

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

ĐINH THỊ NAM

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT
PHƯƠNG TRÌNH SIÊU VIỆT

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

**Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG**

Người hướng dẫn khoa học: **GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU**

Phản biện 1: **TS. NGUYỄN DUY THÁI SƠN**

Phản biện 2: **PGS.TS. TRẦN ĐẠO DŨNG**

Luận văn được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ Khoa học ngành Phương pháp Toán Sơ cấp họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 26 tháng 11 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Phương trình và bất phương trình là nội dung cơ bản và quan trọng của chương trình toán trung học phổ thông. Đây là một chuyên đề rất rộng và chứa nhiều dạng toán hay và khó. Đặc biệt, các dạng toán về phương trình và bất phương trình siêu việt (mũ và lôgarit) cũng là những dạng bài thường gặp trong các kỳ thi đại học và thi học sinh giỏi quốc gia.

Việc giải các bài toán về phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit đòi hỏi phải nắm vững phương pháp, các kiến thức cơ bản về hàm số mũ và hàm số lôgarit cũng như các kiến thức liên quan và phải biết vận dụng các kiến thức một cách hợp lý, có tính tư duy. Có nhiều phương pháp để giải phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit, mỗi bài toán ta phải biết nhận dạng và áp dụng phương pháp thích hợp để giải.

Chính vì những lý do trên nên tôi chọn đề tài "*Một số phương pháp giải phương trình và bất phương trình siêu việt*" nhằm hệ thống một số dạng toán, phương pháp giải phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Hệ thống một số dạng toán, phương pháp giải phương trình và bất phương trình mũ và lôgarit.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Khảo sát lớp các hàm số mũ, lôgarit và các dạng phương trình và bất phương trình siêu việt liên quan.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Tham khảo, phân tích và tổng hợp các tài liệu chuyên đề, sách giáo khoa, các tài liệu của giáo viên hướng dẫn, tài liệu trên mạng.

Phương pháp thực nghiệm ở trường phổ thông và phương pháp thảo luận, trao đổi qua bạn bè, đồng nghiệp.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi toán bậc trung học phổ thông.

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm 3 chương như sau:

Chương 1. Tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit và các kiến thức liên quan.

Chương 2. Phương trình và bất phương trình mũ.

Chương 3. Phương trình và bất phương trình lôgarit.

CHƯƠNG 1

TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT VÀ CÁC KIẾN THỨC LIÊN QUAN

1.1 Tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit

1.1.1 Tính chất của hàm số mũ

1.1.2 Tính chất của hàm số lôgarit

1.2 Đặc trưng hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Bài toán 1.1 (Phương trình hàm Cauchy dạng mũ). Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 1.2 (Phương trình hàm Cauchy dạng lôgarit). Xác định các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

1.3 Các định lý bổ trợ

Định lý 1.1 (Bất đẳng thức AM-GM, xem [9]). Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số không âm. Khi đó

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Định lý 1.2 (Bất đẳng thức AM-GM suy rộng, xem [9]). Giả sử cho trước hai cặp dãy số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $p_1, p_2, \dots, p_n$. Khi đó

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \leq \left(\frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Nếu $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ thì $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \leq x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$.

Định lý 1.3 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwaz, xem [9]). Cho hai cặp dãy số bất kỳ $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\exists k: a_i = k b_i$.

Định lý 1.4 (Bất đẳng thức Bernoulli, xem [9]). Cho $x > -1$. Khi đó

$$\begin{cases} (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x & \text{khi } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x & \text{khi } \alpha \leq 0 \vee \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Lưu ý. Khi thay x bởi $x - 1$ ta có

$$\begin{cases} x^\alpha + (1-x)\alpha \leq 1 & \text{khi } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ x^\alpha + (1-x)\alpha \geq 1 & \text{khi } \alpha \leq 0 \vee \alpha \geq 1 \end{cases} \quad (x > 0).$$

Định lý 1.5 (Định lý Fermat, xem [11]). Nếu hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng (a, b) , đạt giá trị cực trị tại một điểm $x_0 \in (a, b)$ và tồn tại $f'(x_0)$ thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý 1.6 (Định lý Rolle, xem [11]). Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) , đồng thời $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Từ định lý Rolle ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1.1 (Hệ quả của định lý Rolle). Nếu hàm số $y = f(x)$ có $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a; b)$ hoặc $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a; b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có quá hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a; b)$.

Định lý 1.7 (Định lý Lagrange, xem [11]). Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

2.1 Phương trình, bất phương trình mũ cơ bản

2.1.1 Phương trình mũ cơ bản

2.1.2 Bất phương trình mũ cơ bản

2.2 Phương pháp giải và biện luận phương trình, bất phương trình mũ

2.2.1 Các phương pháp cơ bản

2.2.1.1 Phương pháp đưa về cùng cơ số

Các dạng thường gặp:

Dạng 1

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{hoặc } a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a - 1)[f(x) - g(x)] = 0. \end{cases}$$

Dạng 2

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{hoặc } a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a - 1)[f(x) - g(x)] < 0. \end{cases}$$

Dạng 3

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ 0 < a < 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

$$\text{hoặc } a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] \leq 0. \end{cases}$$

2.2.1.2 Phương pháp đặt ẩn phụ

Mục đích chính của phương pháp này là chuyển các phương trình và bất phương mũ đã cho về các phương trình và bất phương trình đại số quen thuộc. Các phép đặt ẩn phụ thường gặp đối với phương trình mũ:

Dạng 1 Phương trình $\alpha_k a^{kx} + \alpha_{k-1} a^{(k-1)x} + \dots + \alpha_1 a^x + \alpha_0 = 0$.

Đặt $a^x = t$, điều kiện $t > 0$, ta được phương trình

$$\alpha_k t^k + \alpha_{k-1} t^{(k-1)} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0 = 0.$$

Mở rộng. Khi thay x bởi một biểu thức $f(x)$. Đặt $a^{f(x)} = t$, tùy theo biểu thức $f(x)$ mà đặt điều kiện cho t .

Dạng 2 Phương trình $\alpha_1 a^x + \alpha_2 b^x + \alpha_3 = 0$ với $ab=1$.

Đặt $a^x = t$, $t > 0$, suy ra $b^x = \frac{1}{t}$, ta được phương trình

$$\alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{t} + \alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_2 = 0.$$

Mở rộng. Khi thay x bởi một biểu thức $f(x)$. Đặt $a^{f(x)} = t$, tùy theo biểu thức $f(x)$ mà đặt điều kiện cho t .

Dạng 3 Phương trình $\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2 (ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0$.

Khi đó chia hai vế phương trình cho $b^{2x} > 0$, ta được phương trình

$$\alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + \alpha_2 \left(\frac{a}{b}\right)^x + \alpha_3 = 0.$$

Đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t$, điều kiện $t > 0$, ta được phương trình $\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3 = 0$.

Lưu ý. Có thể chia hai vế phương trình cho $a^{2x}, (ab)^x$.

Mở rộng. Thay x bởi biểu thức $f(x)$.

2.2.1.3 Phương pháp lôgarit hóa

Các dạng thường gặp đối với phương trình mũ: cho $0 < a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$

Dạng 1 $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.

Dạng 2 $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \log_a b.$

Dạng 3 $a^{f(x)} b^{g(x)} = c \Leftrightarrow f(x) + g(x) \log_a b = \log_a c.$

Lưu ý. Có thể lấy một số dương khác 1 bất kỳ làm cơ số khi lấy lôgarit hai vế của phương trình không nhất thiết phải là cơ số a .

Các dạng thường gặp đối với bất phương trình mũ:

Dạng 1

$$a^{f(x)} < b \ (b > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}.$$

Dạng 2

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \end{cases} \vee \begin{cases} b > 0 \\ a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \vee \begin{cases} b > 0 \\ 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases}.$$

Dạng 3

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \lg a^{f(x)} > \lg b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \lg a > g(x) \cdot \lg b.$$

2.2.1.4 Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình và bất phương trình mũ ta sử dụng các nhận xét sau:

1. Nếu phương trình có nghiệm x_0 , một vế của phương trình là hàm số luôn đồng biến, vế kia là hàm số luôn nghịch biến (hoặc là hàm số hằng) thì x_0 là nghiệm duy nhất.

2. Nếu phương trình có dạng $f(u) = f(v)$, mà hàm số $y = f(t)$ với tập xác định là D_f , là hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên D_f thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v, \forall u, v \in D_f$.

3. Đối với bất phương trình có dạng $f(x) > k$:

Bước 1: Xét hàm số $y = f(x)$ và có $f(x_0) = k$. Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến).

Bước 2: Khi đó $f(x) > k \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$.

4. Đối với bất phương trình có dạng $f(u) < f(v)$:

Bước 1: Xét hàm số $y = f(t)$ với tập xác định là D_f . Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến) trên D_f .

Bước 2: Khi đó $f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v, \forall u, v \in D_f$.

2.2.2 Các phương pháp khác

2.2.2.1 Sử dụng định lý Rolle

- Áp dụng định lý Rolle để giải phương trình mũ, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giả sử α là nghiệm của phương trình.

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng thích hợp $f(a) = f(b)$, từ đó chỉ ra được hàm số $f(t)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó theo định lý Rolle, $\exists c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Bước 3: Giải $f'(c) = 0$ ta xác định được α .

Bước 4: Thử lại.

- Từ hệ quả của định lý Rolle ta rút ra phương pháp giải phương trình:

Giả sử cần giải phương trình $f(x) = 0$. Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D của phương trình.

Bước 2: Chỉ ra được $f''(x) > 0, \forall x \in D$ hoặc $f''(x) < 0, \forall x \in D$.

Bước 3: Vậy phương trình $f(x) = 0$ nếu có nghiệm sẽ không có quá 2 nghiệm phân biệt trên D .

Ta cần chỉ ra hai giá trị $x_1, x_2 \in D$ sao cho $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Bước 4: Kết luận.

2.2.2.2 Phương pháp đánh giá

Để đánh giá hai vế của phương trình và bất phương trình mũ ta thường dựa vào: tính đơn điệu của hàm số, tính chất hàm số mũ, các bất đẳng thức như AM-GM, Cauchy-Schwaz, Bernoulli, tính chất của giá trị tuyệt đối....

2.2.2.3 Phương pháp điều kiện cần và đủ

Trong phần này sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ giải bài toán về tính duy nhất nghiệm, bài toán về tập nghiệm và bài toán về hai phương trình tương đương.

Bài toán 2.3 (Bài toán về tính duy nhất nghiệm). Tìm điều kiện của tham số (giả sử là m) để phương trình, bất phương trình $f(x, m) \geq 0$ (hoặc $f(x, m) \leq 0$) có nghiệm duy nhất.

Phương pháp giải. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức trong $f(x, m) \geq 0$ có nghĩa.

Bước 2: *Điều kiện cần*: Giả sử $f(x, m) \geq 0$ có nghiệm là $x = x_0$, khi đó:

a. Dựa trên tính chất đối xứng của các biểu thức giải tích trong $f(x, m) \geq 0$, ta đi khẳng định $x = \varphi(x_0)$ cũng là nghiệm của $f(x, m) \geq 0$.

b. Do đó để $f(x, m) \geq 0$ có nghiệm duy nhất cần có $x_0 = \varphi(x_0) \Rightarrow$ giá trị của x_0 .

c. Thay giá trị của x_0 vào $f(x, m) \geq 0$ ta xác định được điều kiện cần cho tham số m để $f(x, m) \geq 0$ có nghiệm duy nhất, giả sử $m \in D_m$.

Bước 3: *Điều kiện đủ*: Với $m \in D_m$, ta đi kiểm tra lại tính duy nhất nghiệm cho $f(x, m) \geq 0$.

Bước 4: Kết hợp ba bước trên ta tìm được đáp số.

Bài toán 2.4 (Bài toán về tập nghiệm). Tìm giá trị của tham số m để phương trình, bất phương trình hoặc hệ nghiệm đúng với mọi $x \in D$.

Phương pháp giải. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của phương trình, bất phương trình hoặc hệ có nghĩa.

Bước 2: *Điều kiện cần*: giả sử phương trình, bất phương trình hoặc hệ nghiệm đúng với mọi $x \in D$, suy ra nó nghiệm đúng với $x_0 \in D$.

Giải bài toán với $x = x_0 \Rightarrow$ suy ra giá trị của tham số là m_0 .

Bước 3: *Điều kiện đủ*: thực hiện phép kiểm tra với $m = m_0$.

Bài toán 2.5 (Bài toán về hai phương trình tương đương). Cho hai phương trình $f(x, m) = 0$ và $g(x, m) = 0$. Tìm điều kiện của tham số (giả sử là m) để hai phương trình tương đương.

Phương pháp giải. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: *Điều kiện cần*

- Giải và tìm nghiệm $x = x_0$ của $f(x, m) = 0$.
- Để phương trình $f(x, m) = 0$ và $g(x, m) = 0$ tương đương, trước hết cần $x = x_0$ cũng là nghiệm của $g(x, m) = 0$, tức là $g(x_0, m) = 0 \Rightarrow m = m_0$.
- Vậy $m = m_0$ chính là điều kiện cần.

Bước 2: *Điều kiện đủ*

- Với $m = m_0$

$$f(x, m) = 0 \Leftrightarrow f(x, m_0) = 0 \Rightarrow \text{nghiệm của } f(x, m) = 0.$$

$$g(x, m) = 0 \Leftrightarrow g(x, m_0) = 0 \Rightarrow \text{nghiệm của } g(x, m) = 0.$$
- Kết luận.

2.2.2.4 Phương pháp lượng giác hóa

Để lượng giác hóa các phương trình và bất phương trình ta sử dụng các nhận xét sau:

1. Nếu $-1 \leq x \leq 1$ thì tồn tại α và β với $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \beta \leq \pi$ sao cho $\sin \alpha = x$ và $\cos \beta = x$.

2. Nếu $0 \leq x \leq 1$ thì tồn tại α và β với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ sao cho $\sin \alpha = x$ và $\cos \beta = x$.
3. Với mỗi số thực x tồn tại số α với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ sao cho $x = \tan \alpha$.
4. Nếu các số thực x, y thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$ thì tồn tại số α với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ sao cho $x = \sin \alpha$ và $y = \cos \alpha$.

2.2.3 Xây dựng phương trình và bất phương trình mũ

2.2.3.1 Xây dựng phương trình và bất phương trình mũ dựa vào phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 2.31. Xét một phương trình bậc hai $2t^2 - 9t + 4 = 0$.

Lấy $t = 2^{x^2-x}$, ta được $2.(2^{x^2-x})^2 - 9.2^{x^2-x} + 4 = 0$.

Chia hai vế phương trình cho 4, ta được $2^{2x^2-2x-1} - 9.2^{x^2-x-2} + 1 = 0$.

Nhân hai vế phương trình với 2^{2x+2} , ta có bài toán sau

Bài toán 2.6. Giải phương trình

$$2^{2x^2+1} - 9.2^{x^2+x} + 2^{2x+2} = 0.$$

Ví dụ 2.32. Xét một phương trình bậc ba $t^3 - 1 = 0$.

Lấy $t = 2^x - \frac{2}{2^x}$, ta được $\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^3 - 1 = 0$.

Khai triển $\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^3$ trong phương trình trên ta được bài toán sau

Bài toán 2.7. Giải phương trình

$$2^{3x} - 6.2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1.$$

Ví dụ 2.33. Xét phương trình bậc bốn $t^4 + 2t^3 - t - 2 = 0$.

Do $t = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho t ta được $t^3 + 2t^2 - \frac{2}{t} - 1 = 0$. Thay $t = (2 + \sqrt{3})^x$ ta được bài toán sau

Bài toán 2.8. Giải phương trình

$$(26 + 15\sqrt{3})^x + 2(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 - \sqrt{3})^x = 1.$$

Nhận xét 2.4. . Từ các phương trình ở các bài toán 2.6, 2.7, 2.8 nếu thay dấu "=" bởi dấu ">, <, ≤, ≥" ta được các bất phương trình mũ tương ứng.

. Việc xây dựng bất phương mũ tương tự phương trình mũ.

Ví dụ 2.34. Xét hệ phương trình đối xứng loại hai $\begin{cases} u^2 = v + 6 \\ v^2 = u + 6 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} u^2 = v + 6 \\ v^2 = u + 6 \end{cases} \Rightarrow (u^2 - 6)^2 = u + 6 \Rightarrow u^2 - 6 = \sqrt{u + 6}$.

Thay $u = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ vào phương trình trên và quy đồng ta được bài toán sau

Bài toán 2.9. Giải phương trình

$$4^x - 6.9^x = \sqrt{54^x + 6.81^x}.$$

Ví dụ 2.35. Xét hệ phương trình đối xứng loại hai $\begin{cases} u^3 + 2 = 3v \\ v^3 + 2 = 3u \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} u^3 + 2 = 3v \\ v^3 + 2 = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3u - 2}$.

Thay $u = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ vào phương trình trên và quy đồng ta được bài toán sau

Bài toán 2.10. Giải phương trình

$$64^x + 2.27^x = 3^{2x+1} \sqrt[3]{3.36^x - 2.27^x}.$$

2.2.3.2 Xây dựng phương trình và bất phương trình mũ dựa vào tính đơn điệu của hàm số.

Ví dụ 2.36. Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Cho $f(2^x + x) = f(1)$ ta được phương trình $(2^x + x)^3 + 2^x + x = 2$.

Khai triển vế trái của phương trình trên ta được bài toán sau

Bài toán 2.11. Giải phương trình sau

$$x^3 + 2^{3x} + 3x.2^{2x} + (1 + 3x^2).2^x + x - 2 = 0.$$

Ví dụ 2.37. Xét hàm số $f(t) = (\sqrt{2} + 1)^t + \frac{1}{2}t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Cho $f\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) = f\left(\frac{1-2x}{x^2}\right)$, ta được

$$(\sqrt{2} + 1)^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) = (\sqrt{2} + 1)^{\frac{1-2x}{x^2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-2x}{x^2}\right).$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)^{\frac{1-x^2}{x^2}} - (\sqrt{2} + 1)^{\frac{2x-1}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 2.12. Giải phương trình

$$(\sqrt{2} + 1)^{\frac{1-x^2}{x^2}} - (\sqrt{2} + 1)^{\frac{2x-1}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}.$$

- Với hàm số $f(t) = (\sqrt{2} + 1)^t + \frac{1}{2}t$. Cho $f((x-1)^2) = f((x+1)^2)$, ta được phương trình

$$(\sqrt{2} + 1)^{(x-1)^2} + \frac{1}{2}(x-1)^2 = (\sqrt{2} + 1)^{(x+1)^2} + \frac{1}{2}(x+1)^2.$$

Biến đổi phương trình trên ta được bài toán sau

Bài toán 2.13. Giải phương trình

$$(\sqrt{2} - 1)^{2x-1} - (\sqrt{2} + 1)^{2x+1} = 2x(\sqrt{2} + 1)^{-x^2}$$

- Với hàm số $f(t) = (\sqrt{2} + 1)^t + \frac{1}{2}t$. Cho $f(\sin^2 x - \sin x) = f(\sin x - 1)$, ta được phương trình $(\sqrt{2} + 1)^{\sin^2 x - \sin x} + \frac{1}{2}(\sin^2 x - \sin x) = (\sqrt{2} + 1)^{\sin x - 1} + \frac{1}{2}(\sin x - 1)$.

Biến đổi phương trình trên ta được bài toán sau

Bài toán 2.14. Giải phương trình

$$(\sqrt{2} + 1)^{\sin^2 x - \sin x} - (\sqrt{2} - 1)^{1 - \sin x} = -2 \sin^4 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

Ví dụ 2.38. Xét hàm số $f(t) = 2^t + 5^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Cho $f(2^x) = f(x+1)$, ta được $2^{2^x} + 5^{2^x} + 2^x = 2^{x+1} + 5^{x+1} + x + 1$.

Giảm ước 2^x hai vế của phương trình, ta có bài toán sau

Bài toán 2.15. Giải phương trình $2^{2^x} + 5^{2^x} = 2^x + 5^{x+1} + x + 1$.

- Với hàm số $f(t) = 2^t + 5^t + t$. Cho $f(\sin^2 x) = f(\cos^2 x)$, ta được phương trình $2^{\sin^2 x} + 5^{\sin^2 x} + \sin^2 x = 2^{\cos^2 x} + 5^{\cos^2 x} + \cos^2 x$.

Biến đổi phương trình trên ta được bài toán sau

Bài toán 2.16. Giải phương trình

$$(2^{\sin^2 x} + 5^{\sin^2 x}) - (2^{\cos^2 x} + 5^{\cos^2 x}) = \cos 2x.$$

Nhận xét 2.5. . Việc xây dựng bất phương trình mũ dựa vào tính đơn điệu của hàm số cũng tương tự phương trình mũ.

- Từ các phương trình ở các bài toán 2.12, 2.13 thay dấu "=" bởi các dấu ">", "<", " $\leq$ ", " $\geq$ " ta được các bất phương trình mũ tương ứng.

2.2.3.3 Xây dựng bất phương trình mũ dựa vào hàm phân thức chính quy

Bài toán 2.17. Cho 2 bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ thỏa mãn điều kiện $a_1 \ln b_1 + a_2 \ln b_2 + \dots + a_n \ln b_n = 0$.

Xét hàm số $f(x) = a_1b_1^x + a_2b_2^x + \cdots + a_nb_n^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $f(x) \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Từ bài toán 2.17 ta có thể xây dựng được một số phương trình và bất phương trình mũ.

Ví dụ 2.39. Cho $a_1 = 3, a_2 = 2, b_1 = 3, b_2 = \sqrt{\frac{1}{27}}$. Ta được bất phương trình $3.3^x + 2\left(\sqrt{\frac{1}{27}}\right)^x \geq 5$ nghiệm đúng với mọi x .

Biến đổi bất phương trình trên ta được bài toán sau

Bài toán 2.18. Giải bất phương trình $3^{x+1} + 2\left(\sqrt{\frac{1}{27}}\right)^x \geq 5$.

Ví dụ 2.40. Cho $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 1, b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = \frac{1}{36}$. Ta được bất phương trình $2.2^x + 2.3^x + \left(\frac{1}{36}\right)^x \geq 5$ nghiệm đúng với mọi x .

Biến đổi bất phương trình trên ta có bài toán sau

Bài toán 2.19. Giải bất phương trình $2.72^x + 2.108^x - 5.36^x + 1 \geq 0$.

2.2.4 Các bài toán liên quan

Có nhiều dạng toán về phương trình và bất phương trình mũ có chứa tham số. Ở đây, tác giả chỉ xét hai dạng đó là: xác định tham số để phương trình có nghiệm duy nhất, chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất và xác định tham số để bất phương trình nghiệm đúng với mọi biến x thuộc khoảng đã cho.

2.2.4.1 Xác định tham số để phương trình có nghiệm duy nhất và chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất

Bài toán 2.20. Tìm $a > 0$ để phương trình $a^x = 1 + x$ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 2.21. Giả sử a, b là hai số dương và $a < b$.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ \sqrt{ab} & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$. Tìm m để phương trình

$f(x) = m$ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 2.22. Chứng minh rằng phương trình $x.a^x = 1$ có nghiệm duy nhất với mọi $a > 1$.

2.2.4.2 Xác định tham số để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc một khoảng đã cho

Bài toán 2.23. Xác định $a > 0$ để bất phương trình $a^x \geq 1 + x$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét 2.6. Từ bài toán 2.23 ta có bất đẳng thức $e^x \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Bài toán 2.24. Xác định $a > 0$ để bất phương trình $a^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$.

Nhận xét 2.7. Từ bài toán 2.24 ta có bất đẳng thức $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}, \forall x \geq 0$.
Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

2.3 Hệ phương trình mũ

Các phương pháp giải phương trình mũ đều được áp dụng vào để giải hệ phương trình mũ. Ở đây tác giả chỉ cho các ví dụ là dùng các phép biến đổi chuyển về hệ đại số và sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải hệ phương trình mũ.

2.3.1 Phép chuyển về hệ đại số

2.3.2 Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

2.4 Một số dạng toán liên quan

2.4.1 Các bài toán cực trị

Trong phần này, tác giả đưa ra một số bài toán cực trị có liên quan đến hàm số mũ và việc giải phương trình mũ. Từ các bài toán cực trị ta có được các bài toán về phương trình mũ và hệ phương trình mũ tương ứng.

Bài toán 2.25. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = (2 + \sqrt{3})^{2x} + (2 - \sqrt{3})^{2x} - 8[(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x].$$

Nhận xét 2.8. Từ bài toán 2.25 ta có được bài toán sau:

Giải phương trình

$$(7 + 4\sqrt{3})^x + (7 - 4\sqrt{3})^x - 8[(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x] + 18 = 0.$$

Nghiệm của phương trình: $x = -1$ và $x = 1$.

Bài toán 2.26. Cho x, y thỏa $3y + x \geq 2 - \log_4 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1}$.

Nhận xét 2.9. Từ bài toán 2.26 ta có được bài toán sau:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} = 2 \\ 3y + x = 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ là
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \log_4 \sqrt{3} \\ y = \frac{1}{2} - \log_4 \sqrt{3}. \end{cases}$$

Bài toán 2.27. Cho hai số dương x, y và $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3^{x+1} + 9^y$.

Nhận xét 2.10. Từ bài toán 2.27 ta có được bài toán sau:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3^{x+1} + 9^y = \frac{27}{\sqrt[3]{36}} \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{với điều kiện: } x, y > 0.$$

Nghiệm của hệ là
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \log_3 6 \\ y = 1 - \frac{1}{3} \log_3 6. \end{cases}$$

Bài toán 2.28. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 4^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|}$.

Nhận xét 2.11. Từ bài toán 2.28 ta có được bài toán sau:

Giải phương trình $4^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} = 3$.

Nghiệm của phương trình $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 2.29. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|}.$$

Nhận xét 2.12. Từ bài toán 2.29 ta có được hai bài toán sau:

1. Giải phương trình $2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} = 3$.

Nghiệm của phương trình là
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Giải phương trình $2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} = 2 \cdot 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2.4.2 Các bài toán về dãy số

Các bài toán về dãy số có nội dung khá đa dạng. Ở đây tác giả chỉ quan tâm đến một dạng đó là: các bài toán chứng minh dãy số có chứa hàm số mũ có giới hạn hữu hạn (hay hội tụ) và tìm giới hạn của dãy số.

Bài toán 2.30. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x_n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài toán 2.31. Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài toán 2.32. Cho $a > 1$ và dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = a$, $x_{n+1} = a^{x_n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Hãy xác định tất cả các giá trị của a để dãy (x_n) hội tụ.

Bài toán 2.33. Cho dãy số (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \frac{2^{x_n}(x_n \ln 2 - 1) + 1}{2^{x_n} \ln 2 - 1} \end{cases}$$

 $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Xác định a để dãy có giới hạn hữu hạn khác 0.

2.4.3 Một số bài toán về phương trình hàm liên quan đến hàm mũ

Các dạng toán về phương trình hàm khá đa dạng, ở đây tác giả chỉ trình bày một vài bài toán về phương trình hàm có liên quan đến đặc trưng hàm của hàm số mũ và ứng dụng của việc giải phương trình mũ vào các bài toán về phương trình hàm.

Bài toán 2.34. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ thỏa điều kiện

$$f(x+1) = 3f(x) + 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.35. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa điều kiện

$$f(x+y) = f(x)e^{f(y)-1}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2.36. Cho b là một số dương. Hãy xác định tất cả các hàm số f xác định trên tập số $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình

$$f(x+y) = f(x).3^{b^y+f(y)-1} + b^x(3^{b^y+f(y)-1} - b^y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

3.1 Phương trình, bất phương trình lôgarit cơ bản

3.1.1 Phương trình lôgarit cơ bản

3.1.2 Bất phương trình lôgarit cơ bản

3.2 Phương pháp giải và biện luận phương trình, bất phương trình lôgarit

3.2.1 Các phương pháp cơ bản

3.2.1.1 Phương pháp đưa về cùng cơ số

Các dạng thường gặp:

Dạng 1 $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b. \end{cases}$

Dạng 2 $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0. \end{cases}$

Lưu ý. Đặt điều kiện cho $f(x) > 0$ hay $g(x) > 0$ tùy thuộc vào độ phức tạp của $f(x)$, $g(x)$.

Dạng 3

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases}$$

Hoặc

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] < 0 \end{cases}$$

Dạng 4

$$\log_a f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > a^{g(x)} \end{cases}$$

Dạng 5

$$\log_a f(x) > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^{g(x)} \end{cases}$$

Lưu ý. Đối với ba dạng 3, 4, 5 khi thay dấu "<, >" bằng dấu " $\leq, \geq$ " thì cách giải tương tự.

3.2.1.2 Phương pháp đặt ẩn phụ

3.2.1.3 Phương pháp sử dụng tính đơn điệu hàm số

3.2.2 Các phương pháp khác

3.2.2.1 Sử dụng định lý Rolle

3.2.2.2 Phương pháp đánh giá

3.2.2.3 Phương pháp điều kiện cần và đủ

3.2.3 Xây dựng phương trình và bất phương trình lôgarit

3.2.3.1 Xây dựng phương trình và bất phương trình lôgarit dựa vào phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 3.27. Xét phương trình bậc hai $t^2 + t - 2 = 0$. Lấy $t = \log_2(3^x - 1)$ ta được phương trình $\log_2^2(3^x - 1) + \log_2(3^x - 1) - 2 = 0$.

Biến đổi phương trình trên ta được bài toán sau

Bài toán 3.1. Giải phương trình

$$\log_2(3^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 3^x - 2) = 2.$$

Ví dụ 3.28. Xét phương trình bậc ba $t^3 + 3t - 4 = 0$ có nghiệm $t = 1$.

Lấy $t = \sqrt[3]{\log_2 x}$, ta được $(\sqrt[3]{\log_2 x})^3 + 3\sqrt[3]{\log_2 x} - 4 = 0$

Biến đổi phương trình trên ta được bài toán sau

Bài toán 3.2. Giải phương trình $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \frac{4}{3}$.

Nhận xét 3.1. Từ các phương trình ở các bài toán 3.1, 3.2 nếu thay dấu "=" bởi các dấu ">, <, ≥, ≤" ta được các bất phương trình lôgarit tương ứng.

Ví dụ 3.29. Xét phương trình $\log_2(3t - 1) + 2t - 1 = 2^t$. Lấy $t = \frac{1 - 3 \sin x}{2}$, ta được bài toán sau

Bài toán 3.3. Giải phương trình

$$\sqrt{2^{1-3 \sin x}} + 1 + 3 \sin x = \log_2(1 - 9 \sin x).$$

Ví dụ 3.30. Xét phương trình $\log_{2011}(t + 1) + 1 = 2011^t$.

Lấy $t = 2011^{2|\sin x| + 4^{|\cos x|} - 5}$, ta được bài toán sau

Bài toán 3.4. Giải phương trình

$$\log_{2011}(2011^{2|\sin x| + 4^{|\cos x|} - 4}) = 2011^{(2011^{2|\sin x| + 4^{|\cos x|} - 5})} - 1.$$

3.2.3.2 Xây dựng phương trình và bất phương trình lôgarit dựa vào tính đơn điệu của hàm số

Ví dụ 3.31. Xét hàm số $f(t) = \log_{2011} t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Cho $f(x^6 + x^2 + 1) = f(4x^2 + 2)$, ta được:

$$\begin{aligned} \log_{2011}(x^6 + x^2 + 1) + x^6 + x^2 + 1 &= \log_{2011}(4x^2 + 2) + 4x^2 + 2 \\ \Leftrightarrow \log_{2011} \frac{4x^2 + 2}{x^6 + x^2 + 1} &= x^6 - 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 3.5. Giải phương trình

$$\log_{2011} \frac{4x^2 + 2}{x^6 + x^2 + 1} = x^6 - 3x^2 - 1.$$

• Với hàm số $f(t) = \log_{2011} t + t$. Cho $f(2011^x) = f(2010x + 1)$, ta được phương trình $\log_{2011} 2011^x + 2011^x = \log_{2011}(2010x + 1) + 2010x + 1$.

Biến đổi phương trình trên ta có bài toán sau

Bài toán 3.6. Giải phương trình

$$2011^x = \log_{2011}(2010x + 1) + 2009x + 1.$$

Ví dụ 3.32. Xét hàm số $f(t) = t \left[(t+1) \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) - 1 \right]$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Cho $f(x^2) = f(x^4)$ với $x > 0$, ta được:

$$\begin{aligned} x^2 \left[(x^2 + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - 1 \right] &= x^4 \left[(x^4 + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{x^4} \right) - 1 \right] \\ \Leftrightarrow x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{1+\frac{1}{x^2}} - x^6 \ln \left(1 + \frac{1}{x^4} \right)^{1+\frac{1}{x^4}} &= 1 - x^2. \end{aligned}$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 3.7. Giải phương trình

$$x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{1+\frac{1}{x^2}} + x^2 = x^6 \ln \left(1 + \frac{1}{x^4} \right)^{1+\frac{1}{x^4}} + 1 \quad (\text{với } x > 0).$$

Ví dụ 3.33. Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln^2 t}{\ln(1+t)}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Cho $f(\sin x) = f(\cos x)$, ta được

$$\begin{aligned} \frac{\ln^2 \sin x}{\ln(1+\sin x)} &= \frac{\ln^2 \cos x}{\ln(1+\cos x)} \\ \Leftrightarrow (1+\cos x)^{\log_{\cos x} \sin x} &= (1+\sin x)^{\log_{\sin x} \cos x} \end{aligned}$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 3.8. Giải phương trình

$$(1+\cos x)^{\log_{\cos x} \sin x} = (1+\sin x)^{\log_{\sin x} \cos x}.$$

Ví dụ 3.34. Xét hàm số $f(t) = \log_2(2+t) + t$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Cho $f(2011^x + 2013^x) = f(2 \cdot 2012^x)$, ta được phương trình

$$\log_2(2 + 2011^x + 2013^x) + 2011^x + 2013^x = \log_2(2 + 2 \cdot 2012^x) + 2 \cdot 2012^x.$$

Biến đổi phương trình trên ta được bài toán sau

Bài toán 3.9. Giải phương trình

$$\log_2 \sqrt{2 + 2011^x + 2013^x} - \log_2 \sqrt{1 + 2012^x} = 2012^x - \frac{1}{2}(2011^x + 2013^x - 1).$$

Nhận xét 3.2. Xây dựng bất phương trình lôgarit dựa vào tính đơn điệu của hàm số tương tự như phương trình lôgarit.

3.2.4 Các bài toán liên quan

3.2.4.1 Xác định tham số để phương trình có nghiệm duy nhất và chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất

Bài toán 3.10. Tìm $0 < a \neq 1$ để phương trình $x = 1 + \log_a x$ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 3.11. Chứng minh rằng phương trình $x \log_a x = 1$ có nghiệm duy nhất với mọi $a > 1$.

3.2.4.2 Xác định tham số để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc một khoảng đã cho

Bài toán 3.12. Tìm $0 < a \neq 1$ để bất phương trình $x \geq 1 + \log_a x$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

Nhận xét 3.3. Từ bài toán 3.12 ta có bất đẳng thức $x \geq 1 + \ln x, \forall x > 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Bài toán 3.13. Tìm $0 < a \neq 1$ để bất phương trình $\log_a(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$.

Nhận xét 3.4. Từ bài toán 3.13 ta có bất đẳng thức $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}, \forall x \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Như vậy phương trình $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$ có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Bài toán 3.14. Tìm $0 < a \neq 1$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x > 0$

$$\frac{1}{x} \log_a \frac{x+2}{x+1} > \frac{1}{x+1} \log_a \frac{x+1}{x}$$

Nhận xét 3.5. Từ bài toán 3.14 ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{x} \ln \frac{x+2}{x+1} > \frac{1}{x+1} \ln \frac{x+1}{x}, \forall x > 0.$$

3.3 Hệ phương trình Lôgarit

Các phương pháp giải phương trình lôgarit đều được áp dụng vào để giải hệ phương trình lôgarit. Ở đây tác giả chỉ cho các ví dụ là dùng các phép biến đổi để chuyển về hệ đại số và sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải hệ phương trình lôgarit.

3.3.1 Phép chuyển về hệ đại số

3.3.2 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

3.4 Một số dạng toán liên quan

3.4.1 Các bài toán cực trị

Trong phần này, tác giả đưa ra một số bài toán cực trị có liên quan đến hàm lôgarit và việc giải phương trình lôgarit. Từ các bài toán cực trị ta có được các bài toán về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình lôgarit tương ứng.

Bài toán 3.16. Trên miền giá trị của các biến x, y, z, t xác định bởi $\frac{1}{4} < x, y, z, t < 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm

$$f(x, y, z, t) = \log_x \left(y - \frac{1}{4}\right) + \log_y \left(z - \frac{1}{4}\right) + \log_z \left(t - \frac{1}{4}\right) + \log_t \left(x - \frac{1}{4}\right).$$

Bài toán 3.17. Cho $x, y, z > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = (x + y + z) \left(\frac{\log_y x}{x + y} + \frac{\log_z y}{y + z} + \frac{\log_x z}{z + x} \right).$$

Bài toán 3.18. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \sqrt{1 + x^2} - x \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Nhận xét 3.6. Từ bài toán 3.18 ta có được hai bài toán sau:

1. Giải phương trình $\sqrt{1 + x^2} - x \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - 1 = 0$.

Nghiệm của phương trình là $x = 0$.

2. Giải bất phương trình $x \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + 1 \geq \sqrt{1 + x^2}$.

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x .

Bài toán 3.19 (Đại học Khối B 2004). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

Bài toán 3.20. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^x$, với $x > 0$.

Bài toán 3.21. Cho hai số $x, y \in (0; 1)$ thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = x^x + y^y$.

Nhận xét 3.7. Từ bài toán 3.21 ta có được bài toán sau

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^x + y^y = \sqrt{2} \end{cases}$ với điều kiện $x, y \in (0; 1)$.

Nghiệm của hệ phương trình $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

3.4.2 Các bài toán về dãy số

Các bài toán về dãy số có nội dung khá đa dạng. Ở đây tác giả chỉ quan tâm đến một dạng đó là: các bài toán chứng minh dãy số có chứa hàm số lôgarit có giới hạn hữu hạn (hay hội tụ) và tìm giới hạn của dãy số.

Bài toán 3.22. Cho số thực $a \geq 1$. Xét dãy số (x_n) được xác định bởi:

$x_1 = a$ và $x_{n+1} = 1 + \ln \left(\frac{x_n^2}{1 + \ln x_n} \right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài toán 3.23. Cho dãy số (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = x_n + \ln \left(\frac{2x_n + 3}{x_n - 1} \right) \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tùy theo a xét tính hội tụ của dãy (x_n) .

Bài toán 3.24. Cho dãy số (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = a \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = \ln(1 + x_n^2)^{\frac{1}{2}} - 2011 \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy (x_n) hội tụ.

KẾT LUẬN

Các kết quả chính của luận văn "*Một số phương pháp giải phương trình và bất phương trình siêu việt*" đã đạt được:

- Hệ thống một số phương pháp giải phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit.
- Xây dựng một số phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit dựa vào phương pháp đặt ẩn phụ và tính đơn điệu của hàm số.
- Dựa vào các phương pháp giải phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit đi giải một số hệ phương trình mũ và lôgarit tương ứng.
- Từ một số kết quả về biện luận bất phương trình mũ và lôgarit trên một khoảng đã cho thu được các bất đẳng thức về mũ và lôgarit tương ứng. Ngược lại, từ một số dạng bất đẳng thức đã chứng minh ta xây dựng lớp các phương trình và bất phương trình dạng mũ và lôgarit mới.
- Trình bày một số dạng toán liên quan đến việc giải phương trình mũ và lôgarit: các bài toán cực trị, các bài toán tìm giới hạn của dãy số và các bài toán về phương trình hàm liên quan đến hàm mũ và lôgarit.