

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

VŨ VĂN KHIÊN

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM ĐƠN ĐIỀU VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 . 46 . 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG - NĂM 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Phản biện 1:.....

Phản biện 2:.....

Luận văn sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp
thạc sĩ khoa học tại Đại học Đà Nẵng vào ngày tháng
..... năm

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng

Mở đầu

I. Lí do chọn đề tài

Trong chương trình toán học phổ thông, bất đẳng thức, bất phương trình là những nội dung cơ bản và là chuyên đề thuộc loại khó đối với học sinh ngay cả đối với học sinh chuyên toán. Vì hệ thống lý thuyết, bài tập và phương pháp giải rất đa dạng nên việc dạy và học chuyên đề này gặp nhiều khó khăn. Do đó, việc phân loại và đưa ra các phương pháp cụ thể cho từng dạng là vấn đề mà chúng ta cần quan tâm. Trong đó, nhiều bài toán về chứng minh bất đẳng thức được giải quyết khá gọn ghẽ nhờ dựa vào lớp bất đẳng thức sinh bởi các hàm khả vi và tính chất của hàm khả vi.

II. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

1. Đối tượng nghiên cứu

Khảo sát lý thuyết hàm số đơn điệu bậc cho trước, các lớp bất đẳng thức sinh bởi hàm số khả vi và một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức dựa trên các lớp hàm sinh bởi hàm số đơn điệu khả vi.

2. Phạm vi nghiên cứu

Khảo sát lý thuyết tổng quát, đặc biệt ứng dụng trong chương trình Toán học phổ thông và Toán học dành cho học sinh giỏi thuộc đội tuyển học sinh giỏi.

III. Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu của tài liệu này là trình bày có hệ thống một số tính chất của hàm số đơn điệu tổng quát. Sau đó, đưa ra

một số lớp bài toán về bất đẳng thức và áp dụng lí thuyết đã trình bày để giải.

IV. Nhiệm vụ nghiên cứu

V. Ý nghĩa khoa học

1. Đề tài là hệ thống kiến thức về một số lớp hàm bất đẳng thức sinh bởi tính chất đơn điệu của hàm số, tác giả đưa ra phương pháp chứng minh bất đẳng thức, giải quyết nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức ở phổ thông, góp phần giúp cho giáo viên và học sinh có thêm một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức.

2. Đề tài được trình bày logic, khoa học, rõ ràng và dễ hiểu.

VI. Phương pháp nghiên cứu

Đề tài này đã sử dụng một số phương pháp nghiên cứu sau

1. Phương pháp nghiên cứu tài liệu gồm: sách giáo khoa phổ thông trung học, các tài liệu tham khảo dành cho giáo viên, tạp chí toán học tuổi trẻ...

2. Phương pháp tiếp cận lịch sử, sưu tập, phân tích, tổng hợp tư liệu và tiếp cận hệ thống.

VII. Cấu trúc luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn có 3 chương chính sau
Chương 1 trình bày các tính chất cơ bản của các hàm đơn điệu.

Chương 2 trình bày các tính chất của hàm đơn điệu bậc hai.

Chương 3 trình bày một số tính chất của hàm đơn điệu bậc (1,2).

Chương 1

Một số tính chất của hàm đơn điệu

1.1. Tính chất chung của hàm đơn điệu

Định nghĩa 1.1 (xem [3]). Hàm số $f(x)$ được gọi là đơn điệu tăng (giảm) trên $I(a, b)$ nếu ứng với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$ sao cho $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) \leq f(x_2)$ (tương ứng $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Định nghĩa 1.2 (xem [3]). Hàm số $f(x)$ xác định và tăng thực sự trên $I(a, b)$ nếu ứng với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$ sao cho $x_1 < x_2$, ta đều có

$$f(x_1) < f(x_2)$$

và ngược lại nếu $\forall x_1, x_2 \in I(a, b)$, $x_1 < x_2$ kéo theo $f(x_1) > f(x_2)$ thì $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm thực sự trên $I(a, b)$.

Định lý 1.1 (xem [1]). Hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$ là một hàm số đơn điệu tăng khi và chỉ khi với mọi cặp bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta đều có

$$\sum_{k=1}^n a_k f(x_k) \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) f\left(\sum_{k=1}^n x_k \right). \quad (1.1)$$

Định lý 1.2 (xem [1]). Để bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \leq f\left(\sum_{k=1}^n x_k \right). \quad (1.4)$$

được thỏa mãn với mọi bộ số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$, điều kiện cần và đủ là hàm $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$.

Hệ quả 1.1. Giả sử $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ là hàm đơn điệu tăng trên $[0, +\infty)$. Khi đó với mọi dãy số dương và giảm $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta đều có

$$f(x_1 - x_n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k - x_{k+1}).$$

Tính chất 1.1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a, b) .

(i) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.

(ii) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Định nghĩa 1.3 (xem [1]). Hàm $f(x)$ được gọi là hàm lồi trên $I(a, b)$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$ và với mọi cặp số dương α, β thỏa mãn điều kiện $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \quad (1.6)$$

Định nghĩa 1.4 (xem [1]). Hàm $f(x)$ được gọi là hàm lõm trên $I(a, b)$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$ và với mọi cặp số dương α, β thỏa mãn điều kiện $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \quad (1.7)$$

Chú ý 1.1. Hàm lồi còn được gọi là hàm đồng biến bậc hai, hàm lõm còn được gọi là hàm nghịch biến bậc hai.

Nhận xét 1.1. Khi $x_1 < x_2$ thì $x = \alpha x_1 + \beta x_2$ với cặp số dương α, β tùy ý có tổng $\alpha + \beta = 1$, đều thuộc (x_1, x_2) và

$$\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \beta = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Tính chất 1.2. Nếu $f(x)$ lồi (lõm) trên $I(a, b)$ thì $g(x) := cf(x)$ là hàm lồi (lõm) trên $I(a, b)$ khi $c > 0$.

Tính chất 1.3. Nếu $f(x)$ lồi (lõm) trên $I(a, b)$ thì $g(x) := cf(x)$ là hàm lõm (lồi) trên $I(a, b)$ khi $c < 0$.

Tính chất 1.4. Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lồi trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lồi và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.

Tương tự, ta cũng có các tính chất sau

Tính chất 1.5. (i) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lõm trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lồi và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì hàm $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.

(ii) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lõm trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lõm và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì hàm $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a, b)$.

(iii) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lõm trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lõm và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì hàm $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a, b)$.

Tính chất 1.6. Nếu $f(x)$ là hàm số khả vi trên $I(a, b)$ thì $f(x)$ là hàm số lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi $f'(x)$ là hàm số đơn điệu tăng trên $I(a, b)$.

Tính chất 1.7. Nếu $f(x)$ khả vi bậc hai trên $I(a, b)$ thì $f(x)$ lồi (lõm) trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) trên $I(a, b)$.

Định lý 1.3 (xem [1]). *Nếu $f(x)$ lồi trên (a, b) thì tồn tại các đạo hàm một phía $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ với mọi $x \in (a, b)$ và $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.*

Nhận xét 1.2. Khi hàm số $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$ thì $f(x)$ liên tục trên (a, b) .

Nhận xét 1.3. Hàm lồi trên $[a, b]$ có thể không liên tục tại điểm đầu mút của đoạn $[a, b]$.

Định lý 1.4 (Jensen (xem [1])). *Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ là*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in I(a, b). \quad (1.12)$$

Định lý 1.5 (xem [1]). *Giả sử $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong (a, b) . Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên (a, b) là*

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Tính chất 1.8 (Dạng nội suy (xem [1])). Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi với mọi cặp số phân biệt $x_1, x_2 \in I(a, b)$, ta đều có

$$\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} \geq 0. \quad (1.16)$$

Tính chất 1.9 (Dạng nội suy (xem [1])). *Hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi với mọi bộ ba số phân biệt $x_0, x_1, x_2 \in I(a, b)$ ta có*

$$\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \geq 0 \quad (1.17)$$

Tính chất 1.10 (xem [1]). *Hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a, b)$, $x_1 < x_2$, ta đều có*

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \quad (1.18)$$

khi $x_1 < x < x_2$.

Định nghĩa 1.5 (xem [1]). Hàm số $f(x)$ được gọi là n -lồi trên $I(a, b)$ khi ứng với mọi bộ $n+1$ số phân biệt trong $I(a, b)$, ta đều có

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] := \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)} \geq 0 \quad (1.19)$$

trong đó $\omega(x) := \prod_{k=0}^n (x - x_k)$.

Định nghĩa 1.6 (xem [1]). Hàm số $f(x)$ được gọi là n -lõm trên $I(a, b)$ khi ứng với mọi bộ $n+1$ số phân biệt trong $I(a, b)$ ta đều có

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] := \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)} \leq 0 \quad (1.20)$$

trong đó $\omega(x) := \prod_{k=0}^n (x - x_k)$.

Tính chất 1.11. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm bậc n trên $I(a, b)$ là n -lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi

$$f^{(n)}(x) \geq 0, \quad \forall x \in I(a, b). \quad (1.21)$$

Định lý 1.6 (xem [1]). Nếu hàm số $f(x)$ là n -lồi trên $[a, b]$ thì tồn tại hàm số $g(x)$ và đa thức $P(x)$ bậc không quá $n-1$, sao cho

$$f(x) = P(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t) dt.$$

1.2. Biểu diễn hàm đơn điệu

Định lý 1.7 (xem [3]). Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$ là một số chẵn và $f(x)$ đồng biến bậc n trên $I(a, b)$ thì với mọi cặp $x_0, x \in I(a, b)$, ta

đều có

$$f(x) = \max_{x_0 \in I(a,b)} \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \right]. \quad (1.22)$$

Định lý 1.8 (xem [3]). *Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$ là một số lẻ và $f(x)$ đồng biến bậc n trên $I(a,b)$ thì với mọi cặp $x_0, x \in I(a,b)$, ta đều có*

$$(x-x_0)f(x) = \max_{x_0 \in I(a,b)} \left[f(x_0)(x-x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^n \right]. \quad (1.23)$$

Định lý 1.9 (xem [3]). *Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$ là một số chẵn và $f(x)$ nghịch biến bậc n trên $I(a,b)$ thì với mọi cặp $x_0, x \in I(a,b)$, ta đều có*

$$f(x) = \min_{x_0 \in I(a,b)} \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \right]. \quad (1.24)$$

Định lý 1.10 (xem [3]). *Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$ là một số lẻ và $f(x)$ nghịch biến bậc n trên $I(a,b)$ thì với mọi cặp $x_0, x \in I(a,b)$, ta đều có*

$$(x-x_0)f(x) = \min_{x_0 \in I(a,b)} \left[f(x_0)(x-x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^n \right]. \quad (1.25)$$

Chương 2

Một số tính chất của hàm đơn điệu bậc hai

2.1. Biểu diễn hàm đơn điệu bậc hai

Định nghĩa 2.1 (xem [3]). Hàm $f(x)$ được gọi là lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi tồn tại hàm $g(x)$ đơn điệu tăng trong $I(a, b)$ và số $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt.$$

Định lý 2.1 (xem [3]).

a) Nếu $f(x)$ khả vi bậc hai lồi trên $I(a, b)$ thì với mọi cặp $x_0, x \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.1)$$

b) Nếu $f(x)$ khả vi bậc hai lõm trên $I(a, b)$ thì với mọi cặp $x_0, x \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.2)$$

Nhận xét 2.1. Ta thấy rằng đẳng thức trong (2.1) xảy ra khi $x = x_0$ và do vậy, ta có thể viết (2.1) dưới dạng sau

$$f(x) = \min_{x_0 \in I(a,b)} [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)].$$

và như vậy, ta có thể biểu diễn được hàm $f(x)$ qua cực trị của hàm bậc nhất chứa tham biến.

2.2. Một số áp dụng trong các bài toán cực trị và bất đẳng thức

Bài toán 2.1. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- a) $x > \ln(1 + x)$ với mọi $x > 0$.
- b) $e^x > 1 + \ln(1 + x)$ với mọi $x > 0$.

Bài toán 2.2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta đều có

$$\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{2n}. \quad (2.2)$$

Bài toán 2.3. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geq \cos x, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}. \quad (2.9)$$

Bài toán 2.4. Cho $x, y \in (1, +\infty)$, chứng minh rằng

$$\ln \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln x \ln y}.$$

Bài toán 2.5. Cho các số x, y, a, b dương, chứng minh rằng

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}.$$

Bài toán 2.6. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (2.12)$$

với mọi $x \geq 0, y \geq 0, n \geq 1$.

Bài toán 2.7. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì

a)

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n}{n} \leq \sin \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in [0; \pi].$$

b)

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \cdots + \cos x_n}{n} \leq \cos \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Bài toán 2.8. Cho n số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$. Các số

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

$$m_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

$$m_h = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Theo thứ tự là trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình toàn phương và trung bình điều hòa của n số đã cho. Chứng minh rằng

$$m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_q$$

Khi nào có đẳng thức xảy ra ?

Bài toán 2.9. Chứng minh rằng

nếu $\alpha \in (0; 1)$ thì $x^\alpha \leq \alpha x + 1 - \alpha$ với mọi x .

Bài toán 2.10. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh

$$\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{c^2+1} + \frac{c^2}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài toán 2.11. Xét tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau và có số đo góc nhị diện cạnh BC, CA, AB tương ứng là α, β, γ đều nhọn. Tìm giá trị của biểu thức

$$T = \sqrt[2011]{\cos^{2011}\alpha + \frac{1}{\cos^{2011}\alpha}} + \sqrt[2011]{\cos^{2011}\beta + \frac{1}{\cos^{2011}\beta}} + \sqrt[2011]{\cos^{2011}\gamma + \frac{1}{\cos^{2011}\gamma}}.$$

Bài toán 2.12. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$T = (a + \sqrt{1 + a^2})^b + (b + \sqrt{1 + b^2})^c + (c + \sqrt{1 + c^2})^a.$$

Bài toán 2.13. . Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 8a}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8b}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8c}} \geq 1.$$

Chương 3

Hàm đơn điệu bậc (1,2) và áp dụng

3.1. Tính chất các hàm số đơn điệu bậc (1,2)

Định nghĩa 3.1 (xem [3]). Nếu hàm $f(x)$ đồng thời có đạo hàm bậc nhất và bậc hai dương trong khoảng đang xét thì ta nói hàm số đó đồng biến liên tiếp bậc (1,2) trong khoảng đã cho.

Định nghĩa 3.2 (xem [3]). Nếu hàm $f(x)$ đồng thời có đạo hàm bậc nhất và bậc hai âm trong khoảng đang xét thì ta nói hàm số đó nghịch biến liên tiếp bậc (1,2) trong khoảng đã cho.

Định lý 3.1 (Bất đẳng thức Jensen suy rộng (xem [6])). Giả sử $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$. Khi đó, với $x_i \in I(a, b), i = 1, 2, \dots, n$ và $\alpha_i > 0 : \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, ta luôn có

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i). \quad (3.1)$$

Chú ý 3.1. Ta thường hay dùng trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Jensen khi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, khi đó ta có kết quả sau

Nếu $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ thì mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in I(a, b)$, ta có bất đẳng thức sau

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

Định lý 3.2 (Bất đẳng thức Karamata (xem [1])). Cho hai dãy số

$$\{x_k, y_k \in I(a, b), \quad k = 1, 2, \dots, n\}$$

thỏa mãn các điều kiện

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \end{cases} \quad (3.5)$$

Khi đó, ứng với mọi hàm lồi thực sự $f(x)$ ($f''(x) > 0$) trên $I(a, b)$, ta đều có

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n). \quad (3.6)$$

Nhận xét 3.1. Bất đẳng thức Jensen là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Karamata.

Định lý 3.3 (T.Popoviciu (xem [1])). Với mọi hàm f lồi trên $I(a, b)$ và với mọi $x, y, z \in I(a, b)$, ta đều có bất đẳng thức

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) \geq 2\left[f\left(\frac{x + y}{2}\right) + f\left(\frac{y + z}{2}\right) + f\left(\frac{z + x}{2}\right)\right] \quad (3.10)$$

Nhận xét 3.2. Định lý trên là mở rộng thực sự trên các kết quả quen biết (Bất đẳng thức Jensen) về hàm lồi.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Jensen, thì

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

và

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right).$$

Do vậy, định lí T.Popoviciu cho ta thực hiện được phép cộng trái chiều.

Hệ quả 3.1. Với mọi hàm lồi trên $I(a, b)$ và với mọi $x, y, z \in I(a, b)$,

$0 \leq \alpha \leq 3$, ta đều có bất đẳng thức

$$f(x) + f(y) + f(z) + \alpha f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq (1 + \frac{\alpha}{3})[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)].$$

Định lý 3.4. Với mọi bộ số dương p, q, r và với mọi $x, y, z \in I(a, b)$, ta đều có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} & pf(x) + qf(y) + rf(z) + (p+q+r)f\left(\frac{px+qy+rz}{p+q+r}\right) \\ & \geq (p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) + (q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right) + (r+p)f\left(\frac{rz+px}{r+p}\right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Định lý 3.5 (Vasile Cirtoaje (xem [1])). Mọi hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ và $a_1, a_2, \dots, a_n \in I(a, b)$, ta đều có bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} & f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + n(n-2)f\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right) \\ & \geq (n-1)[f(b_1) + g(b_2) + \dots + f(b_n)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

trong đó $b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j$ với mọi i .

Nhận xét 3.3. Bất đẳng thức T.Popoviciu là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Vasile Cirtoaje. Thật vậy, khi $n = 3$ thì bất đẳng thức (3.15) trở thành

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right] \quad (3.23)$$

đây chính là bất đẳng thức T.Popoviciu.

Định lý 3.6 (Vasile Cirtoaje (xem [1])). *Với mọi hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ và $a_1, a_2, \dots, a_n \in I(a, b)$, ta đều có bất đẳng thức sau*

$$\begin{aligned} (n-2)(f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)) + nf\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \\ \geq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} f\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Định lý 3.7 (xem [3]). *Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}$ thỏa mãn các điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$. Khi đó, ứng với mọi hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ đồng thời đồng biến hoặc nghịch biến liên tiếp bậc $(1, 2)$ trên $I(a, b)$, ta đều có*

$$\frac{f_1(x_1)}{f'_1(y_1)} + \frac{f_2(x_2)}{f'_2(y_2)} + \dots + \frac{f_n(x_n)}{f'_n(y_n)} \geq \frac{f_1(y_1)}{f'_1(y_1)} + \frac{f_2(y_2)}{f'_2(y_2)} + \dots + \frac{f_n(y_n)}{f'_n(y_n)}. \quad (3.25)$$

Định lý 3.8 (xem [3]). *Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}$ thỏa mãn các điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$. Khi đó, ứng với mọi hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ lõm và có đạo hàm bậc nhất là các số dương trên $I(a, b)$, ta đều có*

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)}. \quad (3.26)$$

Định lý 3.9 (xem [3]). Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}$ thỏa mãn các điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$. Khi đó, ứng với mọi hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ lồi và có đạo hàm bậc nhất là các số âm trên $I(a, b)$, ta đều có

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)}. \quad (3.27)$$

3.2. Một số bài toán áp dụng đối với lượng giác

Bài toán 3.1. Cho tam giác nhọn $A_0B_0C_0$. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta đều có

$$\frac{\sin A}{\cos A_0} + \frac{\sin B}{\cos B_0} + \frac{\sin C}{\cos C_0} \leq \tan A_0 \tan B_0 \tan C_0. \quad (3.28)$$

Bài toán 3.2. Cho tam giác $A_0B_0C_0$. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có

$$\frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A_0}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B_0}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C_0}{2}} \leq \cot \frac{A_0}{2} + \cot \frac{B_0}{2} + \cot \frac{C_0}{2}. \quad (3.32)$$

Bài toán 3.3. Cho tam giác nhọn $A_0B_0C_0$. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta đều có

$$\frac{\tan A}{1 + \tan^2 A_0} + \frac{\tan B}{1 + \tan^2 B_0} + \frac{\tan C}{1 + \tan^2 C_0} \geq 2 \sin A_0 \sin B_0 \sin C_0. \quad (3.37)$$

Bài toán 3.4. Cho tam giác ABC có một góc không nhỏ hơn $\frac{2\pi}{3}$. Chứng minh rằng

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 4 - \sqrt{3}.$$

Bài toán 3.5. Cho n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ thỏa

$$\tan x_1 + \tan x_2 + \dots + \tan x_n \geq n.$$

Chứng minh rằng

$$\sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_n \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}}.$$

3.3. Một số dạng toán cực trị

Bài toán 3.6. Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là các số dương với

$$a_1 a_2 \dots a_n = 1.$$

Chứng minh rằng

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} + n(n-2) \geq (n-1)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Bài toán 3.7. Nếu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là các số dương và

$$b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Thì

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \geq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}. \quad (3.42)$$

Bài toán 3.8. Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương thì

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + n(x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2)^{\frac{1}{n}} \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2. \quad (3.44)$$

Nhận xét 3.4. Nếu hàm số $f(t)$ đồng biến (nghịch biến) liên tiếp bậc $(1, 2)$ trên $I(a, b)$ thì với mọi

$$v \in \mathfrak{F} \{ f'(x), x \in I(a, b) \},$$

phương trình $f'(x) = v$ luôn luôn có nghiệm duy nhất (kí hiệu $(f')^{-1}(v)$ thuộc $I(a, b)$).

Bài toán 3.9. Cho các hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ đồng thời đồng biến (nghịch biến) liên tiếp bậc $(1, 2)$ trên $I(a, b)$. Giả sử dãy số

$$\{v_k \in \mathfrak{F}\{f'_k(x), x \in I(a, b)\}, \quad k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Tìm

$$\min \sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{v_k}.$$

Ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b), \quad k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = (f'_1)^{-1}(v_1) + (f'_2)^{-1}(v_2) + \dots + (f'_n)^{-1}(v_n)$$

cho trước.

Nhận xét 3.5. Nếu hàm số $f(t)$ lồi (lõm) và có đạo hàm bậc nhất là các hàm số âm (dương) trên khoảng $I(a, b)$ thì với mọi $v \in \mathfrak{F}\{f'(x), x \in I(a, b)\}$ phương trình $f'(x) = v$ luôn có nghiệm duy nhất (ký hiệu là $(f')^{-1}(v)$ thuộc $I(a, b)$).

Bài toán 3.10. Cho các hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ đồng thời lồi (lõm) và có đạo hàm bậc nhất là các hàm số âm (dương) trên khoảng $I(a, b)$.

Giả sử dãy số $\{v_k \in \mathfrak{F}\{f'_k(x), x \in I(a, b), \quad k = 1, 2, \dots, n\}$.

Tìm

$$\max \sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{v_k}.$$

Ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b), \quad k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (f'_1)^{-1}(v_1) + (f'_2)^{-1}(v_2) + \dots + (f'_n)^{-1}(v_n)$ cho trước.

Hệ quả 3.2. Cho hàm số $f(t)$ đồng biến (nghịch biến) liên tiếp bậc $(1, 2)$ trên $I(a, b)$. Giả sử dãy số $\{v_k \in \mathfrak{F}\{f'(x), x \in I(a, b), \quad k = 1, 2, \dots, n\}$. Khi đó

$$\min \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{v_k} = \sum_{k=1}^n \frac{f(u_k)}{f'(u_k)}.$$

Ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Trong đó $u_k = (f')^{-1}(v_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Hệ quả 3.3. Cho hàm số $f(t)$ lồi (lõm) và có đạo hàm bậc nhất là các hàm số âm (dương) trên $I(a, b)$. Giả sử dãy số $\{v_k \in \mathfrak{F}\{f'_k(x), x \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}\}$. Khi đó

$$\max \sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{v_k} = \sum_{k=1}^n \frac{f_k(u_k)}{f'_k(u_k)}.$$

Ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Trong đó $u_k = (f')^{-1}(v_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Bài toán 3.11. Cho a, b, c, α, β là các số dương, $\alpha > \beta$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{b+c}{2a}\right)^\alpha + \left(\frac{c+a}{2b}\right)^\alpha + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^\alpha \geq \left(\frac{b+c}{2a}\right)^\beta + \left(\frac{c+a}{2b}\right)^\beta + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^\beta.$$

Bài toán 3.12. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác và $\alpha > \beta > 1$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3a}{2b+2c-a}\right)^\alpha + \left(\frac{3b}{2c+2a-b}\right)^\alpha + \left(\frac{3c}{2a+2b-c}\right)^\alpha \\ & \geq \left(\frac{3a}{2b+2c-a}\right)^\beta + \left(\frac{3b}{2c+2a-b}\right)^\beta + \left(\frac{3c}{2a+2b-c}\right)^\beta. \end{aligned}$$

Bài toán 3.13. Cho $x, y \geq 0$ với $x + y = 2$. Chứng minh rằng

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2.$$

Bài toán 3.14. Cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$), thỏa mãn điều kiện $b^2 - 3ac > 0$. Chứng minh rằng

$$\min \sum_{k=1}^n \frac{ax_k^3 + bx_k^2 + cx_k + d}{3au_k^2 + 2bu_k + c} = \sum_{k=1}^n \frac{au_k^3 + bu_k^2 + cu_k + d}{3au_k^2 + 2bu_k + c},$$

$$\forall x \in (x_1, -\frac{b}{3a}) \cup (x_2, +\infty).$$

Trong đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, ($x_1 < x_2$) ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b); k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Bài toán 3.15. Cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$), thỏa mãn điều kiện $b^2 - 3ac > 0$.

Chứng minh rằng

$$\max \sum_{k=1}^n \frac{ax_k^3 + bx_k^2 + cx_k + d}{3au_k^2 + 2bu_k + c} = \sum_{k=1}^n \frac{au_k^3 + bu_k^2 + cu_k + d}{3au_k^2 + 2bu_k + c},$$

$$\forall x \in (-\infty, x_1) \cup \left(-\frac{b}{3a}, x_2\right).$$

Trong đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ ($x_1 < x_2$), ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b); k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Bài toán 3.16. Cho hàm số $f(x) = ax^{2(k+1)} + bx + c$, $a \neq 0, k \geq 0$.

Chứng minh rằng

$$\min \sum_{k=1}^n \frac{ax_k^{2(k+1)} + bx_k + c}{2(k+1)au_k^{2k+1} + b} = \sum_{k=1}^n \frac{au_k^{2(k+1)} + bu_k + c}{2(k+1)au_k^{2k+1} + b}, \quad \forall x > x_0.$$

trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b); k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Bài toán 3.17. Cho hàm số $f(x) = ax^{2(k+1)} + bx + c, a \neq 0, k \geq 0$.

Chứng minh rằng

$$\max \sum_{k=1}^n \frac{ax_k^{2(k+1)} + bx_k + c}{2(k+1)au_k^{2k+1} + b} = \sum_{k=1}^n \frac{au_k^{2(k+1)} + bu_k + c}{2(k+1)au_k^{2k+1} + b}, \quad \forall x < x_0.$$

trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b); k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Bài toán 3.18. Cho hàm số $f(x) = a^{2(k+1)} + bx^{k+2} + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$

thỏa mãn điều kiện $(k^2 + 3k + 2)^2 b^2 - 16(2k^2 + 3k + 1)ac < 0, \forall k \geq 1$.

Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \min \sum_{k=1}^n \frac{ax_k^{2(k+1)} + bx_k^{k+2} + cx_k^2 + dx_k + e}{2(k+1)au_k^{2k+1} + (k+2)b_k^{k+1} + 2cu_k + d} \\ = \sum_{k=1}^n \frac{au_k^{2(k+1)} + bu_k^{k+2} + cu_k^2 + du_k + e}{2(k+1)au_k^{2k+1} + (k+2)b_k^{k+1} + 2cu_k + d}, \quad \forall x > x_0. \end{aligned}$$

Trong đó, x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b); k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Bài toán 3.19. Cho hàm số $f(x) = a^{2(k+1)} + bx^{k+2} + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ thỏa mãn điều kiện $(k^2 + 3k + 2)^2 b^2 - 16(2k^2 + 3k + 1)ac < 0, \forall k \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \max \sum_{k=1}^n \frac{ax_k^{2(k+1)} + bx_k^{k+2} + cx_k^2 + dx_k + e}{2(k+1)au_k^{2k+1} + (k+2)b_k^{k+1} + 2cu_k + d} \\ = \sum_{k=1}^n \frac{au_k^{2(k+1)} + bu_k^{k+2} + cu_k^2 + du_k + e}{2(k+1)au_k^{2k+1} + (k+2)b_k^{k+1} + 2cu_k + d}, \quad \forall x < x_0. \end{aligned}$$

Trong đó, x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b); k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Bài toán 3.20. Cho hàm số $f(x) = \ln(ax+b)$, $(a < 0)$, $\forall x < -\frac{b}{a}$.
Chứng minh rằng

$$\min \sum_{k=1}^n \frac{(au_k + b) \ln(ax_k + b)}{a} = \sum_{k=1}^n \frac{(au_k + b) \ln(au_k + b)}{a}.$$

ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b); k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Bài toán 3.21. Cho hàm số $f(x) = \ln(ax+b)$, $(a < 0)$, $\forall x > -\frac{b}{a}$.
Chứng minh rằng

$$\max \sum_{k=1}^n \frac{(au_k + b) \ln(ax_k + b)}{a} = \sum_{k=1}^n \frac{(au_k + b) \ln(au_k + b)}{a}.$$

ứng với mọi dãy số $\{x_k \in I(a, b); k = 1, 2, \dots, n\}$ có tổng

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Kết luận

Bất đẳng thức là một mảng chuyên đề toán học rộng lớn và có rất nhiều cách giải quyết một bài toán bất đẳng thức. Mục tiêu của luận văn là vận dụng lý thuyết hàm số đơn điệu để giải các bài toán về bất đẳng thức. Luận văn đã đạt được một số kết quả sau

- Hệ thống các kiến thức cơ bản về hàm đơn điệu bậc 1, hàm đơn điệu bậc $(1, 2)$ trên một khoảng và hàm đơn điệu bậc tùy ý.
- Vận dụng tính đồng biến, nghịch biến đã giải quyết được một số lớp bất đẳng thức, từ đó chứng minh được một số bài toán trong các kì thi học sinh giỏi và kì thi đại học, cao đẳng.
- Nhờ vận dụng các bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức Karamata đã chứng minh được bất đẳng thức Popoviciu, bất đẳng thức Vasile Cirtoaje, ... từ đó đưa ra một số mở rộng và ứng dụng của bất đẳng thức này.
- Nhờ vận dụng lý thuyết về hàm đơn điệu bậc 1, hàm đơn điệu bậc $(1, 2)$ đã mô tả được lớp hàm thỏa mãn các ràng buộc bất đẳng thức quen biết trong tam giác.
- Nhờ vận dụng lý thuyết hàm đơn điệu bậc $(1, 2)$ trên một khoảng và hàm đơn điệu bậc tùy ý đã đưa ra một số lớp bất đẳng thức hàm đa thức.