BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

ĐẶNG CÔNG VĨNH

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **PGS.TSKH. TRẦN QUỐC CHIẾN**

Phản biện 1: **TS. CAO VĂN NUÔI**

Phản biện 2: **GS.TSKH NGUYỄN VĂN MẬU**

Luận văn được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 23 tháng 10 năm 2011

** Có thể tìm hiểu luận văn tại:*
- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Bất đẳng thức là một trong những chuyên đề quan trọng nhất của toán học phổ thông. Đây là một chuyên đề được nhiều người quan tâm đến.

Trong chương trình toán học phổ thông, bất đẳng thức được giới thiệu trong chương trình đại số 10, đây là chuyên đề hay và rất khó đòi hỏi người học phải có óc tư duy và sáng tạo rất cao. Trong vài năm trở lại đây chuyên đề bất đẳng thức đã được các nhà toán học trên thế giới và trong nước đầu tư, tìm hiểu rất nhiều. Đặc biệt, ở Việt Nam bất đẳng thức trong thời gian qua đã được không ít các thầy giáo, các bạn sinh viên giỏi đã tìm hiểu và sáng tạo ra các phương pháp chứng minh rất hay, độc đáo.

Với mong muốn sẽ tìm hiểu và hệ thống hoá một cách đầy đủ về các phương pháp chứng minh bất đẳng thức, nhằm hoàn thiện cho mình một kỹ năng chứng minh bất đẳng thức. Qua đó phục vụ cho công tác giảng dạy sau này. Chính vì các lý do trên tôi đã chọn đề tài “ MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ” .

Điều kiện đảm bảo cho việc hoàn thành đề tài : Được thầy giáo PGS. TSKH Trần Quốc Chiến hướng dẫn, cung cấp tài liệu và tận tình giúp đỡ, đồng thời bản thân cố gắng nghiên cứu sưu tập tài liệu để đảm bảo hoàn thành đề tài.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

- Hệ thống và phân loại một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức.
- Tìm hiểu thêm các phương pháp mới về chứng minh bất đẳng thức và hoàn thiện các kỹ năng đã biết nhằm phục vụ cho công tác giảng dạy sau này.
- Đề xuất một số dạng quan trọng trong các kỳ thi đại học, thi học sinh Giỏi.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

3.1. Đối tượng nghiên cứu

Khảo sát lý thuyết tổng quát, các phương pháp chứng minh bất đẳng thức dựa trên phương pháp dồn biến, phương pháp đường thẳng tiếp tuyến và các bất đẳng thức AM – GM, Cauchy – Schwarz, Bernoulli, Chebyshev.

3.2. Phạm vi nghiên cứu

Khảo sát lý thuyết tổng quát và đặc biệt ứng dụng trong chương trình toán học phổ thông và toán học dành cho học sinh giỏi các đội tuyển quốc gia.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Đề tài này đã sử dụng các phương pháp nghiên cứu sau:

- Phương pháp nghiên cứu tư liệu gồm: Các tài liệu tham khảo dành cho giáo viên, tạp chí toán học tuổi trẻ, các đề tài nghiên cứu có liên quan…

- Phương pháp tiếp cận lịch sử: Sưu tầm, phân tích và tổng hợp tư liệu.

- Phương pháp tiếp cận hệ thống.

- Thực nghiệm sư phạm ở trường phổ thông.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

- Đề tài đã hệ thống và phân loại một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức giải quyết hàng loạt các bài toán bất đẳng thức khó ở phổ thông, góp phần cho học sinh và giáo viên có thêm một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức.

- Đề tài được trình bày một cách logic, khoa học, rõ ràng và dễ hiểu.

6. CẤU TRÚC LUẬN VĂN

Mở đầu:

Chương 1: Kiến thức cơ sở

Trong chương này nêu đầy đủ kiến thức cơ sở về bất đẳng thức như định nghĩa, tính chất, kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức.

Chương 2: Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Trong chương này hệ thống lại các phương pháp chứng minh bất đẳng thức dựa trên các bất đẳng thức AM – GM, Cauchy – Schwarz, Bernoulli, Chebyshev và các phương pháp khác như phương pháp dồn biến, phương pháp đường thẳng tiếp tuyến.

Chương 3: Ứng dụng

Trong chương này trình bày những ứng dụng của các phương pháp chứng minh bất đẳng thức đã hệ thống ở chương 2.

Kết luận và tài liệu tham khảo.

CHƯƠNG 1: KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1. ĐỊNH NGHĨA

Bất đẳng thức là các biểu thức được nối với nhau bởi các dấu $">"; \quad "<"; \quad "\geq"; \quad "\leq"$

Các mệnh đề $"A > B"; \quad "A \geq B"; \quad "A < B"; \quad "A \leq B"$ được gọi là các bất đẳng thức

Trong đó A, B là các biểu thức, A được gọi là vế trái và B là vế phải của bất đẳng thức

Các bất đẳng thức $A > B; \quad C > D$ (hoặc $A < B; \quad C < D$) là 2 bất đẳng thức cùng chiều

Các bất đẳng thức $A > B; \quad C < D$ (hoặc $A < B; \quad C > D$) là 2 bất đẳng thức trái chiều

Xét 2 bất đẳng thức $A > B \quad \& \quad C < D$

+ Nếu ta có $A > B \quad \Rightarrow \quad C < D$ ta nói bất đẳng thức $C > D$ là hệ quả của bất đẳng thức $A > B$
+ Nếu $A > B \quad \Leftrightarrow \quad C < D$ ta nói bất đẳng thức $A > B \quad \& \quad C > D$ là hai bất đẳng thức tương đương

1.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

1. $A < B \quad \Leftrightarrow \quad B > A$

2. $\begin{cases} A > B \\ B > C \end{cases} \Rightarrow \quad A > C$ (tính chất bắc cầu)

3. $A > B \quad \Rightarrow \quad A + C > B + C$

4. $\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow \quad A + C > B + D$

5. $\begin{cases} A > B \\ C > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad AC > BC$

   $\begin{cases} A > B \\ C < 0 \end{cases} \Rightarrow \quad AC < BC$

6. $\begin{cases} A > B \\ C < D \end{cases} \Rightarrow \quad A - C > B - D$

7. $\begin{cases} A > B > 0 \\ C > D > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad AC > BD$

8. $A > B > 0 \quad \Rightarrow \quad A^n > B^n \quad \forall n \in Z^+$

9. a/ $A > B > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{A} > \sqrt[n]{B} \quad (\forall n \in Z^{+})$

b/ $A^{2n+1} > B^{2n+1} \Leftrightarrow A > B \quad (\forall n \in Z^{+})$

c/ $A^{2n} > B^{2n} \Leftrightarrow |A| > |B| \quad (\forall n \in Z^{+})$

10. $\left[\begin{array}{l} A > B > 0 \\ A < B < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{A} < \frac{1}{B}$

1.3. KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC :

Trong các phương pháp chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ ta thường chứng minh theo một trong hai sơ đồ sau :

Sơ đồ 1 : Tạo ra dãy các bất đẳng thức trung gian

$$A \geq A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_{n-1} \geq A_n \geq B$$

Sơ đồ 2 : Tạo ra các bất đẳng thức bộ phận

$$+\begin{cases} A_1 \geq B_1 \\ A_2 \geq B_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n \geq B_n \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \times\begin{cases} A_1 \geq B_1 \geq 0 \\ A_2 \geq B_2 \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n \geq B_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \geq B$$

Để tạo ra các bất đẳng thức trung gian hoặc các bất đẳng thức bộ phận ta cần chú ý rằng :

Nếu bất đẳng thức " $A \geq B$ " xảy ra trạng thái " $A = B$ " tại tiêu chuẩn P nào đó thì tại tiêu chuẩn P này tất cả các bất đẳng thức trung gian trong sơ đồ 1 hoặc các bất đẳng thức bộ phận trong sơ đồ 2 cũng đồng thời xảy ra dấu bằng.

Muốn tìm được tiêu chuẩn P ta cần chú ý tính đối xứng của biến số và điều kiện xảy ra dấu bằng trong các bất đẳng thức cổ điển AM – GM, Cauchy – Schwarz, Bernoulli hoặc trong các phương pháp mới như : dồn biến (MV), đường thẳng tiếp tuyến… Và người ta gọi điểm rơi trong các bất đẳng thức trên là giá trị các biến nhận được để bất đẳng thức xảy ra dấu " = ".

Do việc dự đoán điều kiện trạng thái “ $A = B$ ” xảy ra theo một tiêu chuẩn nào đó, để định hướng biến đổi đại số và đánh giá các bất đẳng thức trung gian hoặc bộ phận nên có thể gọi các ý tưởng này là : “ Kỹ thuật kiểm tra điều kiện xảy ra dấu bằng ” hay “Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức”.

CHƯƠNG 2: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

2.1. BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM

2.1.1. Bất đẳng thức AM – GM

Định lý 2.1 (Bất đẳng thức AM – GM). Với mọi số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n \geq 0$

2.1.2. Chú dẫn : tên gọi *AM – GM* là viết tắt của thuật ngữ tiếng Anh *Arithmetic mean –Geometric mean* nêu lên bản chất của bất đẳng thức

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}, \forall a_i \geq 0$$

Các cuốn sách toán học đã xuất bản ở Việt Nam thường gọi bất đẳng thức trên là bất đẳng thức *Cauchy*. Cách gọi này xuất phát từ việc nhà toán học Pháp *Cauchy* là người đầu tiên đã chứng minh bất đẳng thức này.

2.2. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHWARZ

Định lý 2.2 (Bất đẳng thức Cauchy – schwarz)

Với hai dãy số thực tùy ý $a_1, a_2, ..., a_n \ \& \ b_1, b_2, ..., b_n$ ta luôn có bất đẳng thức

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

Hệ quả 1 (Bất đẳng thức Schwarz).

Với hai dãy số $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right) \& \left(b_1, b_2, ..., b_n\right); b_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$ ta có:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

Hệ quả 2. Với mọi dãy số thực $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ta có

$$\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^2 \le n\left(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + ... + a_n^{\ 2}\right)$$

2.3. BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

Định lý 2.3 (Bất đẳng thức Bernoulli)

a) $\forall x > -1, \forall \alpha \in [0;1]$ ta có: $(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$

b) $\forall x > -1, \forall \alpha \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ ta có: $(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$

2.4. BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV

2.4.1. Bất đẳng thức Chebyshev

Định lý 2.4 (Bất đẳng thức Chebyshev) Với hai dãy số thực đơn điệu tăng $a_1, a_2, ..., a_n$ & $b_1, b_2, ..., b_n$ ta có:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_n.b_n \ge \frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + ... + b_n\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a_1 = a_2 = ... = a_n$; $b_1 = b_2 = ... = b_n$

2.4.2. Một số dạng hay gặp của bất đẳng thức Chebyshev

Dạng 1: Chứng minh $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \ge 0$.

Ta có thể chứng minh

$$\left(x_1a_1\right).\frac{y_1}{a_1} + \left(x_2a_2\right).\frac{y_2}{a_2} + ... + \left(x_na_n\right)\frac{y_n}{a_n} \ge 0$$

Với $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực mà ta phải tìm sao cho

$\left(\frac{y_1}{a_1}, \frac{y_2}{a_2}, ..., \frac{y_n}{a_n}\right)$ & $\left(x_1a_1, x_2a_2, ..., x_na_n\right)$ là các bộ số đơn điệu cùng chiều.

Khi đó việc chứng minh bất đẳng thức ban đầu quy về chứng minh

$$\frac{y_1}{a_1} + \frac{y_2}{a_2} + ... + \frac{y_n}{a_n} \ge 0$$

$$x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n \ge 0$$

Dạng 2: Chứng minh $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + ... + \frac{x_n}{y_n} \ge 0$

Ta có thể chứng minh

$$\left(a_1x_1\right).\frac{1}{a_1y_1}+\left(a_2x_2\right).\frac{1}{a_2y_2}+...+\left(a_nx_n\right)\frac{1}{a_ny_n}\geq 0$$

Với $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực mà ta phải tìm sao cho

$\left(a_1x_1, a_2x_2, ..., a_nx_n\right) \& \left(\frac{1}{a_1y_1}, \frac{1}{a_2y_2}, ..., \frac{1}{a_ny_n}\right)$ là các bộ đơn điệu cùng chiều.

Khi đó bất đẳng thức ban đầu quy về chứng minh

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n\geq 0$$
$$\frac{1}{a_1y_1}+\frac{1}{a_2y_2}+...+\frac{1}{a_ny_n}\geq 0$$

Chú ý từ giả thiết có thể suy ra được $\left[\begin{array}{l} a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=0 \\ \frac{1}{a_1y_1}+\frac{1}{a_2y_2}+...+\frac{1}{a_ny_n}=0 \end{array}\right.$

2.5. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

2.5.1. Phương pháp dồn biến (MV–MIXING VARIABLE)

Đặc điểm của nhiều bất đẳng thức, đặc biệt là các bất đẳng thức đại số là dấu bằng xảy ra khi tất cả hoặc một vài biến bằng nhau.

Phương pháp dồn biến dựa vào đặc điểm này để làm giảm số biến số của bất đẳng thức, đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm số một biến hoặc chứng minh bằng quy nạp.

Để chứng minh bất đẳng thức

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\geq 0 \qquad (*)$$

Ta có thể chứng minh

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, ..., x_n\right) \qquad (**)$$

Hoặc $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\geq f\left(\sqrt{x_1.x_2}, \sqrt{x_1.x_2}, x_3, ..., x_n\right)$ (***)

Hoặc $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\geq f\left(\sqrt{\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}{2}}, \sqrt{\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}{2}}, x_3, ..., x_n\right)$ (****)

Và còn rất nhiều dạng khác tùy thuộc vào đặc điểm của bài toán

Sau đó chuyển việc chứng minh (*) về chứng minh bất đẳng thức sau

$$f\left(t, t, x_3, ..., x_n\right)=g\left(t, x_3, ..., x_n\right)\geq 0 \qquad (*****)$$

Tức là một bất đẳng thức có ít biến hơn.

2.5.2. Phương pháp đường thẳng tiếp tuyến

Bước 1: Từ bất đẳng thức xác định hàm số tương ứng $y = f(x)$

Bước 2: Xác định dấu bằng của đẳng thức xảy ra khi nào. Giả sử tại $x = x_0$

Bước 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = x_0$

$$y = g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Bước 4: Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và phương trình tiếp tuyến tại điểm $(x_0; y_0)$

Từ đó xác định tiếp tuyến nằm trên hay nằm dưới đồ thị hàm số

- Nếu tiếp tuyến nằm trên ta đi chứng minh

  $$g(x) \geq f(x)$$

- Nếu tiếp tuyến nằm dưới ta đi chứng minh

  $$f(x) \geq g(x)$$

Bước 5: Từ đó rút ra bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.

CHƯƠNG 3: ỨNG DỤNG

3.1. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GTLN - GTNN

3.1.1.Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức AM - GM

Bài toán. Cho a, b, c thoả mãn $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$A=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 28$$

Định hướng lời giải:

Vì bất đẳng thức đã cho là đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Khi đó ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho các số

$$\frac{a^2}{b};\frac{b^2}{c};\frac{c^2}{a};\frac{1}{\alpha ab};\frac{1}{\alpha bc};\frac{1}{\alpha ca}$$

Với α là hệ số ta cần thêm vào để dấu “ = ” bất đẳng thức đạt được tại các giá trị của biến mà ta đã dự đoán

Đối với bất đẳng thức AM-GM dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{a^2}{b}=\frac{b^2}{c}=\frac{c^2}{a}=\frac{1}{\alpha ab}=\frac{1}{\alpha bc}=\frac{1}{\alpha ca}$$

Mà $a=b=c=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha=27$

Giải:

Từ định hướng lời giải ta có: $A=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+27.\frac{1}{27ab}+27\frac{1}{27bc}+27\frac{1}{27ca}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$A \geq 84.\sqrt[84]{\frac{a^2}{b}.\frac{b^2}{c}.\frac{c^2}{a}.\left(\frac{1}{27ab}\right)^{27}\left(\frac{1}{27bc}\right)^{27}\left(\frac{1}{27ca}\right)^{27}} = 84.\frac{1}{\sqrt[84]{27^{81}\left(abc\right)^{53}}}$$

Mà $\quad \left(abc\right)^{53} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{53.3} \leq \frac{1}{3^{53.3}}$

$$\Rightarrow \quad A \geq \frac{84}{\sqrt[84]{27^{81}.\frac{1}{3^{3.53}}}} = \frac{84}{3} = 28$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đã được chứng minh.

Nhận xét : Xét bất đẳng thức AM – GM

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}, \forall a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$$

Trong vế phải của bất đẳng thức trên tức là biểu thức GM có số các thừa số trong căn thức đúng bằng chỉ số căn thức (cùng bằng n). Do đó, khi gặp bất đẳng thức mà vế phải của bất đẳng thức có chứa căn thức và số các thừa số ở trong căn thức nhỏ hơn chỉ số căn thức thì ta cần nhân thêm các hằng số thích hợp để số các thừa số trong căn thức bằng chỉ số của căn thức. Để xác định được các hằng số thích hợp chúng ta phải dự đoán được dấu bằng của bất đẳng thức. [10, tr. 29]

Bài toán. Cho a, b, c thoả mãn $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c = 3 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$S = \sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)}$$

Dự đoán và tìm điểm rơi của Max S:

Vì S là một biểu thức đối xứng với a,b,c nên Max S đạt tại điều kiện

$$\begin{cases} a = b = c \\ a+b+c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3b = 3c = 3 \\ a+2b = b+2c = c+2a = 3 \end{cases}$$

Giải :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a(b+2c)} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}.\sqrt[3]{3a(b+2c).3} \le \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}.\dfrac{3a+(b+2c)+3}{3} \\ \sqrt[3]{b(c+2a)} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}.\sqrt[3]{3b(c+2a).3} \le \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}.\dfrac{3b+(c+2a)+3}{3} \\ \sqrt[3]{c(a+2b)} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}.\sqrt[3]{3c(a+2b).3} \le \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}.\dfrac{3c+(a+2b)+3}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)} \le \frac{1}{\sqrt[3]{9}}.\frac{6(a+b+c)+9}{3} = 3.\sqrt[3]{3}$$

Với a = b = c = 1, Max S = $3.\sqrt[3]{3}$.

3.1.2. Kỹ thuật tách ghép và phân nhóm

Phần này ta áp dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{x^2+y^2}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$$

Bài toán. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(b+c)^2} + \frac{b^3}{(c+a)^2} + \frac{c^3}{(a+b)^2} \ge \frac{1}{4}(a+b+c)$$

Định hướng lời giải:

Do bất đẳng thức đã cho là đối xứng với các biến nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi các biến bằng nhau. Tức là $a = b = c$

Khi đó $\dfrac{a^3}{(b+c)^2} = 2a$. Tương tự ta có $\dfrac{b^3}{(c+a)^2} = 2b$; $\dfrac{c^3}{(a+b)^2} = 2c$

Từ đó ta nghĩ tới ghép $\dfrac{a^3}{(b+c)^2}$ với các số sao cho sau khi áp dụng bất đẳng thức

AM - GM ta được một biểu thức theo a.

Từ đó ta áp dụng AM-GM với các số sau $\frac{8a^3}{(b+c)^2}; b+c; b+c$. Số 8 xuất hiện là để đảm bảo dấu "=" trong bất đẳng thức AM-GM.

Giải:

Từ định hướng lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{8a^3}{(b+c)^2}+(b+c)+(b+c)\geq 6a$$

$$\frac{8b^3}{(c+a)^2}+(c+a)+(c+a)\geq 6b$$

$$\frac{8c^3}{(a+b)^2}+(a+b)+(a+b)\geq 6c$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$8\left(\frac{a^3}{(b+c)^2}+\frac{b^3}{(c+a)^2}+\frac{c^3}{(a+b)^2}\right)+4(a+b+c)\geq 6(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^3}{(b+c)^2}+\frac{b^3}{(c+a)^2}+\frac{c^3}{(a+b)^2}\geq \frac{1}{4}(a+b+c)$$

Vậy bất đẳng thức trên đã được chứng minh.

3.1.3. Phương pháp cân bằng hệ số

Trong một số bất đẳng thức, điểm rơi có thể được dự đoán một cách trực giác (dù đối xứng hay không đối xứng). Tuy nhiên với các bất đẳng thức mà điểm rơi không là các số nguyên dương thậm chí là các số vô tỷ thì không thể dự đoán được bằng trực giác. Khi đó, chúng ta cần phải đưa thêm các tham số giả định rồi mới sử dụng bất đẳng thức AM – GM. Việc xác lập điều kiện các đẳng thức xảy ra sẽ dẫn đến hệ điều kiện để tìm tham số. Vì thế phương pháp này có tên gọi: Phương pháp cân bằng hệ số.

Bài toán. Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn $\begin{cases} a,b,c\geq 0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$.

Chứng minh rằng : $S=10a^2+10b^2+c^2\geq 4$.

Định hướng lời giải:

Để áp dụng được giả thuyết $ab+bc+ca=1$ ta cần phải tách số 10 ra thành tổng của 2 số để có thể áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho từng cặp số từ đó xuất hiện các tích số ab, bc, ca

Giải:

Ta có

$$S=10a^2+10b^2+c^2=(10-\alpha)\left(a^2+b^2\right)+\left(\alpha a^2+\frac{c^2}{2}\right)+\left(\alpha b^2+\frac{c^2}{2}\right) \quad \forall \alpha\in(0,10)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(10-\alpha)\left(a^2+b^2\right)\geq 2(10-\alpha)ab$$

$$\alpha a^2+\frac{c^2}{2}\geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}.ac=\sqrt{2\alpha}.ac$$

$$\alpha b^2+\frac{c^2}{2}\geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}.bc=\sqrt{2\alpha}.bc$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có

$$S\geq 2(10-\alpha)ab+\sqrt{2\alpha}\,(bc+ac)$$

Chọn α sao cho $2(10-\alpha)=\sqrt{2\alpha} \Leftrightarrow \alpha=8$

(chọn α như vậy để ta đặt nhân tử chung từ đó sử dụng được giả thuyết)

Khi đó: $2(10-\alpha)=\sqrt{2\alpha}=4$

$$\Rightarrow S\geq 4(ab+bc+ca)=4$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đã được chứng minh.

3.1.4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Bài toán. Cho bốn số thực a,b,c,d thỏa mãn $a,\,b,\,c,\,d>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(1+\frac{2a}{3b}\right)\left(1+\frac{2b}{3c}\right)\left(1+\frac{2c}{3d}\right)\left(1+\frac{2d}{3a}\right)$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$1+\frac{2a}{3b}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{a}{3b}+\frac{a}{3b}\geq 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3.\left(\frac{a}{3b}\right)^2}=\frac{5}{3}.\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{5}}$$

$$1+\frac{2b}{3c}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{b}{3c}+\frac{b}{3c}\geq 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3.\left(\frac{b}{3c}\right)^2}=\frac{5}{3}.\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{5}}$$

$$1+\frac{2c}{3d}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{c}{3d}+\frac{c}{3d}\geq 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3.\left(\frac{c}{3d}\right)^2}=\frac{5}{3}.\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{2}{5}}$$

$$1+\frac{2d}{3a}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{d}{3a}+\frac{d}{3a}\geq 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^3.\left(\frac{d}{3a}\right)^2}=\frac{5}{3}.\left(\frac{d}{a}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức ta có

$$S\geq\frac{625}{81}.\left(\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}.\frac{d}{a}\right)^{\frac{2}{5}}=\frac{625}{81}$$

Vậy $MinS=\frac{625}{81}\Leftrightarrow \quad a=b=c=d>0$

3.2. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHWARZ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GTLN - GTNN

3.2.1. Kỹ thuật chọn điểm rơi và cân bằng hệ số trong bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Bài toán.[Poland Second Round 2007]

Cho $a,b,c,d>0$ thoả mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$

Chứng minh rằng : $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\leq 2(a+b+c+d)-4$

Bổ đề: với mọi x, y >0 ta có bất đẳng thức sau $\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\leq\frac{x^2+y^2}{x+y}$

Chứng minh bổ đề: bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow\frac{x^3+y^3}{2}\leq\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)^3\Leftrightarrow\left(x-y\right)^4\left(x^2+xy+y^2\right)\geq 0,\forall x,y$$

Giải:

Áp dụng bổ đề trên ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\le\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}$$

Ta sẽ chứng minh : $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}\le 2(a+b+c+d)-4$

Thật vậy, sử dụng $x+y-\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{2xy}{x+y}=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

và bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$2(a+b+c+d)-\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}+\frac{1}{\frac{1}{d}+\frac{1}{a}}\right)\ge 2\frac{4^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}=\frac{32}{8}=4$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

3.2.2. Kỹ thuật tách và ghép bộ số

Phần này áp dụng bất đẳng thức phụ sau

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})^2\ge 3(\mathrm{ab}+\mathrm{bc}+\mathrm{ca})$$

Bài toán. Cho x, y thoả mãn $x,y>0$ và $x^2+y^3\ge x^3+y^4$

Chứng minh rằng: $x^3+y^3\le x^2+y^2\le x+y\le 2$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$x^3+y^3=x^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{3}{2}}+y^2.y\le\sqrt{x^3+y^4}.\sqrt{x^3+y^2}\le\sqrt{x^2+y^3}.\sqrt{x^3+y^2}\qquad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{x^2+y^3}.\sqrt{x^3+y^2}\le\frac{1}{2}\left(x^2+y^3+x^3+y^2\right)\qquad(2)$$

Từ $(1)\&(2)$ ta có $x^3+y^3\le x^2+y^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$x^2+y^2=x^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}.y^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{x^3+y^3}\sqrt{x+y}\le\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x+y}\qquad(3)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x+y} \le \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+x+y\right) \qquad (4)$$

Từ $(3)\&(4)$ ta có $\quad x^2+y^2 \le x+y$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$x+y \le \sqrt{(1+1)\left(x^2+y^2\right)} \le \sqrt{2(x+y)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+y)^2 \le 2(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \quad x+y \le 2$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đã được chứng minh.

3.2.3. Sử dụng các phép biến đổi và ứng dụng các hệ quả của bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Bài toán. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \ge 1$$

Giải:

Ta có: $\dfrac{a^2}{a+2b^2}+\dfrac{b^2}{b+2c^2}+\dfrac{c^2}{c+2a^2}=\dfrac{a^4}{a^3+2a^2b^2}+\dfrac{b^4}{b^3+2b^2c^2}+\dfrac{c^4}{c^3+2c^2a^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

$$\frac{a^4}{a^3+2a^2b^2}+\frac{b^4}{b^3+2b^2c^2}+\frac{c^4}{c^3+2c^2a^2} \ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+b^3+c^3+2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)}$$

Ta sẽ chứng minh: $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge a^3+b^3+c^3+2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)$

$$\Leftrightarrow \quad a^4+b^4+c^4 \ge a^3+b^3+c^3$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4+b^4+c^4 \ge \left(a^3+b^3+c^3\right)\frac{(a+b+c)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\left(a^4+b^4+c^4\right) \ge \left(a^3+b^3+c^3\right)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^4+2b^4+2c^4 \ge a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b$$

$$\Leftrightarrow \quad a^3(a-b)+b^3(b-a)+b^3(b-c)+c^3(c-b)+a^3(a-c)+c^3(c-a)$$

$\Leftrightarrow \quad (a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right)+(b-c)^2\left(b^2+bc+c^2\right)+(a-c)^2\left(a^2+ac+c^2\right)$: đúng

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \ge 1$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đã được chứng minh.

3.2.4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Bài toán. Cho a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$ và $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $y=a+b\sqrt{2}\sin x+c\sin 2x$

Giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$y^2\le(a^2+b^2+c^2)(1+2\sin^2 x+\sin^2 2x)\Leftrightarrow y^2\le 4(1+2\sin^2 x+\sin^2 2x)$

Gọi $f(x)=1+2\sin^2 x+\sin^2 2x=1+2\sin^2 x+4\sin^2 x(1-\sin^2 x)$

Đặt $t=\sin^2 x\in(0,1),\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ thì $f(x)=g(t)=-4t^2+6t+1=\frac{13}{4}-4(t-\frac{3}{4})^2\le\frac{13}{4}$

Khi đó: Maxf(x) = Maxg(t) = $\frac{13}{4}$. Từ đó suy ra $y^2\le 13$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin^2 x=\frac{3}{4}$ và $\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{sinx}}{b}=\frac{\sqrt{\sin 2x}}{c}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ và $\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2b}=\frac{\sqrt{3}}{2c}\Rightarrow b=\frac{a\sqrt{6}}{2};c=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Kết hợp với điều kiện $a^2+b^2+c^2=4$ ta suy ra : $a=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}$

Kết Luận :

Min y = $-\sqrt{13}$ xảy ra khi $a=-\frac{4}{\sqrt{13}};b=-\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}};c=-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}};x=\frac{\pi}{3}$

Max y = $\sqrt{13}$ xảy ra khi $a=\frac{4}{\sqrt{13}};b=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}};c=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}};x=\frac{\pi}{3}$

3.3. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài toán. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\left(tg\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\ge 3^{1-\sqrt{2}}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có:

$$\left(\sqrt{3}tg\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+2\sqrt{2}-1\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}tg\frac{A}{2}\right)$$

$$\left(\sqrt{3}tg\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+2\sqrt{2}-1\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}tg\frac{B}{2}\right)$$

$$\left(\sqrt{3}tg\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+2\sqrt{2}-1\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}tg\frac{C}{2}\right)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$3^{2\sqrt{2}}\left[\left(tg\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\right]+6\sqrt{2}-3\ge 2.\sqrt{3}\sqrt{2}\left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)$$

Mà $$tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\quad 3^{2\sqrt{2}}\left[\left(tg\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\right]+6\sqrt{2}-3\ge 2.\sqrt{3}\sqrt{2}.\sqrt{3}=6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\quad 3^{2\sqrt{2}}\left[\left(tg\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\right]\ge 3$$

$$\Rightarrow\quad \left(tg\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(tg\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\ge 3^{1-2\sqrt{2}}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đã được chứng minh.

3.4. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài toán. Cho $\begin{cases}a_1,a_2,...,a_n>0\\ a_1+a_2+...+a_n=1\end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+...+\frac{a_n}{2-a_n}\ge\frac{n}{2n-1}$$

Giải:

Vì bất đẳng thức đã cho đối xứng với tất cả các biến nên ta giả sử $a_1\ge a_2\ge ...\ge a_n$. Khi đó

$$\frac{1}{2-a_1}\ge\frac{1}{2-a_2}\ge ...\ge\frac{1}{2-a_n}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+...+\frac{a_n}{2-a_n}\geq\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+...+\frac{1}{2-a_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad VT\geq\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+...+\frac{1}{2-a_n}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta có

$$\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+...+\frac{1}{2-a_n}\geq\frac{\left(1+1+...+1\right)^2}{2n-\left(a_1+a_2+...+a_n\right)}=\frac{n^2}{2n-1}$$

$$\Rightarrow \quad VT\geq\frac{n}{2n-1}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đã được chứng minh

Bài toán [PSFJIMO28 – Cuba 1987]. Cho $a,b,c>0, n\in \;^{+}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^n}{b+c}+\dfrac{b^n}{c+a}+\dfrac{c^n}{a+b}\geq\dfrac{(a+b+c)^{n-1}}{2.3^{n-2}}$

Giải:

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học :

Với n = 1 thì bất đẳng thức Nesbit quen biết $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$.

Gỉa sử bất đẳng thức đúng với n = k: $\dfrac{a^k}{b+c}+\dfrac{b^k}{c+a}+\dfrac{c^k}{a+b}\geq\dfrac{(a+b+c)^{k-1}}{2.3^{k-2}}$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k + 1

Không mất tính tổng quát, giả sử $0<a\leq b\leq c\Rightarrow\begin{cases}a\leq b\leq c\\ \dfrac{a^k}{b+c}\leq\dfrac{b^k}{c+a}\leq\dfrac{c^k}{a+b}\end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 dãy đơn điệu cùng chiều ta có:

$$3(\frac{a^k}{b+c}.a+\frac{b^k}{c+a}.b+\frac{c^k}{a+b}.c)\geq(\frac{a^k}{b+c}+\frac{b^k}{c+a}+\frac{c^k}{a+b})(a+b+c)$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^{k-1}}{2.3^{k-2}}.(a+b+c)=\frac{(a+b+c)^k}{2.3^{k-2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^{k+1}}{b+c}+\frac{b^{k+1}}{c+a}+\frac{c^{k+1}}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^k}{2.3^{k-1}}$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra (1) đúng $\forall n\in Z^+$.

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c > 0.

3.5. ỨNG DỤNG MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

3.5.1. Phương pháp dồn biến

Bài toán 1. Chứng minh rằng nếu $x, y, z \geq 0$ thì $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ (1)

Giải:

$(1) \Leftrightarrow \quad (x+y+z)^3 \geq 27xyz$

Xét hàm số $f(x,y,z) = (x+y+z)^3 - 27xyz$

Vì bất đẳng thức đã cho là đồng bậc nên bằng cách chuẩn hóa ta có thể giả sử $x+y+z=1 \quad (*)$.

Khi đó $f(x,y,z) = 1 - 27xyz$. Đặt $t = \dfrac{x+y}{2}$

Điều kiện $(*)$ trở thành $t+t+z=1 \Leftrightarrow \quad 2t+z=1$

Ta sẽ chứng minh

$$f(x,y,z) \geq f(t,t,z) \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-27xyz-\left(1-27t^2z\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2z - xyz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2z - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2z - t^2z \geq 0 : \text{đúng}$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $f(x,t,t) \geq 0 \qquad (**)$

$$\Leftrightarrow \quad 1-27t^2z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-27t^2(1-2t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+6t)(1-3t)^2 \geq 0 : \text{đúng } \forall t > 0$$

Từ $(*)\&(**)$ ta có đpcm.

3.5.2. Phương pháp đường thẳng tiếp tuyến

Bài toán. [USA, 2003] Cho $\mathrm{a,b,c} > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(2c+b+a)^2}{2c^2+(b+a)^2} \leq 8$$

Giải:

Vì bất đẳng thức đã cho là đồng bậc và đối xứng nên ta có thể chuẩn hóa

Giả sử $a+b+c=1 \quad \Rightarrow \quad a,b,c\in(0,1)$

Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}+\frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2}+\frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2}\le 8$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2}=\dfrac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1}$ với $x\in(0,1)$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$f(a)+f(b)+f(c)\le 8$$

Ta nhận thấy dấu bằng bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Vì vậy ta viết phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm có hoành độ

$x_0=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \quad y_0=\dfrac{16}{3}$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{16}{3}\right)$ có dạng

$$y=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad y=\frac{12x+4}{3}$$

Vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ và tiếp tuyến trên cùng hệ trục tọa độ ta nhận thấy đò thị hàm số nằm phía dưới tiếp tuyến nên ta sẽ chứng minh

$$f(x)\le\frac{12x+4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1}\le\frac{12x+4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 36x^3-15x^2-2x+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x-1)^2(4x+1)\ge 0: \text{đúng } \forall x\in(0;1)$$

Vì vậy ta có $f(a)+f(b)+f(c)\le\dfrac{12(a+b+c)+12}{3}=8$

Vậy bất đẳng thức đã cho đã được chứng minh.

KẾT LUẬN

Luận văn đã hệ thống được các phương pháp điển hình chứng minh bất đẳng thức trong chương trình toán học ở trường phổ thông và toán dành cho học sinh trong các đội tuyển toán. Hình thành và khẳng định được một số cơ sở, định hướng cho học sinh trong quá trình giải toán bất đẳng thức. Gỉa thuyết khoa học của luận văn là có thể chấp nhận được. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu đã hoàn thành.

Tuy nhiên, phương pháp chứng minh bất đẳng thức rất đa dạng và phong phú, chủ yếu dựa vào đặc thù riêng của từng bài và do có một số phương pháp mới được tiếp cận lần đầu tiên và trình độ còn hạn chế nên không thể tránh được những sai sót. Mong nhận được ý kiến đóng góp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Mong rằng luận văn này sẽ là một tài liệu nhỏ để các em học sinh có thể tham khảo từ đó có thể học tốt hơn chuyên đề bất đẳng thức này.