con của $\text{End}(M)$.

1.1.5.4. Mệnh đề

$A(M)$ là ideal hai phía của R và M là $R/A(M)$ -modul trung thành

1.1.5.5. Modul bất khả qui

R -modul M là bất khả qui nếu : $MR \neq \{0\}$ và M không có modul con thật sự.

1.1.5.6. Tâm tập

Cho R -modul M , ta gọi tâm tập của M , ký hiệu $C(M)$ là tập hợp các tự đồng cấu nhóm của M giao hoán với các T_r

$$C(M) = \{g \in \text{End}(M) \mid gT_r = T_r g, r \in R\}$$

Vậy $g \in C(M)$ khi và chỉ khi :

$$\forall m \in M, \forall r \in R \mid T_r g(m) = g(m)r = gT_r(m) = g(mr)$$

Hiển nhiên, $C(M)$ là tập hợp các tự đồng cấu R -modul của M hay ta có $C(M) = \text{Hom}_R(M, M)$. Trường hợp M là không gian vector trên thể K thì g là ánh xạ tuyến tính.

1.1.5.7. **Mệnh đề**

$\text{End}(M)$ là vành có đơn vị chứa $C(M)$ như là một vành con.

1.1.5.8. **Bổ Đề SCHUR**

Nếu M là một R -modul bất khả qui thì $C(M)$ là một thể.

Chứng minh

Giả sử M là R -modul bất khả qui, theo mệnh đề trên, $C(M)$ là vành con của $\text{End}(M)$. Ta chứng minh $C(M)$ là một thể. Thật vậy, xét $g \in C(M)$, $g \neq 0$; đặt $W = g(M)$ thì W là modul con của M . Do M bất khả qui nên phải có $W = M$ (do $g \neq 0$), vậy g là toàn cấu (1).

Mặt khác, $\text{Ker } g$ là modul con của M ; do M bất khả qui và $g \neq 0$ nên phải có $\text{Ker } g = 0$ hay g là đơn cấu (2).

Từ (1) và (2) ta có g là đẳng cấu. Suy ra tồn tại ánh xạ ngược $g^{-1} \in \text{End}(M)$

$\forall r \in R,$

$$gT_r = T_r g \Rightarrow g^{-1}gT_r g^{-1} = g^{-1}T_r g g^{-1} \Rightarrow T_r g^{-1} = g^{-1}T_r \Rightarrow g^{-1} \in C(M)$$

Vậy $C(M)$ là một thể.

Nhận xét

Khi M là bất khả qui, do bổ đề $C(M)$ là một thể, khi đó có thể xem M là một $C(M)$ -modul phải với phép nhân vô hướng định nghĩa như sau :

$$\forall m \in M, g \in C(M) \quad mg = g(m) \quad (\text{ảnh của } m \text{ qua } g)$$

Ngoài ra M còn là một không gian vec tơ trên thể $C(M)$

1.1.5.9. **Định nghĩa Modul cyclic**

R -modul M là cyclic nghiêm ngặt nếu có $u \in M$, $u \neq 0$ sao cho $M = uR$. Khi đó, u được gọi là phần tử sinh của M .

1.1.5.10. **Mệnh đề**

Modul M là cyclic nghiêm ngặt nếu có ideal chính qui J sao cho $M \cong R/J$

1.1.5.11. **Ideal chính qui**

Ideal J là chính qui nếu và chỉ nếu $J = (0 : u) = \{ x \in R \mid ux = 0 \}$ với u là phần tử sinh của một R -modul cyclic nghiêm ngặt.

Chứng minh

Cho M là modul cyclic nghiêm ngặt sinh bởi $u \in M$. Khi đó $\forall m \in M, m = ua$ với $a \in R$. Ánh xạ $f : a \rightarrow ua$ là đồng cấu của R (xem như R -modul) lên M . Đặt

$J = \ker f = \{ a \in R \mid ua = 0 \} = (0 : u)$ thì J là ideal của R và $M \cong R/J$. Ta chứng minh J là chính qui. Thật vậy :

Do $u \in M$, có $e \in R$ sao cho $u = ue$.

Suy ra, $\forall a \in R, ua = uea$ hay $u(e - ea) = 0$.

Vậy $a - ea \in J$ hay J là chính qui.

- Ngược lại, giả sử J là một ideal chính qui của R ta cần chứng minh M là modul cyclic

Vì J là ideal chính qui $\Rightarrow$ có $e \in R$ sao cho $a - ea \in J, \forall a \in R$.

Đặt $M = R/J$ thì $\forall a + J \in M$, ta có $a + J = (e + J)a$, vậy M sinh bởi lớp $e + J$

$\forall x \in J$, do $x - ex \in J \Rightarrow ex \in J \Rightarrow (e + J)x = 0 \Rightarrow x \in (0 : e + J)$

Ngược lại, giả sử $x \in (0 : e + J)$, khi đó, $ex \in J$ và $x - ex \in J \Rightarrow x \in J$

1.1.5.12. **Mệnh đề**

M là R -modul bất khả qui khi và chỉ khi :

i) $M \neq \{0\}$

ii) M là R -cyclic nghiêm ngặt, sinh bởi phần tử $u \neq 0$ bất kỳ.

Chứng minh

Giả sử M là bất khả qui, vậy $M \neq \{0\}$, xét tập con

$$B = \{x \in M \mid xa = 0, \forall a \in R\}$$

Hiển nhiên, B là modul con của M, do M bất khả qui phải có hoặc $B = 0$ hoặc $B = M$.

Nếu $B = M$ thì có $MR = \{0\}$ mâu thuẫn với giả thiết M bất khả qui. Vậy $B = \{0\}$.

Suy ra, với phần tử $u \neq 0$ bất kỳ của M thì uR là modul con của M. Do M bất khả qui nên có $uR = M$ hay M là cyclic nghiêm ngặt sinh bởi u.

Ngược lại, giả sử $M \neq \{0\}$, M là modul cyclic nghiêm ngặt

$$\Rightarrow \forall u \neq 0, u \in M, M = uM \Rightarrow MR \neq \{0\}$$

Gọi N là một modul con khác không của M, chọn $u \in N, u \neq 0$ thì ta có :

$$M = uR \subseteq N \subset M$$

Vậy $N = M$ hay M bất khả qui

1.1.5.13. Mệnh đề

R-modul M là bất khả qui khi và chỉ khi có ideal tối đại chính qui A sao cho $M \cong R/A$ (theo nghĩa R-modul).

Chứng minh

($\Rightarrow$) Giả sử M là R-modul bất khả qui, xét $u \neq 0, u \in M$. Khi đó, ta có

$$M = uR \cong R/J \text{ với } J = (0:u) \text{ là ideal chính qui (mệnh đề 1.3.10)}$$

Tính tối đại của J là hiển nhiên do M không có modul con thực sự.

($\Leftarrow$) Ngược lại, giả sử J là một ideal tối đại chính qui với đơn vị phải e, xét $M = R/J$ thì hiển nhiên M là R-modul không có modul con thực sự.

Ta có MR là modul con của M , giả sử $MR = \{0\}$; suy ra $ea \in J, \forall a \in R$; do J là chính qui, ta có $a \in J, \forall a \in R$ hay $J = R$ mâu thuẫn với giả thiết J là tối đại. Vậy phải có $MR = M$ hay M là bất khả qui.

Nhận xét : Nếu M là R -modul phải thì M là R^* -modul trái với R^* là vành phản đẳng cấu với R . Như vậy, các tính chất của M như một R -modul phải cũng đúng nếu xem M là R^* -modul trái.

1.1.5.14. Định nghĩa

Cho R, A là hai vành, một nhóm aben M là (R,A) -modul nếu như M là R -modul trái và A -modul phải và thỏa :

$$a(xb) = (ax)b, a \in R, x \in M, b \in A$$

1.1.6. CĂN JACOBSON

1.1.6.1. Định nghĩa

Radical Jacobson của vành R , kí hiệu $J(R)$ hoặc $\text{rad}R$, là tập hợp tất cả các phần tử của R linh hóa được tất cả các modul bất khả qui trên R .

$$J(R) = \{ a \in R : Ma = (0) ; \forall M \text{ là } R\text{-modul bất khả qui} \}.$$

Nếu R không có modul bất khả qui, đặt $J(R) = R$, lúc đó R được gọi là vành Radical.

Nhận xét

$$\text{Ta có } A(M) = \{ a \in R : Ma = (0) ; M \text{ là } R\text{-modul} \}$$

$$\Rightarrow J(R) = \bigcap A(M), \forall M \text{ là } R\text{-modul bất khả qui}.$$

$J(R)$ là ideal 2 phía của R .

Vì M được hiểu là R -modul phải nên $J(R)$ còn được gọi là Radical Jacobson phải.

Tương tự, ta định nghĩa Radical Jacobson trái. Tuy nhiên, 2 khái niệm này trùng nhau nên ta không còn nhấn mạnh tính phải, trái của Radical Jacobson.

1.1.6.2. Bổ đề

M bất khả qui $\Leftrightarrow M \cong R/\rho$, với ρ là ideal phải, tối đại, chính qui.

Nhận xét

Nếu R là vành Radical thì trên R không có ideal phải, tối đại, chính qui.

Nếu R có đơn vị, thì R không thể là vành Radical (vì mọi ideal đều chính qui trên vành có đơn vị)

1.1.6.3. Định nghĩa

Cho ρ là ideal phải của R . Ta định nghĩa $(\rho : R) = \{ x \in R : Rx \subset \rho \}$

Nhận xét

Nếu ρ là ideal phải, tối đại, chính qui, ta đặt $M = R/\rho$ thì $A(M) = (\rho : R)$

1.1.6.4. Một số tính chất

$J(R) = \bigcap (\rho : R)$ trong đó ρ chạy qua mọi ideal tối đại, chính qui, $(\rho : R)$ là ideal 2 phía lớn nhất của R nằm trong ρ .

Nếu ρ là ideal phải, chính qui, thực sự bất kỳ của R thì bao giờ ρ cũng nằm trong một ideal phải, tối đại, chính qui nào đó.

$J(R) = \bigcap \rho$ với ρ là ideal phải, tối đại, chính qui.

1.1.6.5. Định nghĩa phần tử tựa chính qui

Phần tử $a \in R$ được gọi là tựa chính qui phải nếu $\exists a' \in R : a + a' + aa' = 0$. Ta gọi a' là tựa nghịch đảo phải của a . Một ideal phải trong R được gọi là tựa chính qui phải nếu mọi phần tử của nó đều tựa chính qui phải.

Tương tự, ta có thể định nghĩa phần tử tựa chính qui trái.

Nhận xét

Nếu vành R có đơn vị thì phần tử $a \in R$ là tựa chính qui phải $\Leftrightarrow 1 + a$ có nghịch đảo phải trong R .

Từ $J(R) = \bigcap \rho$ với ρ là ideal phải, tối đại chính qui. Ta suy ra mệnh đề sau :

- i) $J(R)$ là ideal 2 phía và tựa chính qui phải.
- ii) Nếu ρ là ideal phải, tựa chính qui phải thì $\rho \subset J(R)$

1.1.6.6. Định lý

$J(R)$ là ideal phải, tựa chính qui phải của R và chứa mọi ideal phải tựa chính qui phải, do đó $J(R)$ là ideal phải, tựa chính qui phải lớn nhất của R .

1.1.6.7. Định nghĩa phần tử lũy linh – ideal lũy linh – Nil ideal

Phần tử $a \in R$ được gọi là phần tử lũy linh nếu $\exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0$.

Ideal Trái (phải, 2 phía) được gọi là Nil-ideal trái (phải, 2 phía) nếu mọi phần tử của nó đều lũy linh.

Ideal trái (phải, 2 phía) được gọi là lũy linh nếu $\exists n \in \mathbb{N} :$

$$a_1.a_2...a_n = 0, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \rho \text{ tức là } \exists n \in \mathbb{N} : \rho^n = (0).$$

Nhận xét

Nếu ρ là ideal lũy linh ($\rho^n = (0)$) thì nó là Nil-ideal, điều ngược lại không đúng .

Mọi phần tử lũy linh đều tựa chính qui.

1.1.6.8. **Bổ đề**

$J(R)$ chứa mọi Nil-ideal một phía.

1.1.6.9. **Định lý**

$$J(R/J(R)) = (0)$$

1.1.6.10. **Bảng tóm tắt cách xác định Radical-Jacobson**

$$\begin{aligned} J(R) &= \{ a \in R : Ma = (0), \forall M \text{ là } R\text{-môđun bất khả qui} \} \\ &= \cap A(M), \forall M \text{ là } R\text{-môđun bất khả qui} \\ &= \cap \rho, \rho \text{ chạy khắp các ideal phải, tối đại, chính qui.} \\ &= \cap (\rho : R), \rho \text{ chạy khắp các ideal tối đại, chính qui.} \\ &= \text{ideal phải, tựa chính qui phải lớn nhất của } R. \end{aligned}$$

1.2. CÁC LỚP VÀNH

1.2.1. VÀNH NỬA ĐƠN

1.2.1.1. **Định nghĩa**

Vành R được gọi là nửa đơn nếu : $J(R) = (0)$

1.2.1.2. **Định lý**

$R/J(R)$ là vành nửa đơn.

1.2.1.3. **Bổ đề**

Mọi ideal 2 phía A của vành nửa đơn R thì A là vành nửa đơn.

1.2.1.4. Định lý

Nếu A là ideal 2 phía của vành R thì $J(A) = J(R) \cap A$.

1.2.1.5. Định lý

$J(M_n(R)) = M_n(J(R))$. Với $M_n(R)$ là vành các ma trận vuông cấp n lấy hệ tử trong vành không giao hoán R nào đó.

1.2.2. VÀNH ARTIN

1.2.2.1. Định nghĩa

Một vành R được gọi là vành Artin phải nếu mọi tập khác trống các ideal phải của R đều có phần tử tối tiểu.

Để ngắn gọn ta gọi vành Artin phải là vành Artin.

Ta có thể định nghĩa vành Artin bằng cách khác

Vành A được gọi là vành Artin phải nếu mọi dãy giảm các ideal phải ρ_i , của A sẽ dừng sau hữu hạn bước nghĩa là đến một điểm nào đó các ρ_i đều bằng nhau.

Nhận xét

Trường, thể (vành chia) là vành Artin

Tổng trực tiếp của một số hữu hạn các vành Artin là vành Artin.

Mọi vành chỉ có một số hữu hạn các ideal phải là vành Artin.

Vành các ma trận vuông cấp n trên một trường hay thể là vành Artin.

Ảnh đồng cấu của vành Artin là vành Artin.

1.2.2.2. Định lý

Nếu R là vành Artin thì $J(R)$ là một ideal lũy linh.

Hệ quả

Trong một vành Artin, mọi nil-ideal đều là ideal lũy linh.

Nhận xét

Giả sử R là vành tùy ý, nếu R có ideal phải, lũy linh, khác 0 thì R sẽ có ideal 2 phía, lũy linh khác 0.

1.2.2.3. Định nghĩa phần tử lũy đẳng

Phần tử $e \in R$, $e \neq 0$ được gọi là lũy đẳng nếu $e^2 = e$.

1.2.2.4. **Bổ đề**

Giả sử, R là vành không có ideal lũy linh khác 0 , giả sử $\rho \neq (0)$ là ideal phải tối tiểu của vành R . Khi đó, ρ là ideal chính sinh bởi phần tử lũy đẳng nào đó trong R : $\rho = eR$.

Nhận xét

Từ bổ đề trên ta suy ra : trong vành không có ideal lũy linh khác 0 thì mọi ideal phải khác (0) tối tiểu đều là ideal chính sinh bởi phần tử lũy đẳng.

1.2.2.5. **Bổ đề**

Cho R là vành tùy ý, $a \in R$ sao cho $a^2 \cdot a$ lũy linh. Khi đó, hoặc chính a lũy linh hoặc tồn tại đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên sao cho $e = a \cdot f(a)$ là phần tử lũy đẳng khác 0 .

1.2.2.6. **Định lý**

Nếu R là vành Artin và $\rho \neq (0)$ là ideal phải không lũy linh của R thì ρ chứa phần tử lũy đẳng khác 0 .

1.2.2.7. **Định lý**

Nếu R là vành tùy ý và e là phần tử lũy đẳng trong R thì $J(eRe) = eJ(R)e$.

1.2.2.8. **Định lý**

Giả sử R là vành không có ideal lũy linh khác (0) và $e \neq 0$ là phần tử lũy đẳng trong R . Khi đó, eR (ideal chính sinh bởi e là ideal phải tối tiểu của $R \Leftrightarrow$ vành eRe là một thể.

Hệ quả

Nếu R là vành không có ideal lũy linh khác (0) và e là phần tử lũy đẳng trong R thì eR là ideal phải tối tiểu của $R \Leftrightarrow Re$ là ideal trái tối tiểu của R .

1.2.2.9. **Định lý**

Giả sử R là vành Artin, nửa đơn và $\rho \neq (0)$ là ideal phải bất kỳ của R thì $\rho = eR$ với e là phần tử lũy đẳng.

1.2.3. **VÀNH NGUYÊN THỦY**

1.2.3.1. **Định nghĩa**

Vành R được gọi là vành nguyên thủy nếu nó có môđun bất khả quy và trung thành.

Nhận xét

i) Nếu R là nguyên thủy thì $\exists M$ là R -modun bất khả quy và trung thành

$$\Rightarrow A(M) = \{r \in R : Mr = (0)\} = (0).$$

Xét ánh xạ $\varphi : R \rightarrow E(M)$

$$r \mapsto T_r : M \rightarrow M$$

$$m \mapsto mr$$

M trung thành $\Leftrightarrow \varphi$ đơn cấu

$$\Leftrightarrow R \text{ nhúng đẳng cấu vào trong } E(M)$$

$$\Leftrightarrow A(M) = \ker \varphi = (0)$$

ii) Nếu R nguyên thủy thì $J(R) = (0)$ vì R nguyên thủy thì $A(M) = (0)$ mà $J(R) = \bigcap A(M) = (0)$

Vậy mọi vành nguyên thủy đều nửa đơn

iii) Nếu R là vành bất kỳ với M là R -modun bất khả quy $\Rightarrow A(M)$ là ideal 2 phía của R và $R/A(M)$ là vành nguyên thủy.

iv) Nếu M là R -modun bất khả qui, ρ là ideal phải, tối đại, chính qui của R và nếu $M = R/\rho$ thì $A(M) = (\rho : R)$ là ideal 2 phía lớn nhất nằm trong ρ . Khi đó ta có $R/(\rho : R)$ là vành nguyên thủy.

1.2.3.2. Định lý

R là vành nguyên thủy $\Leftrightarrow$ tồn tại ρ là ideal phải tối đại, chính qui trong R sao cho $(\rho : R) = (0)$. Trong trường hợp đó R là vành nửa đơn, hơn nữa nếu vành nguyên thủy R giao hoán thì R là trường.

1.2.4. VÀNH ĐƠN

1.2.4.1. Định nghĩa

Vành R được gọi là vành đơn nếu $R^2 \neq (0)$ và trong R không có ideal thực sự ngoài (0) và R .

1.2.4.2. Mối liên quan giữa vành đơn – vành nửa đơn – vành Artin – vành nguyên thủy

i) Nếu R là vành đơn có đơn vị thì R là vành nửa đơn.

Thật vậy : Do R là vành đơn và có đơn vị nên $J(R)$ không thể bằng R , vậy $J(R) = (0)$. $\Rightarrow R$ là vành nửa đơn.

ii) Nếu R vừa là vành đơn vừa là vành Artin thì R là vành nửa đơn.

Thật vậy : Giả sử R là vành đơn $\Rightarrow R^2 \neq (0)$ mà R^2 là ideal của $R \Rightarrow R^2 = R$ (vì R là vành đơn) . Ta cần chứng minh $J(R) = (0)$. Giả sử $J(R) \neq (0)$ mà $J(R)$ là ideal của $R \Rightarrow J(R) = R$ (do R đơn) $\Rightarrow (J(R))^2 = R^2 = R$ cứ tiếp tục như thế ta có :

$(J(R))^n = R^n = R \neq (0)$ mà R là vành Artin nên không có phần tử lũy linh $\neq (0) \Rightarrow J(R) = (0) \Rightarrow R$ là vành nửa đơn

iii) Nếu R là vành nguyên thủy thì R là vành nửa đơn

Thật vậy : Giả sử R là vành nguyên thủy $\exists M$ là R – môđun bất khả qui trung thành

$$\Rightarrow A(M) = \{ r \in R : Mr = (0) \} = (0)$$

$$\Rightarrow J(R) = \cap A(M) = (0)$$

$$\Rightarrow R \text{ là vành nửa đơn}$$

iv) Nếu R vừa đơn vừa nửa đơn thì R là vành nguyên thủy

Thật vậy, để chứng tỏ R là vành nguyên thủy ta chứng tỏ trong R tồn tại ideal phải, tối đại chính qui mà $(\rho : R) = (0)$. Ta có : $(\rho : R)$ là ideal của R do R là vành đơn

$$\Rightarrow (\rho : R) = (0) \text{ hoặc } (\rho : R) = R.$$

$$\text{Nếu } (\rho : R) = R \Rightarrow \cap (\rho : R) = R \text{ (vô lý vì } R \text{ là vành nửa đơn)}$$

$$\Rightarrow J(R) = \cap (\rho : R) = (0). \text{ Vậy chỉ còn khả năng } (\rho : R) = (0)$$

$$\Rightarrow R \text{ là vành nguyên thủy.}$$

v) Nếu R là vành Artin – đơn thì R là vành nguyên thủy

Thật vậy : vì R -Artin $\Rightarrow J(R)$ lũy linh tức là $\exists n \in \mathbb{N} : \{ J(R) \}^n = (0)$. Mặt khác do R -đơn nên $R^2 \neq (0)$ mà R^2 là ideal 2 phía của $R \Rightarrow R^2 = R \neq (0)$ (do R đơn)

$\Rightarrow R^n = R \neq (0), \forall n \Rightarrow R$ không lũy linh $\Rightarrow J(R) \neq R$ mà $J(R)$ là ideal 2 phía của $R \Rightarrow J(R) = (0) \Rightarrow R$ nửa đơn.

Vậy R vừa đơn vừa nửa đơn

$$\Rightarrow R \text{ là vành nguyên thủy.}$$

1.2.5. VÀNH NGUYÊN TỐ

1.2.5.1. Định nghĩa

Vành R được gọi là vành nguyên tố nếu $\forall a, b \in R$ thì từ đẳng thức $aRb = (0) \Rightarrow a = 0$ hay $b = 0$.

1.2.5.2. Bổ đề

Vành R là vành nguyên tố nếu và chỉ nếu nó thỏa một trong các điều kiện sau:

- i) Linh hóa tử bên phải của một ideal phải khác (0) của R phải bằng (0) .
- ii) Linh hóa tử bên trái của một ideal trái khác (0) của R phải bằng (0)
- iii) Nếu A và B là 2 ideal của R và $AB = (0)$ thì suy ra $A = (0)$ hoặc $B = (0)$

1.2.5.3. Bổ đề

Mọi vành nguyên thủy đều là vành nguyên tố.

1.2.6. VÀNH ĐỐI

Nếu A là 1 vành bất kỳ, đặt A^* là vành với phép toán $+$ giống trong R , Còn phép toán nhân được định nghĩa là $a*b = b.a$ với $ab \in R$. Chúng ta gọi R^* là vành đối của R .

(Phản đẳng cấu : giữa 2 tập có cấu trúc A và B là đẳng cấu từ A đến đối của B .)

1.2.7. CÁC ĐỊNH LÝ

Giả sử R là vành nguyên thủy và M là R -môđun bất khả qui trung thành.

Theo bổ đề Schur's thì

$$\Delta = C(M) = \{\varphi \in E(M) : \varphi \circ T_r = T_r \circ \varphi, \forall r \in R\}$$

Là vành chia (hay thể) với
$$\begin{aligned} T_r : M &\rightarrow M \\ m &\mapsto mT_r = mr \end{aligned}$$

1.2.7.1. Định nghĩa tác động dày đặc

M là R -môđun bất khả qui. Đặt $\Delta = C(M)$ do bổ đề Schur's thì Δ là một thể và M có cấu trúc không gian vectơ trên thể Δ .

Vành R gọi là tác động dày đặc trong M (hay R dày đặc trong M) nếu với mỗi hệ vectơ $v_1, v_2, \dots, v_n \in M$ độc lập tuyến tính trên Δ và bất kỳ n phần tử $w_1, w_2, \dots, w_n$ trong M thì tồn tại $r \in R$ sao cho $w_i = v_i r$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Nhận xét

- i) Ở đây dày đặc được hiểu theo nghĩa : Lấy tùy ý hệ hữu hạn các vectơ của M độc lập tuyến tính trên Δ và một hệ hữu hạn bất kỳ của M , bao giờ cũng tồn tại phép biến đổi tuyến tính biến hệ độc lập tuyến tính này thành hệ kia.
- ii) Nếu $\dim_{\Delta} M = n$ (hữu hạn) thì $\text{Hom}_{\Delta}(M, M) = R$.

Thật vậy

$\forall r \in R$ phép nhân bên phải v_r là phép biến đổi tuyến tính của không gian vector M trên thể Δ : $\forall r \in R, r \equiv T_r \in \text{Hom}_\Delta(M, M)$ (1)

$\forall r \in \text{Hom}_\Delta(M, M)$; giả sử $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ là cơ sở của M , Đồng cấu f hoàn toàn được xác định nếu biết các ảnh

$\varepsilon_1 f, \varepsilon_2 f, \dots, \varepsilon_n f$. Theo tính chất dày đặc ta có $\exists r \in R$ sao cho ; $\forall w_1, w_2, \dots, w_n \in M \quad \varepsilon_i r = w_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$

$\Rightarrow r = f$. Vậy $\text{Hom}(M, M) \subset R$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \text{Hom}_\Delta(M, M) = R$.

1.2.7.2. Định lý dày đặc

Giả sử R là vành nguyên thủy và M là R -modun bất khả quy trung thành nếu $\Delta = C(M)$ thì R là vành dày đặc các phép biến đổi tuyến tính trong M trên Δ (nói tắt : R dày đặc trong M).

Chứng minh

Để chứng minh định lý trên ta cần chứng minh : $V \subset M$ là không gian vector hữu hạn chiều, $m \in M, m \notin V$ thì $\exists r \in R : Vr = 0$ và $mr \neq 0$

Thật vậy :

Nếu ta có điều kiện trên thì $mrR \neq 0$ ta dễ dàng chứng minh mrR là modun con của M trên R .

Do M bất khả quy trung thành $\Rightarrow mrR = M$. Ta tìm được $s \in R$ sao cho mrs tùy ý trong M và $Vrs = 0$. Giả sử, $v_1, v_2, \dots, v_n$ là hệ độc lập tuyến tính trên Δ ; $w_1, w_2, \dots, w_n \in M$. Gọi V_i là không gian của M trên sinh bởi các v_j ($i \neq j$) $\Rightarrow V_i = \langle v_j / i \neq j \rangle \Rightarrow v_i \notin V_i$

Do hệ $v_1, v_2, \dots, v_n$ độc lập tuyến tính nên $\forall i, \exists t_i \in R : w_i = v_i t_i$ và $V_i t_i = (0)$, đặt $t = t_1 + t_2 + \dots + t_n$. Khi đó, $w_i = v_i t, i = 1, 2, \dots, n$.

Ta chứng minh tính tương đương tức là nếu có điều trên thì tương đương với V là không gian vector con hữu hạn chiều của M trên Δ : $m \in M, m \notin V$ thì $\exists r \in R : Vr = 0 ; mr \neq 0$.

Ta chứng minh điều kiện trên bằng quy nạp theo số chiều của V .

- Nếu V là 0 chiều : $V = (0)$ đúng .

- Giả sử đúng với V có số chiều $\leq n - 1$.
- Ta chứng minh đúng với V là n chiều.

$$\text{Đặt } V = V_0 + W\Delta \Rightarrow \dim V_0 = \dim V - 1, w \notin V_0.$$

Áp dụng giả thiết quy nạp với $A(V_0) = \{ x \in V : V_0 \cdot x = (0) \}$. Với $y \notin V_0 \Rightarrow \exists r \in A(V_0) : yr \neq 0 \Rightarrow yA(V_0) \neq 0$. Nói cách khác : $mA(V_0) = 0 \Rightarrow m \in V_0$.

Hiển nhiên, $A(V_0)$ là ideal phải của R . Lấy $wA(V_0) \neq 0$ (do $w \notin V_0$) và $wA(V_0)$ là môđun con của $M \Rightarrow wA(V_0) = M$ (do M bất khả qui) . Dùng phản chứng :

Giả sử $m \in M, m \notin V$ và với mỗi r mà $Vr = 0$ thì $mr = 0$ (*)

Ta chứng minh (*) không thể xảy ra, đặt

$$T : M \rightarrow M$$

$$x \mapsto x.T = waT \text{ (với } x = wa)$$

$$\text{Với } a \in A(V_0) : xT = ma \Rightarrow waT = ma.$$

Giả sử, $x = x'$

$$\Rightarrow wa = wa' \Rightarrow w(a - a') = 0 \Rightarrow a - a' \text{ linh hóa toàn bộ mọi phần tử } A(w) \text{ mà}$$

$$V_0(a - a') = 0 \Rightarrow V(a - a') = 0 \text{ (do } V_0 \subset V \subset w \text{) } \Rightarrow m(a - a') = 0$$

$$\Rightarrow ma = ma' \Rightarrow xT = x'T \Rightarrow T \text{ là ánh xạ}$$

- Dễ thấy $T \in E(M)$
- $(x_1 + x_2)T = (wa_1 + wa_2)T = ma_1 + ma_2 = x_1T + x_2T$

$$\Rightarrow T \text{ là tự đồng cấu.}$$

- Ta chứng minh $T \in \Delta$

$\forall x \in M, x = wa, a \in A(V_0), \forall r \in R \Rightarrow ar \in A(V_0)$ (do $A(V_0)$ là ideal phải của R) Ta xét : $xr = (wa)r = w(ar)$, mà $(xr)T = ((wa)r)T = w(ar)T = m(ar) = (ma)r = (xT)r$.

$$\bullet \quad m \in V : \forall a \in A(V_0) \Rightarrow ma = (wa)T = (wT)a$$

$$\Rightarrow (m - wT)a = 0, a \in A(V_0) \Rightarrow m - wT \in V_0$$

$$\Rightarrow m \in V_0 + wT \subset V_0 + w\Delta = V \text{ (vô lý) } \Rightarrow mr \neq 0$$

1.2.7.3. Định lý

Giả sử R là vành nguyên thủy. Khi đó tồn tại thể Δ để hoặc $R \cong \Delta_n$ (vành các ma trận vuông cấp n trên Δ) hoặc với mọi số nguyên dương m tồn tại các vành con S_m của R mà đồng cấu lên Δ_m tức là Δ_m là ảnh đồng cấu của S_m .

Chứng minh

Do R là vành nguyên thủy, Δ là thể nên theo định lý dày đặc 1.8.2 $\Rightarrow R$ là vành tác động dày đặc các phép biến đổi tuyến tính của không gian vector V trên thể Δ .

- Nếu V hữu hạn chiều trên Δ thì do R dày đặc trên $V \Rightarrow R$ đẳng cấu với vành các phép biến đổi tuyến tính của Δ trên V đó là Δ_n với $n = \dim_{\Delta} V$

Vậy $R \cong \Delta_n$.

- Nếu V không hữu hạn chiều trên Δ . Giả sử $v_1, v_2, \dots, v_n$ là tập vô hạn các phần tử không độc lập tuyến tính của V , đặt

$V_m = v_1\Delta + v_2\Delta + \dots + v_m\Delta$ và giả sử $S_m = \{x \in R : V_m.x \subset V_m\}$ theo định lý dày đặc (1.8.2) thì vành các phép biến đổi tuyến tính của Δ có thể bị cảm sinh bởi các phần tử của R . Theo định lý note $\Rightarrow S_m/W_m \cong \Delta_m$ với

$$W_m = \{x \in S_m : V_m.x = (0)\}$$

1.2.7.4. Định lý Wedderburn-Artin

Giả sử, R là vành Artin đơn thì R đẳng cấu với D_n với D_n là tập tất cả ma trận vuông cấp n trên thể D . Ở đây, n là duy nhất còn D được xác định sai khác một phép đẳng cấu. ngược lại, nếu D là thể tùy ý thì D_n là vành Artin đơn.

Chứng minh

- Trước hết ta chứng minh R là vành nguyên thủy:
 - o Vì R là vành Artin $\Rightarrow J(R)$ lũy linh tức là $\exists n \in \mathbb{N} : \{J(R)\}^n = (0)$
 - o Vì R đơn nên $R^2 \neq 0$ mà R^2 là ideal 2 phía của R , do R đơn nên $R^2 = R \neq 0 \Rightarrow R^n = R \neq 0, \forall n \Rightarrow R$ không lũy linh $\Rightarrow J(R) \neq R$ mà $J(R)$ là ideal 2 phía của R và R đơn $\Rightarrow J(R) = 0. \Rightarrow R$ nửa đơn.

Vậy R vừa đơn vừa nửa đơn $\Rightarrow R$ nguyên thủy $\Rightarrow R$ có M là môđun bất khả qui trung thành.

Khi đó, M là không gian vector trên thể $D = C(M)$ vành các giao hoán tử của R trên M . Theo định lý dày đặc 1.8.2

$\Rightarrow R$ dày đặc trong $\text{Hom}_D(M, M)$

- Ta chứng minh M hữu hạn chiều trên D.

Thật vậy, giả sử tồn tại một dãy vô hạn các phần tử $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ của M độc lập tuyến tính trên D.

Gọi $\rho_m = \{ x \in R / v_i x = 0, i = 1, 2, \dots, m \}$ thì $\rho_1 \supset \rho_2 \supset \dots \supset \rho_m \supset \dots$

Là dãy giảm các ideal phải của R, vì :

- ρ_m đóng kín với phép cộng : $v_i(x + y) = v_i x + v_i y = 0$
- $\rho_m R \subset \rho_m$ vì $\forall x \in \rho_m, \forall r \in R$ thì $v_i(xr) = (v_i x)r = 0r = 0 \Rightarrow xr \in \rho_m$.
- Dãy trên giảm nghiêm ngặt : lấy $x \in \rho_2 \Rightarrow x$ linh hóa $v_1, v_2 \Rightarrow x$ linh hóa $v_1 \Rightarrow x \in \rho_1$ nhưng do tính chất dày đặc nên $\exists r \in R, \exists y \in R$ để $v_1 y = 0; v_2 y = v_2$; vì $v_1 y = 0 \Rightarrow y \in \rho_1; v_2 y = v_2 \neq 0 \Rightarrow y \notin \rho_2 \Rightarrow \rho_2 \subset \rho_1$. Tương tự $\rho_{m+1} \subset \rho_m$. Điều này trái giả thiết là R là vành Artin, Vậy M hữu hạn chiều.

• Giả sử M có số chiều là m khi đó do R dày đặc trên $\text{Hom}_D(M, M)$ vì thế $R \cong \text{Hom}_D(M, M) \cong D_m$.

• Bây giờ, ta chứng minh n duy nhất nghĩa là nếu $D_m \cong \Delta_n$; D, Δ là thể thì $m = n$ và $D \cong \Delta$.

Thật vậy, $\varphi : D_m \cong \Delta_m$, lấy $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in D_m$. Giả sử, $f = \varphi(e)$, vì $\rho_1 = eD_m$

là ideal phải tối tiểu của D_m nên $f\Delta_n$ là ideal phải tối tiểu của Δ_n bằng cách thay đổi hệ

số ma trận của f có dạng $\begin{bmatrix} I_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$

Với I_r là ma trận đơn vị cấp $r \times r$. Nhưng vì $f\Delta_n$ là ideal phải tối tiểu của Δ_n nên $r =$

1. Vậy $f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D \cong eD_m e \cong f\Delta_n f \cong \Delta \Rightarrow D \cong \Delta$ mà eD_m là không gian

vector m chiều trên D, $f\Delta_n$ là không gian vector n chiều trên Δ từ đẳng cấu đã cho $\Rightarrow m = n$.

• Ngược lại : giả sử D là 1 thể thì D_n là vành các ma trận vuông cấp n lấy phần tử trên D.

• Ta chứng minh D_n là vành đơn nghĩa là chứng minh D_n không có ideal 2 phía khác (0) và D_n .

Thật vậy : Giả sử $A \neq (0)$ là ideal 2 phía của D_n . Vì $A \neq (0)$ nên

$$\exists (a_{ij})^{n \times n} \neq (0)^{n \times n} \Rightarrow \exists a_{ij} \neq 0 \in D. \text{ Giả sử } E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \text{ là ma trận có}$$

phần tử đơn vị 1 thuộc dòng i, cột j, các phần tử còn lại bằng 0 thì $E_{ij} \in D_n$, do A là ideal 2 phía của D_n , nên :

$$E_{1j} \cdot (a_{ij})^{n \times n} \cdot E_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \in A \text{ lại vì } \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{ij}} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \in D_n$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{ij} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{ij}} & 0 & \cdot & 0 \\ a_{ij} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} = E_{11} \in A$$

Tương tự ta có : $E_{22}, E_{33}, \dots, E_{nn} \in A \Rightarrow E_{11} + E_{22} + \dots + E_{nn} = E \in A$

$\Rightarrow \forall D \in D_n$ thì $E \cdot D \in A \Rightarrow D \subset A$. Vậy $A = D_n \Rightarrow D_n$ đơn.

Mặt khác D_n là không gian vector trên D với phép nhân ngoài là nhân các phần tử của D_n với phần tử của D : $(a_{ij})^{n \times n} \cdot r = (a_{ij} \cdot r)^{n \times n}$ vì $D_n \cdot D \subset D_n$. Hơn nữa là không gian vector n^2 -chiều với cơ sở là $\{E_{ij}\}_n, i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$.

Thật vậy nếu : $\sum_{i,j=1}^n E_{ij} r_{ij} = 0 \Rightarrow (r_{ij})^{n \times n} = (0)^{n \times n}$

$$\Rightarrow r_{ij} = 0, (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Vậy hệ $\{E_{ij}\}$ độc lập tuyến tính và $(a_{in})^{n \times n} D_n$ thì $(a_{ij})^{n \times n} = \sum_{i,j=1}^n E_{ij} a_{ij}$ hơn nữa, nếu ρ là

ideal phải của D_n ta sẽ chứng minh $\rho D_n \subset \rho \Rightarrow \rho$ là không gian vector con của D_n .

Thật vậy, vì ρ là ideal phải nên $\rho D_n \subset \rho$, khi đó $\forall (a_{ij})^{n \times n} \in \rho$

$$\forall r \in D \text{ thì } (a_{ij})^{n \times n} \begin{bmatrix} r & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & r & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & r \end{bmatrix} \in \rho \Rightarrow (a_{ij})^{n \times n} \cdot r \in \rho.$$

Vì D_n hữu hạn chiều $\Rightarrow D_n$ là vành Artin.

1.2.8. TRƯỜNG CON CỰC ĐẠI

1.2.8.1. Định nghĩa

Nếu D là thể và $S \subset D$. Ta gọi tâm tập của S trong D hay còn gọi là tâm hóa tử của S trong D là $C(S) = \{x \in D : xs = sx, \forall s \in S\}$

Cho K trường con của D , Khi đó K được gọi là trường con tối đại của D nếu $\exists K_1 : K \subset K_1 \subset D \Rightarrow K = K_1$

1.2.8.2. Bổ đề

Cho D là thể và K là trường con tối đại của $D \Leftrightarrow K = C(K)$.

1.3. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐẠI SỐ

1.3.1. ĐỊNH NGHĨA

A được gọi là đại số trên vành giao hoán có đơn vị k , nếu :

- + A là vành .
- + A là modun trên k .
- + $\forall a, b \in A ; \forall \alpha \in k : \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.
- Nếu A có đơn vị 1 thì : $\alpha \cdot x = \alpha \cdot (1 \cdot x) = (\alpha \cdot 1) \cdot x = x \cdot (\alpha \cdot 1)$
- Một đại số vừa có cấu trúc vành vừa có cấu trúc của không gian vector
- Trong trường hợp đặc biệt vành k là trường F thì A cũng được xem như là đại số trên trường F .

1.3.2. ĐẠI SỐ NHÂN

Giả sử A là đại số trên vành giao hoán k có đơn vị. Gọi $E(A)$ là các tự đồng cấu nhóm cộng A , $\forall a \in A$ ta định nghĩa :

$$\begin{aligned} T_a, L_a : A &\rightarrow A \\ x &\rightarrow x.T_a = xa \\ x &\rightarrow L_a.x = ax \end{aligned}$$

$\forall a, b \in A$. Ta có $T_a, L_a \in E(A)$ gọi $L(A)$ là vành con của $E(A)$ sinh bởi T_a, L_b

$$L(A) = \left\{ T_a + L_b + \sum_i T_{a_i} L_{b_i} : a, b, a_i, b_i \in A \right\}$$

$\Rightarrow L(A)$ được gọi là đại số nhân.

1.3.3. ĐẠI SỐ ĐƠN

Trong phần này ta chỉ xét trên trường F .

A được gọi là đại số đơn trên trường F , nếu A là đại số trên F , $A^2 \neq (0)$ và A không có ideal 2 phía thực sự nào.

Nhận xét

A là đại số đơn trên trường $F \Leftrightarrow A$ là $L(A)$ -modun bất khả qui, trung thành.

1.3.4. ĐẠI SỐ ĐƠN TÂM

Một đại số A được gọi là đơn tâm trên trường F nếu A là đại số đơn và có tâm đẳng cấu với F .

1.3.5. ĐẠI SỐ ĐỐI

A là đại số bất kỳ, đại số đối của A , ký hiệu là A^* , là đại số với

- phép cộng trong A^* là phép cộng của A ,
- phép nhân trong A^* là phép toán được định nghĩa như sau :

$$a*b = ba, \forall a, b \in A.$$

1.4. TÍCH TENSOR

1.4.1. ĐỊNH NGHĨA ÁNH XẠ SONG TUYẾN TÍNH

Cho R là vành có đơn vị, ký hiệu 1 , X_R là R -modun phải và ${}_R Y$ là R -modun trái, G là nhóm Abel. Một Ánh xạ $\varphi : X \times Y \rightarrow G$ được gọi là ánh xạ song tuyến tính nếu φ thỏa mãn các điều kiện sau :

a) φ là song cộng tính, tức là :

$$\forall x_1, x_2, x \in X, \forall y_1, y_2, y \in Y$$

$$\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y),$$

$$\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$$

b) φ Kết hợp đối với các phép nhân ngoài trên X và Y , tức là :

$$\varphi(xr, y) = \varphi(x, ry), \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall r \in V$$

1.4.2. ĐỊNH NGHĨA TÍCH TENSOR

Cho X_R và ${}_R Y$ là các modun phải và modun trái trên cùng 1 vành hệ tử R . Tích Tensor của các modun X và Y là nhóm Aben nào đó, Ký hiệu $X \otimes_F Y$ sao cho có ánh

ánh xạ song tuyến tính $\tau: X \times Y \rightarrow G$ mà đối với bất kỳ ánh xạ song tuyến tính $\varphi: X \times Y \rightarrow G$ (với G là nhóm Abel) luôn luôn tồn tại duy nhất đồng cấu $f: X \otimes_F Y \rightarrow G$ thỏa mãn $\varphi = f \cdot \tau$

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\tau} & X \otimes_F Y \\ \varphi \downarrow & \square & \exists! f \\ G & & \end{array}$$

Ánh xạ τ trong định nghĩa nói trên được gọi là ánh xạ Tensor. Tích Tensor $X \otimes_F Y$, trong trường hợp vành con R xác định người ta cũng dùng ký hiệu $X \otimes Y$

1.4.2.1. Các tính chất

Nếu ta ký hiệu: $\tau(x, y) = x \otimes y, \forall x, y \in X \times Y$ thì

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y \\ x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2 \\ xr \otimes y &= x \otimes ry, \quad mx \otimes y \\ \forall x_1, x_2, x \in X &\quad ; y_1, y_2, y \in Y \end{aligned}$$

Ngoài ra:

$$\begin{aligned} \forall m \in Z \quad mx &\in (X, +) \\ mx \otimes y &= m(x \otimes y) = (x \otimes my) \end{aligned}$$

1.4.2.2. Mệnh đề

Cho Thê D và hai không gian vectơ M, N trên D ; trong $M \otimes_D N$ ta có:

- a) Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là họ bất kỳ các vectơ độc lập tuyến tính trong N thì
- $$\sum_i x_i \otimes a_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$$
- b) Nếu $b_1, b_2, \dots, b_n$ là họ bất kỳ các vectơ độc lập tuyến tính trong M thì

$$\sum_j b_j \otimes y_j = 0 \Rightarrow y_j = 0 (j = 1, 2, \dots, n)$$

1.4.2.3. Tính chất Tích Tensor giữa các modul

Cho M, N, P là các modul trên vành giao hoán R . Khi đó:

- a) $M \otimes N \cong N \otimes M$
- b) $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$
-

Chứng minh

a) Đặt $f: M \times N \rightarrow N \otimes M$ sao cho $f(m, n) \mapsto n \otimes m$.

Rõ ràng f là ánh xạ song tuyến tính. Do đó theo tính chất phổ dụng của tích Tensor tồn tại một đồng cấu $f': M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ sao cho $f'(m \otimes n) = n \otimes m$.

Theo phép đối xứng, tồn tại một đồng cấu $g': N \otimes M \rightarrow M \otimes N$ với $g'(n \otimes m) = m \otimes n$. Do đó, f' và g' là nghịch đảo của nhau, do đó chúng là đẳng cấu.

b) Đặt $f: M \times N \times P \rightarrow (M \otimes N) \otimes P$ với $f(m, n, p) = (m \otimes n) \otimes p$. Bây giờ, áp dụng tính chất phổ dụng của Tích Tensor với m cố định, chúng ta có một R-song tuyến tính ánh xạ $f': M \times (N \otimes P) \rightarrow (M \otimes N) \otimes P$ với $f': M \times (N \otimes P) \rightarrow (M \otimes N) \otimes P$. Lại tiếp tục áp dụng tính chất phổ dụng cho f' chúng ta có một đồng cấu $f'': M \otimes (N \otimes P) \rightarrow (M \otimes N) \otimes P$ với $f''(m \otimes (n \otimes p)) = (m \otimes n) \otimes p$. Cũng giống như chứng minh ở phần trên chúng ta có thể tìm được nghịch đảo của f'' và đó là điều cần chứng minh.

1.4.3. TÍCH TENSOR CÁC ĐẠI SỐ

1.4.3.1. Định nghĩa

Cho A, B là hai đại số trên vành giao hoán trong K , trong $A \otimes_K B$ định nghĩa phép nhân như sau:

$$\left(\sum_i a_i \otimes b_i \right) \left(\sum_j c_j \otimes d_j \right) = \sum_{i,j} a_i c_j \otimes b_i d_j \quad a_i, c_i \in A; b_j, d_j \in B$$

1.4.3.2. Mệnh đề

Tập $A \otimes_K B$ cùng với phép nhân trên lập thành một đại số gọi là đại số của A và B .

Định lý Wedderburn có đề cập đến các đại số đơn tâm đẳng cấu với các ma trận trên thể D và sử dụng phép toán tích Tensor trên các ma trận nên để hiểu thêm về ĐL Wedderburn ta trình bày định nghĩa và các tính chất của tích Tensor trên các ma trận (còn gọi là tích Kronecker).

1.4.4. TÍCH KRONECKER

1.4.4.1. Định nghĩa

Cho $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Khi đó, Tích Kronecker (hay tích Tensor trên ma trận) của A và B được định nghĩa là một ma trận:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$$

Một cách hiển nhiên, Định nghĩa tương tự nếu A và B là các ma trận số Phức. Để không làm rườm rà các ví dụ và tính chất. Trong phần này chúng ta chủ yếu xét trên ma trận số thực.

1.4.4.2. Ví dụ

a) Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Khi đó :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} B & 2B & 3B \\ 3B & 2B & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Nhận xét $A \otimes B \neq B \otimes A$

b) $\forall B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, ta có $I_2 \otimes B = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ là

Thay thế I_2 bằng I_n ta được một ma trận khối (**block matrix** - là ma trận có các phần tử là một ma trận) có các phần tử trên đường chéo chính là ma trận B, các phần tử còn lại là 0.

c) Cho B là một ma trận cấp 2 tùy ý. Khi đó

$$B \otimes I_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

d) Cho $x \in R^m, y \in R^n$. Khi đó

$$\begin{aligned} x \otimes y &= [x_1 y^T, \dots, x_m y^T]^T \\ &= [x_1 y_1, \dots, x_1 y_n, x_2 y_1, \dots, x_m y_n]^T \in R^{mn} \end{aligned}$$

e) Cho $x \in R^m, y \in R^n$. Khi đó

$$\begin{aligned} x \otimes y^T &= [x_1 y, \dots, x_m y]^T \\ &= \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & \dots & x_m y_n \end{bmatrix} \\ &= x y^T \in R^{m \times n} \end{aligned}$$

1.4.4.3. Tính chất của tích Kronecker

4.4.3.1. Định lý

Cho $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{r \times s}$, $C \in R^{n \times p}$ và $D \in R^{r \times t}$. Khi đó

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD (\in R^{mr \times pt})$$

4.4.3.2. Định lý

$$\text{Với mọi } A \text{ và } B \quad (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

4.4.3.3. Định lý

Nếu $A \in R^{n \times n}$ và $B \in R^{m \times m}$ là các ma trận đối xứng, khi đó $A \otimes B$ là đối xứng

4.4.3.4. Định lý

Nếu A và B là không suy biến khi đó

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

4.4.3.5. Định lý

Nếu $A \in R^{n \times n}$ và $B \in R^{m \times m}$ là chuẩn tắc khi đó $A \otimes B$ là chuẩn tắc.

CHƯƠNG 2 : XÂY DỰNG NHÓM BRAUER

2.1. ĐỊNH NGHĨA

Một Đại Số A được gọi là đơn tâm trên trường k nếu A là Đại số Đơn có k là tâm.

Các ví dụ

- a) Ví dụ dễ thấy nhất cho các đại số đơn tâm chính là các ma trận đại số trên k : Với bất kỳ số tự nhiên n , k -đại số $M_n(k)$ (hay k_n) của ma trận $n \times n$ với các hệ số thuộc k

Chú ý rằng k_n không phải là đại số chia với $n \geq 2$, bởi vì các ma trận khác 0 có hạng ít nhất là $n - 1$ là không khả nghịch.

- b) Một ví dụ khác về đại số đơn mà là đại số chia (khác k), Đặt $k = \mathbb{R}$, và Đặt $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ là $\mathbb{R}$ -Đại số kết hợp của bộ 4 sinh bởi $1, i, j, -1$ thỏa mãn điều kiện sau :

$$i^2 = -1$$

$$j^2 = -1$$

$$ij = -ji$$

Chú ý rằng, $(ij)^2 = -1$ là hệ quả từ các tính chất trên

Ta có $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ là một đại số chia

2.2. BỔ ĐỀ

Nếu A là đại số đơn tâm trên trường k và B là một đại số đơn chứa k trong tâm của nó khi đó $A \otimes_k B$ là đơn

Chứng minh

Ta cần chứng minh $A \otimes_k B$ không có ideal thực sự.

Cho $U \neq (0)$ là 1 ideal của $A \otimes_k B$.

Do $U \neq (0)$ nên $\exists u \neq 0 \in U$

Ta có thể viết $u = \sum a_i \otimes b_i$ ($a_i \in A; b_i \in B$) trong đó b_i là độc lập tuyến tính trên trường k .

Ta gọi số lượng các số a_i khác 0 trong khai triển của u là độ dài của u .

Chọn $u \in U$, $u \neq 0$ có độ dài m ngắn nhất.

$$u = \sum_1^m a_i \otimes b_i$$

Với $r, s \in A$ khi đó theo tích Tensor các đại số ta có :

$$(r \otimes 1)u(s \otimes 1) = \sum_1^m r a_i s \otimes b_i \in U.$$

Vì A là đơn $A a_i A = A$ nên ta đặt :

$$r a_i s = a'_i \in A, i = \overline{1, m}$$

Không mất tính tổng quát ta có thể sắp xếp các a'_i sao cho $a'_1 = 1$

Do đó, ta có phần tử $u_1 \in U$ có độ dài bằng u và nó có dạng :

$$u_1 = 1 \otimes b_1 + a'_2 \otimes b_2 + \dots + a'_m \otimes b_m.$$

Cho $a \in A$ khi đó :

$$\begin{aligned} (a \otimes 1)u_1 - u_1(a \otimes 1) &\in U \text{ (do } U \text{ là ideal)} \\ &= (a \otimes 1) \left(\sum_1^m a'_i \otimes b_i \right) - \left(\sum_1^m a'_i \otimes b_i \right) (a \otimes 1) \\ &= \sum_1^m a a'_i \otimes b_i - \sum_1^m a'_i a \otimes b_i \\ &= \sum_1^m (a a'_i - a'_i a) \otimes b_i \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } a'_1 = 1$$

$$\Rightarrow a a'_1 - a'_1 a = a - a = 0$$

Do đó :

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_1^m (a a'_i - a'_i a) \otimes b_i \\ &= \sum_2^m (a a'_i - a'_i a) \otimes b_i \\ &= (a'_2 a - a a'_2) \otimes b_2 + \dots + (a'_m a - a a'_m) \otimes b_m \in U \end{aligned}$$

Ta thấy (*) có độ dài là $m - 1 < m$

Nhỏ hơn độ dài của u_1 . Suy ra vô lý vì u_1 có độ dài ngắn nhất

Do đó, $(a \otimes 1)u_1 - u_1(a \otimes 1) = 0$. Hay

$$\begin{aligned} \sum_2^m (aa'_i - a'_i a) \otimes b_i &= 0 \\ \Rightarrow \sum_2^m (aa'_i - a'_i a)(1 \otimes b_i) &= 0 \end{aligned}$$

Mặt khác vì các b_i là Độc Lập tuyến tính trên k ,

theo tính chất của tích Tensor ta có $1 \otimes b_i$ là độc lập tuyến tính trên $A \otimes 1$.

Suy ra
$$\begin{aligned} aa'_i - a'_i a &= 0 \\ \Rightarrow aa'_i &= a'_i a, i = \overline{2, m}, \forall a \in A \end{aligned}$$

Suy ra $a'_i \in C(A)$ do đó phải thuộc k .

Do đó, đặt : $a'_i = \alpha_i \in k$. Ta có :

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \otimes b_1 + \alpha_2 \otimes b_2 + \dots + \alpha_m \otimes b_m \\ &= 1 \otimes (b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m) \in U \end{aligned}$$

Do b_i là độc lập tuyến tính trên k , các $\alpha_i = a'_i \neq 0$ nên :

$$b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m \neq 0$$

Đặt
$$b = b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m \neq 0$$

Xét $(1 \otimes B)u_1(1 \otimes B)$, ta có :

$$(1 \otimes B)u_1(1 \otimes B) = 1 \otimes BbB = 1 \otimes B \subset U$$

$$\Rightarrow (A \otimes 1)(1 \otimes B) \subset U \quad (\text{do } U \text{ là ideal của } A \otimes B)$$

$$\Rightarrow (A \otimes 1)(1 \otimes B) = A \otimes B \subset U$$

Mà $U \subset A \otimes B$ (do U là ideal)

$$\Rightarrow A \otimes B = U$$

Do đó $A \otimes_k B$ là đơn ■

Nếu A và B đều là đơn tâm trên trường k theo bổ đề trên chúng ta có $A \otimes_k B$ là đơn. Tuy nhiên, ở đây chúng ta có thể tính toán rõ ràng tâm của nó.

2.3. ĐỊNH LÝ

Nếu A và B là đơn tâm trên trường k , khi đó $A \otimes_k B$ là đơn tâm trên k

Chứng minh

Theo bổ đề trên, ta có A và B là đơn nên ta có $A \otimes_k B$ là đơn. Để chứng minh định lý, ta phải chứng minh rằng tâm của $A \otimes_k B$ là k .

Giả sử rằng $z = \sum a_i \otimes b_i$ là phần tử thuộc tâm của $A \otimes_k B$. (Trong đó $a_i \in A$ và $b_i \in B$, b_i độc lập tuyến tính trên k).

Với mọi $a \in A$, ta có :

$$\begin{aligned} az &= za \\ \Rightarrow az - za &= 0 \\ \Rightarrow (a \otimes 1)z - z(a \otimes 1) &= 0 \\ \Rightarrow a \otimes 1 \sum a_i \otimes b_i - \sum a_i \otimes b_i (a \otimes 1) &= 0 \\ \Rightarrow \sum aa_i \otimes b_i - \sum a_i a \otimes b_i &= 0 \\ \Rightarrow \sum (aa_i - a_i a) \otimes b_i &= 0 \end{aligned}$$

Do b_i độc lập tuyến tính

$$\Rightarrow aa_i - a_i a = 0, \quad \text{Với mọi } a \in A.$$

$$\Rightarrow a_i \in C(A)$$

$$\Rightarrow a_i \in k$$

Đặt $a_i = \alpha_i \in k$ khi đó, ta có :

$$z = \sum a_i \otimes b_i = 1 \otimes \sum \alpha_i b_i = 1 \otimes b$$

$$\Rightarrow z \in C(A \otimes B)$$

$\forall x \in B$

$$\begin{aligned} z(1 \otimes x) - (1 \otimes x)z &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= (1 \otimes b)(1 \otimes x) - (1 \otimes x)(1 \otimes b) \\ &= 1 \otimes bx - 1 \otimes xb = 1 \otimes (bx - xb) \\ \Rightarrow bx - xb &= 0, \forall x \in B \Rightarrow b \in C(B) \\ \Rightarrow b &\in k \end{aligned}$$

Hay nói cách khác $z = \beta(1 \otimes 1)$ với $\beta \in k$

Chúng ta thấy rằng tâm của $A \in B$ là $k(1 \otimes 1)$, đó là k nếu ta đồng nhất k với $k(1 \otimes 1)$

Vậy $A \otimes_k B$ là đại số đơn tâm trên trường k ■

2.4. ĐỊNH LÝ

Nếu D là 1 đại số chia có chiều hữu hạn trên tâm Z của nó khi đó chiều của D trên Z là một số chính phương

Chứng minh

Cho $\bar{Z}$ là một đại số đóng của Z , Do D hiển nhiên là đơn tâm trên Z theo bổ đề 1 chúng ta có $\bar{D} = D \otimes_Z \bar{Z}$ là đơn, Hơn nữa, $[D : Z] = [\bar{D} : \bar{Z}]$

Bây giờ theo định lý Wedderburn, bởi vì $\bar{D}$ là đơn và hữu hạn chiều trên trường đại số đóng $\bar{Z}$, $\bar{D} \cong \bar{Z}_n$

Do đó, $[\bar{D} : \bar{Z}] = n^2$,

Mà $[D : Z] = [\bar{D} : \bar{Z}]$ nên $[D : Z] = n^2$

Nếu A là đơn và có chiều hữu hạn trên tâm Z của nó theo Định Lý Wedderburn. $A \cong D_m$ với D là một đại số chia hữu hạn chiều với Z là tâm của nó. Theo định lý trên $[D : Z] = n^2$ do đó, $[A : Z] = (n.m)^2$

Bởi vậy, chúng ta có :

2.5. HỆ QUẢ

Nếu A là một đại số đơn có chiều hữu hạn trên tâm Z của nó, khi đó $[A : Z]$ là số chính phương.

2.6. ĐỊNH LÝ

Nếu A là một đại số đơn có chiều hữu hạn trên tâm k của nó. Khi đó $A \otimes_k A^* \cong k_n$ với $n = \dim_k A$.

Chứng minh

Xem xét A như là một không gian vector trên k . Gọi $L(A)$ vành các phép biến đổi tuyến tính của A trên k

$L(A) = \{ f : A \rightarrow A \}$ trong đó f là một phép biến đổi tuyến tính

Theo định nghĩa, các phần tử trong $L(A)$ là ánh xạ tuyến tính nên mỗi phần tử sẽ tương ứng với một ma trận cấp $n \times n$ trong k_n

Do đó $L(A) \subseteq k_n$ và $L(A)$ có chiều n^2 trên k

Để chứng minh định lý, ta sẽ chứng minh 3 bước sau :

$$1) A \otimes A^* \approx A_r \otimes A_l$$

$$2) A \otimes A^* \approx A_r A_l$$

$$3) A_r A_l = L(A)$$

Bước 1

Đặt $A_r = \{T_a | a \in A\}$ với $T_a \in L(A), x \mapsto xa$

$A_l = \{L_a | a \in A\}$ với $L_a \in L(A), x \mapsto ax$

Rõ ràng $A_r \subseteq A$ và $A_l \subseteq A^*$

Do đó theo tính chất của tích Tensor ta có :

$$A \otimes A^* \approx A_r \otimes A_l \quad (1)$$

Bước 2

Tiếp theo ta chứng minh : $A \otimes A^* \approx A_r A_l$

Ta đặt ánh xạ φ từ $A_r \otimes A_l \rightarrow A_r A_l \subset L(A)$ theo quy tắc
 $\varphi\left(\sum T_a \otimes L_b\right) = \sum T_a L_b$ với $T_a \otimes L_b \in A_r \otimes A_l$

Hiển nhiên ta có φ là toàn ánh từ $A_r \otimes A_l$ vào $A_r A_l$.

Ta chứng minh φ là đồng cấu

Ta có

$$\begin{aligned} & \forall T_a \in A_r, L_b \in A_l, x \in A \\ & \begin{cases} T_a \cdot L_b(x) = T_a(bx) = bxa \\ L_b \cdot T_a(x) = L_b(xa) = bxa \end{cases} \\ & \Rightarrow T_a \cdot L_b = L_b \cdot T_a \end{aligned}$$

Như vậy, bất kỳ phần tử trong A_r giao hoán với mỗi phần tử trong A_l

$$\begin{aligned}
& \forall T_a \otimes L_b, T_{a'}, \otimes L_{b'} \in A_r \otimes A_l \\
& \varphi((T_a \otimes L_b) \cdot (T_{a'} \otimes L_{b'})) = \varphi(T_a T_{a'} \otimes L_b L_{b'}) \\
& = T_a T_{a'} L_b L_{b'} = T_a L_b T_{a'} L_{b'} = (T_a L_b)(T_{a'} L_{b'}) \\
& = \varphi(T_a \otimes L_b) \cdot \varphi(T_{a'} \otimes L_{b'})
\end{aligned}$$

Ta có A_r và A_l là đơn tâm trên F vì thế theo định lý 3 $A_r \otimes A_l$ cũng đơn tâm.

Mà $\ker \varphi$ là ideal của $A_r \otimes A_l$

Suy ra $\text{Ker} \varphi = 0$ nên φ là đơn cấu.

Do đó ánh xạ φ là đẳng cấu.

$$\Rightarrow A \otimes A^* \approx A_r A_l \quad (2)$$

Bước 3

Mặt khác

$$\begin{aligned}
n^2 &= \dim_k L(A) \geq \dim_k A_r A_l = \dim_k (A \otimes A^*) = (\dim_k A)^2 = n^2 \\
&\Rightarrow \dim_k L(A) = \dim_k A_r A_l.
\end{aligned}$$

Do $A_r A_l$ là không gian con của $L(A)$ chúng ta suy ra

$$A_r A_l = L(A) \quad (3).$$

Từ (1) (2) và (3), suy ra $A \otimes A^* \approx A_r A_l = L(A)$ ■

Từ các kết quả của các định lý và bổ đề trên, ta đã có các công cụ cần thiết để phục vụ cho việc xây dựng nhóm Brauer.

Ta bắt đầu xây dựng nhóm Brauer của các đại số đơn tâm trong trường k bằng cách định nghĩa một quan hệ tương đương thích hợp

2.7. ĐỊNH NGHĨA (QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG)

Nếu A và B là Đại số đơn tâm hữu hạn chiều trên trường k khi đó $A \sim B$ nếu có số nguyên m và n sao cho $A \otimes_k k_m \approx B \otimes_k k_n$

Một cách xem xét khác về quan hệ tương đương này như sau : Theo định lý Wedderburn $A \approx D_1 \otimes_k k_n$ và $B \approx D_2 \otimes_k k_m$ với D_1, D_2 là các Đại số chia chiều hữu hạn nhận k làm tâm. Khi đó $A \sim B$ khi và chỉ khi $D_1 \approx D_2$.

Hay nói cách khác, quan hệ tương đương $\sim$ xác định trên các đại số đơn trên trường F thành quan hệ $\sim$ xác định trên các đại số chia trên trường F

2.8. BỔ ĐỀ

Nếu k là một trường, khi đó

- i) $R_n \cong R \otimes_k k_n$ với mọi đại số R với đồng nhất thức trên k .
- ii) $k_m \otimes k_n \cong k_{mn}$

Chứng minh

i) xét ánh xạ tuyến tính trong k sau :

$$\begin{aligned} \varphi: R \times k_n &\rightarrow R_n \\ (r, [a_{ij}]) &\mapsto [ra_{ij}] \end{aligned}$$

Có một mở rộng tuyến tính duy nhất φ thành một ánh xạ tuyến tính trên k từ $R \otimes_k k_n$ vào R_n . Ánh xạ có :

$$\begin{aligned} &\varphi((r \otimes [a_{ij}])(r' \otimes [a'_{ij}])) \\ &= \varphi(rr' \otimes [a_{ij}][a'_{ij}]) \\ &= rr'[a_{ij}][a'_{ij}] \\ &= r[a_{ij}]r'[a'_{ij}] \quad (a_{ij} \in k) \\ &= \varphi(r \otimes_F [a_{ij}])\varphi(r' \otimes [a'_{ij}]) \end{aligned}$$

Và do mỗi φ là một đồng cấu trên k đại số. Nếu $\{r_i\}$ là một không gian vector cơ sở của R trên k và nếu $\{E_{ij}\}$ là một cơ sở thông thường của k_n , khi đó $\varphi(r_i \otimes E_{ij}) = r_i E_{ij}$ và nó kéo theo rằng φ biến một không gian vector cơ sở vào một không gian vector cơ sở. Do đó, φ là ánh xạ 1-1.

ii) Từ kết quả câu (a) cho ta $k_m \otimes_k k_n \cong (k_m)_n$ và mỗi phần tử của $(k_m)_n$ có thể đồng nhất với một phần tử của k_{mn} ma trận cấp mn theo tính chất của phép nhân của các ma trận. ■

2.9. NHÓM BRAUER

a. Chứng minh $\sim$ là quan hệ tương đương

- **Phản xạ :** $A \sim A$ là hiển nhiên vì $A \otimes_k k_n \cong A \otimes_k k_n$
- **Đối xứng :** $A \sim B \Rightarrow A \otimes_k k_n \cong B \otimes_k k_m \Rightarrow B \otimes_k k_m \cong A \otimes_k k_n \Rightarrow B \sim A$
- **Bắc cầu :** Theo bổ đề 2.8 ta có :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} A \sim B \Rightarrow \exists m, n: A \otimes_k k_n \cong B \otimes_k k_m \\ B \sim C \Rightarrow \exists t, l: B \otimes_k k_t \cong C \otimes_k k_l \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} A \otimes_k k_n \otimes_k k_t \cong B \otimes_k k_m \otimes_k k_t \\ B \otimes_k k_t \otimes_k k_m \cong C \otimes_k k_l \otimes_k k_m \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} A \otimes_k k_{nt} \cong B \otimes_k k_{mt} \\ B \otimes_k k_{tm} \cong C \otimes_k k_{lm} \end{cases} \text{ (Theo bổ đề 2.8)} \\
& \Rightarrow \begin{cases} A \otimes_k k_{nt} \cong B \otimes_k k_{mt} \\ B \otimes_k k_{mt} \cong C \otimes_k k_{lm} \end{cases} \\
& \Rightarrow A \otimes_k k_{nt} \cong C \otimes_k k_{lm} \\
& \Rightarrow A \sim C
\end{aligned}$$

b. Chứng minh quan hệ $\sim$ được định nghĩa tốt :

Giả sử rằng, vì $A \sqsubseteq A'$ và $B \sqsubseteq B'$

Ta có, với $A \sqsubseteq D_m$ và $A' \sqsubseteq D_{m'}, B \sqsubseteq E_n, B' \sqsubseteq E_{n'}$. Trong đó D và E là các đại số chia.

Khi đó, theo Bổ đề 2.8 ta có:

$$\begin{aligned}
A \otimes_k B & \sqsubseteq D_m \otimes_k E_n \sqsubseteq D \otimes_k k_m \otimes_k E \otimes_k k_n \\
& \sqsubseteq D \otimes_k k_m \otimes_k k_n \otimes_k E \\
& \sqsubseteq D \otimes_k k_{mn} \otimes_k E \sqsubseteq (D \otimes_k E) \otimes_k k_{mn} \\
& \sqsubseteq (D \otimes_k E)_{mn}
\end{aligned}$$

Tương tự,

$$A' \otimes_k B' \sqsubseteq (D \otimes_k E)_{m'n'}$$

Do đó, $A \otimes_k B \sqsubseteq A' \otimes_k B'$.

c. Chứng minh $B(k)$ là nhóm Aben

Đặt $\mathbf{B}(k)$ như là tập các lớp tương đương theo quan hệ tương đương $\sim$ của đại số đơn tâm hữu hạn chiều trên k

Ký hiệu $[A] \in B(k)$ là một lớp các Đại số đơn tâm hữu hạn chiều trên k tương đương với A

Trên $B(k)$ ta định nghĩa phép toán Nhân như sau :

$$\text{Với } [A], [B] \in B(k) \text{ ta có phép toán } [A].[B] = [A \otimes_k B]$$

Theo **định lý 2.3** thì $B(k)$ là đóng với phép toán này

Ta chứng minh $B(k)$ là nhóm Aben với phép toán trên

• **Kết hợp :**

$$\begin{aligned}
 ([A].[B]).[C] &= [A \otimes_k B].[C] = [(A \otimes_k B) \otimes_k C] \\
 &= [A \otimes_k (B \otimes_k C)] = [A].[B \otimes_k C] = [A].([B].[C])
 \end{aligned}$$

- **Giao hoán :**

$$[A].[B] = [A \otimes_k B] = [B \otimes_k A] = [B].[A]$$

- **Phần tử đơn vị** là $[k]$

$$[A].[k] = [A \otimes_k k] = [A] \text{ vì } A \otimes_k k \cong A$$

- **Phần tử nghịch đảo :**

Theo **định lý 2.6** ta có

$$A \otimes_k A^* \cong k_n$$

Do đó

$$\forall [A] \in B(k), \exists [A^*] \in B(k) \text{ sao cho } [A].[A^*] = [k]$$

Nên $[A^*]$ là phần tử đối của phần tử $[A]$

Vậy $B(k)$ là nhóm Aben

$B(k)$ được gọi là nhóm Brauer của k .

CHƯƠNG 3 : CÁC VÍ DỤ VỀ NHÓM BRAUER.

Ở phần trên, ta đã chứng minh được bất kỳ một trường k thì $B(k)$ là nhóm Abel. Tuy nhiên, bởi vì định nghĩa về nhóm Brauer của một trường k cố định là một định nghĩa rất trừu tượng nên trước tiên ta cần xây dựng những hình ảnh cụ thể về nhóm Brauer trong trường cụ thể thì mới có thể đi sâu vào nghiên cứu các tính chất và ứng dụng của nó.

Sau này nhóm Brauer còn có những ứng dụng khác rộng rãi trong lý thuyết số và trong hình học đại số, trong lý thuyết biểu diễn và trong K-lý thuyết. Vì trình độ có hạn của người viết chúng ta sẽ chỉ ra ở đây những hình ảnh cụ thể của nhóm Brauer và sẽ thấy rằng trong rất nhiều trường hợp cụ thể của trường k thì nhóm Brauer sẽ là nhóm tầm thường. Riêng trường hợp với $k = \mathbb{R}$, từ mối quan hệ của nhóm Brauer, Định lý Wedderburn và Định lý Fobenius chúng ta cũng xây dựng được nhóm Brauer không tầm thường.

TRONG TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ

3.1. ĐỊNH NGHĨA

Một trường k được gọi là một **trường đóng đại số** nếu mọi đa thức khác hằng $f \in k[X]$ có ít nhất một nghiệm trong k

Nhận xét

Từ định nghĩa trên, ta có một đa thức bậc n trong trường đóng đại số sẽ có đủ n nghiệm trong k nếu mỗi nghiệm được tính số lần bằng số bội của nó. Một thí dụ điển hình về trường đóng đại số là tập số phức $\mathbb{C}$.

3.2. ĐỊNH NGHĨA

Nếu k và K là các trường và k là một trường con của K . Chúng ta nói rằng K là một **mở rộng** của k , ký hiệu là $K | k$. **Bậc** của mở rộng, ký hiệu là $[K : k]$ là số chiều $\dim_k(K)$. $K | k$ là **mở rộng đại số** nếu với mọi phần tử α của K , tồn tại một đa thức khác hằng $f \in k[X]$ sao cho $f(\alpha) = 0$

3.3. BỔ ĐỀ (TOWER LAW)

Nếu ta có mở rộng trường $k \leq K \leq L$ khi đó $[L : k] = [L : K][K : k]$

Chứng minh

Cho $\{a_i\}$ là một cơ sở của L trên K và đặt $\{b_j\}$ là cơ sở của K trên k . Cho $v \in L$ khi đó tồn tại $\{\alpha_i\} \subseteq K$ sao cho $v = \sum \alpha_i a_i$ với mỗi α_i , tồn tại $\{\beta_{ij}\} \subseteq k$ sao cho $\alpha_i = \sum \beta_{ij} b_j$. Vì thế $v = \sum \beta_{ij} b_j a_i$. Do đó, $\{b_j a_i\}$ là một tập sinh của L trên k .

Từ sự độc lập tuyến tính, $\sum \gamma_{ij} b_j a_i = 0$ với $\gamma_{ij} \in k$. Khi đó $\sum \left(\sum \gamma_{ij} b_j \right) a_i = 0$.

Bởi vì $\sum \gamma_{ij} b_j \in K$, nó phải là 0 theo tính chất độc lập tuyến tính của $\{a_i\}$. Cuối cùng,

$\sum \gamma_{ij} b_j = 0$ kéo theo $\gamma_{ij} = 0$ theo tính chất độc lập tuyến tính của $\{b_j\}$. Do đó, chúng ta có thể kết luận rằng $\{b_j a_i\}$ tạo thành một cơ sở của L trên k, đó là đpcm ■.

Chú ý rằng ở phần trên chúng ta không dùng tính chất giao hoán của trường vì thế kết luận trên cũng đúng cho các modul trên vành chia.

3.4. ĐỊNH NGHĨA.

K là **bao đóng đại số** của k nếu $K | k$ là mở rộng đại số và K là trường đóng đại số.

3.5. ĐỊNH LÝ

Với mọi trường k, bao đóng đại số K của k là duy nhất sai khác một đẳng cấu.

3.6. MỆNH ĐỀ

Cho k là một trường đóng đại số. Nếu D là k đại số chia hữu hạn chiều, khi đó $k = D$.

Chứng minh :

Rõ ràng là $k \subseteq D$. Đặt $n = \dim_k(D)$ và $x \in D$. Khi đó, $1, x, x^2, \dots, x^n$ là độc lập tuyến tính. Tồn tại $a_0, a_1, \dots, a_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$. Do đó, tồn tại một đa thức không vô hạn $f \in k[X]$ sao cho $f(x) = 0$. Nhưng k là một trường đóng đại số, vì thế $x \in k$. Suy ra, $D \subseteq k$ và ta có thể kết luận rằng $k = D$. ■

3.7. HỆ QUẢ

Nếu k là trường đóng đại số, $B(k)$ là một nhóm tầm thường

Chứng minh

Theo mệnh đề 3.6, ta có k-đại số chia hữu hạn chiều duy nhất là k. Do đó, tồn tại duy nhất một lớp tương đương trong $B(k)$, đó là $[k]$. Do đó, $B(k)$ là một nhóm tầm thường.

Trong trường hợp đặc biệt chúng ta thấy rằng $B(\mathbb{C})$ cũng là một nhóm tầm thường bởi vì $\mathbb{C}$ là một trường đóng đại số.

TRONG TRƯỜNG HỮU HẠN

Mục đích tiếp theo của chúng ta là tìm một nhóm Brauer của một trường hữu hạn và nhóm Brauer của tập số thực $\mathbb{R}$. Để làm điều đó, chúng ta cần có Định lý Skolem-Noether.

3.8. BỔ ĐỀ.

Cho A là một k -đại số và M là một A -modul đơn. Khi đó $\text{End}_A(M)$ là một đại số chia trên k .

3.9. BỔ ĐỀ.

Với các ký hiệu ở trên. Đặt D là đại số chia $\text{End}_A(M)$. Khi đó, $\text{End}_A(M^n) \cong D_n$ như là k -đại số.

3.10. ĐỊNH LÝ.

Cho A là một đại số đơn, khi đó tồn tại một M A -modul đơn trung thành. Hơn thế nữa $A \cong M^n$ trong đó M^n là một A -modul với n nào đó.

3.11. BỔ ĐỀ.

Với M ở trên, bất kỳ A -modul đơn là đẳng cấu với M .

3.12. HỆ QUẢ.

Nếu A là một k -đại số đơn, khi đó $A \cong M^n$ như là A -modul với n nào đó và D là một k -đại số chia.

3.13. MỆNH ĐỀ.

D_n là một k -đại số đơn với mọi k -đại số chia D .

3.14. BỔ ĐỀ

Cho A là một đại số chia hữu hạn chiều trên k , Nếu M_1 và M_2 là các A -modul hữu hạn sinh có cùng số chiều trên k , Khi đó $M_1 \cong M_2$.

Chứng minh

Theo định lý 3.10 và bổ đề 3.11. $A \cong M^n$ với M là A -modul đơn duy nhất (sai khác nhau một đẳng cấu). Với mọi N là A -modul hữu hạn sinh $N \cong A^m / B$ với m và B là modul con của A^m . Nhưng A^m là tổng trực tiếp các bản sao của M . Vì thế chúng ta có $M_1 \cong M^{l_1}$ và $M_2 \cong M^{l_2}$ với l_1, l_2 tùy ý. Từ đó, chúng ta có $\dim_k(M_i) \cong l_i \dim_k(M)$ với $i = 1, 2$. Nhưng $\dim_k(M_1) = \dim_k(M_2)$ vì thế $l_1 = l_2$. Do đó $M_1 \cong M_2$. ■

3.15. ĐỊNH NGHĨA.

Một tự đẳng cấu là α **tự đẳng cấu trong** nếu nó có dạng $\alpha(x) = zxz^{-1}$ với một phần tử z cố định. Trong trường hợp này, chúng ta sẽ viết α_z thay cho α

3.16. ĐỊNH LÝ (SKOLEM-NOETHER)

Cho A là một k -đại số đơn và cho B là một k -đại số đơn tâm hữu hạn chiều. Nếu $f, g: A \rightarrow B$ là các đồng cấu, khi đó tồn tại một tự đẳng cấu trong $\alpha: B \rightarrow B$ sao cho $\alpha f = g$.

Chứng minh

Theo hệ quả 3.12, $B \cong D_n$ với D là một k -đại số chia. Theo bổ đề 3.9 $\text{End}_D(D^n) \cong (\text{End}_D D)_n$ bởi vì D là một D -đại số đơn. Như chúng ta đã thấy trong chứng minh của Hệ quả 3.12, $\text{End}_C(C) \cong C^*$ với C là một đại số chia bất kỳ. Vì thế $\text{End}_C(C^n) \cong (C^*)_n$. Cho $C = D^*$, chúng ta có $B \cong D_n \cong \text{End}_E(E^n)$, Trong đó $E = D^*$ cũng là một k -đại số chia. Suy ra $Z(B) = Z(D) = Z(E) = k$.

Bây giờ, chú ý rằng f và g định nghĩa như là tác động của A lên E^n theo cách :
 $a.f.v := f(a)(v)$ và $a.g.v := g(a)(v)$ trong đó $f(a), g(a) \in \text{End}_E(E^n)$. Vì thế, chúng ta có 2 cấu trúc A -modul trên E^n , gọi là M_f và M_g . Rõ ràng rằng chúng có cùng số chiều trên k . Vì thế theo bổ đề 3.14, chúng đẳng cấu với nhau. Do đó, tồn tại một đẳng cấu từ M_f đến M_g . Đó là $h(a.f.v) = a.g.h(v)$, $\forall v \in E^n$ trong đó $h \in B$. Do đó, ta có $h(f(a)v) = g(a)h(v)$. Vì thế $hf(a) = g(a)h$ hay $hf(a)h^{-1} = g(a)$ nghĩa là $\alpha_h f = g$. ■

ĐỊNH LÝ TÂM TẬP

Chúng ta cần giới thiệu khái niệm về tâm tập để ta có thể chứng minh được định lý Wedderbur's và Định lý Frobenius, đó là các định lý sẽ giúp chúng ta xác định các nhóm Brauer của một trường hữu hạn và nhóm Brauer của trường $\mathbb{R}$ trong phần cuối.

3.17. ĐỊNH NGHĨA.

Nếu A là một đại số và B là một tập con của A , tâm tập của B trong A được định nghĩa là $C(B) = \{a \in A : ab = ba, \forall b \in B\}$

Dễ dàng kiểm tra được $C(B)$ là một đại số con của A . Bây giờ, ta sẽ chứng minh định lý tâm tập

3.18. ĐỊNH LÝ (ĐỊNH LÝ TÂM TẬP)

Cho A là một đại số con đơn của B với B là một k -đại số đơn tâm hữu hạn chiều. Cho D_1 và D_2 là các đại số chia. Khi đó

1. $C(A)$ là đơn
2. Nếu $B \sim D_1$ và $A \otimes D_1^* \sim D_2$, khi đó $C(A) \sim D_2^*$
3. $[B:k] = [A:k][C(A):k]$
4. $C(C(A)) = A$

Chứng minh

Ta có

$B \subseteq \text{End}_D(D^n) \subseteq (D^*)_n$ với D là đại số chia tâm k . Tuy nhiên, cũng là một đại số của B , tác động lên D^n , do đó, D^n là một $A \otimes D$ -modul. Theo định nghĩa của các tự đồng cấu, chúng ta thấy rằng $C(A) = \text{End}_{A \otimes D}(D^n)$

1. D là đơn tâm, vì thế $A \otimes D$ đơn. Nên tồn tại N một $A \otimes D$ -modul đơn duy nhất là N , và $E = \text{End}_{A \otimes D}(N)$ là một đại số chia. Bất kỳ $A \otimes D$ -modul là có dạng N^m . Do đó, $D^n \subseteq N^m$ với m nào đó. Vì vậy

$$\begin{aligned} C(A) &= \text{End}_{A \otimes D}(N^m) \\ &\subseteq (\text{End}_{A \otimes D}(N))_m \text{ Theo 2.7} \\ &\subseteq E_m \end{aligned}$$

Theo mệnh đề 3.13 $M_n(E)$ là đơn, nghĩa là $C(A)$ là đơn

2. $B \subseteq (D^*)_n$, vì thế $D_1 \subseteq D^*$. Do đó, $(D^*)^* \subseteq D$, chúng ta có $D_2 \subseteq A \otimes D_1^* \subseteq A \otimes D$. Do E là $A \otimes D$ -modul đơn duy nhất, $A \otimes D \sim E^*$ và chúng ta đã thấy trong hệ quả 3.11. Vì thế $E^* \subseteq D_2$. Nhưng $C(A) \subseteq E_n$ vì thế $C(A) \sim E \subseteq D_2^*$ như yêu cầu.

3. $C(A) \subseteq M_m(E)$ vì thế theo định luật tower, $[C(A):k] = [E_m:E][E:k] = m^2[E:k]$. Tuy nhiên $D^n \subseteq N^m$, chúng ta có $[D^n:k] = [D^n:N][N:k] = m[N:k] = m[N:E][E:k]$. Lược bỏ m ta có:

$$\begin{aligned} [C(A):k] &= \left(\frac{[D^n:k]}{[N:E][E:k]} \right)^2 [E:k] \\ &= \frac{[D^n:k]^2}{[N:E]^2[E:k]} \\ &= \frac{[D^n:k]^2}{[\text{End}_E(N):E][E:k]}, \text{ với } E \text{ là đại số chia} \\ &= \frac{[D^n:k]^2}{[\text{End}_E(N):k]} \\ &= \frac{[D^n:k]^2}{[A \otimes D:k]} \\ &= \frac{[D^n:k]^2}{[A:k][D:k]} \end{aligned}$$

Từ đẳng thức đơn giản trên ta có

$$[A:k][C(A):k] = \frac{[D^n:k]^2}{[D:k]}$$

$$= \frac{([D^n : D][D : k])^2}{[D : k]}$$

$$= n^2 [D : k]$$

$$= [D_n : k]$$

$$= [B : k] \text{ vì } B \cong M_n(D^*)$$

4. Rõ ràng rằng $A \subseteq C(C(A))$. Áp dụng phần 3 vào $C(A)$ chúng ta có $[B : k] = [C(A) : k][C(C(A) : k)]$. Nhưng chúng ta cũng có $[B : k] = [A : k][C(A) : k]$, do lượt giản ta có $[C(C(A)) : k] = [A : k]$. Theo kết quả từ tuyến tính đại số, ta được $A = C(C(A))$. ■

3.19. HỆ QUẢ.

Cho D là một đại số chia với tâm k và $[D : k] = n^2$. Nếu K là một trường con tối đại của D (về quan hệ bao hàm), khi đó $[K : k] = n$.

Chứng minh

Ta có K là một trường vì nó có tính giao hoán và là đại số con của đại số chia. Theo tính giao hoán của K , $K \subseteq C(K)$. Cho $a \in C(K)$, $K(a)$ (trường con tối tiểu chứa K và a). Do đó, $a \in K$ và chúng ta có thể kết luận rằng $C(K) \subseteq K$. Do đó, $K = C(K)$. Theo phần 3 của định lý tâm tập ta có $n^2 = [D : k] = [K : k][C(K) : k] = [K : k]^2$. Do đó ta có kết quả. ■

Hệ quả trên Cho ta $[D : k]$ là số chính phương.

3.20. BỔ ĐỀ

Cho $K|k$ là một trường mở rộng và cho A là một k -đại số. Khi đó $K \otimes_k A$ là một **K-đại số**, ký hiệu là A_K . Hơn nữa, nếu $\{a_i\}$ là cơ sở của A trên k , khi đó nó là một cơ sở của A_K trên K . Đặc biệt, $[A : k] = [A_K : K]$.

3.21. ĐỊNH LÝ.

Nếu D là một đại số chia hữu hạn chiều trên tâm k của nó, khi đó $[D : k]$ là một số chính phương.

Trong phần này ta giả sử k là trường hữu hạn. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $B(k)$ lại là nhóm tầm thường. Đầu tiên, ta nhắc lại một bổ đề của lý thuyết nhóm.

3.22. BỔ ĐỀ

Nếu $H \leq G$ là một nhóm hữu hạn với $H \neq G$ khi đó $G \neq \bigcup_{g \in G} (gHg^{-1})$.

Chứng minh

Bởi vì $[G : N_G(H)]$ là số lượng các nhóm con của G mà liên hợp với H , số lượng của các phần tử không phải đơn vị trong $\cup_{g \in G} (gHg^{-1})$ sẽ

$$\begin{aligned} &\leq [G : N_G(H)](|H|-1) \\ &\leq [G : H](|H|-1) \text{ bởi vì } H \subseteq N_G(H) \\ &= \frac{|G|}{|H|}(|H|-1) = |G| - \frac{|G|}{|H|} \\ &< |G|-1 \text{ vì } H \neq G \end{aligned}$$

Do đó, $G \neq \cup_{g \in G} (gHg^{-1})$. ■

3.23. ĐỊNH LÝ (WEDDERBURN)

Bất kỳ vành chia hữu hạn đều giao hoán.

Chứng minh

Cho D là một vành chia và đặt $k = Z(D)$ là một trường con của D . Cho K là một trường con tối đại của D chứa k , vì $k \subseteq K \subseteq D$. Nếu $K=D$, khi đó D là một trường do đó là giao hoán.

Vì thế giả sử $K \neq D$. Theo định lý 3.21 và hệ quả 3.19, chúng ta có $[D : k] = n^2$ và $[K : k] = n$ với mọi n . Do đó, $|K| = |k|^n$. Theo lý thuyết trường, bất kỳ trường chứa k với cấp $|k|^n$ là đẳng cấu với nhau, do đó là liên hợp với nhau theo định lý Skolem-Noether. Vì thế, chúng ta có $K' = zKz^{-1}$ với bất kỳ trường con tối đại K' .

Chú ý rằng mọi phần tử của D đều được chứa trong trường con tối đại, ta có $D = \cup_{z \in D} (zKz^{-1})$. Bây giờ, nếu ta đặt phép nhân nhóm, ta có $D^* = \cup_{z \in D} (zK^*z^{-1})$. Nhưng điều này mâu thuẫn với bổ đề 3.23. Do đó, việc giả sử $K \neq D$ là sai.

Vậy $K = D$ và D là giao hoán. ■

3.24. HỆ QUẢ

k là trường hữu hạn thì $B(k)$ là nhóm tầm thường.

Chứng minh

Ta đi tìm các phần tử của $B(k)$. Cho D là k -đại số chia đơn tâm. Theo định lý Wedderburn, ta có D là giao hoán nên D cũng là tâm, vì thế $Z(D) = k = D$. Do đó, chỉ có một phần tử thuộc $B(k)$, đó là $[k]$. ■

TRONG TRƯỜNG SỐ THỰC $\mathbb{R}$

Những ví dụ ở trên đều cho các nhóm Brauer là nhóm tầm thường. Trong phần này ta sẽ thấy điều này không đúng đối với tập số thực $\mathbb{R}$. Đầu tiên ta nhắc lại khái niệm Quaternions

3.25. ĐỊNH NGHĨA.

Quaternions, ký hiệu là $\mathbb{H}$, là một không gian vectơ 4 chiều trên $\mathbb{R}$ với các cơ sở là $\{1, i, j, k\}$, và phép nhân được định nghĩa sao cho 1 là phần tử đơn vị và

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

Mặt khác $\mathbb{H}$ cũng là một $\mathbb{R}$ -đại số. Với mọi phần tử $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}, q \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ta có $\frac{(a - bi - cj - dk)}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$ là phần tử nghịch đảo của q . Do đó, $\mathbb{H}$ thực sự là một $\mathbb{R}$ -đại số chia.

3.26. BỔ ĐỀ

Trường mở rộng duy nhất của $\mathbb{R}$ là $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$

Chứng minh

Cho K là một mở rộng hữu hạn của $\mathbb{R}$ với số chiều là n . Lấy $x \in K, 1, x, x^2, \dots, x^n$ là độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Vì thế tồn tại $a_0, a_1, \dots, a_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$. Bởi vì $\mathbb{C}$ là trường đóng đại số Theo Định lý cơ bản của đại số, $x \in \mathbb{C}$. Do đó, $K \subseteq \mathbb{C}$.

Nếu $x \in \mathbb{R}, \forall x \in K$, khi đó $K = \mathbb{R}$.

Nếu $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ với $x \in K$, gọi là $x = a + bi$ với $b \neq 0, i = (x - a)/b \in K$ do đó $\mathbb{R} \subseteq K$. Vậy ta có thể kết luận rằng $K = \mathbb{C}$. ■

3.27. ĐỊNH LÝ (FROBENIUS)

Nếu D là đại số chia với $\mathbb{R}$ nằm trong tâm của nó và $[D:\mathbb{R}] < \infty$, khi đó $D = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ hoặc $\mathbb{H}$.

Chứng minh

Cho K là trường con tối đại của D , khi đó $[K:\mathbb{R}] \leq [D:\mathbb{R}] < \infty$. Theo bổ đề 3.26, $K = \mathbb{R}$ hoặc $K = \mathbb{C}$. Giả sử $K = \mathbb{C}$. Chú ý rằng $\mathbb{R} \subseteq Z(D)$, theo tính tối đại của K , $Z(D) = \mathbb{R}$ và D là tâm. Theo hệ quả 3.19 $[D:\mathbb{R}] = 1$, do đó $D = \mathbb{R}$.

Nếu $K = \mathbb{C}$, $Z(D) = \mathbb{R}$ hoặc $Z(D) = \mathbb{C}$ bởi vì $\mathbb{C}$ là một trường con tối đại chứa $\mathbb{R}$ và $Z(D)$ là trường chứa $\mathbb{R}$. Nếu $Z(D) = \mathbb{C}$, khi đó D là tâm $\mathbb{C}$ -đại số bởi vì $\mathbb{C}$ được chứa trong D . Theo hệ quả 5.14. $[D:\mathbb{R}] = 1$, bởi vì $[K:\mathbb{R}] = 1$. Do đó $D = \mathbb{C}$.

Cuối cùng, với trường hợp $K = \mathbb{H}$ và $Z(D) = \mathbb{R}$, D là tâm và chúng ta có thể áp dụng lại hệ quả 3.19 để có $[D:\mathbb{R}] = [C:\mathbb{R}]^2 = 4$. Cho $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(a + bi) = a - bi$ trong đó $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó f là một $\mathbb{R}$ -đẳng cấu. Theo định lý Skolem-Noether, tồn tại $x \in D$, với $x \neq 0$ sao cho $x(a + bi)x^{-1} = a - bi$

Bây giờ, áp dụng liên hợp 2 lần, chúng ta có $x^2(a+bi)x^{-2}=a+bi$ và do đó, $x^2(a+bi)=(a+bi)x^2$. Vì thế $x^2 \in C(\mathbb{H})=\mathbb{R}$. Ta có thể áp dụng f cho x^2 và có $f(x^2)=x^2$. Do đó, phần ảo của x^2 phải là 0 và $x^2 \in \mathbb{R}$. Ta có, rõ ràng $x^2 < 0$ mà $x \in \mathbb{H}$ điều này thì không thể xảy ra. Vì thế tồn tại $y \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ sao cho $x^2 = -y^2$. Đặt $j = x/y$ và đặt $k = ij$. Điều đó có thể kiểm tra lại rằng tích của $1, i, j, k$ trùng khớp với định nghĩa tích các cơ sở của $\mathbb{H}$. Do đó $[D:\mathbb{H}] = 4$, chúng ta có $D = \mathbb{H}$. ■

3.28..HỆ QUẢ

$$B(\mathbb{H}) \cong M_2(\mathbb{C})$$

Chứng minh

Ta đi tìm các phần tử của $B(\mathbb{H})$. Cho D là $\mathbb{R}$ -đại số chia hữu hạn chiều trên $\mathbb{R}$.

Theo Định lý Fobenius, D chỉ có thể là $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ hoặc $\mathbb{H}$. Nhưng trong đó, chỉ có $\mathbb{R}$ và $\mathbb{H}$ là các đại số chia hữu hạn chiều và đơn tâm trên $\mathbb{R}$ (vì tâm của $\mathbb{C}$ không phải là $\mathbb{R}$).

Như vậy, chỉ có 2 lớp tương đương bao gồm $[\mathbb{R}]$ và $[\mathbb{H}]$. Suy ra $B(\mathbb{H})$ có chính xác 2 phần tử. Do đó, $B(\mathbb{H}) \cong M_2(\mathbb{C})$. ■

Chú ý rằng phần tử đồng nhất của nhóm $B(\mathbb{H})$ chính là $[\mathbb{R}]$ và phần tử khác đơn vị chính là $[\mathbb{H}]$. Vì thế ta có $[\mathbb{H}][\mathbb{H}]=[\mathbb{R}]$, nghĩa là $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^n$, với n nào đó. Vì $\mathbb{H}$ có số chiều là 4 nên $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ có số chiều là 16. Ta có $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong M_4(\mathbb{C})$.

Ta cũng có thể kết luận rằng mỗi đại số đơn tâm hữu hạn chiều trên $\mathbb{R}$ đẳng cấu với một ma trận đại số trên $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{H}$.

KẾT LUẬN

Trong chương 1, luận văn trình bày các kiến thức cơ bản.

Trong chương 2, luận văn trình bày chi tiết xây dựng nhóm Brauer từ việc phân lớp các đại số chia đơn tâm trên trường. Chứng minh quan hệ $\sim$ giữa các đại số đơn tâm hữu hạn chiều là quan hệ tương đương được định nghĩa tốt, và nhóm Brauer là nhóm Abel.

Trong chương 3, Luận văn mô tả một số ví dụ cụ thể về nhóm Brauer trong các trường đại số đóng, trường hữu hạn và trong trường số thực $\mathbb{R}$. Và thấy rằng đa số trường hợp $B(k)$ là nhóm tầm thường, trừ trường hợp $B(k) = \mathbb{R}$ thì $B(k)$ có đúng 2 phần tử là $[\mathbb{R}]$ và $[\mathbb{H}]$.

Nhóm Brauer có những ứng dụng rất lớn trong lý thuyết số, hình học đại số, lý thuyết biểu diễn và lý thuyết K-đại số... Một hướng mở rộng việc nghiên cứu về nhóm Brauer của một trường là nghiên cứu về tích chéo đại số bởi vì có sự liên kết chặt chẽ giữa chúng.

Cuối cùng, những gì chúng tôi làm được trong luận văn chỉ là một khởi đầu cho 1 hướng nghiên cứu mới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Anh

1. I . N . Herstein (1968), *NONCOMMUTATIVE*, Published Mathematical Association of America, USA.
2. Anthony W.Knapp (2007), *ADVANCED ALGEBRA*, Birkhauser Boston, Springer Science, USA.
3. Peter L.Clark, “On The Brauer Group – Notes For A Trivial Notions Seminar”.
4. Alan J. Laub (2005), “Chapter13 KRONECKER PRODUCTS”, *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*.

Tiếng Việt

5. Trần Huyền (1998), *MÔĐUN VÀ PHẠM TRÙ*, Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh.
 6. Ngô Duy Khánh (1996), *ĐIỀU KIỆN NGUYÊN THỦY CỦA VÀNH VÀ ĐẠI SỐ NGUYÊN TỐ CÓ PHẦN TỬ LUYỆN ĐẲNG*, Luận văn thạc sĩ Toán học Đại học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh.
-