



**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

---

**Lê Văn Thạnh**

**MỘT SỐ TÌM HIỂU SÂU THÊM**  
**VỀ LỚP CÁC VÀNH NGUYÊN TỐ**

Chuyên ngành: **Đại số và lý thuyết số**

Mã số: 60 46 05

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:**  
**PGS.TS BÙI TƯỜNG TRÍ**

**TP. Hồ Chí Minh – Năm 2010**

## Lời cảm ơn

Lời cảm ơn đầu tiên tôi xin chân thành gửi đến PGS. TS. Bùi Tường Trí, người thầy đã hướng dẫn, giúp đỡ tôi tận tình trong quá trình thực hiện và hoàn thành luận văn này.

Kế đến, tôi cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Khoa Toán – Tin học, Trường Đại Học Sư Phạm Thành Phố Hồ Chí Minh đã giảng dạy, truyền đạt kiến thức và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành chương trình đào tạo ở trường.

Đồng thời tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến các bạn cùng lớp khóa 17 đã nhiệt tình giúp đỡ, trao đổi và có những đóng góp tích cực trong quá trình học tập cũng như hoàn thành luận văn.

Và cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn đến gia đình mình, đặc biệt là bố mẹ đã cố gắng tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho việc học tập và nghiên cứu cũng như đã luôn sát cánh động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua.

## Bảng các kí hiệu toán học

|                        |                                                         |
|------------------------|---------------------------------------------------------|
| $E_G(M)$ :             | vành tự đồng cấu nhóm cộng $M$ .                        |
| $C_R(M)$ :             | vành giao hoán của của $R$ trong $M$ .                  |
| $\text{Hom}_R(M, N)$ : | nhóm các $R$ -đồng cấu môđun phải từ $M$ đến $N$ .      |
| $\text{End}_R(M)$ :    | vành các tự đồng cấu $R$ -môđun phải $M$ .              |
| $R_n$ :                | vành các ma trận vuông cấp $n$ hệ số trên $R$ .         |
| $M_n(D) = D_n$ :       | vành các ma trận vuông cấp $n$ lấy hệ số trên thể $D$ . |
| $\mathfrak{M}_R$ :     | phạm trù các $R$ -môđun phải.                           |
| $E(M)$ :               | bao nội xạ của môđun phải $M_R$ .                       |
| $\bar{E}(M)$ :         | bao hữu tỉ của môđun phải $M_R$ .                       |
| $J(R)$ :               | căn Jacobson của vành $R$ .                             |
| $Z(R)$ :               | tâm của vành $R$ .                                      |
| $C(R)$ :               | centroid của vành $R$ .                                 |
| $Q = Q(R)$ :           | vành các thương (cổ điển) phải của vành $R$ .           |
| $Q_m = Q_{\max}(R)$ :  | vành các thương tối đại phải của vành $R$ .             |
| $Q^r(R)$ :             | vành các thương Martindale phải của vành $R$ .          |
| $Q^s(R)$ :             | vành các thương Martindale đối xứng của vành $R$ .      |
| $C = Z(Q_m)$ :         | mở rộng centroid của vành $R$ .                         |
| $l(S), r(S)$ :         | linh hóa tử trái, phải của tập $S$ .                    |
| $\text{ann}(A)$ :      | linh hóa tử của idêan $A$ .                             |

# Mở đầu

Vành nguyên tố là lớp các vành không giao hoán đặc biệt. Càng nghiên cứu sâu thêm về chúng, ta càng phát hiện ra nhiều tính chất thú vị. Chính điều này đã góp phần tác động đến việc chọn nghiên cứu lớp các vành nguyên tố làm đề tài luận văn thạc sĩ của chúng tôi.

Tuy nhiên, như ta đã biết lớp các vành nguyên tố là một đề tài rất rộng lớn mà đối với trình độ và kiến thức của bản thân tôi không thể bao quát hết. Xuất phát từ bài báo “Some comments on Prime rings” của Herstein và Lance W. Small đăng năm 1979, chúng tôi thấy rằng lớp các vành nguyên tố đặc biệt sẽ thỏa mãn một tính chất rất thú vị mà lớp các vành nguyên tố tổng quát nói chung là chưa có. Cụ thể tính chất đó như thế nào cũng như nội dung của luận văn là gì sẽ được tôi tóm lược ngay sau đây.

Ta nhắc lại, vành  $R$  được gọi là nguyên tố là nếu tích hai ideal (hai phía) khác không luôn khác không. Điều này tương đương với nếu  $aRb = 0$  với  $a, b \in R$  thì  $a = 0$  hay  $b = 0$  ( tức là nếu  $arb = 0, \forall r \in R$  thì  $a = 0$  hay  $b = 0$ ).

Vấn đề được đặt ra là liệu có thể có  $arbr = 0, \forall r \in R$ ,  $R$  là vành nguyên tố, và  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$  trong  $R$  hay không? Tổng quát hơn là ta có thể tìm được  $n$  phần tử khác không  $a_1, a_2, \dots, a_n$  trong một vành nguyên tố  $R$  sao cho  $a_1ra_2r \dots a_{n-1}ra_n = 0, \forall r \in R$  hay không?

Posner và Schneider đã tìm cách giải quyết vấn đề trên và thu được một định lý về việc không thể có hệ thức dạng  $a_1ra_2r \dots a_{n-1}ra_n = 0$  cho một lớp các vành nguyên tố liên quan và việc có thể có hệ thức dạng trên cho lớp các vành nguyên tố khác. Dựa bài báo của Herstein và Small, chúng tôi đã đưa kết quả này đi xa hơn thông qua ba định lý chính ở chương 3 của luận văn.

Để chứng minh hoàn chỉnh các định lý này ta cần đến hai định lý cũng không kém phần quan trọng khác là định lý Goldie và định lý Martindale. Hai định lý này đều liên quan đến vành các thương nhưng ở các dạng khác nhau. Định lý Goldie nói về vành các thương cổ điển của một vành. Còn định lý Martindale thì nói về mở rộng centroid  $C$  của vành. Mà  $C$  chính là tâm của vành các thương tối đại cũng chính là tâm của vành các thương Martindale đối xứng. Do đó ta sẽ dành chương 2 để xây dựng các vành các thương này cũng như trình bày các tính chất của nó.

Tóm lại, luận văn này gồm 3 chương

## Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày các khái niệm cơ bản liên quan đến idêan, môđun, bao nội xạ, bao hữu tỉ và centroid của một vành; định nghĩa các vành không giao hoán đặc biệt, tính chất cũng như mối liên hệ giữa chúng.

## **Chương 2.** Vành các thương và tính chất của nó.

Chương này xây dựng các loại vành các thương: cổ điển, tối đại, Martindale phải và Martindale đối xứng. Sau đó chứng minh một số tính chất cũng như mối liên hệ giữa chúng. Đồng thời trình bày hai định lý quan trọng là Goldie và Martindale.

## **Chương 3.** Một số vấn đề về vành nguyên tố.

Đây là phần chính của luận văn. Chương này trình bày và làm rõ các vấn đề được đặt ra trong bài báo của I.N.Herstein và Lance.W.Small để thấy được lớp các vành nguyên tố nào có được tính chất như đã nói ở trên còn lớp vành nào không thể có được điều này.

Phần cuối cùng là kết luận lại những gì đã làm được trong luận văn này cũng như những mặt còn hạn chế chưa làm được của chúng tôi.

Mặc dù đã nỗ lực, cố gắng nhưng chúng tôi vẫn khó tránh khỏi những sai sót và hạn chế, kính mong quý thầy cô, đồng nghiệp và bạn đọc sẵn lòng góp ý.

Xin chân thành cảm ơn.

# Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

## 1.1. Các khái niệm cơ bản.

**Định nghĩa 1.1.1.** Tập con  $I \neq \emptyset$  của vành  $R$  được gọi là *ideal phải* nếu:

- (1)  $\forall a, b \in I: a - b \in I$ ,
- (2)  $a \cdot r \in I, \forall a \in I, \forall r \in R$ .

**Chú ý.**

- Ta có định nghĩa tương tự cho ideal trái.
- $I$  được gọi là ideal hai phía của  $R$  nếu  $I$  vừa là ideal trái vừa là ideal phải, ta gọi tắt  $I$  là ideal của  $R$ .
- Nếu  $I$  là một ideal phải của  $R$  thì  $(I: R) = \{x \in R \mid Rx \subset I\}$

**Định nghĩa 1.1.2.** Các ideal đặc biệt.

- Ideal  $I$  của  $R$  được gọi là *ideal nguyên tố* nếu  $x, y \in R$  sao cho  $xRy \in I$  thì  $x \in I$  hoặc  $y \in I$ .
- Ideal phải (trái, hai phía) của  $R$  được gọi là *ideal phải (trái, hai phía) tối đại* nếu  $I$  không nằm trong bất kì ideal phải (trái, hai phía) thực sự của  $R$ .
- Ideal phải (trái, hai phía) của  $R$  được gọi là *ideal phải (trái, hai phía) tối tiểu* nếu  $I$  không chứa bất kì ideal phải (trái, hai phía) thực sự của  $R$ .
- Ideal phải  $I$  của  $R$  được gọi là *chính qui* nếu  $\forall x \in R, \exists a \in R: x - ax \in I$ .
- Ideal phải  $I$  của  $R$  được gọi là *cốt yếu* nếu  $I$  có giao khác (0) với mọi ideal phải khác rỗng của  $R$ .
- Phần tử  $a \in R$  được gọi là *lũy linh* nếu tồn tại số nguyên  $m$  sao cho  $a^m = 0$ .
- Ideal phải (trái, hai phía) của  $R$  được gọi là *nil-ideal phải (trái, hai phía)* nếu mọi phần tử của nó đều lũy linh.
- Ideal phải (trái, hai phía)  $\rho$  của  $R$  được gọi là *ideal phải (trái, hai phía) lũy linh* nếu tồn tại số nguyên  $m$  sao cho  $a_1 a_2 \dots a_m = 0$  với mọi  $m$  phần tử  $a_i \in \rho$ .

**Nhận xét .**

- Idean phải  $\rho$  là lũy linh nếu tồn tại số nguyên  $m$  sao cho  $\rho^m = (0)$ .
- Nếu  $\rho$  là lũy linh thì  $\rho$  là nil-idean (điều ngược lại nói chung là không đúng).
- Tổng của hai idean lũy linh là lũy linh, điều này cũng đúng cho tổng hữu hạn các idean lũy linh.

**Định nghĩa 1.1.3.** Cho  $F$  là một trường (tổng quát hơn là một thể), không gian vector phải  $V$  trên  $F$  là một tập với hai phép toán:  $+: V \times V \rightarrow V$  và  $.: V \times F \rightarrow V$  sao cho:

- (1) phép cộng giao hoán:  $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ ,
- (2) phép cộng có tính kết hợp:  $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$ ,
- (3) phép cộng có đơn vị: tồn tại  $0 \in V$  sao cho  $u + 0 = 0 + u = u, \forall u \in V$ ,
- (4) tồn tại phần tử đối:  $\forall u \in V, \exists v \in V: u + v = 0$ ,
- (5) phép nhân ngoài có tính kết hợp:  $\forall u \in V, \forall a, b \in F, (ua)b = u(ab)$ ,
- (6) phân phối với phép nhân ngoài:  $\forall u \in V, \forall a, b \in F, u(a + b) = ua + ub$ ,
- (7) phân phối với phép cộng:  $\forall u, v \in V, \forall a \in F, (u + v)a = ua + va$ ,
- (8) đơn vị của phép nhân ngoài:  $\forall u \in V, u1 = u$ .

**Nhận xét.**

- Ta gọi tắt không gian vector phải là không gian vector.
- Nếu  $I$  là một idean phải của  $F$  thì tự nhiên  $I$  sẽ trở thành một không gian vector trên  $F$ .

**Định nghĩa 1.1.4.** Cho  $R$  là một vành, nhóm cộng Abel  $M$  được gọi là một  $R$ -môđun phải nếu có một ánh xạ từ  $M \times R$  vào  $M$  biến cặp  $(m, r)$  thành  $mr$  sao cho:

- (1)  $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$ ,
- (2)  $(m_1 + m_2)r = m_1r + m_2r$ ,
- (3)  $(mr_1)r_2 = m(r_1r_2)$ .

với mọi  $m, m_1, m_2 \in M$  và  $r, r_1, r_2 \in R$ .

**Chú ý.**

- Ta dùng “ $R$ -môđun” để gọi tắt cho “ $R$ -môđun phải”.
- Nếu  $M$  là  $R$ -môđun thì  $A(M) = \{x \in R \mid Mx = (0)\}$ .

**Định nghĩa 1.1.5.**  $M$  là  $R$ -môđun trung thành nếu  $Mr = (0)$  thì  $r = 0$ .

**Bổ đề 1.1.6.**  $A(M)$  là *Idêan* của  $R$  và  $M$  là  $R/A(M)$ - môđun trung thành.

**Định nghĩa 1.1.7.**  $M$  được gọi là  $R$ - môđun *bất khả qui* nếu  $MR \neq (0)$  và  $M$  chỉ có hai môđun con tầm thường là  $(0)$  và  $M$ .

**Bổ đề 1.1.8. (Bổ đề Schur).** Nếu  $M$  là  $R$ -môđun *bất khả qui* thì  $C_R(M)$  là một thể (vành có mọi phần tử khác 0 đều khả nghịch).

**Bổ đề 1.1.9.** Nếu  $M$  là  $R$ - môđun *bất khả qui* thì  $M$  đẳng cấu với môđun  $R/\rho$  với  $\rho$  là một *idêan* phải tối đại nào đó của  $R$ . Hơn nữa, tồn tại  $a \in R$  sao cho  $x - ax \in \rho, \forall x \in R$  ( khi đó  $\rho$  được gọi là *idêan* phải *chính qui*). Ngược lại, nếu  $\rho$  là một *idêan* phải *chính qui* của  $R$  thì  $R/\rho$  là  $R$ -môđun *bất khả qui*.

**Nhận xét.** Nếu  $R$  là vành có đơn vị thì mọi *idêan* phải tối đại của  $R$  đều *chính qui*.

## Vành giao hoán tử.

Cho  $M$  là  $R$ -môđun,  $a \in R$ , ánh xạ  $T_a: M \rightarrow M$  cho bởi  $mT_a = ma, m \in M$  là đồng cấu nhóm cộng. Kí hiệu  $E_G(M)$  là tập tất cả các tự đồng cấu nhóm cộng của  $M$ .  $E_G(M)$  là một vành với các phép toán cộng và nhân các đồng cấu nhóm.

Xét ánh xạ  $\varphi: R \rightarrow E_G(M), \varphi(a) = T_a, a \in R$ .  $\varphi$  là đồng cấu vành. Mà  $\ker \varphi = A(M)$  nên  $R/A(M) \cong \text{Im} \varphi$ .

**Bổ đề 1.1.10.**  $R/A(M)$  đẳng cấu với vành con của vành  $E_G(M)$ .

Đặc biệt, nếu  $M$  là  $R$ -môđun trung thành thì  $A(M) = (0)$ , khi đó  $\varphi$  là đơn cấu nhúng  $R$  vào  $E_G(M)$  như là một vành con nếu ta đồng nhất  $a \equiv T_a, a \in R$ .

**Định nghĩa 1.1.11.** *Vành giao hoán tử của  $R$  trong  $M$  là*

$$C_R(M) = \{ f \in E_G(M) \mid T_a f = f T_a, \forall a \in R \}.$$

Rõ ràng  $C_R(M)$  là vành con của  $E_G(M)$ . Với  $f \in C_R(M), \forall m \in M, \forall a \in R$  ta có:  $(ma)f = mT_a f = m f T_a = (mf)a$ . Do đó  $f$  là đồng cấu môđun. Như vậy ta đồng nhất  $C_R(M)$  như là vành các tự đồng cấu môđun của  $M$ ,  $C_R(M) = \text{End}_R M$ .

## Centroid của một vành.

Cho  $R$  là một vành và gọi  $E_G(R)$  là vành các tự đồng cấu của nhóm cộng  $R$ . Với  $a \in R$  ta định nghĩa các ánh xạ  $T_a: R \rightarrow R$  bởi  $XT_a = xa$  và  $L_a: R \rightarrow R$  bởi  $XL_a = ax$ . Với  $a, b \in R$  thì  $T_a, L_b$  nằm trong  $E_G(R)$ . Gọi  $B(R)$  là vành con của  $E_G(R)$  sinh bởi tất cả các ánh xạ  $T_a$  và  $L_b$  với  $a, b \in R$ . Ta thường gọi  $B(R)$  là vành nhân của  $R$ .

**Định nghĩa 1.1.12.** Centroid của vành  $R$  là tập các phần tử trong  $E_G(R)$  giao hoán từng phần tử với  $B(R)$ , ta kí hiệu là  $C(R)$ .

**Nhận xét.** Lấy  $\sigma \in C(R)$ , với  $x, y \in R$  ta có

$$(xy)\sigma = (XT_y)\sigma = x(T_y\sigma) = x\sigma T_y = (x\sigma)y$$

$$(xy)\sigma = (YL_x)\sigma = y(L_x\sigma) = y(\sigma L_x) = x(y\sigma)$$

Suy ra  $\sigma$  là một  $(R, R)$ -đồng cấu song môđun. Như vậy centroid của vành  $R$  là vành các tự đồng cấu song môđun.

**Định nghĩa 1.1.13.**  $A$  được gọi là đại số trên trường  $F$  nếu  $A$  thỏa các điều kiện sau:

- (1)  $A$  là một vành.
- (2)  $A$  là không gian vectơ trên  $F$ .
- (3)  $\forall a, b \in A, \forall \alpha \in F$  thì  $(ab)\alpha = a(b\alpha) = (a\alpha)b$ .

**Nhận xét.** Nếu  $A$  có đơn vị là 1 thì  $\alpha \cdot 1$  với  $\alpha \in F$  nằm trong tâm của  $A$ .

**Định nghĩa 1.1.14.** Căn Jacobson của vành  $R$ , kí hiệu  $J(R)$  là tập hợp các phần tử của  $R$  linh hoá tất cả các môđun bất khả qui trên  $R$ . Nếu  $R$  không có môđun bất khả qui thì ta qui ước  $J(R) = R$  và gọi là vành radical.

Theo định nghĩa ta có  $J(R) = \bigcap A(M)$ , với  $M$  chạy khắp các  $R$ -môđun bất khả qui là một iđêan hai phía của  $R$ .

**Bổ đề 1.1.15.** Nếu  $\rho$  là iđêan phải tối đại chính qui của  $R$  thì  $(\rho: R) = A(R/\rho)$ .

**Định lý 1.1.16.**  $J(R) = \bigcap (\rho: R)$  với  $\rho$  chạy khắp các iđêan phải tối đại chính qui và  $(\rho: R)$  là iđêan hai phía lớn nhất của  $R$  nằm trong  $\rho$ .

**Bổ đề 1.1.17.** Nếu  $\rho$  là một iđêan phải chính qui của  $R$  thì  $\rho$  nằm trong một iđêan phải tối đại chính qui nào đó của  $R$ .

**Định lý 1.1.18.**  $J(R) = \bigcap \rho$  với  $\rho$  chạy khắp các iđêan phải tối đại chính qui của  $R$ .

**Nhận xét.**

- $J(R)$  chứa mọi nil-đêan một phía của  $R$ .
- Nếu  $A$  là idêan của vành  $R$  thì  $J(A) = A \cap J(R)$ .

**Định lý 1.1.19.**  $J(R/J(R)) = (0)$ .

**Định lý 1.1.20.** Kí hiệu  $R_n$  là vành các ma trận vuông cấp  $n$  trên  $R$ . Khi đó

$$J(R_n) = J(R)_n$$

## Môđun nội xạ và bao nội xạ.

**Định nghĩa 1.1.21.** Môđun  $I$  được gọi là nội xạ nếu với bất kỳ đơn cấu  $g: A \rightarrow B$  của những  $R$ -môđun và bất kỳ  $R$ -đồng cấu  $f: A \rightarrow I$  thì tồn tại một  $R$ -đồng cấu  $h: B \rightarrow I$  sao cho  $f = hg$ , nghĩa là biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{g} & B \\ & & \downarrow f & & \swarrow h \\ & & I & & \end{array}$$

**Nhận xét.**

- Tích trực tiếp  $I = \prod_{\alpha} I_{\alpha}$  của các  $R$ -môđun là nội xạ khi và chỉ khi mỗi  $I_{\alpha}$  là nội xạ.
- $R$ -môđun  $I$  là nội xạ khi và chỉ khi bất kỳ  $R$ -đồng cấu  $I \rightarrow M$  đều chẻ trong  $\mathfrak{M}_R$ . Do đó nếu  $I$  là nội xạ thì với mọi mở rộng  $J \supset I$  ta có  $J = I \oplus N$  với  $N$  là một môđun con nào đó của  $J$ .

**Định nghĩa 1.1.22.**  $R$ -môđun  $I \supset M$  được gọi là một mở rộng nội xạ tối tiểu của môđun  $M$  nếu:

- (1)  $I$  là nội xạ,
- (2)  $M \subset I' \subset I$  và  $I' \neq I$  thì  $I'$  không nội xạ.

**Định nghĩa 1.1.23.**  $R$ -môđun  $E \supset M$  được gọi là một mở rộng cốt yếu của  $M$  nếu mọi môđun con khác  $(0)$  của  $E$  giao không tầm thường với  $M$ . Một mở rộng cốt yếu  $E \supset M$  được gọi là tối đại nếu không có môđun nào thực sự chứa  $E$  là mở rộng cốt yếu của  $M$ .

**Chú ý.**

- $E \supset M$  là một mở rộng cốt yếu, ta có thể gọi  $M$  là một môđun con cốt yếu của  $E$ , kí hiệu là  $M \subset_e E$ .
- $M \subset_e E$  khi và chỉ khi với bất kỳ phần tử khác không  $a \in E$  tồn tại  $r \in R$  sao cho  $0 \neq ar \in M$ .

- Nếu  $M \subset_e E$  và  $E \subset_e E'$  thì  $M \subset_e E'$ .

**Bổ đề 1.1.24.** Một  $R$ -môđun  $M$  là nội xạ khi và chỉ khi nó không có mở rộng cốt yếu thực sự nào.

**Chứng minh.** Đầu tiên, ta giả sử  $M$  là nội xạ, xét một mở rộng thực sự bất kỳ  $E \supset M$ . Theo nhận xét ở 1.1.21,  $E = M \oplus N$  với  $N$  là một môđun con khác  $(0)$  nào đó của  $E$ . Do  $M \cap N = (0)$  nên  $E$  không là mở rộng cốt yếu.

Ngược lại, giả sử  $M$  không có mở rộng cốt yếu thực sự nào và nhúng  $M$  vào một  $R$ -môđun nội xạ  $I$ . Theo bổ đề Zorn, tồn tại môđun con  $S \subset I$  là tối đại trong các môđun con của  $I$  có giao với  $M$  bằng  $(0)$ . Trong thương  $I/S$ , bất kỳ môđun con khác không  $S'/S$  đều có giao không khác  $(0)$  với ảnh của  $M$ , do đó  $\text{im}(M) \subset_e I/S$ . Mà theo giả thiết thì  $\text{im}(M) = I/S$ , điều này có nghĩa  $I = M \oplus S$ . Cũng theo nhận xét ở phần 1.1.21,  $M$  là nội xạ.

**Bổ đề 1.1.25.** Bất kỳ  $R$ -môđun  $M$  nào cũng có một mở rộng cốt yếu tối đại.

**Chứng minh.** Cho  $M$  là một  $R$ -môđun, nhúng  $M$  vào môđun nội xạ  $I$ . Xét họ các mở rộng cốt yếu của  $M$  trong  $I$  và xếp thứ tự chúng theo quan hệ bao hàm. Hợp của họ này cũng là một mở rộng cốt yếu của  $M$ . Theo bổ đề Zorn, ta tìm được môđun con  $E$  là tối đại sao cho  $M \subset_e E \subset I$ . Ta sẽ chứng minh rằng  $E$  là mở rộng cốt yếu tối đại của  $M$ . Giả sử điều này sai, tức là tồn tại  $E' \supsetneq E$  sao cho  $M \subset_e E'$ . Do tính nội xạ của  $I$  thì với ánh xạ bao hàm  $E \subset I$  có thể mở rộng thành  $g: E' \rightarrow I$ . Khi đó  $\ker(g) \cap M = (0)$ , mà  $M \subset_e E'$  nên  $\ker(g) = (0)$ . Do đó ta có thể đồng nhất  $E'$  với  $g(E') \subset I$ . Điều này dẫn đến mâu thuẫn với cách chọn  $E$  là tối đại.

**Định lý 1.1.26.** Với các môđun  $M \subset I$ , những mệnh đề sau là tương đương:

- (1)  $I$  là mở rộng cốt yếu tối đại của  $M$ .
- (2)  $I$  là nội xạ và là mở rộng cốt yếu trên  $M$ .
- (3)  $I$  là mở rộng nội xạ tối tiểu trên  $M$ .

**Chứng minh.** (1) $\Rightarrow$ (2). Do  $I$  là mở rộng cốt yếu tối đại nên theo tính chất bắc cầu ở phần chú ý ở 1.1.23,  $I$  sẽ không có mở rộng cốt yếu thực sự nào. Do đó theo bổ đề 1.1.24,  $I$  là nội xạ.

(2) $\Rightarrow$ (3). Gọi  $I'$  là một môđun nội xạ sao cho  $M \subset I' \subset I$ . Theo nhận xét ở phần 1.1.21,  $I = I' \oplus N$  với  $N$  là môđun con nào đó của  $I$ . Do đó  $N \cap M = (0)$ , mà  $M \subset_e I$  nên  $N = (0)$  hay  $I = I'$ .

(3) $\Rightarrow$ (1).  $I$  là một mở rộng nội xạ tối tiểu của  $M$ . Theo chứng minh của bổ đề 1.1.25 ta có  $E \subset I$  là một mở rộng cốt yếu tối đại của  $M$ . Do đó theo chứng minh trên  $E$  là nội xạ nhưng theo tính chất tối tiểu của  $I$  dẫn đến  $E = I$ .

**Định nghĩa 1.1.27.** Nếu các môđun  $M \subset I$  thỏa những điều kiện tương đương trên thì ta nói  $I$  là bao nội xạ của  $M$ .

**Nhận xét.**

- Bất kỳ môđun  $M$  nào cũng có bao nội xạ (theo mệnh đề 1.1.25)
- Bất kỳ hai bao nội xạ  $I, I'$  nào của  $M$  thì đều đẳng cấu trên  $M$ , tức là tồn tại một đẳng cấu  $g: I \rightarrow I'$  mà nó là đồng nhất trên  $M$ .

## Môđun con trừ mật và bao hữu tỉ.

Cho  $N \subset M$  là những  $R$ -môđun và  $y \in M$ . Ta định nghĩa

$$y^{-1}N = \{r \in R \mid yr \in N\}$$

Đây là một ideal phải của  $R$ . Nếu  $N \subset_e M$  thì  $y \in M \setminus \{0\} \Rightarrow y \cdot (y^{-1}N) \neq (0)$ .

**Định nghĩa 1.1.28.** Ta nói  $N$  là một môđun con trừ mật của  $M$ , viết là  $N \subset_d M$ , nếu với bất kỳ  $x \in M$  và  $y \in M \setminus \{0\}$ ,  $x \cdot y^{-1}N \neq (0)$ , điều này có nghĩa là tồn tại phần tử  $r \in R$  sao cho  $xr \neq 0$  và  $yr \in N$ . Nếu  $N \subset_d M$  thì ta cũng gọi  $M$  là một mở rộng hữu tỉ của  $N$ .

**Nhận xét.**

- Nếu  $N \subset_d M$  thì  $N \subset_e M$ . Điều ngược lại không đúng.
- Cho  $S$  là một tập khác rỗng của  $R$ , ta định nghĩa  $l(S) = \{x \in R \mid xs = 0, \forall s \in S\}$ . Với  $I$  là một ideal phải của  $R$  thì ta có  $I \subset_d R_R$  khi và chỉ khi  $l(y^{-1}I) = 0$ . Nếu  $I$  là một ideal của  $R$  thì  $I \subset_d R \Leftrightarrow l(I) = 0$ .

Từ nhận xét trên ta có hệ quả sau đây

### Hệ quả 1.1.29.

- (1) Nếu  $a \in R$  là một phần tử trong tâm và không là ước của 0 thì  $aR \subset_d R_R$  và  $Ra \subset_d R_R$ .
- (2) Cho  $I$  là một ideal phải của  $R$  và  $z \in R$ . Khi đó nếu  $I \subset_d R_R$  thì  $z^{-1}I \subset_d R_R$ .

**Bổ đề 1.1.30.** Cho  $M$  là một  $R$ -môđun chứa môđun chính quy phải  $R_R$ . Khi đó,  $R_R \subset_d M$  khi và chỉ khi  $R_R \subset_e M$  và với mọi  $y \in M$ ,  $y^{-1}R \subset_d R_R$ .

**Mệnh đề 1.1.31.** Cho các  $R$ -môđun phải  $N \subset M$ , các mệnh đề sau tương đương:

- (1)  $N \subset_d M$
- (2)  $\text{Hom}_R(M/N, E(M)) = 0$ .

(3) Với bất kỳ môđun con  $P$  sao cho  $N \subset P \subset M$  thì  $\text{Hom}_R(P/N, M) = 0$

**Chứng minh.** Giả sử phản chứng, có một  $R$ -đồng cấu khác không  $f: M \rightarrow E(M)$  mà  $f(N) = 0$ . Khi đó  $M \cap f(M) \neq 0$  nên tồn tại  $x, y \in M \setminus \{0\}$  sao cho  $f(y) = x$ . Do  $N \subset_d M$  nên tồn tại  $r \in R$  mà  $xr \neq 0$  và  $yr \in N$ . Ta có

$$0 = f(yr) = f(y)r = xr \neq 0 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra rằng với mọi môđun  $M$  bất kỳ thì đều có duy nhất một mở rộng hữu tỉ tối đại. Đặt  $I = E(M)$  và  $H = \text{End}(I_R)$  với tác động bên trái  $I$ . Ta định nghĩa

$$\bar{E}(M) = \{i \in I \mid \forall h \in H, h(M) = 0 \Rightarrow h(i) = 0\}$$

Đây một  $R$ -môđun con của  $I$  và chứa  $M$ . Ta có tính chất sau

**Bổ đề 1.1.32.** Cho  $M'$  là một môđun con bất kỳ của  $I$  chứa  $M$ . Khi đó,  $M \subset_d M'$  nếu và chỉ nếu  $M' \subset \bar{E}(M)$ .

**Chứng minh.** Nếu  $M' \subset \bar{E}(M)$  ta chỉ cần chứng minh  $M \subset_d M'$ . Xét  $R$ -đồng cấu

$$h: \bar{E}(M) \rightarrow E(\bar{E}(M)) = E(M) \text{ với } h(M) = 0$$

Sau khi mở rộng miền xác định của  $h$  đến  $E(M)$  ta có thể xem  $h \in H$ . Nhưng theo định nghĩa  $\bar{E}(M)$  ta có  $h(\bar{E}(M)) = 0$ . Do đó theo mệnh đề 1.1.31,  $M \subset_d \bar{E}(M)$ .

Ngược lại nếu  $M \subset_d M'$ , ta xét  $h \in H$  sao cho  $h(M) = 0$ . Nếu  $h(M') \neq 0$  thì

$$0 \neq \text{Hom}_R(M'/M, E(M)) = \text{Hom}_R(M'/M, E(M'))$$

điều này mâu thuẫn với  $M \subset_d M'$ . Do đó  $h(M') = 0$  và ta đã chứng minh được  $M' \subset \bar{E}(M)$ .

**Mệnh đề 1.1.33.** Giả sử  $M \subset_d P$ . Khi đó có duy nhất một  $R$ -đồng cấu  $g: P \rightarrow \bar{E}(M)$  là mở rộng của ánh xạ bao hàm  $M \hookrightarrow \bar{E}(M)$  và  $g$  là đơn cấu.

**Chứng minh.** Vì  $M \subset_d P$  nên bao hàm  $M \rightarrow E(M)$  được mở rộng thành phép nhúng  $g: P \rightarrow E(M)$ . Ta có  $M \subset_d g(P)$  nên theo bổ đề 1.1.32,  $g(P) \subset \bar{E}(M)$ . Ta giả sử  $g_1, g_2$  là hai mở rộng của ánh xạ bao hàm  $M \rightarrow \bar{E}(M)$ . Vì  $M \subset_d P$  nên các  $g_i$  là đơn cấu. Xét ánh xạ  $f: g_1(P) \rightarrow \bar{E}(M)$  xác định bởi

$$f(g_1(p)) = g_1(p) - g_2(p) \quad (p \in P)$$

Vì  $f(M) = 0$  và  $M \subset_d \bar{E}(M)$  nên theo bổ đề 1.1.31,  $f = 0$ , do đó  $g_1(p) = g_2(p)$  với mọi  $p \in P$ . Ta đã chứng minh xong.

Như vậy, từ kết quả của 1.1.32 và 1.1.33 ta thấy  $\bar{E}(M)$  là mở rộng hữu tỉ tối đại duy nhất của  $M$ , ta gọi nó là bao hữu tỉ của  $M$ .

**Mệnh đề 1.1.34.**  $\bar{E}(R) = \{y \in E(M) \mid \forall x \in E(M) \setminus \{0\}, x \cdot y^{-1}M \neq 0\}$

**Chứng minh.** Cho  $y$  là phần tử của tập hợp bên phải. Lấy  $h \in H$  sao cho  $h(M) = 0$ . Nếu  $x = h(y) \neq 0$  thì tồn tại  $r \in y^{-1}M$  sao cho  $xr \neq 0$ . Khi đó

$$xr = h(y)r = h(yr) \in h(M) = 0,$$

điều này mâu thuẫn dẫn đến  $h(y) = 0$ , do đó  $y \in \bar{E}(R)$ .

Ngược lại, giả sử  $y \in \bar{E}(R)$  và  $x \in M \setminus \{0\}$ . Chọn  $r \in R$  sao cho  $0 \neq xr \in \bar{E}(R)$ . Vì  $M \subset_d \bar{E}(R)$  nên tồn tại  $s \in R$  sao cho  $(xr)s \neq 0$  và  $(yr)s \in M$ . Do đó  $rs \in y^{-1}M$  và  $x \cdot y^{-1}M$  chứa  $x(rs) \neq 0$ .

## Phần bù.

**Định nghĩa 1.1.35.** Cho  $S$  là một môđun con của  $R$ -môđun  $M$ . Môđun con  $C \subset R$  được gọi là phần bù của  $S$  (trong  $R$ ) nếu  $C$  là tối đại trong số các môđun con của  $M$  sao cho có giao tầm thường với  $S$ .

### Nhận xét.

- Theo bổ đề Zorn thì bất kỳ môđun con  $S$  nào cũng có một phần bù.
- Nếu  $M = C \oplus S$  thì  $C$  là phần bù của  $S$ .
- Nếu  $S \subset_e M$  thì  $(0)$  là phần bù duy nhất của  $S$ .
- Nếu  $C$  là phần bù của  $S$  thì  $C \oplus S \subset_e M$ . Tuy nhiên điều kiện  $C \oplus S \subset_e M$  chưa đủ để suy ra  $C$  là phần bù của  $S$ . Ví dụ như với bất kỳ  $C' \subset_e C$  và  $C' \neq C$  thì

$$C \oplus S \subset_e M \Rightarrow C' \oplus S \subset_e M$$

Nhưng không chắc chắn  $C'$  là phần bù của  $S$ . Để tính chất này trở thành điều kiện cần và đủ ta xét khái niệm tiếp theo đây.

**Định nghĩa 1.1.36.** Ta nói môđun con  $C \subset M_R$  là một phần bù trong  $M$ , viết là  $C \subset_c M$ , nếu có một môđun con  $S \subset M$  sao cho  $C$  là phần bù của  $S$  trong  $M$ .

**Mệnh đề 1.1.37.** Cho  $C \subset_c M$  và  $T$  là một môđun con của  $M$  sao cho  $C \cap T = 0$ . Khi đó,  $C$  là phần bù của  $T$  nếu và chỉ nếu  $C \oplus T \subset_e M$ .

**Chứng minh.** Ta chỉ cần chứng minh chiều nếu, giả sử  $C \oplus T \subseteq_e M$ . Theo giả thiết  $C \subseteq_c R$  nên  $C$  là phần bù của môđun con  $S$  nào đó. Để chứng minh  $C$  là tối đại trong các môđun có giao bằng 0 với  $T$ , ta xét bất kỳ môđun con  $D \supset C$  mà  $D \cap T = 0$ . Khi đó

$$(C + T) \cap (D \cap S) = ((C + T) \cap D) \cap S = C \cap S = 0$$

Vì  $C + T \subseteq_e M$  nên  $D \cap S = (0)$  và do đó  $D = C$ . Vậy  $C$  là phần bù của  $T$  trong  $R$ .

**Hệ quả 1.1.38.** Cho  $C \subseteq_c R$  và  $T$  là một phần bù của  $C$  trong  $M$ . Khi đó  $C$  là một phần bù của  $T$ .

**Chứng minh.** Vì  $T$  là phần bù của  $C$  nên  $T \oplus C \subseteq_e M$ . Do đó theo mệnh đề 1.1.37,  $C$  là phần bù của  $T$ .

## 1.2. Khái niệm một số vành không giao hoán.

**Định nghĩa 1.2.1.**  $R$  được gọi là vành nửa đơn nếu  $J(R) = (0)$ .

**Nhận xét.**

- Nếu  $R$  là một vành bất kì thì  $R/J(R)$  là vành nửa đơn.
- Nếu  $R$  là vành nửa đơn thì mọi idêan của  $R$  cũng nửa đơn.

**Định nghĩa 1.2.2.** Vành  $R$  được gọi là vành đơn nếu  $R^2 \neq (0)$  và  $R$  không có idêan nào khác ngoài  $(0)$  và  $R$ .

**Ví dụ.**

- Trường, thể bất kì là vành đơn.
- $M_n(D)$  là vành đơn, với  $D$  là thể.
- Tổng quát ta có,  $M_n(R)$  là đơn nếu  $R$  là vành đơn.

**Định nghĩa 1.2.3.** Vành  $R$  được gọi là vành nửa nguyên tố nếu nó không có idêan lũy linh khác  $(0)$  nào.

**Định nghĩa 1.2.4.** Vành  $R$  được gọi là vành nguyên thủy nếu nó có một môđun bất khả qui trung thành.

**Chú ý.**

- Như ta qui ước “ $R$ -môđun” là “ $R$ -môđun phải” thì vành như định nghĩa trên là vành nguyên thủy phải.

- Nếu  $M$  là  $R$ -môđun bất khả qui thì  $R/A(M)$  là vành nguyên thủy.

**Định nghĩa 1.2.5.** Vành  $R$  được gọi là vành nguyên tố nếu  $aRb = 0$  với  $a, b \in R$  thì suy ra  $a = 0$  hoặc  $b = 0$ .

**Bổ đề 1.2.6.** Vành  $R$  là nguyên tố nếu và chỉ nếu nó thỏa một trong các điều kiện sau đây:

- (1) Linh hóa phải các iđêan phải khác không của  $R$  bằng  $(0)$ .
- (2) Linh hoá trái các iđêan trái khác không của  $R$  bằng  $(0)$ .
- (3) Nếu  $A, B$  là các iđêan của  $R$  và  $AB = (0)$  thì  $A = (0)$  hoặc  $B = (0)$

**Định nghĩa 1.2.7.** Vành  $R$  được gọi là vành Artin phải nếu mọi tập khác rỗng các iđêan phải của  $R$  đều có phần tử tối tiểu.

**Chú ý.**

- Ta gọi tắt vành Artin phải là vành Artin.
- Một vành là Artin khi và chỉ khi mọi dãy giảm các iđêan phải của  $R$ ,  $\rho_1 \supset \rho_2 \supset \dots \supset \rho_n \supset \dots$  đều dừng, tức là tồn tại số nguyên  $m$  sao cho  $\rho_m = \rho_{m+1} = \dots$  Khi đó ta nói  $R$  thỏa mãn điều kiện dây chuyền giảm các iđêan phải.

**Các ví dụ.**

- Trường, thể và các vành hữu hạn là các vành Artin.
- Vành các ma trận vuông cấp  $n$  trên một thể là vành Artin.
- Tổng trực tiếp hữu hạn các vành Artin là một vành Artin.
- Ảnh đồng cấu của một vành Artin là Artin, do đó vành thương của vành Artin là Artin.

**Định nghĩa 1.2.8.** Vành  $R$  được gọi là Noether phải nếu mọi tập khác rỗng các iđêan phải của  $R$  đều có phần tử tối đại.

**Nhận xét.**

- Ta gọi tắt vành Noether phải là vành Noether.
- Từ định nghĩa trên, một vành là Noether nếu và chỉ nếu nó thỏa một trong hai điều kiện tương đương sau:

- (1) Mọi dãy tăng idêan phải  $\rho_1 \subset \rho_2 \subset \dots \subset \rho_n \subset \dots$  đều dừng, tức là tồn tại số nguyên  $m$  sao cho  $\rho_m = \rho_{m+1} = \dots$ . Ta nói  $R$  thỏa mãn điều kiện dây chuyền tăng các idêan phải.
- (2) Mọi idêan phải của  $R$  đều hữu hạn sinh.

## Mối liên hệ giữa các vành không giao hoán.

**Mệnh đề 1.2.9.** *Vành đơn là vành nguyên tố.*

**Mệnh đề 1.2.10.** *Vành nguyên tố là vành nửa nguyên tố.*

**Mệnh đề 1.2.11.** *Vành đơn có đơn vị là vành nửa đơn.*

**Chứng minh.**  $R$  là vành đơn có đơn vị thì trong  $R$  có idêan phải tối đại chính qui  $\rho$  nên  $R/\rho$  là  $R$ -môđun bất khả qui. Suy ra  $J(R) \neq R$  nên  $J(R) = (0)$  do  $R$  đơn. Vậy  $R$  là nửa đơn.

**Mệnh đề 1.2.12.** *Vành Artin và đơn là vành nửa đơn.*

**Chứng minh.**  $R$  là vành Artin nên  $J(R)$  là một idêan lũy linh. Mặt khác,  $R$  đơn nên  $R^2 = R$ , do đó  $R$  không lũy linh suy ra  $J(R) \neq R$ . Vậy  $J(R) = (0)$  hay  $R$  là nửa đơn.

**Mệnh đề 1.2.13.** *Vành Artin nửa nguyên tố là vành nửa đơn.*

**Chứng minh.** Do  $R$  là vành Artin nên  $J(R)$  là idêan lũy linh, mà  $R$  lại là vành nửa nguyên tố nên  $J(R) = (0)$ . Vậy  $R$  là nửa đơn.

**Mệnh đề 1.2.14.** *Vành nguyên thủy là vành nửa đơn.*

**Chứng minh.**  $R$  là vành nguyên thủy nên tồn tại idêan phải tối đại chính qui  $\rho$  sao cho  $(\rho: R) = (0)$  mà  $J(R) = \cap (\rho: R) = (0)$ . Vậy  $J(R)$  là nửa đơn.

**Mệnh đề 1.2.15.** *Vành vừa đơn vừa nửa đơn là vành nguyên thủy.*

**Chứng minh.**  $R$  là nửa đơn nên  $J(R) = (0)$ , do đó  $R$  có idêan phải tối đại chính qui  $\rho$ . Mà  $(\rho: R)$  là idêan chứa trong  $\rho$ , và lại  $R$  đơn nên  $(\rho: R) = (0)$ . Vậy  $R$  là vành nguyên thủy.

**Mệnh đề 1.2.16.** *Vành nguyên thủy là vành nguyên tố.*

**Chứng minh.** Gọi  $\rho$  là idêan phải của vành nguyên thủy  $R$ . Ta cần chứng minh nếu  $\rho a = (0) \Rightarrow a = 0$ . Vì  $R$  là nguyên thủy nên tồn tại  $R$ -môđun bất khả qui trung thành  $M$ . Do  $Mx = 0 \Rightarrow x = 0$  nên  $M\rho \neq (0)$ . Mà  $M\rho$  là môđun con của  $M$  nên  $M\rho = M$ . Suy ra  $Ma = M\rho a = 0 \Rightarrow a = 0$ . Vậy  $R$  là nguyên tố.

**Định lý 1.2.17 (Định lý Hopkins).** *Vành Artin (có đơn vị) là vành Noether.*

Để chứng minh định lý này ta áp dụng mệnh đề sau đây.

**Mệnh đề 1.2.18.** *Nếu  $R$  là vành Artin nửa nguyên tố thì mọi  $R$ -môđun là tổng trực tiếp của các môđun con đơn.*

**Chú ý.**  $R$ -môđun đơn được hiểu là không có môđun con thực sự nào.

**Chứng minh.** Cho  $R$  là một vành Artin có đơn vị, ta cần chứng minh mọi ideal phải của  $R$  đều hữu hạn sinh. Thật vậy, ta đặt  $\mathcal{F}$  là tập các ideal phải của  $R$  mà nó không hữu hạn sinh. Chọn  $I \in \mathcal{F}$  là phần tử tối thiểu. Gọi  $N = N(R)$  là radical của  $R$ . Do  $R$  là Artin nên  $N$  là lũy linh đồng thời  $R/N$  cũng là Artin và không có ideal lũy linh khác  $(0)$ . Ta xét hai trường hợp:

Nếu  $IN = (0)$  thì  $I$  là một  $R/N$ - môđun phải với phép toán  $i(r + N) = ir$ . Do phần tử của  $N$  tác động như phần tử 0 vào  $I$  nên cấu trúc  $R$ - môđun phải của  $I$  giống với cấu trúc  $R/N$ - môđun phải của  $I$ . Do  $R/N$  là Artin nửa nguyên tố nên với tư cách là  $R/N$ - môđun phải nên  $I$  là tổng trực tiếp hữu hạn của các  $R/N$ -môđun con phải đơn. Vì  $R/N$ - môđun đơn được sinh bởi một phần tử nên  $I$  là một  $R/N$ -môđun hữu hạn sinh và do đó cũng là  $R$ - môđun hữu hạn sinh.

Nếu  $IN \neq (0)$ . Giả sử  $IN = I$  thì  $I = IN^k$  với mọi số nguyên  $k$ . Vì  $N$  là lũy linh nên  $I$  phải bằng  $(0)$ , vô lý. Vậy  $IN \subset I$  là nghiêm ngặt. Xét  $I/IN$  là một  $R$ -môđun và  $(I/IN)N = (0)$ . Do đó theo chứng minh trên  $I/IN$  là  $R$ -môđun hữu hạn sinh. Mà  $IN \subset I$  nên theo cách chọn  $I$  thì  $IN \notin \mathcal{F}$  hay  $IN$  là  $R$ -môđun hữu hạn sinh. Do vậy  $I$  là một mở rộng hữu hạn sinh của một  $R$ -môđun hữu hạn sinh nên nó cũng hữu hạn sinh.

**Nhận xét.**

- Điều ngược lại của định lý trên là không đúng, ví dụ như vành số nguyên  $\mathbb{Z}$  là Noether nhưng không là Artin.
- Hơn nữa, định lý này cũng không đúng cho môđun. Ví dụ như  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  là một  $\mathbb{Z}$ -môđun Artin nhưng không là Noether.
- Đồng thời giả thiết có đơn vị trong định lý trên là cần thiết. Ta xét nhóm Aben  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ , ta định nghĩa phép nhân của hai phần tử bất kỳ bằng không. Khi đó  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  trở thành một vành không có đơn vị và nó là vành Artin nhưng không là Noether.

### 1.3. Một số tính chất các vành không giao hoán.

**Định lý 1.3.1.** Vành  $R$  là nguyên thủy khi và chỉ khi tồn tại idêan phải tối đại chính qui  $\rho$  của  $R$  sao cho  $(\rho: R) = (0)$ . Khi đó  $R$  là vành nửa đơn và nếu  $R$  giao hoán thì  $R$  là một trường.

**Chứng minh.** Giả sử  $R$  là vành nguyên thủy và  $M$  là  $R$ -môđun bất khả qui trung thành. Gọi  $C_R(M) = \Delta$  là vành giao hoán tử của  $R$  trong  $M$ , theo bổ đề Schur  $\Delta$  là một thể. Khi đó  $M$  là một không gian vector trên  $\Delta$  với phép nhân ngoài  $m\alpha, m \in M, \alpha \in \Delta$  mà tác động của  $\alpha$  như là phần tử của  $E_R(M)$  lên  $m$ .

**Định nghĩa 1.3.2.** Vành  $R$  được gọi là tác động một cách dày đặc lên  $M$  (hay  $R$  dày đặc trên  $M$ ) nếu với mọi số nguyên  $n$  và  $v_1, v_2, \dots, v_n$  trong  $M$  là hệ độc lập tuyến tính trên  $\Delta$  và với bất kì  $n$  phần tử  $w_1, w_2, \dots, w_n$  trong  $M$  thì tồn tại  $r \in R$  sao cho  $w_i = rv_i$  với  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Chú ý.** Nếu  $M$  là không gian vector hữu hạn chiều trên  $\Delta$  và  $R$  tác động trung thành và dày đặc lên  $M$  thì  $R = \text{End}_\Delta M = \Delta_n$  (vành các ma trận vuông cấp  $n = \dim_\Delta M$  trên  $\Delta$ ).

**Định lý 1.3.3 (Định lý dày đặc).**  $R$  là vành nguyên thủy và  $M$  là  $R$ -môđun bất khả qui trung thành. Nếu  $\Delta = C_R(M)$  thì  $R$  dày đặc các phép biến đổi tuyến tính của  $M$  trên  $\Delta$ .

**Chứng minh.** Để chứng minh  $R$  dày đặc các phép biến đổi tuyến tính của  $M$  trên  $\Delta$  ta cần chứng minh rằng với  $V$  là không gian vector con hữu hạn chiều của  $M$  trên  $\Delta$  và  $m \in M \setminus V$  ta tìm được  $r \in R$  với  $Vr = (0)$  nhưng  $mr \neq 0$ .

Thật vậy, giả sử ta tìm được một  $r$  như thế. Vì  $mr \neq 0$  và  $M$  là bất khả qui nên  $mrR = M$ , do đó  $\forall m' \in M, \exists s \in R : mrs = m'$  và  $Vrs = (0)$ .

Lấy  $v_1, v_2, \dots, v_n \in M$  độc lập tuyến tính trên  $\Delta$  và  $w_1, w_2, \dots, w_n \in M$  tùy ý. Gọi  $V_i$  là không gian con của  $M$  sinh bởi  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$  với  $i = \overline{1, n}$ .

Vì  $v_i \notin V_i$  nên  $\exists t_i \in R$  sao cho  $v_i t_i = w_i$  và  $V_i t_i = (0)$ . Đặt  $t = t_1 + t_2 + \dots + t_n$  thì ta có  $v_i t = w_i$  với  $i = 1, 2, \dots, n$  nên  $R$  dày đặc trên  $M$ .

Như vậy ta chỉ cần chứng minh tìm được  $r \in R$  sao cho  $Vr = (0)$  nhưng  $mr \neq 0$  với  $V$  là không gian con hữu hạn chiều của  $M$  trên  $\Delta$  và  $m \in M \setminus V$  thì giải quyết xong định lý. Ta chứng minh bằng qui nạp theo số chiều của  $V$  trên  $\Delta$ .

Nếu  $\dim V = 0 \Rightarrow V = \{0\}$ . Ta có  $\forall m \neq 0, m \in V, \exists r \in R: mr \neq 0$ , điều này có được do  $mR = M \Rightarrow \exists r \in R: mr \neq 0$ .

Gọi  $V = V_0 + \omega\Delta$  với  $\dim V_0 = \dim V - 1, \omega \notin V_0$ . Theo giả thiết qui nạp nếu đặt  $A(V_0) = \{x \in R: V_0 x = (0)\}$  thì với  $y \notin V_0$  tồn tại  $r \in A(V_0)$  sao cho  $yr \neq 0 \Rightarrow yA(V_0) \neq (0)$ . Điều này tương đương với  $\forall r \in A(V_0)$  mà  $yr \neq 0 \Rightarrow y \in V_0$ , tức là nếu  $mA(V_0) = (0)$  thì  $m \in V_0$ .

Ta có  $A(V_0)$  là idêan phải của  $R$ , vì  $\omega \notin V_0$  nên  $\omega A(V_0) \neq (0)$ . Mặt khác,  $\omega A(V_0)$  là môđun con của  $M$  bất khả qui nên  $\omega A(V_0) = M$ . Giả sử phản chứng với  $m \in M \setminus V$  mà  $Vr = (0)$  thì suy ra  $mr = 0$ .

Ta định nghĩa  $f: M \rightarrow M$  như sau: với  $x \in M = \omega A(V_0)$  thì  $x = \omega a$  với  $a \in A(V_0)$ , ta đặt  $f(x) = f(\omega a) = ma$ . Ta cần chỉ ra  $f$  được định nghĩa tốt. Thật vậy, giả sử  $x = \omega a = \omega a' \Rightarrow \omega(a - a') = 0$ , suy ra  $(a - a')$  linh hóa  $V_0$  và linh hóa  $\omega$  nên  $(a - a')$  linh hóa  $V$ . Do đó  $V(a - a') = (0) \Rightarrow m(a - a') = 0$  hay  $ma = ma' \Rightarrow f(\omega a) = f(\omega a')$ . Rõ ràng  $f \in E(M)$ , hơn nữa nếu  $x = \omega a$  với  $a \in A(V_0)$  thì  $ar \in A(V_0), \forall r \in R$ . Khi đó,

$$xr = (\omega a)r = \omega(ar) \Rightarrow f(xr) = m(ar) = (ma)r = f(x)r$$

Điều này chỉ ra rằng  $f \in \text{End}_R(M) = \Delta$ . Do đó, với  $a \in A(V_0)$  ta có  $ma = f(\omega a) = f(\omega)a$ . Suy ra  $(m - f(\omega))a = 0, \forall a \in A(V_0)$  nên  $(m - f(\omega))A(V_0) = (0) \Rightarrow m - f(\omega) \in V_0$ . Theo giả thiết qui nạp ta được  $m \in V_0 + \omega\Delta = V$  (vô lý). Vậy định lý đã được chứng minh xong.

**Bổ đề 1.3.4.** Nếu  $R^2 = R$  thì centroid của  $R$  là giao hoán.

**Chứng minh.** Lấy  $\sigma, \tau \in C(R)$ , với  $x, y \in R$  ta có  $(xy)\sigma = (x\sigma)y$ . Xét

$$(xy)(\sigma\tau) = ((x\sigma)y)\tau = (yL_{x\sigma})\tau = (y\tau)L_{x\sigma} = (x\sigma)(y\tau) = (x(y\tau))\sigma = (xy)(\tau\sigma)$$

Suy ra  $(xy)(\sigma\tau - \tau\sigma) = 0$ . Do  $R^2 = R$  nên với mọi  $r \in R$  thì  $r = \sum x_i y_i$  và

$$r(\sigma\tau - \tau\sigma) = \sum x_i y_i (\sigma\tau - \tau\sigma) = 0$$

Do đó  $\sigma\tau - \tau\sigma = 0$ , vậy  $C(R)$  giao hoán.

**Định lý 1.3.5.** Nếu  $R$  là vành đơn thì centroid của nó là một trường và  $R$  là đại số trên trường đó. Thêm vào đó, nếu tâm của  $R$  khác  $(0)$  thì tâm và centroid của  $R$  trùng nhau.

Ta thấy rằng  $R$  là một môđun trên  $B(R)$  và mọi  $B(R)$ -môđun con của  $R$  đơn thuần là idêan của  $R$ . Do đó  $R$  là  $B(R)$ -môđun bất khả qui khi và chỉ khi  $R$  là vành đơn.

**Chứng minh.**  $R$  đơn nên  $R$  là  $B(R)$ -môđun bất khả qui do đó theo bổ đề Schur  $C(R)$  là một thể. Mặt khác  $R^2 = R$  nên  $C(R)$  giao hoán. Vậy centroid của  $R$  là một trường. Khi đó, một cách tự nhiên  $R$  là đại số trên  $C(R)$ . Như vậy ta có mọi vành đơn là đại số đơn trên centroid của nó. Giờ ta có thêm tâm của  $R$  là  $Z(R) \neq (0)$  tức là có  $0 \neq z \in Z(R)$ , khi đó  $Rz$  là idêan khác  $(0)$  của  $R$ . Do  $R$  đơn nên  $Rz = R$ , điều này chỉ ra  $R$  có đơn vị là 1. Ta cần chứng minh  $Z(R) = C(R)$ . Rõ ràng  $Z(R) \subset C(R)$ . Với  $\sigma \in C(R)$  và với bất kì  $r \in R$ ,  $r\sigma = (1r)\sigma = (1T_r)\sigma = (1\sigma)T_r = ar$  với  $a = 1\sigma$ . Tương tự  $r\sigma = (r1)\sigma = (1L_r)\sigma = (1\sigma)L_r = ra$ . Như vậy  $r\sigma = ar = ra \forall r \in R$ , suy ra

$a \in Z(R)$  và  $r(\sigma - a) = 0$ . Do  $\sigma - a \in C(R)$  – là trường, và  $R$  là đại số trên  $C(R)$  nên  $\sigma - a = 0$  và do đó  $\sigma \in Z(R)$ . Vậy  $Z(R) = C(R)$  nên nó cũng là một trường.

**Định lý 1.3.6.** *Nếu  $R$  là vành Artin thì  $J(R)$  là ideal lũy linh.*

**Chứng minh.** Đặt  $J = J(R)$ . Xét dãy giảm các ideal phải  $J \supset J^2 \supset \dots \supset J^n \supset \dots$ . Vì  $R$  là Artin nên có một số nguyên  $n$  sao cho  $J^n = J^{n+1} = \dots = J^{2n} = \dots$ . Do đó nếu  $xJ^{2n} = (0)$  thì  $xJ^n = (0)$ . Ta cần chứng minh  $J^n = (0)$ .

Đặt  $W = \{x \in J \mid xJ^n = (0)\}$ , khi đó  $W$  là ideal của  $R$ . Nếu  $W \supset J^n$  thì  $J^n J^n = (0)$  hay  $(0) = J^{2n} = J^n$  (điều phải chứng minh). Giả sử  $W \not\supset J^n$ . Khi đó trong  $\bar{R} = R/W$ ,  $\bar{J}^n \neq (0)$ . Nếu  $\bar{x}\bar{J}^n = (0)$  thì  $xJ^n \subset W$  do đó  $(0) = xJ^n J^n = xJ^{2n} = xJ^n$  suy ra  $x \in W$  hay  $\bar{x} = (0)$ . Như vậy ta có được nếu  $\bar{x}\bar{J}^n = (0)$  thì  $\bar{x} = (0)$ .

Vì  $\bar{J}^n \neq (0)$  nên nó chứa một ideal phải tối tiểu  $\bar{\rho} \neq (0)$  của  $\bar{R}$ . Mà  $\bar{\rho}$  là  $\bar{R}$ -môđun bất khả qui nên nó bị linh hóa bởi  $J(\bar{R})$ . Do  $\bar{J}^n \subset J(\bar{R})$  nên  $\bar{\rho}\bar{J}^n = (0)$ . Theo chứng minh trên thì  $\bar{\rho} = (0)$ , mâu thuẫn. Vậy  $J(R)$  là lũy linh.

**Hệ quả 1.3.7.** *Nếu  $R$  là vành Artin thì mọi nil-ideal (phải, trái, hai phía) của  $R$  là lũy linh.*

**Chứng minh.** Do mọi nil-ideal một phía của  $R$  đều nằm trong  $J(R)$  mà  $J(R)$  là lũy linh nên nó cũng lũy linh.

**Định nghĩa 1.3.8.** *Một phần tử  $e \neq 0$  của vành  $R$  được gọi là lũy đẳng nếu  $e^2 = e$ .*

**Bổ đề 1.3.9.** *Cho  $R$  là một vành không có ideal lũy linh khác  $(0)$ . Nếu  $\rho \neq (0)$  là ideal phải tối tiểu của  $R$  thì  $\rho = eR$  với  $e$  là phần tử lũy đẳng nào đó của  $R$ .*

**Bổ đề 1.3.10.** *Cho  $R$  là một vành và giả sử có một phần tử  $a \in R$  sao cho  $a^2 - a$  là lũy linh. Khi đó, hoặc là  $a$  lũy linh hoặc là có một đa thức  $q(x)$  với hệ số nguyên để  $e = aq(a)$  là một lũy đẳng khác không.*

**Định lý 1.3.11.** *Nếu  $R$  là vành Artin và  $\rho \neq (0)$  là một ideal phải không lũy linh của  $R$  thì  $\rho$  chứa một lũy đẳng khác không.*

**Chứng minh.** Vì  $\rho$  không lũy linh nên nó không nằm trong  $J(R)$ . Đặt  $\bar{R} = R/J(R)$ , khi đó  $\bar{R}$  là nửa đơn nên nó không có ideal lũy linh khác  $(0)$ . Do  $\rho \not\subset J(R)$  nên  $\bar{\rho} \neq (0)$  trong  $\bar{R}$  suy ra  $\bar{\rho}$  chứa một ideal phải tối tiểu  $\bar{\rho}_0$  của  $\bar{R}$ . Theo bổ đề 1.17  $\bar{\rho}_0$  có phần tử lũy đẳng  $\bar{e} \neq 0$ . Đặt  $a \in \rho$  sao cho  $\bar{a} = \bar{e}$ . Do đó  $\overline{a^2 - a} = 0$  trong  $\bar{R}$  suy ra  $a^2 - a \in J(R)$  nên nó phải lũy linh. Mà  $\bar{a}^k = \bar{e}^k = \bar{e} \neq 0$  nên  $a$  không lũy linh. Theo bổ đề 1.3.10, ta có một đa thức  $q(x)$  với hệ số nguyên nào đó sao cho  $e = aq(a)$  là một lũy đẳng khác không. Vì  $a \in \rho$  nên  $e \in \rho$ . Vậy ta được điều phải chứng minh.

**Định lý 1.3.12.** Cho  $R$  là vành Artin nửa đơn và  $\rho \neq (0)$  là ideal phải của  $R$ . Khi đó  $\rho = eR$  với  $e$  là một lũy đẳng nào đó trong  $R$ .

**Chứng minh.** Ta có  $\rho \neq (0)$  là ideal phải của  $R$  là nửa đơn nên  $\rho$  không lũy linh, do đó theo định lý 1.3.11 nó có chứa một phần tử lũy đẳng  $e \neq 0$ . Đặt  $A(e) = \{x \in \rho \mid ex = 0\}$ , khi đó  $A(e)$  là một ideal phải của  $R$ . Tập các ideal phải  $\{A(e) \mid 0 \neq e^2 = e \in \rho\}$  là một tập khác rỗng có phần tử tối tiểu là  $A(e_0)$ .

Nếu  $A(e_0) = (0)$ , với bất kì  $x \in \rho$  đều có  $e_0(x - e_0x) = 0 \Rightarrow x - e_0x \in A(e_0) = (0)$  nên  $x = e_0x, \forall x \in \rho$ . Điều này dẫn tới  $\rho = e_0\rho \subset e_0R \subset \rho$ . Do đó ta được kết quả của định lý  $\rho = e_0R$ .

Còn nếu  $A(e_0) \neq (0)$ , ta cần chỉ ra rằng nó không xảy ra. Vì  $A(e_0)$  là một ideal phải khác  $(0)$  của  $R$  nên nó chứa một phần tử lũy đẳng  $e_1 \neq 0$ . Theo định nghĩa của  $A(e_0)$  thì  $e_1 \in \rho$  và  $e_0e_1 = 0$ . Xét phần tử  $e_2 = e_0 + e_1 - e_1e_0$ . Ta thấy  $e_2 \in \rho$  và nó lũy đẳng. Hơn nữa  $e_2e_1 = (e_0 + e_1 - e_1e_0)e_1 = e_1 \neq 0$ . Ta được  $e_2 \neq 0$  và  $e_1 \notin A(e_2)$ . Nếu  $e_2x = 0 \Rightarrow (e_0 + e_1 - e_1e_0)x = 0$  do đó  $e_0(e_0 + e_1 - e_1e_0)x = 0 \Rightarrow e_0x = 0$ . Điều này có nghĩa là  $A(e_2) \subset A(e_0)$ , mà vì  $e_1 \in A(e_0)$  nhưng  $e_1 \notin A(e_2)$  nên  $A(e_2)$  thực sự được chứa trong  $A(e_0)$ . Theo cách chọn  $A(e_0)$  là phần tử tối tiểu nên ta gặp mâu thuẫn.

**Hệ quả 1.3.13.** Nếu  $R$  là vành Artin nửa đơn và  $A \neq (0)$  là ideal của  $R$  thì  $A = eR = Re$  với  $e$  là lũy đẳng trong tâm của  $R$ .

**Chứng minh.** Vì  $A$  là ideal phải của  $R$  nên theo định lý 1.3.12  $A = eR$  với  $e \in A$  là lũy đẳng. Đặt  $B = \{x - xe \mid x \in A\}$ . Do  $ex = x$  với mọi  $x \in A$  và  $Be = (0)$  nên  $BA = BeA = (0)$ . Tuy nhiên  $A$  cũng là một ideal trái của  $R$  nên  $B$  cũng phải là ideal trái của  $R$ . Mặt khác  $B^2 \subset BA = (0)$ , mà  $R$  không có ideal lũy linh khác  $(0)$  nên  $B = (0)$ , có nghĩa  $x = xe, \forall x \in A$ . Điều này cho ta  $A = Re$  và  $e$  là phần tử đơn vị hai phía của  $A$ .

Giờ ta cần chỉ ra  $e$  nằm trong tâm của  $R$ . Lấy  $r \in R$ , khi đó  $re \in A$  nên  $re = e(re)$ . Thêm vào đó  $er \in A$  nên  $er = (er)e$ . Như vậy  $re = ere = er$ , với mọi  $r \in R$ . Do đó  $e$  nằm trong tâm của  $R$ .

**Hệ quả 1.3.14.** Vành Artin nửa đơn có một phần tử đơn vị hai phía.

**Chứng minh.** Với  $R$  là ideal của  $R$  là vành Artin nửa đơn thì theo hệ quả 1.3.13 ta được ngay  $R$  có phần tử đơn vị hai phía.

**Bổ đề 1.3.15.** Ideal của một vành Artin nửa đơn là vành Artin nửa đơn.

**Chứng minh.** Cho  $R$  là vành Artin nửa đơn và gọi  $A \neq (0)$  là một ideal của  $R$ . Theo hệ quả 1.3.13,  $A = eR = Re$  với  $e$  là phần tử lũy đẳng trong tâm của  $R$  và theo hệ quả 1.3.14,  $R$  có đơn vị.

Với  $x \in R$  thì  $x = xe + x(1 - e)$  do đó  $R = Re + R(1 - e)$ . Vì  $1 - e$  cũng nằm trong tâm của  $R$  nên  $R(1 - e)$  là một idêan của  $R$ . Hơn nữa  $Re \cap R(1 - e) = (0)$ , bởi vì nếu có phần tử  $x$  trong giao trên thì do  $x \in Re$  nên  $x = xe$  và do  $x$  cũng là phần tử của  $R(1 - e)$  nên  $xe = 0$ . Do đó  $R$  là tổng trực tiếp của  $A$  và  $R(1 - e)$ . Do vậy  $A$  đẳng cấu với vành  $R/R(1 - e)$ . Mà  $R/R(1 - e)$  xem như là ảnh đồng cấu của vành Artin  $R$  nên  $A$  là Artin.

Mà ta đã biết mọi idêan của vành nửa đơn là nửa đơn nên  $A$  là nửa đơn. Vậy  $A$  là Artin nửa đơn.

**Định lý 1.3.16.** *Một vành Artin nửa đơn là tổng trực tiếp hữu hạn các vành Artin đơn.*

**Chứng minh.** Gọi  $R$  là vành Artin nửa đơn và xét  $A \neq (0)$  là idêan tối tiểu của  $R$ . Khi đó  $A$  là vành Artin đơn. Thật vậy, vì  $A$  là idêan trong vành nửa đơn nên  $A^2 \neq (0)$ . Nếu  $B \neq (0)$  là một idêan của  $A$  thì  $ABA$  là idêan của  $R$  và chứa  $B$ . Do  $A$  có đơn vị bên trái nên  $AB \neq (0)$ . Vì  $AB$  là idêan trái khác không của  $R$  nên nó không lũy linh, do đó  $ABA \neq (0)$ . Do tính tối tiểu của  $A$  nên từ  $B \supset ABA = A$  ta được  $B = A$ . Vậy  $A$  là Artin đơn.

Theo chứng minh của bổ đề 1.3.15,  $R = A \oplus T_0$  với  $T_0$  là idêan của  $R$  nên cũng là Artin nửa đơn. Chọn idêan tối tiểu  $A_1$  của  $R$  nằm trong  $T_0$ . Theo chứng minh trên thì  $A_1$  là Artin và đơn nên  $T_0 = A_1 \oplus T_1$ . Tiếp tục như trên ta có được các idêan của  $R$ ,  $A = A_0, A_1, \dots, A_k, \dots$  đều là Artin và đơn sao cho các tổng  $A_0 + A_1 + \dots + A_k$  đều là tổng trực tiếp.

Ta sẽ chứng minh rằng với một số  $k$  nào đó thì  $R = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$ . Thật vậy, nếu ta đặt  $R_0 = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_k \oplus \dots$ ,  $R_1 = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k \oplus \dots$ ,  $\dots$ ,  $R_m = A_m \oplus A_{m+1} \oplus \dots \oplus A_k \oplus \dots$  thì đây là một dãy giảm các idêan của  $R$  nên nó phải dừng. Do vậy sẽ có một số nguyên  $k$  nào đó sao cho  $R = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$ .

**Định lý 1.3.17 (Wedderburn – Artin).** *Cho  $R$  là một vành Artin đơn. Khi đó  $R$  đẳng cấu với  $D_n$ , vành các ma trận vuông cấp  $n$  trên thể  $D$ . Hơn nữa  $n$  là duy nhất và  $D$  sai khác một đẳng cấu. Ngược lại, với  $D$  là một thể thì  $D_n$  là vành đơn Artin.*

## Chương 2. Vành các thương và tính chất của nó.

### 2.1. Vành các thương.

**Định nghĩa 2.1.1.** Một phần tử của vành  $R$  được gọi là chính qui nếu nó không có cả ước trái lẫn ước phải của không trong  $R$ .

**Định nghĩa 2.1.2.** Vành  $Q(R) \supset R$  được gọi là vành các thương phải của  $R$  nếu:

- (1) Mọi phần tử chính qui trong  $R$  đều khả nghịch trong  $Q(R)$ .
- (2) Mọi phần tử  $x \in Q(R)$  đều phân tích được dưới dạng  $x = ab^{-1}$  với  $a, b \in R$  và  $b$  là chính qui.

Nếu  $Q(R)$  là vành các thương phải của  $R$  thì ta nói  $R$  là một thứ tự phải trong  $Q(R)$ . Ta gọi tắt vành các thương phải là vành các thương của  $R$ .

**Nhận xét.** Nếu  $b_1, b_2, \dots, b_n$  là các phần tử chính qui trong  $R$  thì sẽ tồn tại một phần tử chính qui  $b \in R$  và các phần tử  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$  sao cho  $b_i^{-1} = a_i b^{-1}$  với mọi  $i$ . Từ điều này ta có, nếu  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q(R)$  thì tồn tại một phần tử chính qui  $b \in R$  sao cho  $x_i = a_i b^{-1}$  với  $a_i \in R$ .

**Định lý 2.1.3 (Điều kiện Ore).** Điều kiện cần và đủ để vành  $R$  có vành các thương phải là: cho  $a, b \in R$  với  $b$  chính qui thì tồn tại  $a_1, b_1 \in R$  với  $b_1$  chính qui sao cho  $ab_1 = ba_1$ .

**Chứng minh.** Nếu  $Q(R)$  tồn tại thì với  $b$  là chính qui trong  $R$ , phần tử  $b^{-1}a$  thuộc  $Q(R)$  nên  $b^{-1}a = a_1 b_1^{-1}$  với  $a_1, b_1 \in R$  và  $b_1$  chính qui. Chuyển về ta được  $ab_1 = ba_1$ .

Ngược lại, giả sử điều kiện Ore được thỏa mãn. Đặt tập  $\mathcal{M} = \{(a, b) \mid a, b \in R, b \text{ chính qui}\}$ . Trong  $\mathcal{M}$  ta xây dựng quan hệ  $(a, b) \sim (c, d)$  nếu  $bc_1 = da_1$  với  $ac_1 = ca_1$  và  $a_1$  chính qui. Từ đó ta cũng được  $c_1$  chính qui. Ta sẽ chứng minh đẳng thức trên không phụ thuộc vào sự lựa chọn  $a_1, c_1$  để nhân vào bên phải  $a, c$ . Thật vậy, nếu  $ac_2 = ca_2$ , ta nhận được  $e_1, e_2$  chính qui sao cho  $a_1 e_1 = a_2 e_2$ . Khi đó  $ac_1 e_1 = ca_1 e_1 = ca_2 e_2 = ac_2 e_2$ , do  $a$  chính qui nên ta suy ra  $c_1 e_1 = c_2 e_2$ . Từ đẳng thức  $bc_1 = da_1$  ta được  $bc_2 e_2 = bc_1 e_1 = da_1 e_1 = da_2 e_2$ , mà  $e_2$  chính qui nên ta thu gọn được  $bc_2 = da_2$ .

Ta kiểm tra được quan hệ trong  $\mathcal{M}$  được định nghĩa như trên là quan hệ tương đương. Lớp tương đương các cặp  $(a, b)$  được kí hiệu là  $a/b$ . Đặt  $M$  là tập các lớp tương đương trong  $\mathcal{M}$ . Trong  $M$  ta sẽ trang bị các phép toán để nó trở thành một vành.

Với  $a/b, c/d$  trong  $M$  ta định nghĩa  $a/b + c/d = (ad_1 + cb_1)/(db_1)$  với  $bd_1 = db_1$  và  $b_1, d_1$  chính qui. Tương tự ta định nghĩa phép nhân  $(a/b)(c/d) = (ag_1)/(db_1)$  với  $bg_1 = cb_1$  và  $g_1$  chính qui trong  $R$ .

Ta kiểm tra được các phép toán trên được định nghĩa tốt và  $M$  thỏa mãn các tính chất của  $Q(R)$  trong phần định nghĩa về vành các thương.

## 2.2. Định lý Goldie.

Cho  $S$  là một tập khác rỗng của vành  $R$ , đặt  $r(S) = \{x \in R \mid sx = 0, \forall s \in S\}$ . Ta gọi  $r(S)$  là linh hoá tử phải của  $S$ . Rõ ràng  $r(S)$  là idêan phải của  $R$ .

**Nhận xét.**

- Tương tự ta có  $l(S) = \{x \in R \mid xs = 0, \forall s \in S\}$  là linh hoá tử trái của  $S$ .
- $lrl(S) = l(S)$  nên điều kiện dây chuyền tăng các linh hoá tử phải tương đương với điều kiện dây chuyền giảm các linh hoá tử trái.
- Phần tử  $a \in R$  là chính qui khi và chỉ khi  $r(a) = l(a) = (0)$ .

**Định nghĩa 2.2.1.** Idêan  $I$  của vành  $R$  được gọi idêan linh hoá tử nếu nó là linh hoá tử phải của một idêan phải nào đó của  $R$ .

**Định nghĩa 2.2.2.** Vành  $R$  được gọi là vành Goldie phải nếu:

- (1)  $R$  thỏa mãn điều kiện dây chuyền tăng các linh hoá tử phải
- (2)  $R$  không chứa tổng trực tiếp vô hạn các idêan phải.

**Chú ý.**

- Ta gọi tắt vành Goldie phải là vành Goldie.
- Rõ ràng vành Noether phải là vành Goldie phải. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng.
- Vành  $R$  thỏa (1) thì mọi vành con  $S$  của nó cũng thỏa (1). Thật vậy, nếu  $X$  là một tập con của  $S$ , ta viết  $r_S(X), r_R(X)$  lần lượt là linh hoá tử phải của  $X$  trong  $S$  và trong  $R$ . Giả sử ta có dãy các tập con  $X_n$  của  $S$  sao cho  $r_S(X_1) \subset r_S(X_2) \subset \dots \subset r_S(X_n) \subset \dots$ . Đặt  $Y_n = X_n \cup X_{n+1} \cup X_{n+2} \cup \dots$ . Khi đó  $r_S(Y_n) = r_S(X_n)$ . Vì  $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \dots$  nên ta được một dãy tăng các linh hoá tử phải  $r_R(Y_1) \subset r_R(Y_2) \subset r_R(Y_3) \subset \dots$ . Dãy này dừng và do  $r_S(Y) = r_R(Y) \cap S$  nên dãy  $r_S(X_n)$  cũng dừng.

**Bổ đề 2.2.3.** Cho  $R$  là vành nửa nguyên tố thỏa điều kiện dây chuyền tăng các linh hoá tử phải. Nếu  $A \supset B$  là những idêan phải của  $R$  và  $l(A) \neq l(B)$  thì tồn tại  $a \in A$  sao cho  $aA \neq (0)$  và  $aA \cap B = (0)$ .

**Chứng minh.** Ta có  $R$  thỏa mãn điều kiện dây chuyền tăng các linh hoá tử phải do đó  $R$  cũng thỏa điều kiện dây chuyền giảm các linh hoá tử trái. Vì  $A \supset B$  và  $l(A) \neq l(B)$  nên  $l(A) \subset l(B)$  là nghiêm ngặt.

Gọi  $U$  là linh hoá tử trái nhỏ nhất chứa trong  $l(B)$  và thực sự chứa  $l(A)$ . Do việc chọn như vậy nên  $UA \neq (0)$ . Mà vì  $R$  không có idêan lũy linh nào nên  $UAUA \neq (0)$ . Chọn  $au \in AU$  ( $\subset A$ ) để  $UauA \neq (0)$ . Suy ra  $auA \neq (0)$  và đồng thời ta thu được  $auA \cap B = (0)$ . Thật vậy, nếu  $auA \cap B \neq (0)$  thì tồn tại  $x \in A$  sao cho  $aux \neq 0$  và thuộc  $auA \cap B$ . Vì  $x \in A$  nên  $l(x) \supset l(A)$ . Xét  $l(x) \cap U$ , đây là giao của hai linh hoá tử trái nên nó cũng là một linh hoá tử trái đồng thời nó chứa  $l(A)$  và nằm trong  $U$ . Hơn nữa do  $U \subset l(B) \Rightarrow Uaux = (0) \Rightarrow Uau \subset l(x)$  nhưng  $Uau \notin l(A)$  nên  $l(x) \cap U$  thật sự chứa  $l(A)$ . Từ tính nhỏ nhất của  $U$  nên  $l(x) \cap U = U$  do đó  $U \subset l(x)$ . Điều này chỉ ra rằng  $Ux = (0)$  mâu thuẫn với  $aux \neq 0$ .

Vậy bổ đề đã được chứng minh xong và nó có hai hệ quả quan trọng.

**Hệ quả 2.2.4.** Cho  $R$  là một vành như trong bổ đề, nếu  $xR$  và  $yR$  là các idêan phải cốt yếu thì  $xyR$  cũng là cốt yếu.

**Chứng minh.** Gọi  $A \neq (0)$  là một Idêan phải của  $R$  và đặt  $\bar{A} = \{r \in R | xr \in A\}$ . Vì  $xR$  là cốt yếu nên  $\bar{A} \neq (0)$  và  $x\bar{A} = xR \cap A \neq (0)$ . Rõ ràng theo cách đặt  $\bar{A} \supset r(x)$ . Ta có  $x\bar{A} \neq (0)$  và  $xr(x) = (0)$ , nghĩa là  $l(\bar{A}) \neq l(r(x))$ , nên theo bổ đề 2.2.3 ta được một Idêan phải  $(0) \neq T \subset \bar{A}$  sao cho  $T \cap r(x) = (0)$ . Đặt  $\bar{T} = \{r \in R | yr \in T\}$ . Do tính cốt yếu của  $yR$  nên  $y\bar{T} = yR \cap T \neq (0)$ . Do  $T \cap r(x) = (0)$  và  $(0) \neq y\bar{T} \subset T$  nên  $xy\bar{T} \neq (0)$ . Với  $A$  bất kì ta có  $A \supset x\bar{A} \supset xT \supset xy\bar{T} \neq (0)$  nên  $xyR \cap A \neq (0)$  do đó  $xyR$  là cốt yếu.

**Hệ quả 2.2.5.** Cho  $R$  là vành như trong bổ đề. Khi đó nếu  $aR$  là cốt yếu trong  $R$  thì  $a$  là chính qui.

**Chứng minh.** Xét hai idêan phải  $R \supset aR$ . Ta có  $l(R) = (0)$ ,  $l(aR) = l(a)$ . Nếu  $l(a) \neq (0)$  thì áp dụng bổ đề ta có một idêan phải  $(0) \neq I \subset R$  sao cho  $I \cap aR = (0)$ , điều này trái với tính cốt yếu của  $aR$ . Vậy  $l(a) = (0)$ .

Ta xét  $r(a)$ . Áp dụng điều kiện dây chuyền tăng các linh hoá tử phải cho dãy  $r(a) \subset r(a^2) \subset \dots \subset r(a^n) \subset \dots$  ta có một số nguyên  $k$  sao cho  $r(a^k) = r(a^{k+1})$ . Ta cần chứng minh  $a^k R \cap r(a) = (0)$ . Thật vậy, với  $x \in a^k R \cap r(a)$  thì  $x = a^k y$  và  $0 = ax = a^{k+1} y$  nên  $y \in r(a^{k+1}) =$

$r(a^k) \Rightarrow x = a^k y = 0$ . Do  $aR$  là cốt yếu nên theo hệ quả 2.2.4 thì  $a^k R$  cũng là cốt yếu, mà  $a^k R \cap r(a) = (0)$  do đó  $r(a) = (0)$ . Vậy  $a$  là chính qui.

**Chú ý.** Ta qui ước từ phần này trở đi  $R$  là vành Goldie nửa nguyên thủy.

**Bổ đề 2.2.6.**  *$R$  thỏa mãn điều kiện dây chuyền giảm các linh hoá tử phải.*

**Chứng minh.** Giả sử  $R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$  là dãy giảm nghiêm ngặt các linh hoá tử phải. Với mọi  $n$  thì ta có  $R_n \supset R_{n+1}$  thực sự nên  $l(R_n) \subset l(R_{n+1})$  thực sự. Do đó áp dụng bổ đề 2.2.3 ta có một idêan phải  $(0) \neq C_n$  của  $R$  sao cho  $C_n \subset R_n$  và  $C_n \cap R_{n+1} = (0)$ . Từ đó ta thiết lập được một tổng trực tiếp các idêan phải  $C_n$  của  $R$ . Mà  $R$  là vành Goldie nên tổng này không thể là vô hạn, do đó dãy giảm các linh hoá tử phải trên phải dừng.

**Bổ đề 2.2.7.** *Nếu  $I$  là một idêan phải của  $R$  thì tồn tại một idêan phải  $J$  sao cho  $I \oplus J$  là cốt yếu trong  $R$ .*

**Chứng minh.** Chọn các idêan phải  $J_i$  của  $R$  sao cho  $I \oplus J_1 \oplus J_2 \oplus \dots$  là một tổng trực tiếp. Vì  $R$  là vành Goldie nên dãy trên phải dừng, giả sử tại  $J_n$ . Đặt  $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_n$ . Khi đó  $I \oplus J$  là cốt yếu bởi nếu không thì có một idêan phải  $J' \neq (0)$  nào đó sao cho  $(I \oplus J) \cap J' \neq (0)$ . Điều này dẫn đến việc ta có thể kéo dài tổng trực tiếp với  $J_{n+1} = J'$  (mâu thuẫn).

**Bổ đề 2.2.8.** *Nếu  $r(c) = (0)$  thì  $cR$  là cốt yếu và  $c$  là chính qui.*

**Chứng minh.** Gọi  $A \neq (0)$  là một idêan phải của  $R$  sao cho  $A \cap cR = (0)$ . Vì  $r(c) = (0)$  nên  $c^n A$  có dạng một tổng trực tiếp. Thật vậy nếu  $a_0 + ca_1 + \dots + c^n a_n = 0$  với  $a_i \in A$  thì  $a_0 = A \cap c^n A = (0)$  từ đó ta được  $ca_1 + c^2 a_2 + \dots + c^n a_n = 0$ . Vì  $r(c) = (0)$  nên  $a_1 + ca_2 + \dots + c^{n-1} a_n = 0$ . Lập luận tương tự như trên ta được mỗi  $a_i = 0$ . Do trong  $R$  không có tổng trực tiếp vô hạn nên dẫn đến  $A \cap cR \neq (0)$  vì vậy  $cR$  là cốt yếu. Theo hệ quả 2.2.5 thì  $c$  là chính qui.

**Bổ đề 2.2.9.** *Idêan linh hoá tử tối thiểu của một vành  $R$  là một vành Goldie nguyên tố, hơn nữa tổng trực tiếp hữu hạn các idêan như trên là một idêan phải cốt yếu của  $R$ .*

**Chứng minh.** Gọi  $S$  là một idêan linh hoá tử tối thiểu của  $R$ . Nếu  $T \neq (0)$  là một idêan phải của  $S$  thì theo giả thiết  $R$  là vành nửa nguyên tố nên  $TS \neq (0)$  và đồng thời  $TS \subset T$  cũng là idêan phải của  $R$ . Do đó  $S$  sẽ không có các tổng trực tiếp vô hạn các idêan phải nào. Mặt khác, các vành con của  $R$  được thừa hưởng điều kiện dây chuyền tăng các linh hoá tử phải nên ta được  $S$  là vành Goldie.

Giả sử  $A, B$  là 2 idêan của  $S$  sao cho  $AB = (0)$ . Do  $AS \subset A$  nên  $ASB = (0)$ . Suy ra  $B \subset r(AS) \cap S$ , giao này cũng là một idêan linh hoá tử của  $R$ . Nếu  $B \neq (0)$  thì do tính tối thiểu của  $S$  ta

được  $S \subset r(AS)$ . Điều này suy ra  $SAS = (0) \Rightarrow (AS)^2 = (0) \Rightarrow AS = (0) \Rightarrow A = (0)$  (do  $R$  là nửa nguyên tố). Như vậy  $S$  là vành Goldie nguyên tố.

Đặt  $C = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_n$  là tổng trực tiếp lớn nhất các idêan linh hoá tử tối tiểu của  $R$ . Nếu có  $K \neq (0)$  là một idêan phải của  $R$  sao cho  $C \cap K = (0)$  thì  $KC \subset C \cap K = (0)$ . Suy ra  $(0) \neq K \subset l(C)$ , và do  $R$  là vành nửa nguyên tố nên  $C \cap l(C) = 0$ . Như vậy trong  $l(C)$  ta có thể tìm thấy một idêan linh hoá tử tối tiểu khác không mà có giao tầm thường với  $C$ . Điều này dẫn đến việc kéo dài thêm tổng trực tiếp cho bởi  $C$  nhưng nó lại mâu thuẫn với cách chọn  $C$ . Vậy  $C$  là cốt yếu.

**Bổ đề 2.2.10.** *Nếu  $I$  là idêan phải cốt yếu của  $R$  thì  $I$  có chứa một phần tử chính qui.*

**Chứng minh.** Trước tiên chứng minh điều này với giả định  $R$  là vành nguyên tố. Theo bổ đề 2.2.6,  $R$  thỏa điều kiện dây chuyền giảm các linh hoá tử phải nên ta có thể chọn được một  $a \in I$  sao cho  $r(a)$  là tối tiểu. Nếu  $a$  không chính qui thì theo hệ quả 2.2.4 tồn tại idêan phải  $J \neq (0)$  của  $R$  sao cho  $aR \cap J = (0)$ . Vì  $I$  là cốt yếu nên  $I \cap J \neq (0)$  do đó tồn tại một idêan phải  $(0) \neq T \subset I \cap J$ . Nếu  $x \in T$  và nếu  $b \in r(a+x)$  thì  $(a+x)b = 0 \Rightarrow ab = -xb \in aR \cap T = (0)$  dẫn đến  $b \in r(a) \cap r(x)$ . Do tính tối tiểu của  $r(a)$  nên  $r(x) \supset r(x) \cap r(a) \supset r(a)$  suy ra  $xr(a) = (0)$  với mọi  $x \in T$ . Trong vành nguyên tố  $R$  có  $T \cdot r(a) = (0)$  mà  $T \neq (0)$  nên  $r(a) = (0)$ . Theo bổ đề 2.2.8 ta được  $a$  là chính qui.

Trở lại bổ đề  $R$  là vành nửa nguyên tố, ta đặt  $A = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_n$  là tổng trực tiếp hữu hạn các idêan linh hoá tử tối tiểu của  $R$ . Vì  $S_i$  là vành nguyên tố và  $I \cap S_i$  là cốt yếu trong  $S_i$  nên theo chứng minh trên  $I \cap S_i$  có chứa một phần tử chính qui  $s_i$  trong  $S_i$ . Ta thu được  $s = s_1 + s_2 + \dots + s_n$  chính qui trong  $R$ , bởi vì nếu  $r(s) \neq (0)$  thì theo tính cốt yếu của  $A$  ta có  $A \cap r(s) \neq (0)$ . Do đó sẽ có một phần tử  $0 \neq t = t_1 + t_2 + \dots + t_n$  trong  $A$  mà  $st = 0$ . Mặt khác  $st = t_1s_1 + t_2s_2 + \dots + t_ns_n$  nên theo tính trực tiếp của tổng trong  $A$  suy ra  $t_is_i = 0$ . Do  $s_i$  là chính qui nên  $t_i = 0$ , dẫn đến  $t = 0$ . Mâu thuẫn này cho ta kết quả của bổ đề.

**Bổ đề 2.2.11.** *Nếu  $R$  nguyên tố thì mọi idêan khác  $(0)$  của nó là idêan phải cốt yếu và do đó có chứa phần tử chính qui.*

**Chứng minh.** Gọi  $I \neq (0)$  là một idêan và  $J \neq (0)$  là một idêan phải của  $R$ . Do  $R$  là nguyên tố nên tích hai idêan khác  $(0)$  là  $RJ$  và  $I$  phải khác  $(0)$ . Do đó  $JI \neq (0)$  và  $JI \subset I \cap J$ . Suy ra  $I$  là idêan phải cốt yếu nên theo bổ đề 2.2.10 nó có chứa một phần tử chính qui.

**Định lý 2.2.12 (Định lý Goldie).** *Vành  $R$  có vành các thương phải  $Q$  là vành Artin nửa đơn khi và chỉ khi  $R$  là Goldie nửa nguyên tố. Hơn nữa,  $Q$  là Artin đơn khi và chỉ khi  $R$  là Goldie nguyên tố.*

**Chú ý.** Ta chia định lý Goldie thành các định lý nhỏ hơn để tiện cho việc chứng minh.

**Định lý 2.2.13.** Cho  $R$  là vành Goldie nửa nguyên tố thì  $R$  có một vành các thương phải  $Q = Q(R)$ .

**Chứng minh.** Giả sử  $a, b \in R$  với  $a$  là chính qui. Theo bổ đề 2.2.8 thì  $aR$  là cốt yếu. Nếu ta đặt  $M = \{r \in R \mid br \in aR\}$  thì  $M$  cũng là một idêan phải cốt yếu. Thật vậy, hiển nhiên  $M$  là một idêan phải khác  $(0)$ . Gọi  $J \neq (0)$  là một idêan phải nào đó của  $R$ . Nếu  $bJ = (0)$  thì  $(0) \neq J \subset M$  nên  $M \cap J \neq (0)$ . Còn nếu  $bJ \neq (0)$  thì vì  $aR$  cốt yếu nên  $bJ \cap aR \neq (0)$ . Đó đó tồn tại  $0 \neq j \in J$  sao cho  $bj \in aR$ . Suy ra  $j \in M$ . Vậy  $0 \neq j \in M \cap J$ .

Do đó theo bổ đề 2.2.10,  $M$  có chứa phần tử chính qui  $c$ . Theo định nghĩa của  $M$  thì  $bc = ad$ , điều này chỉ ra rằng  $R$  thỏa điều kiện Ore, nên theo định lý 2.1.3, tồn tại vành các thương  $Q(R)$ .

**Nhận xét.**

- Nếu  $R$  là vành Goldie nguyên tố thì dĩ nhiên  $R$  cũng có vành các thương phải  $Q = Q(R)$ .
- Nếu  $I$  là idêan phải của  $Q$  thì  $I = (I \cap R)Q$ . Thật vậy, hiển nhiên  $(I \cap R)Q \subset I$ . Nếu  $i \in I$  thì  $i = ab^{-1} = (ab^{-1}b)b^{-1} \in (I \cap R)Q$  với  $a, b \in R$  và  $b$  chính qui.
- Nếu  $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$  là tổng trực tiếp các idêan phải trong  $R$  thì  $A_1Q \oplus A_2Q \oplus \dots \oplus A_nQ$  là tổng trực tiếp các idêan phải trong  $Q$ . Để chứng minh điều này ta xét, nếu  $a_1q_1 + a_2q_2 + \dots + a_nq_n = 0$  với  $q_i \in Q$  và  $a_i \in A_i$  thì sẽ có  $d$  là chính qui trong  $R$  và  $b_i \in R$  sao cho  $q_i = b_id^{-1}$ . Do đó  $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)d^{-1} = 0$  hay  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 0$ . Do tính chất tổng trực tiếp trong  $R$  nên  $a_ib_i = 0$  suy ra  $a_iq_i = a_ib_id^{-1} = 0$ .

**Định lý 2.2.14.**  $Q$  là Artin nửa đơn.

**Chứng minh.** Gọi  $I$  là một idêan phải của  $Q$  thì  $I \cap R$  là idêan phải của  $R$ . Theo bổ đề 2.2.7, tồn tại một idêan phải  $J$  của  $R$  sao cho  $(I \cap R) \oplus J$  là cốt yếu trong  $R$ . Do đó, theo bổ đề 2.2.10 trong  $(I \cap R) \oplus J$  có một phần tử chính qui. Điều này dẫn đến  $Q = ((I \cap R) \oplus J)Q = I \oplus JQ$ . Mà  $Q$  có đơn vị là 1 nên  $1 = i + j$  với  $i \in I$  và  $j \in JQ$ . Suy ra  $0 = i^2 - i + ki$ , do tính trực tiếp nên  $i^2 = i$  và  $ki = 0$ . Do đó  $I = iQ$  tức là  $I$  sinh bởi một phần tử lũy đẳng. Như vậy, mọi idêan phải của  $Q$  đều được sinh bởi một phần tử lũy đẳng cho nên  $Q$  là vành Noether. Đó đó  $Q$  cũng là vành Goldie. Mặt khác cũng vì mọi idêan phải của  $Q$  đều sinh bởi một phần tử lũy đẳng nên  $Q$  không có idêan phải lũy linh nào. Thật vậy, gọi  $I \neq (0)$  là một idêan phải lũy linh của  $Q$ , khi đó có một số nguyên  $n$  sao cho  $I^n = (0)$  và  $I^{n-1} \neq (0)$ . Mà  $I = iQ$  nên tồn tại phần tử  $a = iq_1iq_2 \dots iq_{n-1} \in I^{n-1}$  và  $a \neq 0$ . Do  $i^2 = i$  nên  $a = 1 \cdot i \cdot iq_1iq_2 \dots iq_{n-1} \in I_n = (0)$ , mâu thuẫn. Vậy  $Q$  là vành Goldie nửa nguyên tố.

Theo bổ đề 2.2.6,  $Q$  thỏa mãn điều kiện dây chuyền giảm các linh hoá tử phải. Gọi  $I$  là một idêan phải của  $Q$  thì  $I = iQ$  với  $i^2 = i$ . Ta có  $l(iQ) = l(i) = Q(1 - i)$  và  $r(l(iQ)) = r(Q(1 - i)) = r(1 - i) = iQ = I$ , nên  $I$  là một linh hoá tử phải của  $Q$ . Như vậy mọi idêan phải của  $Q$  đều là linh hoá tử phải, do đó  $Q$  thỏa mãn điều kiện dây chuyền giảm các idêan phải, hay  $Q$  là vành Artin. Mà  $Q$  lại là vành nửa nguyên tố nên  $Q$  là vành nửa đơn. Vậy  $Q$  là Artin nửa đơn.

**Định lý 2.2.15.** *Nếu  $R$  là một thứ tự phải trong  $Q$  với  $Q$  là Artin nửa đơn thì  $R$  là vành Goldie nửa nguyên tố.*

**Chứng minh.**  $Q$  là Artin nửa đơn nên mọi idêan phải của  $Q$  đều sinh bởi một phần tử lũy đẳng. Do đó  $Q$  là Noether dẫn đến  $Q$  là Goldie. Suy ra  $Q$  thỏa mãn điều kiện dây chuyền tăng các linh hoá tử phải. Mà  $R$  là vành con của  $Q$  nên  $R$  cũng thỏa mãn điều kiện dây chuyền tăng các linh hoá tử phải. Mặt khác, nếu  $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$  là tổng trực tiếp các Idêan phải trong  $R$  thì  $A_1Q \oplus A_2Q \oplus \dots \oplus A_nQ$  là tổng trực tiếp các Idêan phải trong  $Q$ , nên trong  $Q$  không có tổng trực tiếp vô hạn các idêan phải thì trong  $R$  cũng vậy. Vì thế  $R$  là vành Goldie.

Gọi  $I \neq (0)$  là một idêan của  $R$ . Giả sử tồn tại số nguyên  $n$  sao cho  $I^n = (0)$  mà  $I^{n-1} \neq (0)$ . Khi đó  $QIQ$  là idêan khác  $(0)$  của  $Q$ -vành Artin nửa đơn nên theo hệ quả thì  $QIQ = eQ$  với  $e$  là phần tử lũy đẳng trong tâm của  $Q$ . Ta có  $e = \sum a_i u_i b_i$  với  $a_i, b_i \neq 0, u_i \in I$ . Ta tìm được phần tử  $b \in R$  là chính qui sao cho  $b_i = c_i b^{-1}$ , do đó  $e = (\sum a_i u_i c_i) b^{-1} = (\sum a_i v_i) b^{-1}$  với  $v_i = u_i c_i \in I$ . Do  $e$  nằm trong tâm của  $S$  nên  $be = eb$ , vì vậy  $beI^{n-1} = ebI^{n-1} = \sum a_i v_i I^{n-1} = (0)$  do  $v_i I^{n-1} \subset I^n = (0)$ . Mà  $b$  chính qui nên  $eI^{n-1} = (0)$  hay  $I^{n-1}e = (0)$ . Ta xét

$$(I^{n-1}Q)^2 = I^{n-1}QI^{n-1}Q \subset I^{n-1}QIQ = I^{n-1}eQ = (0)$$

Do mọi idêan phải của  $Q$  đều sinh bởi một phần tử lũy đẳng nên  $Q$  không có idêan phải lũy linh nào, điều này cho ta  $I^{n-1}Q = (0)$  suy ra  $I^{n-1} = (0)$ . Mâu thuẫn này chỉ ra rằng  $I = (0)$ . Vậy  $R$  là nửa nguyên tố.

**Định lý 2.2.16.**  *$Q$  là vành Artin đơn nếu và chỉ nếu  $R$  là Goldie nguyên tố.*

**Chứng minh.** Ta chỉ cần chứng minh  $Q$  là đơn khi và chỉ khi  $R$  nguyên tố.

Nếu  $Q$  là vành đơn, gọi  $A \neq (0)$  là một idêan của  $R$  thì  $QAQ$  là idêan khác  $(0)$  của  $Q$  và do đó  $QAQ = Q$ . Mà  $Q$  có đơn vị nên  $1 = \sum b_i a_i c_i$  với  $b_i, c_i \in S, a_i \in A$ . Khi đó tồn tại phần tử chính qui  $c \in R$  sao cho  $c_i = d_i c^{-1}$  với  $d_i \in R$ . Suy ra  $1 = (\sum b_i a_i d_i) c^{-1} \Rightarrow c = \sum b_i a_i d_i \in SA$ . Xét  $B$  là một idêan nào đó của  $R$ , nếu  $AB = (0)$  thì  $SAB = (0)$ . Suy ra  $cB = (0)$ , mà  $c$  là chính qui nên  $B = (0)$ . Vậy  $R$  là vành nguyên tố.

Ngược lại, hiển nhiên  $Q^2 \neq (0)$ . Gọi  $I \neq (0)$  là một idêan của  $Q$ . Ta có  $I = eQ$  với  $e$  là lũy đẳng trong tâm của  $Q$ . Ta có  $e = ab^{-1}$  với  $a, b \in R$  và  $b$  chính qui. Khi đó  $RabR$  là một idêan khác  $(0)$  của  $R$ , do nó chứa phần tử  $babb \neq 0$ . Theo bổ đề 2.2.11,  $RabR$  chứa phần tử chính qui  $r_1abr_2$ . Do đó tồn tại  $q \in Q$  sao cho  $1 = r_1abr_2q = r_1ab^{-1}bbr_2q = r_1eb^2r_2q = er_1b^2r_2q \in eQ = I$ . Điều này cho ta  $I = Q$ . Vậy  $Q$  là vành đơn.

**Nhận xét.** Với  $R$  là vành Goldie nguyên tố thì  $R$  là một thứ tự trong một vành Artin đơn  $S$ , do đó theo định lý Wedderburn – Artin,  $S \cong D_n$  là vành các ma trận vuông cấp  $n$  trên một thể  $D$ . Ta có thể nói  $R$  là một thứ tự trong  $D_n$ .

## 2.3. Vành các thương tối đại.

Ở phần trước, vành các thương  $Q(R)$  như vậy còn được gọi là vành các thương cổ điển (classical). Còn ở phần này chúng ta sẽ tìm hiểu vành các thương ở dạng khác, dạng mà môđun nội xạ sẽ đóng vai trò chính yếu.

Khác với vành phải thương  $Q(R)$ , vành các thương phải tối đại  $Q_{max}^r(R)$  của một vành  $R$  luôn tồn tại. Trong trường hợp vành  $R$  thỏa điều kiện Ore để tồn tại  $Q(R)$  thì khi đó một cách tự nhiên  $Q(R)$  được xem như là vành con của  $Q_m^r(R)$ . Bây giờ ta bắt đầu xây dựng vành các thương phải tối đại  $Q_{max}^r(R)$  mà ta sẽ gọi tắt là vành các thương tối đại  $Q_{max}(R)$ .

Với  $I = E(R_R)$  là bao nội xạ của môđun phải  $R_R$  thì  $I_R$  là một môđun phải nội xạ. Đặt  $H = \text{End}(I_R)$  với tác động phép toán bên trái của  $I$  thì  ${}_H I$  là một môđun trái.

Hơn nữa nếu ta đặt  $Q = \text{End}({}_H I)$  tác động phép toán bên phải của  $I$  thì ta được  $I = {}_H I_Q$ . Vành  $Q$  là hoán tập kép của  $R$  tạo thành bởi môđun phải nội xạ  $I_R$ .

Nhắc lại bao hữu tỉ  $\bar{E}(R)$  của môđun phải  $R_R$  được định nghĩa như sau:

$$\bar{E}(R) = \{i \in I : \forall h \in H, h(R) = 0 \Rightarrow h(i) = 0\}.$$

### Mệnh đề 2.3.1.

- (1)  ${}_H I$  là môđun trái cyclic sinh bởi 1.
- (2) Ánh xạ  $\varepsilon: Q \rightarrow I$  với  $\varepsilon(q) = 1 \cdot q, q \in Q$  là một  $R$ -đẳng cấu từ  $Q$  vào  $\bar{E}(R)$ .

### Chứng minh.

(1) Với  $i \in I$  thì  $R$ -đồng cấu  $R_R \rightarrow I_R$  biến 1 thành  $i$  có thể mở rộng thành một  $h \in \text{Hom}_R(I, I) = H$  nào đó (do tính nội xạ của  $I_R$ ). Do vậy,  $i = h(1) \in H \cdot 1$ .

(2) Rõ ràng  $\varepsilon$  là một  $R$ -đồng cấu. Nếu  $q \in \ker \varepsilon$  thì  $1 \cdot q = 0$ , kết hợp với (1) ta được  $0 = H.(1 \cdot q) = (H.1) \cdot q = I \cdot q$ .

Do đó  $q = 0$  nên  $\varepsilon$  là đơn ánh. Để tìm  $\text{im}(\varepsilon)$  trước tiên ta chú ý rằng với  $h \in H$  sao cho  $h(R) = 0$  thì  $h(1 \cdot Q) = (h.1)Q = 0$  do đó theo định nghĩa  $\bar{E}(R)$  thì  $\text{im}(\varepsilon) = 1 \cdot Q \subset \bar{E}(R)$ .

Ngược lại lấy  $i \in \bar{E}(R)$  thì với mọi  $h \in H$ , ánh xạ  $h.1 \mapsto h.i$  là một tự đồng cấu  $H$ -môđun của  ${}_H I$  được định nghĩa tốt do  $k.1 = 0$  suy ra  $k.i = 0$ . Điều này có nghĩa tồn tại  $q \in Q$  sao cho  $h.i = (h.1)q$  xảy ra với mọi  $h \in H$ . Chọn  $h = 1$ , ta được  $i = 1 \cdot q = \varepsilon(q)$ , vậy  $\text{im}(\varepsilon) = \bar{E}(R)$ . Ta được điều cần chứng minh.

**Nhận xét.** Từ mệnh đề trên ta có ngay sơ đồ sau:

$$\begin{array}{ccccc} H & \longrightarrow & H.1 = {}_H I_Q & \supset & 1 \cdot Q & \xleftarrow{\varepsilon} & Q \\ & & & & \parallel & & \uparrow \\ & & & & \bar{E}(R) & & R \\ & & & & \cup & & \\ & & & & R & & \end{array}$$

Do đó ta đồng nhất  $Q$  với  $\bar{E}(R)$  nhờ đẳng cấu  $\varepsilon$  trên. Điều này cho  $\bar{E}(R)$  một cấu trúc vành mở rộng từ cấu trúc  $R$ -môđun phải của chính nó. Và ta đặt vành này là  $Q_{\max}^r(R)$ , gọi là vành các thương phải tối đại của  $R$ . Và như đã nói ở trước, ta gọi tắt  $Q_{\max}^r(R)$  là vành các thương tối đại của  $R$  và kí hiệu đơn giản là  $Q_{\max}(R)$ . Phép nhân trên  $\bar{E}(R) = Q_{\max}(R)$  thường được kí hiệu bởi  $(i, j) \mapsto ij$ .

**Định nghĩa 2.3.2.** Một vành  $T \supset R$  được gọi là vành các thương phải tổng quát của  $R$  nếu  $R_R \subset_d T_R$ , tức là  $R$  trù mật phải trong  $T$ .

**Nhận xét.**  $Q_{\max}(R) \supset R$  là một vành các thương phải tổng quát của  $R$ .

**Định lý 2.3.3.** Cho  $T$  là một vành các thương phải tổng quát bất kì của  $R$ , và đặt  $Q_m = Q_{\max}(R)$ . Khi đó

- (1) Có duy nhất một đồng cấu vành  $g: T \rightarrow Q_m$  là mở rộng ánh xạ đồng nhất trên  $R$ .
- (2) Đồng cấu  $g$  trên là đơn cấu.
- (3) Cấu trúc vành trên  $Q_m$  là mở rộng duy nhất của cấu trúc  $R$ -môđun trên  $Q_{mR}$ .

**Chứng minh.** Với  $T$  là một vành các thương tổng quát bất kỳ của  $R$  thì theo mệnh đề 1.1.33 ta có duy nhất một  $R$ -đồng cấu  $g: T \rightarrow \bar{E}(R) = Q_m$  mở rộng ánh xạ đồng nhất trên  $R$  và  $g$  là đơn cấu. Nếu ta chỉ ra được  $g(t't) = g(t')g(t)$  với mọi  $t, t' \in T$  thì rõ ràng ta đã có được cả ba tính chất trên.

Lấy  $h \in H$  là mở rộng  $R$ -đồng cấu  $\bar{E}(R) \rightarrow \bar{E}(R)$  với phép nhân bên trái cho bởi công thức  $g(t't) - g(t')g(t)$ . Với mọi  $r \in t^{-1}R = \{x \in R | tx \in R\}$  ta có

$$\begin{aligned} h(r) &= (g(t't) - g(t')g(t))(r) \\ &= g(t'tr) - g(t')g(tr) \\ &= g(t')(tr) - g(t')(tr) = 0 \end{aligned}$$

Suy ra  $h(t^{-1}R) = 0$ . Mà  $R_R \subset_d T_R$  nên theo bổ đề 1.1.30,  $t^{-1}R \subset_d R_R$ . Do đó theo mệnh đề 1.1.31,  $h(R) = 0$ . Điều này cho ta  $0 = h(1) = g(t't) - g(t')g(t)$ .

**Hệ quả 2.3.4.** Nếu vành các thương  $Q(R)$  tồn tại thì nó có duy nhất phép nhúng vào vành  $Q_{max}(R)$  là mở rộng ánh xạ đồng nhất trên  $R$ .

**Chứng minh.** Theo định lý 2.3.3, để có hệ quả này ta cần chỉ ra rằng vành các thương  $Q(R)$  cũng là một vành các thương tổng quát của  $R$ , nghĩa là  $R_R \subset_d Q(R)$ . Thật vậy, với  $x, y \in Q(R)$  ta có thể viết  $x = as^{-1}$  và  $y = bs^{-1}$  với  $a, b \in R$  và  $s$  là chính qui trong  $R$ . Khi đó  $ys = b \in R$  và  $xs = a \neq 0$  nếu  $x \neq 0$ . Điều này cho ta  $R_R$  là trù mật trong  $Q(R)$ .

**Mệnh đề 2.3.5.** Giả sử  $Q(R)$  tồn tại và mọi idêan phải trù mật của  $R$  đều chứa một phần tử chính qui. Khi đó  $Q_{max}(R) = Q(R)$ .

**Chứng minh.** Ta cần chỉ ra rằng với mọi  $q \in Q_m = Q_{max}(R)$  đều thuộc  $Q(R)$ . Thấy vậy, vì  $R_R \subset_d Q_{m_R}$  nên  $q^{-1}R \subset_d R_R$ , theo bổ đề 1.1.30. Theo giả thiết  $q^{-1}R$  chứa một phần tử chính qui  $s$  của  $R$ . Do đó  $a = qs \in R$ , mà  $s$  là chính qui nên khả nghịch trong  $Q(R)$  nên  $q = as^{-1} \in Q(R)$ .

**Hệ quả 2.3.6.** Nếu  $R$  là vành Goldie nửa nguyên tố thì  $Q_{max}(R) = Q(R)$ .

**Chứng minh.** Vì  $R$  là vành Goldie nửa nguyên tố nên nó thỏa mệnh đề 2.3.5. Khi đó theo định lý Goldie thì  $Q_{max}(R) = Q(R)$  là vành nửa đơn.

**Mệnh đề 2.3.7.** Một  $R$ -môđun con  $D_R \subset Q_{m_R}$  là trù mật trong  $Q_{m_R}$  khi và chỉ khi với bất kỳ  $h \in H$ ,  $h(D) = 0 \Rightarrow h(1) = 0$ .

**Chứng minh.** Nếu  $D \subset_d Q_m$ , giả sử  $h \in H$  sao cho  $h(D) = 0$ . Khi đó

$$h: Q_m \rightarrow I = E(R) = E(Q_m)$$

phải bằng 0 theo mệnh đề 1.1.31. Do đó  $h(1) = 0$ . Ngược lại, giả sử  $h(D) = 0 \Rightarrow h(1) = 0$  với bất kỳ  $h \in H$ . Gọi  $P$  là một  $R$ -môđun bất kỳ nằm giữa  $D$  và  $Q_m$ . Bất kỳ  $R$ -đồng cấu  $f: P \rightarrow Q_m$  là một

thu hẹp của một  $h \in H$  nào đó do tính nội xạ của  $I_R$ . Do đó, nếu  $f(D) = 0$  ta có  $h(D) = 0$  thì  $h(1) = 0$ . Vì vậy

$$f(P) = h(1.P) = h(1)P = 0$$

điều này chỉ ra rằng  $\text{Hom}_R(P/D, Q_m) = (0)$  nên theo 1.1.31,  $D \subset_d Q_m$ .

**Định lý 2.3.8.** Cho  $D, D'$  là các  $R$ -môđun con của  $Q_m$  sao cho  $D \subset_d Q_m$ . Khi đó  $\text{Hom}_R(D, D')$  đẳng cấu (vai trò một nhóm) với

$$E = E_{D, D'} = \{q \in Q_m \mid qD \subset D'\}$$

Trường hợp đặc biệt,  $\text{End}(D_R)$  đẳng cấu với vành con  $E_{D, D} \subset Q_m$  và mỗi  $R$ -đồng cấu từ  $D$  vào  $R_R$  được xác định bởi phép nhân trái với một phần tử  $q \in Q_m$  thích hợp.

**Chứng minh.** Ta định nghĩa  $\varphi: E \rightarrow \text{Hom}_R(D, D')$  bởi  $\varphi(q)(d) = qd$  với  $q \in E$  và  $d \in D$ . Ta thấy  $\varphi(q)$  là một  $R$ -đồng cấu. Nếu  $\varphi(q) = 0$  thì  $qD = 0$ . Ta viết  $q = h.1$  với  $h \in H$ . Khi đó

$$h(D) = h(1.D) = h(1)D = qD = 0$$

Vì  $D \subset_d Q_m$  nên theo mệnh đề 2.3.7,  $q = h.1 = 0$ . Để chỉ ra  $\varphi$  là toàn cấu ta xét bất kỳ  $f \in \text{Hom}_R(D, D')$ . Ta có thể xem  $f$  là một thu hẹp của một  $h \in H$  nào đó. Ta đặt  $q = h.1$ , ta sẽ chứng minh  $q \in E$ . Thật vậy, với mọi  $h' \in H$  sao cho  $h'(R) = 0$ , ta có  $(h'h)(D) = h'(h(D)) = h'(f(D)) \subset h'(D') \in h(Q) = 0$ . Như chứng minh trên  $0 = (h'h).1 = h'(q)$ . Do đó theo định nghĩa  $Q_m = \bar{E}(R)$ , ta có  $q \in Q_m$ . Ta thấy

$$f(d) = h(d) = (h.1)d = qd = \varphi(q)(d)$$

với mọi  $d \in D$ , nên  $f = \varphi(q)$ . Trong trường hợp  $D = D'$ , ánh xạ  $\varphi$  là một đồng cấu vành, do đó ta có được phần sau của mệnh đề.

## 2.4. Vành các thương Martindale.

Loại vành các thương này được đưa ra bởi W. S. Martindale cho vành nguyên tố năm 1969, và S. A. Amitsur cho vành nguyên thủy năm 1972. Do các định lý về vành các thương Martindale chỉ xét trên vành nửa nguyên tố nên trước tiên ta xem lại một vài tính chất của vành nửa nguyên tố liên quan đến việc xây dựng các định lý này.

Ta nhắc lại linh hoá tử phải của một idêan phải trong một vành là một idêan của vành đó. Tương tự, linh hoá tử trái của một idêan trái cũng là một idêan. Ta xét tính chất của idêan linh hoá tử trong vành nửa nguyên tố. Cho  $R$  là vành nửa nguyên tố và  $A$  là idêan bất kì của  $R$ . Ta có  $(A \cap r(A))^2 =$

$(0)$  và  $(A \cap l(A))^2 = (0)$  trong vành nửa nguyên tố nên  $A \cap r(A) = A \cap l(A) = (0)$ . Với  $x \in r(A)$ ,  $xA \in A \cap r(A) \Rightarrow xA = (0) \Rightarrow x \in l(A)$ . Tương tự với  $x \in l(A)$ ,  $Ax \in A \cap l(A) = (0) \Rightarrow x \in r(A)$ . Do đó  $l(A) = r(A) = \text{ann}(A)$ , gọi là idêan linh hoá tử của  $R$ .

**Bổ đề 2.4.1.** Cho  $A$  là một idêan của vành nửa nguyên tố  $R$ . Khi đó  $A$  có duy nhất một phần bù là  $\text{ann}(A)$  và ta có  $A \oplus \text{ann}(A) \subseteq_e {}_R R_R$ .

**Chứng minh.** Gọi  $B$  là một phần bù bất kỳ của  $A$ , do đó  $B$  là phần tử tối đại trong các môđun con có giao bằng  $0$  với  $A$ . Mà  $AB \subset A \cap B = 0$  nên  $B \subset \text{ann}(A)$ . Vì  $R$  là nửa nguyên tố nên  $A \cap \text{ann}(A) = 0$ , do đó  $B = \text{ann}(A)$ . Điều này cho ta  $\text{ann}(A)$  là phần bù duy nhất của  $A$  trong  $R$ . Nên theo nhận xét ở phần 1.1.35,  $A \oplus \text{ann}(A) \subseteq_e {}_R R_R$ .

**Mệnh đề 2.4.2.** Với  $A$  là một idêan của vành nửa nguyên tố  $R$  thì ta có các điều kiện tương đương sau

- (1)  $\text{ann}(A) = (0)$ .
- (2)  $A \subseteq_e {}_R R_R$  ( $A$  là idêan cốt yếu trái trong  $R$ ).
- (3)  $A \subseteq_e R_R$  ( $A$  là idêan cốt yếu phải trong  $R$ ).
- (4)  $A \subseteq_d R_R$  ( $A$  là trừu mật phải trong  $R$ )

**Chứng minh.**

(4)  $\Rightarrow$  (3). Nhận xét ở phần định nghĩa 1.1.28

(3)  $\Rightarrow$  (2).  $A$  là cốt yếu phải hiển nhiên  $A$  là cốt yếu của  $R$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1). Ta có  $\text{ann}(A)$  là một idêan của  $R$  mà  $A$  là cốt yếu nên nếu  $\text{ann}(A) \neq (0)$  thì  $A \cap \text{ann}(A) \neq (0)$ , trái với giả thiết nên  $\text{ann}(A) = (0)$ .

(1)  $\Rightarrow$  (4). Nhận xét ở phần định nghĩa 1.1.28.

**Định nghĩa 2.4.3.** Với  $R$  là một vành nửa nguyên tố, ta đặt  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(R)$  là tập tất cả các idêan  $A$  của  $R$  thỏa điều kiện tương đương ở mệnh đề trên.

**Mệnh đề 2.4.4.** Nếu  $A, B \in \mathcal{F}$  thì  $AB, A \cap B$  và  $A^n$  ( $n \geq 0$ ) đều thuộc  $\mathcal{F}$ .

**Chứng minh.** Với  $x \in R$  thì  $xAB \neq (0)$ , suy ra  $\text{ann}(AB) = (0)$ .

Lại có  $AB \subset (A \cap B) \Rightarrow \text{ann}(A \cap B) = (0)$ .

Do  $AB \in \mathcal{F}$  nên rõ ràng  $A^n \in \mathcal{F}$ .

Nếu  $R$  là nguyên tố thì mọi idêan  $A \neq (0)$  của  $R$  có  $\text{ann}(A) = (0)$ . Do vậy khi đó  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(R)$  đơn giản chỉ là tập các idêan khác  $(0)$  của  $R$ .

**Mệnh đề 2.4.5.** Cho  $A \in \mathcal{F}$  trong vành nửa nguyên tố  $R$  và  $C \subset R$  là một idêan phải chứa  $A$ . Với  $f, g \in \text{Hom}_R(C, R_R)$ , nếu  $f|_A = g|_A$  thì  $f = g$ .

**Chứng minh.** Ta có thể giả sử  $g \equiv 0$ , và có  $f|_A = 0$ . Xét bất kỳ phần tử  $c \in C$ . Do  $cA \subset A$  ta có  $0 = f(cA) = f(c)A$  nên  $f(c) = 0$  (vì  $\text{ann}(A) = (0)$ ). Điều này chỉ ra rằng  $f \equiv 0$  trên  $C$ .

**Định nghĩa 2.4.6.** Cho  $R$  là vành nửa nguyên tố và  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(R)$  đơn giản là tập các idêan  $A$  của  $R$  mà nó là cốt yếu phải (hay hai phía) trong  $R$ . Khi đó, ta định nghĩa các tập sau:

$$Q^r(R) = \{q \in Q_{\max}(R) : qA \subset R \text{ với } A \in \mathcal{F} \text{ nào đó}\}.$$

$$Q^s(R) = \{q \in Q_{\max}(R) : qA, Bq \subset R \text{ với } A, B \in \mathcal{F} \text{ nào đó}\}.$$

**Nhận xét.**

- $Q^r(R)$  và  $Q^s(R)$  là những vành con của  $Q_{\max}(R)$  và  $R \subset Q^s(R) \subset Q^r(R)$ . Thật vậy, với  $q_1, q_2 \in Q^r(R)$  thì tồn tại  $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$  sao cho  $q_1A_1, q_2A_2 \subset R$ . Do  $\mathcal{F}$  kín với phép giao (hữu hạn) nên  $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$  và  $q_1(A_1 \cap A_2), q_2(A_1 \cap A_2) \subset R$ . Suy ra  $(q_1 + q_2)(A_1 \cap A_2) \subset R$  hay  $q_1 + q_2 \in Q^r(R)$ . Ta lại có  $q_1q_2A_2A_1 \subset q_1RA_1 \subset q_1A_1 \subset R$ , suy ra  $q_1q_2 \in Q^r(R)$ . Hoàn toàn tương tự cho  $Q^s(R)$ . Dựa vào định nghĩa thì rõ ràng  $R \subset Q^s(R) \subset Q^r(R)$ . Khi đó, vành  $Q^r(R)$  được gọi là vành các thương Martindale phải còn vành  $Q^s(R)$  được gọi là vành các thương Martindale đối xứng.
- Trong định nghĩa  $Q^s(R)$  ta có thể chọn  $A, B$  là 2 idêan trùng nhau trong  $\mathcal{F}$  do  $\mathcal{F}$  đóng kín với phép giao hữu hạn.

Nhắc lại, theo bổ đề 1.1.29, với  $R$  là một vành bất kỳ ta luôn có

$$q^{-1}R = \{x \in R \mid qx \in R\} \subset_d R_R \text{ và } q(q^{-1}R) \subset R.$$

Tuy nhiên  $q^{-1}R$  nói chung chỉ là một idêan phải của  $R$ , còn định nghĩa 2.4.5 đòi hỏi  $A$  phải là một idêan (cốt yếu) trong  $R$ .

**Mệnh đề 2.4.7.**  $Q^r(R)$  gồm các lớp tương đương  $[A, f]$  với  $A \in \mathcal{F}(R)$  và  $f \in \text{Hom}_R(A_R, R_R)$ . Hai cặp  $(A, f)$  và  $(A', f')$  được gọi là tương đương nếu  $f = f'$  trên  $A \cap A'$ . Nếu ta xem các phần tử của  $Q^r(R)$  là các lớp tương đương có dạng  $[A, f]$  thì phép cộng và nhân trong  $Q^r(R)$  được mô tả như sau

$$[A, f] + [B, g] = [A \cap B, f + g]$$

$$[A, f] \cdot [B, g] = [BA, fg]$$

**Chứng minh.** Ta thấy quan hệ trên các cặp  $(A, f)$  có tính chất phản xạ và đối xứng. Ta sẽ chỉ ra nó cũng có tính chất bắc cầu. Giả sử rằng  $(A, f) \sim (A', f')$  và  $(A', f') \sim (A'', f'')$  với  $A, A', A'' \in \mathcal{F}$  và  $f, f', f''$  là các hàm tương ứng. Rõ ràng  $f, f'$  và  $f''$  bằng nhau trên  $A \cap A' \cap A''$ . Vì  $A \cap A' \cap A'' \in \mathcal{F}$  và theo mệnh đề 2.4.4  $f$  và  $f''$  bằng nhau trên  $A \cap A''$ . Do đó  $(A, f) \sim (A, f)$ .

Với mỗi  $q \in Q^r(R)$  ta có  $qA \subset R$  với  $A \in \mathcal{F}$  nào đó. Với mỗi  $q$  như vậy ta có một lớp  $[A, f]$  với  $f: A \rightarrow R$  được cho bởi phép nhân trái với  $q$ . Ngược lại, cho trước  $f \in \text{Hom}_R(A_R, R_R)$  với  $A \in \mathcal{F}$ , thì theo định lý 2.3.8,  $f$  được xác định bởi phép nhân trái với duy nhất  $q \in Q_{\max}(R)$ . Vì  $qA \subset R$  nên theo định nghĩa  $q \in Q^r(R)$ . Như vậy ta đã thiết lập được tương ứng một – một giữa  $Q^r(R)$  và tập các lớp tương đương dạng  $[A, f]$ .

Biểu diễn của phép cộng trên các lớp tương đương là hợp lý do  $A \cap B \in \mathcal{F}$ . Ta xét phép nhân, ta có  $BA \in \mathcal{F}$ . Vì  $g(BA) \subset g(B)A \subset A$  nên  $fg$  xác định trên  $BA$ . Nếu  $[A, f]$  và  $[B, g]$  lần lượt tương ứng với  $q, q' \in Q^r(R)$  thì lớp  $[BA, fg]$  tương ứng với  $qq'$ .

**Nhận xét.**  $[A, f] \mapsto q \in Q_{\max}(R)$  tương ứng với điều kiện nếu  $qA = 0$  với  $A \in \mathcal{F}$  thì  $q = 0$ . Điều này có được là do  $A \subset_d R_R$  và liên quan đến mệnh đề 2.3.8. Ta sẽ sử dụng kết quả này nhiều lần dưới đây.

**Mệnh đề 2.4.8.** Cho  $q \in Q^r(R)$  với  $R$  là vành nửa nguyên tố và  $A \in \mathcal{F}(R)$ . Nếu  $qA = 0$  hoặc  $Aq = 0$  thì  $q = 0$ .

**Chứng minh.** Nếu  $qA = 0$  thì  $q = 0$  do  $q \in Q_{\max}(R)$ . Nếu  $Aq = 0$ , vì  $q \in Q^r(R)$  nên tồn tại  $B \in \mathcal{F}$  sao cho  $qB \subset R$ . Từ  $Aq = 0$  ta được  $A(qB) = 0$  và suy ra  $qB = 0$  vì  $\text{ann}(A) = 0$  trong  $R$ . Do đó theo trường hợp đầu tiên ta được  $q = 0$ .

**Mệnh đề 2.4.9.** Nếu  $R$  là một miền nguyên (tương ứng vành nguyên tố, nửa nguyên tố) thì  $Q^s(R)$  cũng vậy.

**Chứng minh.** Trước tiên, giả sử  $R$  là miền nguyên. Lấy  $q, q' \in Q^s(R)$  sao cho  $qq' = 0$ . Ta có  $A, A' \in \mathcal{F}$  sao cho  $qA \subset R$  và  $q'A' \subset R$ . Khi đó

$$0 = A(qq')A' = (Aq)(q'A')$$

điều này dẫn đến  $Aq = 0$  hoặc  $q'A' = 0$ . Theo mệnh đề 2.4.8, nó cho ta  $q = 0$  hay  $q' = 0$ . Do đó,  $Q^r(R)$  cũng là miền nguyên.

Tiếp theo ta giả sử  $R$  là nguyên tố. Với  $q, q' \in Q^r(R)$  sao cho  $qQ^r(R)q' = 0$ . Chọn  $A, A' \in \mathcal{F}$  giống như trên và ta có nhận xét

$$qQ^r(R)q' = 0 \Rightarrow qRq' = 0 \Rightarrow (Aq)R(q'A') = 0$$

Vì  $Aq, q'A' \subset R$  và  $R$  là nguyên tố nên  $Aq = 0$  hay  $q'A' = 0$  và do đó  $q = 0$  hay  $q' = 0$  như trên.

Trường hợp cuối cùng  $Q^r(R)$  là nửa nguyên tố tương tự bởi vì

$$qQ^s(R)q = 0 \Rightarrow (Aq)R(Aq) \subset a(qRq) = 0 \Rightarrow Aq = 0$$

và do đó ta lại được  $q = 0$ .

Với trường hợp nguyên tố và nửa nguyên tố trong mệnh đề trên cũng đúng nếu ta thay  $Q^s(R)$  bằng  $Q^r(R)$ . Phần chứng minh ta có thể thực hiện tương tự như trên. Tuy nhiên trong trường hợp miền nguyên thì nói chung là không thể thay  $Q^s(R)$  bằng  $Q^r(R)$  được. Ta có ví dụ sau đây:

Cho  $R$  là đại số tự do  $k\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  trên trường  $k$  với  $n \geq 2$ . Khi đó theo mệnh đề 2.4.8  $Q^s(R)$  là miền nguyên trong khi đó có một  $x_i$  là ước của 0 trong  $Q^r(R)$ , nghĩa là  $Q^r(R)$  không là miền nguyên. (Example 14.13 tài liệu [4])

**Định lý 2.4.10.** Cho  $R$  là một vành và  $I \subset R$  là một ideal sao cho  $r(I) = l(I) = (0)$ . Gọi  $T$  là một vành con bất kỳ của  $R$  chứa  $I$ . Khi đó

- (1)  $R$  là nguyên tố (tương ứng nửa nguyên tố) khi và chỉ khi  $T$  cũng vậy.
- (2) Nếu  $R$  là nửa nguyên tố thì  $Q^r(R) = Q^r(T)$  và  $Q^s(R) = Q^s(T)$ .

### Chứng minh.

(1) Ta chỉ chứng minh cho trường hợp nguyên tố còn trường hợp nửa nguyên tố thì tương tự. Giả sử  $R$  là nguyên tố, ta xét ideal  $B$  khác không bất kỳ của  $T$ . Khi đó  $IBI$  là ideal của  $R$  nằm trong  $B$  và  $IBI \neq (0)$  theo giả thiết. Do đó nếu  $B'$  là một ideal khác không của  $T$  thì

$$BB' \supset (IBI)(IB'I) \neq (0),$$

vậy nên  $T$  là nguyên tố. Ngược lại, nếu  $T$  là nguyên tố. Khi đó với các ideal khác không  $A, A'$  của  $R$  thì  $IAI, IA'I$  là các ideal khác không của  $T$  (cũng của  $R$ ), và do đó  $AA' \supset (IAI)(IA'I) \neq (0)$ . Điều này cho ta  $R$  là nguyên tố.

(2) Vì  $R$  là nửa nguyên thủy và  $T$  cũng vậy nên ta có các tập  $\mathcal{F}(R)$  và  $\mathcal{F}(T)$ . Ta xây dựng các đồng cấu sau

$$\varphi: Q^r(R) \rightarrow Q^r(T), \quad \psi: Q^r(T) \rightarrow Q^r(R)$$

Để định nghĩa  $\varphi$  ta lấy  $f: A_R \rightarrow R_R$  với  $A \in \mathcal{F}(R)$ . Mà theo giả thiết  $I \in \mathcal{F}(R)$  nên  $IAI \in \mathcal{F}(R)$ . Vì  $IAI \subset T$ , ta có  $IAI \in \mathcal{F}(T)$ . Khi đó ta định nghĩa

$$\varphi[A, f] = [IAI, f'] \in Q^r(T),$$

Với  $f'$  là thu hẹp của  $f$  đến  $IAI$ . Tương tự, nếu  $g: B_T \rightarrow T_T$  với  $B \in \mathcal{F}(T)$ , khi đó  $IBI \in \mathcal{F}(R)$ . Hơn nữa với  $x \in R$

$$x(IBI) = 0 \Rightarrow (xI)B = 0 \Rightarrow xI = 0 \Rightarrow x = 0$$

Vì  $IBI \subset B$  nên ta có thể định nghĩa

$$\psi[B, g] = [IBI, g'] \in Q^r(R)$$

Với  $g'$  là thu hẹp của  $g$  đến  $IBI$ . Ta cần chỉ ra rằng  $g'$  là một  $R$ -đồng cấu phải. Lấy  $i, i' \in I, b \in B$  và  $x \in R$ , ta có

$$g'(ibi.x) = g(ib.(i'x)) = g(ib)(i'x) = g'(ibi)x$$

Ta có thể kiểm tra được  $\varphi, \psi$  được định nghĩa tốt và là nghịch đảo của nhau. Do đó ta có thể sử dụng chúng để đồng nhất  $Q^r(R)$  và  $Q^r(T)$ .

Nếu  $q \in Q^s(R) \subset Q^r(R)$  thì  $Aq \subset R$  với  $A \in \mathcal{F}(R)$ . Nhưng vì  $(IAI)q \subset IAq \subset T$ , điều này chỉ ra rằng  $q \in Q^s(T)$ . Tương tự ta có thể chỉ ra rằng  $Q^s(T) \subset Q^s(R)$ . Do đó  $Q^s(R) = Q^s(T)$ .

## 2.5. Mở rộng centroid của một vành.

Đặt  $Q_m = Q_{\max}(R)$  là vành các thương phải tối đại của vành  $R$ ,  $Z(Q_m)$  là tâm của nó và  $E = E(R_R)$  bao nội xạ của môđun  $R_R$ .

**Bổ đề 2.5.1.** Cho  $q_0 \in Q_m$  với  $R$  là vành bất kì. Khi đó,  $q_0 \in Z(Q_m)$  nếu và chỉ nếu  $q_0$  giao hoán với tất cả các phần tử của  $R$ .

**Chứng minh.** Ta chứng minh chiều nếu, chiều kia là hiển nhiên.

Giả sử  $q_0$  giao hoán với mọi phần tử của  $R$  nhưng  $q_0q \neqq qq_0$  với  $q$  là phần tử nào đó của  $Q_m$ . Khi đó tồn tại  $a \in R$  sao cho  $(q_0q - qq_0)a \neqq 0$  và  $qa \in R$ . Theo giả thiết ta có

$$q_0(qa) = (qa)q_0 = q(aq_0) = qq_0a$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

**Mệnh đề 2.5.2.** Cho  $R$  là vành nửa nguyên tố. Nếu  $q_0 \in Z(Q_m)$  thì  $q_0 \in Q^s(R)$ .

**Chứng minh.** Ta có  $D = q_0^{-1}R = \{x \in R : q_0x \in R\}$  là ideal phải trù mật trong  $R$ . Do  $q_0 \in Z(Q_m)$  nên  $D$  còn là một ideal trái. Thật vậy, với  $x \in D$  và  $r \in R$ , ta có

$$q_0(tx) = (q_0t)x = (tq_0)x = t(q_0x) \in tR \subset R$$

Do đó  $tx \in D$  nên  $D \in \mathcal{F}$ . Hơn nữa,  $q_0 \in Z(Q_m)$  nên

$$Dq_0 = q_0D = q_0(q_0^{-1}R) \subset R$$

Suy ra  $q_0 \in Q^s(R)$ .

**Định lý 2.5.3.** Với  $R$  là một vành nửa nguyên tố ta có:

$$Z(Q^s(R)) = Z(Q^r(R)) = Z(Q_m) \text{ và } Z(Q_m) \cap R = Z(R).$$

**Chứng minh.** Với  $q_0 \in Z(Q_m)$  thì theo mệnh đề trên  $q_0 \in Q^s(R) \subset Q^r(R)$  nên do đó  $q_0$  là phần tử trong tâm của  $Q^s(R)$  cũng như  $Q^r(R)$ . Ngược lại, mọi phần tử trong tâm của  $Q^s(R)$  hay  $Q^r(R)$  đều giao hoán với mọi phần tử của  $R$  nên nó cũng là phần tử tâm của  $Q_m$ , do kết quả của bổ đề 2.5.1. Vậy ta được các đẳng thức đầu tiên. Còn đẳng thức cuối thì tương tự, phần tử trong tâm của  $R$  giao hoán với mọi phần tử của  $R$  nên nó cũng là phần tử tâm của  $Q_m$ . Do đó  $Z(Q_m) \cap R = Z(R)$ .

**Định nghĩa 2.5.4.** Vành (giao hoán)  $Z(Q^s(R)) = Z(Q^r(R)) = Z(Q_m)$  được gọi là mở rộng centroid của  $R$  và thường được kí hiệu là  $C$ .

Nhắc lại, ta xem các phần tử của  $Q^r(R)$  như là các lớp tương đương  $[A, f]$  với  $A \in \mathcal{F}$  và  $f \in \text{Hom}_R(A_R, R_R)$  được mô tả trong mệnh đề 2.4.6. Do đó các phần tử của mở rộng centroid  $C = Z(Q^r(R))$  cũng có dạng các lớp tương đương  $[A, f]$  như trên, tuy nhiên nó sẽ có tính chất đặc biệt hơn, đó là:

**Mệnh đề 2.5.5.** Các phần tử của mở rộng centroid  $C$  có dạng  $[A, f]$  với  $A \in \mathcal{F}$  và  $f: A \rightarrow R$  là một  $(R, R)$ -đồng cấu song môđun.

**Chứng minh.** Lấy một lớp  $[A, f]$  thỏa tính chất như trên. Khi đó, lớp này sẽ tương ứng với một phần tử  $q_0$  nào đó trong  $Q^r(R)$ , do vậy  $f$  là một phép nhân trái bởi  $q_0$ . Vì  $f$  là một  $R$ -đồng cấu môđun trái nên  $(q_0t - tq_0)A = 0$  với bất kỳ  $t \in R$ . Điều này chỉ ra rằng  $q_0$  giao hoán với tất cả các phần tử của  $R$  nên theo bổ đề 2.5.1,  $q_0 \in Z(Q_m)$  hay  $q_0 \in C$ . Ngược lại, giả sử lớp  $[A, f]$  với  $A \in \mathcal{F}$  và  $f \in \text{Hom}_R(A_R, R_R)$  tương ứng với một phần tử  $q_0 \in Z(Q^r(R)) = Z(Q_m)$ . Khi đó với  $a \in A$  và  $t \in R$ , ta có  $f(ta) = q_0ta = tq_0a = t(fa)$ . Do đó  $f$  là một  $R$ -đồng cấu môđun trái, mà đồng thời nó cũng là  $R$ -đồng cấu môđun phải nên  $f$  là một  $(R, R)$ -đồng cấu song môđun.

**Định nghĩa 2.5.6.** Vành  $R$  được gọi là vành chính qui von Neumann nếu mọi phần tử  $a \in R$  đều có thể viết được dưới dạng  $axa$  với  $x \in R$  nào đó phụ thuộc vào  $a$ .

Khi đó,  $e = ax \in aR$  là phần tử lũy đẳng trong  $R$  và  $a = ae \in eR$  dẫn đến  $aR = eR$ . Tổng quát hơn, bất kỳ idêan phải  $A$  nào của  $R$  đều biểu diễn được dưới dạng  $eR$  với  $e$  là phần tử lũy đẳng thích hợp.

**Mệnh đề 2.5.7.** Với  $R$  là vành nửa nguyên tố thì mở rộng centroid  $C = Z(Q_m)$  là vành chính qui von Neumann.

**Chứng minh.** Lấy  $[A, f] \in C$ , ta có  $A \in \mathcal{F}$  và  $f: A \rightarrow R$  là  $(R, R)$ -đồng cấu song môđun. Khi đó  $B = \ker(f) \subset A$  là một idêan của  $R$ . Gọi  $T$  là một phần bù của  $B$  trong  $A$  thì  $B \oplus T \subseteq_e {}_R A_R$ , nên thay thế  $A$  bởi  $B \oplus T$ , cũng thuộc  $\mathcal{F}$ , ta có thể giả sử  $A = B \oplus T$ . Xét idêan  $T' = f(A) = f(T) \subset R$ , đẳng cấu với  $T$  bởi một song môđun  $(R, R)$ . Đặt  $B' = \text{ann}(T')$ , theo bổ đề 2.4.1 ta có  $B' \oplus T' \subseteq_e {}_R R_R$ . Do đó  $A' = B' \oplus C' \in \mathcal{F}$ . Giờ ta định nghĩa  $g: A \rightarrow T \subset R$  như sau

$$g(b' + f(t)) = t \text{ với } b' \in B' \text{ và } t \in T$$

Ta kiểm tra được  $g$  là một  $(R, R)$ -đồng cấu song môđun, với  $g$  được xác định trên  $\text{im}(f)$  còn  $f$  được xác định trên  $\text{im}(g)$ . Lấy  $b + c \in A$ , với  $b \in B, c \in C$ , ta có

$$fgf(b + c) = fg(f(c)) = f(g(f(c))) = f(c) = f(b + c)$$

Do vậy,  $fgf = f$  như là một đồng cấu song môđun từ  $A$  vào  $R$ . Mà  $A' \in \mathcal{F}$  và  $g$  là một đồng cấu song môđun nên  $[A', g] \in C$ . Vậy  $C$  là vành chính qui von Neumann.

**Hệ quả 2.5.8.** Nếu  $R$  là vành nguyên tố thì mở rộng centroid  $C$  của nó là một trường.

**Chứng minh.** Theo mệnh đề 2.4.9,  $R$  là vành nguyên tố thì  $Q^s(R)$  cũng là vành nguyên tố. Mặt khác, tâm của một vành nguyên tố là một miền nguyên. Do đó  $C = Z(Q^s(R))$  là miền nguyên. Theo mệnh đề 2.5.7,  $C$  là vành chính qui von Neumann. Ta cần chứng minh mọi phần tử khác không của  $C$  đều khả nghịch. Lấy  $0 \neq c \in C$ . Theo mệnh đề 2.5.5 ta có thể xem  $c$  là lớp của một  $(R, R)$ -đồng cấu song môđun  $f: A \rightarrow R$  được cho bởi phép nhân bên trái bởi  $c$  và với  $A \in \mathcal{F}$ . Ta thấy  $f$  là đơn ánh do nếu  $0 = f(a) = ca$  thì

$$c(AaA) = AcaA = 0 \Rightarrow AaA = 0 \Rightarrow a = 0$$

Nếu  $g: cA \rightarrow A \in R$  là nghịch đảo của  $f: A \rightarrow cA$  thì khi đó  $[cA, g]$  là nghịch đảo của  $[A, f] = c$  trong  $C$ .

**Định nghĩa 2.5.9.** Cho vành  $R$ , là đại số trên trường  $F$ . Ta gọi  $R$  là một PI-vành hay vành thỏa mãn một đồng nhất thức đa thức nếu có một đa thức khác không  $p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum a_{(i)} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  với hữu hạn các biến không giao hoán  $\lambda_i$  nào đó và các hệ số  $a_i$  lấy trên  $F$  sao cho  $p(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0$  với mọi lựa chọn  $r_1, \dots, r_n$  trong  $R$ .

Ta có thể mở rộng khái niệm trên một cách tổng quát hơn.

**Định nghĩa 2.5.10.** Vành  $R$  được gọi là một GPI-vành hay vành thỏa mãn một đồng nhất thức đa thức dạng tổng quát hóa nếu có một đa thức

$$P(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum a_{i_1} \pi_{j_1} a_{i_2} \pi_{j_2} \dots a_{i_k} \pi_{j_k} a_{i_{k+1}}$$

trong đó  $\pi_j$  là các đơn thức đối với các biến  $\lambda_j$  và các phần tử  $a_i \in R$  có vai trò như là các hệ số và nằm chen giữa các đơn thức  $\pi_j$ , sao cho  $P(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0$ .

Trong phần sau ta sẽ sử dụng định nghĩa này cho một trường hợp rất đặc biệt đó là các đơn thức  $\pi_j$  đều lấy là  $r \in R$ . Tiếp theo ta sẽ phát biểu một định lý của Martindale liên quan mở rộng centroid của một vành nguyên tố thỏa mãn đồng nhất thức đa thức dạng tổng quát hóa (không tầm thường), còn phần chứng minh của định lý này xin được phép không nêu ra mà chúng tôi chỉ trích dẫn nguồn tài liệu tham khảo.

**Định lý 2.5.11. (Định lý Martindale).** Nếu  $R$  là một vành nguyên tố thỏa mãn đồng nhất thức đa thức dạng tổng quát hóa không tầm thường thì vành  $S = RC$  với  $C$  là mở rộng centroid của  $R$  là vành nguyên thủy có chứa ideal phải tối tiểu  $eS$  với  $e$  là phần tử lũy đẳng sao cho  $eSe$  là một thể đại số hữu hạn chiều trên  $C$ .

Với  $R$  là vành nửa nguyên tố thì vành con  $S = RC$  của  $Q_m(R)$  được gọi là bao đóng tâm của  $R$ . Và  $R$  được gọi là đóng tâm nếu  $R$  trùng với bao đóng tâm của nó.

Trong phần chứng minh của định lý trên,  $eSe = De$  với  $D$  là một thể và là đại số hữu hạn chiều trên  $C$ , đồng thời  $C$  cũng là tâm của  $D$  và  $S$ .

Chi tiết cụ thể của chứng minh định lý trên xin tham khảo ở tài liệu [5].

## Chương 3. Một số vấn đề về vành nguyên tố.

Như đã giới thiệu ở phần mở đầu, giờ đây chúng ta tóm lược lại những gì mà Posner và Schneider đã làm như sau:

- (1) Bằng việc tuyến tính hóa trên  $R$  và một vài bước sơ cấp trên các phần tử, họ chỉ ra rằng nếu  $arbr = 0, \forall r \in R$  trong vành nguyên tố  $R$  thì một trong ba phần tử phải bằng 0.
- (2) Với các vành nguyên tố tổng quát ta có thể đi xa hơn ba phần tử. Tuy nhiên, họ đã chỉ ra rằng nếu  $R$  là vành nguyên tố có Idêan phải tối đại (và cũng đúng cho vành nguyên thủy có Idêan phải tối đại) và nếu  $M$  là  $R$ -modun trung thành bất khả qui, và  $D = \text{Hom}_R(M, M)$  thì
  - (i) Nếu  $D$  là vô hạn và  $a_1ra_2r \dots a_{n-1}ra_n = 0, \forall r \in R$  thì có một  $a_i$  nào đó phải bằng 0
  - (ii) Ngược lại nếu  $D$  hữu hạn có  $q$  phần tử thì ta có thể tìm được  $q + 2$  phần tử khác không trong  $R$  sao cho  $a_1ra_2r \dots a_{q+1}ra_{q+2} = 0, \forall r \in R$  và không thể có  $q + 1$  phần tử khác không  $a_1, a_2, \dots, a_{q+1}$  sao cho  $a_1ra_2r \dots a_qra_{q+1} = 0, \forall r \in R$

Trong chương này chúng ta sẽ đưa ra một số kết quả mạnh hơn. Trước tiên ta nhắc lại một số qui ước, ta gọi vành Goldie thay cho vành Goldie phải, vành các thương thay cho vành các thương phải, thứ tự thay cho thứ tự phải. Bây giờ ta bắt đầu với các bổ đề.

### 3.1. Các bổ đề.

**Bổ đề 3.1.1.** Cho vành  $R$  là vành Goldie nguyên tố và  $A$  là một vành con sinh bởi tất cả các phần tử chính qui của  $R$ . Khi đó nếu  $S$  là vành các thương của  $R$  thì ta có

- (1)  $A$  là vành Goldie nguyên tố.
- (2) Nếu  $s, t \in S$  sao cho  $sAt = 0$  thì  $s = 0$  hay  $t = 0$ .

**Chứng minh.** Theo định lý Goldie,  $S = D_k$ , vành tất cả các ma trận vuông cấp  $k \times k$  lấy hệ số trên một thể  $D$ . Do đó mỗi phần tử của  $S$  là tổng của các phần tử khả nghịch nên cho  $x \in S$  thì  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  với  $x_i \in S$  là khả nghịch. Khi đó tồn tại  $b \in R$  là chính qui sao cho  $x_i = a_i b^{-1}$  với  $a_i \in R$ . Vì mỗi  $x_i$  là khả nghịch trong  $S$  nên ta có mỗi  $a_i$  chính qui trong  $R$ . Ta có

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)b^{-1}$$

Do  $a_i \in A$  nên ta có thể thấy  $A$  là một thứ tự trong  $S$ . Theo định lý Goldie thì  $A$  là một vành Goldie nguyên tố.

Giả sử rằng  $s, t \in S$  sao cho  $sAt = 0$ . Ta viết  $s = uv^{-1}, t = wz^{-1}$  với  $u, v, w, z \in A$  và  $v, z$  chính qui trong  $R$ . Với  $a \in A$  thì  $va \in R$ , do đó  $0 = svat = uv^{-1}vawz^{-1}$ , điều này dẫn đến  $uAw = 0$ . Do  $u, w \in A$  và  $A$  là vành nguyên tố nên ta được  $u = 0$  hoặc  $w = 0$ , tương ứng với  $s = 0$  hoặc  $t = 0$ .

**Nhận xét.** Do tích của hai phần tử chính qui trong  $R$  là chính qui nên  $A$  thật sự là nhóm cộng được sinh bởi tất cả các phần tử chính qui của  $R$ .

**Bổ đề 3.1.2.** Cho  $R$  là vành Goldie nguyên tố và  $S = D_k$  là vành các thương của  $R$ . Giả sử  $k \geq 2$ . Đặt

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in S$$

Khi đó, ta có thể tìm được  $a, b \in R$  với  $b$  chính qui trong  $R$  sao cho  $e_{11} = ab^{-1}$  và  $aRa \neq 0$  là một miền nguyên.

**Chứng minh.** Giả sử kết quả trên sai, có nghĩa là bất kể khi  $e_{11} = ab^{-1}$  thì  $aRa$  không là miền nguyên.

Ta có  $e_{11}Se_{11} = De_{11}$  là một thể và cho  $\delta \in D$  thì  $\delta e_{11} = e_{11}\delta$ . Hơn nữa  $aRa = e_{11}bRe_{11}b \in e_{11}Se_{11}b = De_{11}b$  không là miền nguyên. Do đó ta có thể tìm được  $\delta_1, \delta_2 \in D: \delta_1 e_{11}b \neq 0, \delta_2 e_{11}b \neq 0$  và  $(\delta_1 e_{11}b)(\delta_2 e_{11}b) = 0$ . Vì  $\delta_1$  khả nghịch và  $b$  chính qui nên ta được  $e_{11}b\delta_2 e_{11} = 0$  và do  $\delta_2 e_{11} = e_{11}\delta_2$  suy ra  $e_{11}be_{11}\delta_2 = 0 \Rightarrow e_{11}be_{11} = 0$ . Do  $a = e_{11}b \Rightarrow ae_{11} = 0$ . Như vậy  $ae_{11} = 0$  khi  $e_{11} = ab^{-1}$ . Nếu  $c \in R$  là chính qui thì  $e_{11} = acc^{-1}b^{-1} = ac(bc)^{-1} \Rightarrow ace_{11} = 0$ . Điều này chỉ ra rằng  $aAe_{11} = 0$  với  $A$  là một vành con của  $R$  được sinh bởi tất cả các phần tử chính qui. Vì  $a \neq 0$  và  $e_{11} \neq 0$  trong  $S$  nên theo phần (2) của bổ đề 3.1.1 ta thấy vô lý!

## 3.2. Một số kết quả về vành nguyên tố.

**Định lý 3.2.1.** Cho  $R$  là vành Goldie nguyên tố vô hạn và giả sử rằng  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là  $n$  phần tử của  $R$  sao cho  $a_1ra_2r \dots a_{n-1}ra_n = 0, \forall r \in R$ . Khi đó sẽ có một  $a_i$  nào đó bằng 0.

**Chứng minh.**  $R$  là một thứ tự trong  $D_k$  với  $D$  là một thể.

Nếu  $k = 1$  thì  $R$  là thứ tự trong một thể  $D$  nên mọi phần tử của  $R$  đều chính qui, do đó kết quả hiển nhiên đúng.

Nếu  $k \geq 2$  và giả sử mọi  $a_i$  đều khác 0.

Vì  $R$  là vô hạn nên  $D$  phải vô hạn.

Đặt  $V = RD \subset D_k$ ,  $V$  là một không gian vector phải trên  $D$ .

Theo bổ đề 3.1.2 ta có thể viết  $e_{11} = uv^{-1}$  với  $u, v \in R$ ,  $v$  chính qui và  $uRu$  là miền nguyên. Chúng ta cần có  $x \in R: a_i x u \neq 0$  với  $i = \overline{1, n}$ .

Để được điều này ta đặt  $V_i = \{w \in V \mid a_i w u = 0\}$ , ta cần chứng minh  $V_i$  là một không gian vector con trên  $D$  của  $V$ .

Vì  $e_{11}\delta = \delta e_{11}$  với  $\delta \in D$ , ta có  $uv^{-1}\delta = \delta uv^{-1}$  suy ra  $\delta u = uv^{-1}\delta v$ .

Nếu  $w \in V_i$  thì  $a_i w u = 0$ , do đó  $a_i w u v^{-1}\delta v = 0$  hay  $a_i w \delta u = 0$ . Suy ra  $w\delta \in V_i$

Vậy  $V_i$  là không gian vector phải trên  $D$ .

Hơn nữa  $V_i \neq V$  (do  $a_i R u = 0$  với  $a_i \neq 0, u \neq 0$  không thể xảy ra trong vành nguyên tố) nên  $V_i$  là không gian con thực sự của  $V$  và do  $D$  là vô hạn nên  $V$  không thể là hợp của các  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Do đó sẽ có  $t \in V, t \notin V_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Khi đó  $a_i t u \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ . Vì  $t = t_1 \delta_1 + t_2 \delta_2 + \dots + t_m \delta_m, t_i \in R, \delta_i \in D$ . Ta thấy  $a_i t_j u \neq 0$  với  $t_j$  nào đó. Đặt  $x = t_j$  thì  $a_i x u \neq 0$  với  $i = 1, 2, \dots, n$  và  $x \in R$ .

Đặt  $b_i = a_i x u, D_1 = v^{-1} D v, D_1$  là một thể trong  $D_k$ . Đặt  $W = D_1 R, W$  là không gian vector trái trên  $D_1$ .  $W_i = \{w \in W \mid u w b_i = 0\}$ . Theo chứng minh trên thì  $W_i$  là không gian vector con trái trên  $D_1$  của  $W$ . Ta có  $W \neq \bigcup_{i=1}^n W_i$ , vì  $W_i$  là không gian con thực sự của  $W$ . Theo trên ta có  $y \in R$  sao cho  $u y b_i \neq 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Ta được  $u y a_i x u \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$  và  $x, y \in R$ . Vì  $a_1 r a_2 r \dots a_{n-1} r a_n = 0, \forall r \in R$  nên ta thế  $r = x u r u y$  vào ta được:

$$a_1 x u r u y a_2 x u r u y \dots a_{n-1} x u r u y a_n = 0$$

$$\Rightarrow (u y a_1 x u) r (u y a_2 x u) r \dots (u y a_{n-1} x u) r (u y a_n x u) = 0$$

Vì  $(u y a_i x u) \neq 0$  trong  $u R u$  là miền nguyên và hơn nữa  $r \neq 0$  ta gặp mâu thuẫn!

**Hệ quả 3.2.2.**  $R$  là vành Noether nguyên tố vô hạn (cũng đúng cho vành Noether đơn) thì nếu  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$  sao cho  $a_1 r a_2 r \dots a_{n-1} r a_n = 0, \forall r \in R$  thì có một  $a_i = 0$  nào đó.

**Hệ quả 3.2.3.**  $R$  là vành Artin nguyên tố vô hạn (cũng đúng cho vành Artin đơn vô hạn) và có đơn vị thì nếu  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$  sao cho  $a_1 r a_2 r \dots a_{n-1} r a_n = 0, \forall r \in R$  thì có một  $a_i = 0$  nào đó.

Ta thấy hệ quả 3.2.3 là trường hợp đặc biệt của kết quả của Posner và Schneider. Chúng ta có thể mở rộng trường hợp vành Artin đơn trong hệ quả 3.2.2 cho các vành đơn tổng quát, nhưng tuy nhiên phải có điều kiện ràng buộc là vành phải có đơn vị, tức là:

**Định lý 3.2.4.** Cho  $R$  là một vành đơn vô hạn có đơn vị và giả sử  $a_1, \dots, a_n \in R$  sao cho  $a_1 r a_2 r \dots a_{n-1} r a_n = 0, \forall r \in R$ . Khi đó  $a_i = 0$

**Chứng minh.** Giả sử không có  $a_i = 0$ . Khi đó  $R$  thỏa mãn đồng nhất thức đa thức dạng tổng quát hóa không tầm thường nên theo định lý 2.5.11,  $RC$  là nguyên thủy có idêan phải tối thiểu. Với  $C$  là mở rộng centroid của  $R$ .

Tuy nhiên, vì  $R$  là vành đơn có đơn vị,  $C$  là tâm của  $R$  và  $RC$  chính là  $R$ . Vì thế  $R$  là vành đơn có idêan phải tối thiểu và có đơn vị. Nhưng khi đó  $R$  là Artin nên theo hệ quả 3.2.3 sẽ có một  $a_i = 0$  mâu thuẫn với  $a_i = 0 \forall i$ .

**Định lý 3.2.5.** Cho  $R$  là một vành nguyên tố sao cho mở rộng tâm  $C$  của nó là vô hạn. Ta có nếu  $a_1, \dots, a_n \in R : a_1 r a_2 r \dots a_{n-1} r a_n = 0, \forall r \in R$  thì tồn tại một  $a_i = 0$ .

**Chứng minh.** Giả sử rằng  $\forall a_i \neq 0$ . Khi đó  $R$  thỏa mãn đồng nhất thức đa thức dạng tổng quát hóa không tầm thường. Do đó nếu  $C$  là mở rộng centroid của  $R$  thì  $S = RC$  là vành nguyên thủy có idêan phải tối thiểu  $eS, e^2 = e$  trong đó  $eSe = De$  với  $D$  là thể (theo kết quả của 2.3.11)

Hơn nữa,  $C$  là tâm của  $D$  và  $D$  là bậc hữu hạn trên  $C$ . Theo cách xây dựng  $S$ , tồn tại một idêan  $U$  khác 0 của  $R$  sao cho  $0 \neq eU \subset R$ . Vì  $eU$  là idêan phải của  $R$  và không thể lũy linh,  $eUe \neq 0$ . Do đó có  $u \in U$  sao cho  $\delta e = eue \neq 0$  với  $\delta \in D$ . Hơn nữa, vì  $0 \neq eu \in R$  và  $R$  là nguyên tố nên  $euU \neq 0$ . Vì  $euU$  là idêan phải khác 0 nên nó cũng không thể là lũy linh. Do đó  $euUe \neq 0$ , nên có một  $v \in U$  sao cho  $euve = \alpha e \neq 0$  với  $\alpha \in D$ .

Thực hiện tương tự như ở định lý 1, ta đặt  $S_i = \{t \in S \mid a_i t e = 0\}$ . Vì  $C$  là tâm của  $S$  nên  $S_i$  là không gian vectơ trên  $C$ . Theo tính chất nguyên tố của  $S$ ,  $S_i \neq S$  với mỗi  $i$ , và do  $C$  là trường vô hạn nên  $S \neq \bigcup S_i$ . Điều này cho ta một phần tử của  $S$ , từ đó có một phần tử của  $R$  sao cho  $b_i = a_i x e \neq 0$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$  và  $x \in R$ . Đặt  $T_i = \{y \in R \mid euyb_i = 0\}$ ,  $T_i$  là không gian con của  $S$  trên  $C$ , nên ta có một phần tử  $y \in R$  sao cho  $euyb_i \neq 0$  với  $i = 1, 2, \dots, n$ . Do đó nếu  $c_i = euya_i x e$  thì  $c_i \neq 0$  với  $i = 1, 2, \dots, n$ . Và vì  $c_i \in eSe$  là thể và  $0 \neq eue = \delta e$  nên ta được  $c_i e u r = c_i u e \neq 0$  khi  $c_i u \neq 0$ . Hơn nữa vì  $eu, x, y, a_i$  đều thuộc  $R$  nên  $d_i = euya_i x e u \in R$ . Trong biểu thức

$$a_1 r a_2 r \dots a_{n-1} r a_n = 0$$

ta thay  $r$  bởi  $x e u e u y$ , ta nhận được  $d_1 r d_2 r \dots d_{n-1} r d_n = 0$  với mọi  $r \in R$ . Đặt  $r = v$  với  $v$  là phần tử cho trước trong  $R$  sao cho  $euve = \alpha e \neq 0, \alpha \in D$ . Ta có

$$d_i = euya_i x e u = \delta_i e u \neq 0 \text{ với } \delta \in D \text{ và do đó } e\delta_i e = \delta_i e,$$

$$0 = d_1 v d_2 v \dots d_{n-1} v d_n = \delta_1 e u v \delta_2 e u v \dots \delta_{n-1} e u v \delta_n e u$$

$$= \delta_1 euv \delta_2 euv \dots \delta_{n-1} euv \delta_n = \delta_1 euv e \delta_2 euv e \dots \delta_{n-1} euv e \delta_n$$

$$= \delta_1 \alpha \delta_2 \alpha \dots \delta_{n-1} \alpha \delta_n$$

Tất cả các phần tử  $\alpha, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \neq 0$  trong vành chia được  $D$  mà tích của chúng lại bằng 0, ta gặp mâu thuẫn!

**Nhận xét.** Thật không rõ ràng về giả thiết trên một vành nguyên tố để đảm bảo mở rộng centroid của nó là vô hạn. Nhưng nếu centroid của  $R$  là vô hạn thì chắc chắn mở rộng centroid của nó sẽ vô hạn. Do đó ta có hệ quả sau.

**Hệ quả 3.2.6.** Cho  $R$  là một vành nguyên tố mà centroid của nó là vô hạn. Ta có nếu  $a_1, \dots, a_n \in R : a_1 r a_2 r \dots a_{n-1} r a_n = 0, \forall r \in R$  thì tồn tại một  $a_i = 0$ .

**Nhận xét.** Nếu  $R$  có đặc số 0 thì centroid của nó là vô hạn, nên đối với những vành như thế thì không thể có  $a_1 r a_2 r \dots a_{n-1} r a_n = 0, \forall r \in R$  với các  $a_i \neq 0$ .

# Kết luận

Trong khuôn khổ bài báo cũng như nội dung luận văn, chúng tôi đã chỉ ra được lớp các vành nguyên tố nào mà ta không thể tìm được hệ thức dạng  $a_1 r a_2 r \dots a_{n-1} r a_n = 0$  với các  $a_i \neq 0$ . Đó là các lớp vành

- Vành Goldie nguyên tố vô hạn.
- Vành Noether nguyên tố vô hạn.
- Vành Artin nguyên tố vô hạn.
- Vành nguyên tố vô hạn hay tổng quát hơn là vành đơn vô hạn.
- Vành nguyên tố có mở rộng centroid là vô hạn.
- Vành nguyên tố có centroid là vô hạn.
- Vành nguyên tố có đặc số 0.

Mục tiêu tiếp theo mà đề tài hướng tới là ta có thể làm mạnh thêm các kết quả trên đến mức nào, tức là ta có thể làm yếu đi các giả thiết kèm theo của vành nguyên tố đến đâu để kết quả không thay đổi?

## Tài liệu tham khảo

1. Amitsur S.A. (1965), Generalized Polynomial Identities and Povotal Monomial, *Transactions of American Mathematical Society*, vol. 114, pp. 210-226.
2. Hersein I.N. (1968), *Noncommutative Rings*, The Mathematical Association of America, USA.
3. Hersein I.N., Small Lance W. (1979), Some Comments on Prime Rings, *Journal of Algebra*, vol. 60, pp.223-228.
4. Lam T.Y. (1998), *Lectures on modules and rings*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
5. Martindale 3<sup>rd</sup> Wallace S. (1969), Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, *Journal of Algebra*, vol. 12, pp.576-584.
6. Zelmanowitz J. (1969), A shorter proof of Goldie's theorem, *Canad. Bull.* 12, pp.597-602.