

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

LÊ THỊ XUÂN

MỘT SỐ ỨNG DỤNG
CỦA CÁC HỆ THỨC LIÊN QUAN
TAM GIÁC VÀ ĐIỂM

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60. 46. 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS Trịnh Đào Chiến

Phản biện 1: TS. Lê Hải Trung

Phản biện 2: GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm
Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học hợp tại Đại học Đà Nẵng
vào ngày 18 tháng 08 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng.
- Thư viện trường Đại học sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Tam giác là một khái niệm quen thuộc trong chương trình toán phổ thông. Những kiến thức cơ bản liên quan đến tam giác chiếm một vị trí quan trọng trong bộ môn Hình học. Hơn nữa, nó còn là xuất phát điểm của rất nhiều bài toán, định lý, hệ thức của các lĩnh vực khác nhau như Đại số, Giải tích và ngay cả Số học.

Tam giác xuất hiện khá nhiều trong các lý thuyết và bài tập toán phổ thông. Trong các đề thi tốt nghiệp, tuyển sinh, chọn học sinh giỏi các cấp và Olympic toán quốc tế, các bài toán liên quan đến tam giác thường có mặt với những mức độ khó, dễ khác nhau.

Các vấn đề lý thuyết và các bài toán liên quan đến tam giác rất đa dạng và phong phú. Chỉ với một khía cạnh nào đó liên quan đến tam giác cũng đã có không ít những công trình nghiên cứu, sách chuyên khảo và rất nhiều những kết quả nổi tiếng ngay từ những thời kỳ sơ khai nhất của toán học.

Mối liên quan tam giác và điểm là một trong nhiều khía cạnh đó. Trong cùng một mặt phẳng, xác định bởi một tam giác cho trước, vị trí của một (hoặc vài điểm) xác định luôn cảm sinh hàng loạt các khái niệm và hệ thức mới. Có thể kể ra, chẳng hạn các khái niệm Điểm Nagel, Điểm Toricelli, Đồng nhất thức Leibnitz, Bất đẳng thức Erdos-Mordell...

Hơn nữa, với những phép biến đổi khác nhau trên tam giác, từ những kết quả đã có, nhiều hệ thức mới được tạo ra rất phong phú.

2. Mục đích nghiên cứu

Với góc nhìn và phương pháp đó, một số ứng dụng của các hệ thức liên

quan tam giác và điểm cùng với một số phép biến đổi được đề cập trong khuôn khổ luận văn này. Đây chính là mục đích nghiên cứu của luận văn.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận văn đề cập đến một số ứng dụng của các hệ thức liên quan tam giác và điểm. Đó là Đồng nhất thức Leibnitz, một số hệ thức cảm sinh từ vị trí điểm nằm trong tam giác, mở rộng một kết quả về điểm Toricelli trong tam giác,... Sau đó bằng một số phép biến đổi, mà chủ yếu ở đây là phép nghịch đảo với tỉ số dương cho trước xác định, các hệ thức mới được hình thành. Đây có thể được xem như một công cụ khá hữu hiệu để có thể sáng tác ra những hệ thức mới, tạo những bài toán mới, khá phong phú.

4. Phương pháp nghiên cứu

Dựa trên tài liệu sưu tầm được, chủ yếu là tài liệu [5], luận văn tổng hợp lại các vấn đề phục vụ cho mục đích nghiên cứu, phù hợp với chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp. Từ phương pháp phân loại theo vấn đề, nội dung của luận văn chia thành 3 chương phù hợp.

Một phần quan trọng của luận văn là, trên cơ sở lý thuyết đã nêu, một số phương pháp sáng tác bài tập, sáng tác ra các đồng nhất thức và bất đẳng thức mới được đề cập, với nhiều ví dụ minh họa.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Vì mục đích trên, nội dung của luận văn mang tính khoa học, tính sư phạm và phần nào đóng góp vào thực tiễn dạy và học Toán ở phổ thông, phù hợp với chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp.

Sau khi được cho phép bảo vệ, thông qua và được góp ý để sửa chữa bổ sung, luận văn có thể được dùng làm tài liệu tham khảo cho giáo viên, học sinh phổ thông và những ai quan tâm đến đề tài này.

Trong khuôn khổ một luận văn, có thể còn nhiều góc độ sâu sắc hơn về nội dung vấn đề mà luận văn chưa đề cập. Tác giả luận văn sẽ tiếp tục nghiên cứu và bổ sung thường xuyên để nội dung của luận văn ngày càng được cập nhật, có thể dùng làm tài liệu để bồi dưỡng học sinh giỏi ở bậc

Trung học phổ thông.

6. Cấu trúc của luận văn

Với mục đích đó, cấu trúc của luận văn, ngoài mục lục, mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn được chia thành 3 chương.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày tóm tắt một số kiến thức cơ bản liên quan đến tam giác, nhằm chuẩn bị cho các phần nghiên cứu tiếp theo. Chương này giới thiệu một số hệ thức lượng, một số điểm đặc biệt và một số hệ thức vectơ cơ bản trong tam giác. Chương này tham khảo từ một số tài liệu lý thuyết và tài liệu [3].

Chương 2. Một số hệ thức liên quan tam giác và điểm

Chương này đề cập đến một trong những đồng nhất thức quan trọng và ứng dụng của nó, đó là đồng nhất thức Leibnitz tổng quát (tham khảo chủ yếu trong tài liệu [5]). Rất nhiều hệ thức quan trọng trong chương trình Toán phổ thông là trường hợp riêng của đồng nhất thức này. Tiếp theo, luận văn đề cập đến một số hệ thức cảm sinh từ vị trí điểm nằm trong tam giác hoặc mối liên quan giữa điểm và tam giác đã cho với một điểm khác xác định trên mặt phẳng (tham khảo chủ yếu trong tài liệu [2] và [4]). Phần cuối cùng của chương, luận văn trình bày phần mở rộng một kết quả về Điểm Toricelli trong tam giác (tham khảo chủ yếu trong tài liệu [1]).

Chương 3. Một số phép biến đổi và ứng dụng

Chương này trình bày một số phép biến đổi trên tam giác, chủ yếu là phép nghịch đảo với tỉ số dương cho trước xác định (tham khảo chủ yếu trong tài liệu [5]). Nhiều bài toán, định lý, hệ thức mới được tạo ra từ các phép biến đổi này. Đây là một trong những phương pháp hữu hiệu nhằm sáng tác ra những hệ thức mới, tạo ra những bài toán mới, khá phong phú.

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Một số hệ thức lượng trong tam giác

- Hệ thức Euler: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Hệ thức khác: $OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$.

- Trung tuyến: $m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}$, $GA = \frac{2}{3}m_a$.

Suy ra: 1) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

2) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

- Phân giác:

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}.$$

- $OG = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$, $HO = 3GO$, $GH = 2GO$.

- $HI^2 = 4R^2 - \frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a+b+c}$.

- $IG = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

- Diện tích:

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = pr$$

$$= \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = 2R^2 \cdot \sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{4R}$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = r_a(p-a)$$

$$= \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} = \frac{a \cdot r_b \cdot r_c}{r_b + r_c}.$$

$$\text{Suy ra: 1) } h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

$$2) \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{a}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

- Bán kính đường tròn ngoại tiếp:

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

- Bán kính đường tròn nội tiếp:

$$r = (p-a) \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

- Bán kính đường tròn bàng tiếp:

$$r_a = p \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

1.2 Một số điểm đặc biệt trong tam giác

1.2.1 Điểm Gergonne

Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại E, D, F.

Các đường thẳng AD, BF, CE đồng qui tại một điểm. Điểm này gọi là Điểm Gergonne (ký hiệu là J).

1.2.2 Điểm Nagel

Cho tam giác ABC. Đường tròn bàng tiếp của tam giác tiếp xúc với các cạnh tương ứng các đỉnh A, B, C lần lượt tại A' , B' , C' .

Các đường thẳng AA' , BB' , CC' đồng qui tại một điểm. Điểm này gọi là Điểm Nagel (ký hiệu là N).

1.2.3 Điểm Lhuilier - Lemoine

Đường đối trung của một tam giác ứng với một đỉnh là đường thẳng đối xứng với trung tuyến qua phân giác tương ứng với đỉnh đó.

Các đường đối trung của một tam giác đồng qui tại một điểm. Điểm này được gọi là Điểm Lhuilier - Lemoine (ký hiệu là L).

1.2.4 Điểm Crell - Brocard

Trong tam giác ABC cho trước, có hai điểm Ω_1 và Ω_2 thỏa mãn:

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega_1 AB} &= \widehat{\Omega_1 BC} = \widehat{\Omega_1 CA} = \omega, \\ \widehat{\Omega_2 AC} &= \widehat{\Omega_2 CB} = \widehat{\Omega_2 BA} = \omega.\end{aligned}$$

Các điểm này được gọi tương ứng là Điểm Crell - Brocard 1 và Điểm Crell - Brocard 2. Góc ω được gọi là góc Crell - Brocard.

1.3 Một số hệ thức vectơ cơ bản trong tam giác.

Cho tam giác ABC, P là điểm tùy ý trên mặt phẳng (ABC). Đặt

$$S_a = S_{BPC}, S_b = S_{CPA}, S_c = S_{APB}.$$

Người ta đã chứng minh hệ thức vectơ cơ bản sau:

$$\sum S_a \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{0}. \quad (1.1)$$

Xét các trường hợp của hệ thức trên:

- Khi $P \equiv G$, hệ thức trở thành $\sum S_a \cdot \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$.

Nhưng vì $S_a = S_b = S_c$, nên hệ thức trở thành:

$$\sum \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}. \quad (1.2)$$

- Khi $P \equiv I$, hệ thức trở thành $\sum S_a \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$.

Nhưng vì $S_a = \frac{1}{2}ra$, $S_b = \frac{1}{2}rb$, $S_c = \frac{1}{2}rc$ nên hệ thức trở thành:

$$\sum a \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}. \quad (1.3)$$

- Khi $P \equiv O$, hệ thức trở thành $\sum S_a \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$.

Nhưng vì $S_a = \frac{1}{2}R^2 \sin 2A$, $S_b = \frac{1}{2}R^2 \sin 2B$, $S_c = \frac{1}{2}R^2 \sin 2C$ nên hệ thức trở thành:

$$\sum \sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}. \quad (1.4)$$

- Khi $P \equiv H$, hệ thức trở thành $\sum S_a \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{0}$.

Giả sử AH, BH, CH cắt BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'.

Do đó $S_a = \frac{1}{2} \cdot HB \cdot CB'$, $S_b = \frac{1}{2} \cdot HC \cdot AC'$, $S_c = \frac{1}{2} \cdot HA \cdot BA'$.

Ngoài ra, ta có $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$.

$$\Rightarrow \sum \tan A \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{0}. \quad (1.5)$$

- Khi $P \equiv L$, hệ thức trở thành $\sum S_a \cdot \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{0}$.

Người ta đã chứng minh rằng, hệ thức trên suy ra:

$$\sum a^2 \cdot \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{0}. \quad (1.6)$$

- Khi $P \equiv J$, hệ thức trở thành $\sum S_a \cdot \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$.

Người ta đã chứng minh rằng, hệ thức trên suy ra:

$$\sum \frac{1}{p-a} \cdot \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}. \quad (1.7)$$

- Khi $P \equiv N$, hệ thức trở thành $\sum S_a \cdot \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{0}$.

Người ta đã chứng minh rằng, hệ thức trên suy ra:

$$\sum (p-a) \cdot \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{0}. \quad (1.8)$$

- Khi $P \equiv \Omega_1$, hệ thức trở thành $\sum S_a \cdot \overrightarrow{\Omega_1 A} = \overrightarrow{0}$.

Người ta đã chứng minh rằng, hệ thức trên suy ra:

$$\sum \frac{1}{c^2} \cdot \overrightarrow{\Omega_1 A} = \overrightarrow{0}. \quad (1.9)$$

- Khi $P \equiv \Omega_2$, hệ thức trở thành $\sum S_a \cdot \overrightarrow{\Omega_2 A} = \overrightarrow{0}$.

Người ta đã chứng minh rằng, hệ thức trên suy ra:

$$\sum \frac{1}{b^2} \cdot \overrightarrow{\Omega_2 A} = \overrightarrow{0}. \quad (1.10)$$

Chương 2

MỘT SỐ HỆ THỨC LIÊN QUAN TAM GIÁC VÀ ĐIỂM

2.1 Đồng nhất thức Leibnitz tổng quát và ứng dụng

Cho tam giác ABC. Ta biết rằng với ba số thực x_1, x_2, x_3 xác định thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 \neq 0$, luôn tồn tại duy nhất điểm P thuộc mặt phẳng (ABC) sao cho:

$$\sum x_1 \cdot \overrightarrow{PA} = \vec{0}.$$

Với một điểm M xác định trên mặt phẳng (ABC), P được xác định bởi hệ thức sau:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{\sum x_1 \overrightarrow{MA}}{\sum x_1}.$$

Bình phương hai vế hệ thức trên, và rút gọn, ta thu được đồng nhất thức (DNT):

$$(\sum x_1)^2 MP^2 = (\sum x_1) (\sum x_1 MA^2) - \sum a^2 x_2 x_3.$$

Đồng nhất thức trên được gọi là đồng nhất thức Leibnitz tổng quát.

Với một số bộ giá trị đặc biệt của x_1, x_2, x_3 thì P sẽ trùng với các điểm đặc biệt của $\triangle ABC$. Chẳng hạn, ở phần 1.3 của chương 1, ta đã biết rằng:

- $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) \Rightarrow P \equiv G$.
- $(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c) \Rightarrow P \equiv I$.
- $(x_1, x_2, x_3) = (\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C) \Rightarrow P \equiv O$.

- $(x_1, x_2, x_3) = (\tan A, \tan B, \tan C) \Rightarrow P \equiv H$.
- $(x_1, x_2, x_3) = (a^2, b^2, c^2) \Rightarrow P \equiv L$ (Điểm Lhuilier-Lemoine).
- $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c} \right) \Rightarrow P \equiv J$ (Điểm Gergone).
- $(x_1, x_2, x_3) = (p-a, p-b, p-c) \Rightarrow P \equiv N$ (Điểm Nagel).
- $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2} \right) \Rightarrow P \equiv \Omega_1$ (Điểm Crell-Brocard 1).
- $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2} \right) \Rightarrow P \equiv \Omega_2$ (Điểm Crell- Brocard 2).

Thay các bộ giá trị đặc biệt đó của x_1, x_2, x_3 và thay P bởi các điểm đặc biệt tương ứng vào ĐNT Leibnitz tổng quát, lần lượt ta được các ĐNT trong trường hợp riêng, biểu diễn độ dài các đoạn thẳng MG, MI, MO, MH, ML, MJ, MN, $M\Omega_i$. Chẳng hạn như sau:

$$9.MG^2 = 3 \sum MA^2 - \sum a^2.$$

$$(\sum a) MI^2 = \sum a.MA^2 - abc.$$

$$(\sum \sin 2A)^2 MO^2 = (\sum \sin 2A) (\sum \sin 2A.MA^2) - \sum a^2 \sin 2B. \sin 2C.$$

$$(\sum \tan A)^2 MH^2 = (\sum \tan A) (\sum \tan A.MA^2) - \sum a^2 \tan B \tan C.$$

Sau đó cho điểm M lần lượt trùng với các điểm đặc biệt G, I, O, H, L, J, N, Ω_i và áp dụng một số hệ thức đã biết cùng với một số bước biến đổi ta được các ĐNT biểu diễn độ dài của các đoạn thẳng nối các điểm đặc biệt của tam giác.

Khi M hoặc P trùng với các điểm đặc biệt của tam giác, ta thu được các trường hợp riêng của ĐNT Leibniz tổng quát. Từ đó, dễ dàng suy ra được một số bất đẳng thức (BĐT) quan trọng. Dưới đây là một số ví dụ.

- Khi $M \equiv O$: ĐNT Leibnitz tổng quát trở thành:

$$OP^2 = R^2 - \frac{\sum a^2 x_2 x_3}{(\sum x_1)^2}.$$

Suy ra BĐT:

$$R^2 (\sum x_1)^2 \geq \sum a^2 x_2 x_3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv O$.

- Khi $P \equiv G$: ĐNT Leibnitz tổng quát trở thành:

$$\sum MA^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3} \sum a^2.$$

Suy ra BĐT:

$$\sum MA^2 \geq \frac{1}{3} \sum a^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv G$.

- Khi $P \equiv I$: ĐNT Leibnitz tổng quát trở thành:

$$\sum aMA^2 = 2p.MI^2 + abc.$$

Suy ra BĐT:

$$\sum aMA^2 \geq abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv I$.

- Khi $P \equiv L$: ĐNT Leibnitz tổng quát trở thành:

$$\sum a^2MA^2 = (\sum a^2)ML^2 + \frac{3(\prod a^2)}{\sum a^2}.$$

Suy ra BĐT:

$$\sum a^2MA^2 \geq \frac{3(\prod a^2)}{\sum a^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv L$.

- Khi $P \equiv J$: ĐNT Leibnitz tổng quát trở thành:

$$\sum \frac{MA^2}{p-a} = \frac{4R+r}{pr}.MJ^2 + \frac{4p(R+r)}{4R+r}.$$

Suy ra BĐT:

$$\sum \frac{MA^2}{p-a} \geq \frac{4p(R+r)}{4R+r}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv J$.

- Khi $P \equiv N$: ĐNT Leibnitz tổng quát trở thành:

$$\sum (p - a) MA^2 = p.MN^2 + 4pr(R - r).$$

Suy ra BĐT:

$$\sum (p - a) MA^2 \geq 4S(R - r).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv N$.

2.2 Một số hệ thức cảm sinh từ vị trí điểm nằm trong tam giác và ứng dụng

2.2.1 Bất đẳng thức Erdos - Mordell

Cho tam giác ABC. M là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Gọi các khoảng cách MA, MB, MC tương ứng là R_a, R_b, R_c . Khoảng cách từ M đến các cạnh tương ứng BC, CA, AB là d_a, d_b, d_c .

Bổ đề 2.1.[2] (Bất đẳng thức Erdos - Mordell)

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c).$$

2.2.2 Bất đẳng thức liên quan đến chu vi các tam giác cảm sinh

Trong phần này, ta sẽ đề cập đến một số bất đẳng thức liên quan đến chu vi của một số tam giác cảm sinh từ vị trí của một điểm nằm trong tam giác.

Giả sử M là điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng MA, MB, MC theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Thế thì, ta có định lý sau:

Định lý 2.1.[4]

$$C(A_1B_1C_1) \geq C(A_2B_2C_2)$$

trong đó C chỉ kí hiệu chu vi tam giác.

2.2.3 Hệ thức liên quan tam giác và hai điểm

Bây giờ, giả sử điểm M nằm trong tam giác ABC. Đặt $\alpha = \widehat{BMC}$, $\beta = \widehat{CMA}$, $\gamma = \widehat{AMB}$. Thế thì, với điểm N bất kì nằm trong mặt phẳng (ABC), ta có bất đẳng thức sau đây:

Định lý 2.2.[4]

$$NA \cdot \sin \alpha + NB \cdot \sin \beta + NC \cdot \sin \gamma \geq MA \cdot \sin \alpha + MB \cdot \sin \beta + MC \cdot \sin \gamma. \quad (2.2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi N trùng với M.

* Khi cho M (nằm trong $\triangle ABC$) hoặc N trùng với các điểm đặc biệt trong $\triangle ABC$ ta được các bất đẳng thức trong các trường hợp riêng. Ta vẫn kí hiệu $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $a + b + c = 2p$ và m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C. Gọi G, H, I, O, R lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

1. Nếu tam giác ABC có các góc đều nhỏ hơn 120° thì tồn tại điểm T (điểm Tôricelli) nằm trong tam giác mà nhìn các cạnh AB, BC, CA cùng dưới một góc 120° . Lúc đó với điểm N bất kỳ ta có:

BĐT 2.1 $NA + NB + NC \geq TA + TB + TC.$

2. Xét tam giác ABC bất kỳ, cho M trùng với I. Khi đó $\sin \alpha = \cos \frac{A}{2}$; $\sin \beta = \cos \frac{B}{2}$; $\sin \gamma = \cos \frac{C}{2}$ và vế phải của (2.2) trở thành:

$$IA \cdot \cos \frac{A}{2} + IB \cdot \cos \frac{B}{2} + IC \cdot \cos \frac{C}{2} = p.$$

a) Khi cho N trùng với G ta có:

BĐT 2.2 $m_a \cos \frac{A}{2} + m_b \cos \frac{B}{2} + m_c \cos \frac{C}{2} \geq \frac{3p}{2}.$

b) Khi cho N trùng với O ta có:

BĐT 2.3 $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \geq \frac{p}{R}.$

c) Khi cho N trùng với H ta có:

BĐT 2.4 $\cos A \cdot \cos \frac{A}{2} + \cos B \cdot \cos \frac{B}{2} + \cos C \cdot \cos \frac{C}{2} \geq \frac{p}{2R}.$

3. Xét tam giác ABC có ba góc nhọn, cho M trùng với trực tâm H. Lúc đó $\sin \alpha = \sin A$, $\sin \beta = \sin B$, $\sin \gamma = \sin C$ và $HA \cdot \sin \alpha = 2R \sin A \cdot \cos A = a \cdot \cos A$.

Tương tự: $HB \sin \beta = b \cdot \cos B$, $HC \sin \gamma = c \cdot \cos C$.

Khi đó vế phải của (2.2) trở thành: $a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C$.

a) Khi cho N trùng với I ta có:

BĐT 2.5

$$(b + c - a) \sin \frac{A}{2} + (a + c - b) \sin \frac{B}{2} + (b + a - c) \sin \frac{C}{2} \geq a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C.$$

b) Khi cho N trùng với O ta có:

BĐT 2.6 $a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos p \leq p$.

c) Khi cho N trùng với G ta có:

BĐT 2.7

$$2(m_a \sin A + m_b \sin B + m_c \sin C) \geq 3(a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C).$$

4. Xét tam giác ABC có ba góc nhọn, cho M trùng với tâm O. Lúc đó vế phải của (2.2) trở thành:

$$R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C).$$

a) Khi cho N trùng với G ta có:

BĐT 2.8

$$2(m_a \sin 2A + m_b \sin 2B + m_c \sin 2C) \geq 3R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C).$$

b) Khi cho N trùng với tâm I ta có:

BĐT 2.9

$$\begin{aligned} (b + c - a) \cos A \cdot \sin \frac{A}{2} + (a + c - b) \cos B \cdot \sin \frac{B}{2} \\ + (b + a - c) \cos C \sin \frac{C}{2} \\ \geq \frac{R}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C). \end{aligned}$$

c) Khi cho N trùng với trực tâm H ta có:

BĐT 2.10

$$2(\cos A \cdot \sin 2A + \cos B \cdot \sin 2B + \cos C \cdot \sin 2C) \geq \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C.$$

5. Cho điểm M nằm trong tam giác ABC và điểm N bất kỳ.

Ta có:

$$S_a = S_{MBC} = \frac{MB \cdot MC \cdot \sin \alpha}{2}.$$

Tương tự với $S_b = S_{MCA}$, $S_c = S_{MAB}$.

Thay $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ vào (2.2), ta được bất đẳng thức:

$$S_a \cdot MA \cdot NA + S_b \cdot MB \cdot NB + S_c \cdot MC \cdot NC \geq S_a \cdot MA^2 + S_b \cdot MB^2 + S_c \cdot MC^2.$$

a) Khi M trùng với trọng tâm G thì $S_a = S_b = S_c = \frac{S_{ABC}}{3}$

nên ta có:

BĐT 2.11

$$GA \cdot NA + GB \cdot NB + GC \cdot NC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

b) Khi N trùng với tâm O ta có:

BĐT 2.12

$$R(GA + GB + GC) \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Suy ra:

BĐT 2.13

$$2R(m_a + m_b + m_c) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

c) Khi N trùng với trực tâm H ta có:

BĐT 2.14

$$4R(m_a \cdot \cos A + m_b \cdot \cos B + m_c \cdot \cos C) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

2.3 Mở rộng một kết quả về Điểm Toricelli trong tam giác

Bài toán 2.7: Cho tam giác ABC . Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm M sao cho tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất.

Bài toán 2.7 đã được nhà toán học Toricelli giải và kết quả cụ thể như sau: Nếu $\max \{ \widehat{A}, \widehat{B}; \widehat{C} \} < 120^0$ thì tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất khi $\widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \widehat{AMB} = 120^0$.

Nếu $\widehat{A} \geq 120^0$ thì tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất khi M trùng A .

Nếu $\widehat{B} \geq 120^0$ thì tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất khi M trùng B .

Nếu $\widehat{C} \geq 120^0$ thì tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất khi M trùng C .

Bài toán 2.7 có sự mở rộng tất yếu.

Bài toán 2.8: Cho tam giác ABC và ba số dương x, y, z . Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm M sao cho tổng $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất.

Chương 3

MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI VÀ ỨNG DỤNG

Trong phần này từ một số đẳng thức hoặc bất đẳng thức ở các phần trước, ta có thể kết hợp với một số phép biến đổi để tạo ra những đẳng thức hoặc bất đẳng thức mới, khá phong phú.

Ta vẫn giữ những quy ước về mặt ký hiệu như ở các phần trước. Từ đây về sau ta quy ước thêm rằng, đối với tam giác có các đỉnh được ký hiệu là A_1, B_1, C_1 thì các ký hiệu tương ứng sẽ được gắn thêm số 1, chẳng hạn $a_1, b_1, c_1 \dots$

3.1 Phép biến đổi thứ nhất

Từ Bất đẳng thức Erdos - Mordell đã nghiên cứu ở phần 2.2.1, ta có thể thực hiện một phép biến đổi để tạo ra nhiều bất đẳng thức mới. Phép biến đổi ở đây là phép nghịch đảo với tỉ số là $k > 0$.

Giả sử M là điểm nằm trong tam giác ABC . Ta nhắc lại rằng, $MA = R_a, MB = R_b, MC = R_c$ và khoảng cách từ điểm M đến các cạnh BC, CA, AB tương ứng là d_a, d_b, d_c .

Bây giờ, thực hiện phép nghịch đảo cực M , tỉ số $k = 1$ (phương tích đơn vị), ta được:

$$MD_1 = \frac{1}{R_a}, ME_1 = \frac{1}{R_b}, MF_1 = \frac{1}{R_c}$$

và

$$MA_2 = \frac{1}{d_a}, MB_2 = \frac{1}{d_b}, MC_2 = \frac{1}{d_c}.$$

Áp dụng bổ đề 2.1 trong tam giác $A_2B_2C_2$, ta có:

$$\begin{aligned} MA_2 + MB_2 + MC_2 &\geq 2(MD_1 + ME_1 + MF_1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} &\geq 2 \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \right). \end{aligned}$$

Về mặt hình thức, bất đẳng thức này có được bởi việc thay R_a bởi $\frac{1}{d_a}$ và d_a bởi $\frac{1}{R_a}$ trong bổ đề 2.1.

Hơn nữa, bất đẳng thức cuối cùng ở trên có thể viết lại dưới dạng:

$$R_a^{-1} + R_b^{-1} + R_c^{-1} \leq 2^{-1} (d_a^{-1} + d_b^{-1} + d_c^{-1}).$$

Từ đó, ta có bổ đề sau:

Bổ đề 3.1

$$R_a^{-1} + R_b^{-1} + R_c^{-1} \leq 2^{-1} (d_a^{-1} + d_b^{-1} + d_c^{-1}).$$

Từ Bổ đề 2.1 và Bổ đề 3.1, gợi ý cho ta việc có thể so sánh được hay không giữa $R_a^\alpha + R_b^\alpha + R_c^\alpha$ với $d_a^\alpha + d_b^\alpha + d_c^\alpha$, trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$.

Trước hết, ta có kết quả sau:

Bổ đề 3.2 Ta có các bất đẳng thức sau:

$$a) (x + y)^\alpha \geq 2^{\alpha-1} (x^\alpha + y^\alpha); \forall x, y > 0, 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.1)$$

$$b) (x + y)^\alpha > x^\alpha + y^\alpha, \forall x, y > 0, \alpha > 1. \quad (3.2)$$

Bây giờ, áp dụng chứng minh của bổ đề 2.1 và Bổ đề 3.2, với $\alpha > 1$ ta có:

$$R_a^\alpha \geq \left(\frac{bd_c}{a} + \frac{cd_b}{a} \right)^\alpha > \left(\frac{bd_c}{a} \right)^\alpha + \left(\frac{cd_b}{a} \right)^\alpha.$$

Tương tự ta có:

$$R_b^\alpha > \left(\frac{cd_a}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{ad_c}{b}\right)^\alpha,$$

$$R_c^\alpha > \left(\frac{ad_b}{c}\right)^\alpha + \left(\frac{bd_a}{c}\right)^\alpha.$$

Do đó: $R_a^\alpha + R_b^\alpha + R_c^\alpha$

$$> d_a^\alpha \cdot \left(\left(\frac{b}{c}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{b}\right)^\alpha \right) +$$

$$d_b^\alpha \cdot \left(\left(\frac{c}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{a}{c}\right)^\alpha \right) + d_c^\alpha \cdot \left(\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha \right)$$

$$\geq 2 \cdot (d_a^\alpha + d_b^\alpha + d_c^\alpha).$$

Từ đó, ta có kết quả tổng quát sau:

- BĐT 3.1

$$R_a^\alpha + R_b^\alpha + R_c^\alpha > 2(d_a^\alpha + d_b^\alpha + d_c^\alpha) \text{ với } \alpha > 1.$$

Bây giờ, tiếp tục thực hiện phép nghịch đảo tâm M, phương tích đơn vị (về mặt hình thức, thay R_a bởi $\frac{1}{d_a}$ và d_a bởi $\frac{1}{R_a}$ trong BĐT 3.1), ta có:

$$\frac{1}{d_a^\alpha} + \frac{1}{d_b^\alpha} + \frac{1}{d_c^\alpha} > 2 \left(\frac{1}{R_a^\alpha} + \frac{1}{R_b^\alpha} + \frac{1}{R_c^\alpha} \right)$$

hay

$$R_a^{-\alpha} + R_b^{-\alpha} + R_c^{-\alpha} < 2^{-1}(d_a^{-\alpha} + d_b^{-\alpha} + d_c^{-\alpha}) \text{ với } -\alpha < -1.$$

Đặt $\beta = -\alpha < -1$, ta được BĐT:

$$R_a^\beta + R_b^\beta + R_c^\beta < 2^{-1}(d_a^\beta + d_b^\beta + d_c^\beta), \text{ với } \beta < -1.$$

Từ đó, ta tiếp tục có kết quả tổng quát sau:

- BĐT 3.2

$$R_a^\alpha + R_b^\alpha + R_c^\alpha < \frac{1}{2}(d_a^\alpha + d_b^\alpha + d_c^\alpha) \text{ với } \alpha < -1.$$

Tương tự với các bước tiến hành như trên, ta có kết quả sau:

- BĐT 3.3

$$R_a^\alpha + R_b^\alpha + R_c^\alpha \geq 2^\alpha(d_a^\alpha + d_b^\alpha + d_c^\alpha) \text{ với } 0 < \alpha \leq 1.$$

Bây giờ, tiếp tục thực hiện phép nghịch đảo tâm M, phương tích đơn vị (về mặt hình thức, thay R_a bởi $\frac{1}{d_a}$ và d_a bởi $\frac{1}{R_a}$ trong BĐT 3.3), ta có kết quả sau:

- BDT 3.4

$$R_a^\alpha + R_b^\alpha + R_c^\alpha \leq 2^\alpha (d_a^\alpha + d_b^\alpha + d_c^\alpha), \text{ với } -1 \leq \alpha < 0.$$

Bây giờ, ta tiếp tục khai thác theo hướng khác, để có thể tạo ra được nhiều BDT phong phú hơn.

Từ chứng minh Bổ đề 2.1, ta có $R_a + d_a \geq h_a$.

Suy ra:

$$aR_a + ad_a \geq ah_a = 2S = ad_a + bd_b + cd_c.$$

do đó:

$$aR_a \geq bd_b + cd_c. \quad (3.3)$$

Tương tự, ta có:

$$bR_b \geq cd_c + ad_a$$

$$cR_c \geq ad_a + bd_b. \quad (3.4)$$

Vậy ta có kết quả sau:

- BDT 3.5 $aR_a + bR_b + cR_c \geq 2(ad_a + bd_b + cd_c).$

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với trực tâm H của tam giác.

Từ các BDT (3.3) và (3.4), ta có thể áp dụng Bổ đề 3.2 để thu được nhiều BDT tổng quát khác rất phong phú.

Bây giờ, ta tiếp tục khai thác một số quy tắc biến đổi khác. Từ đó, ta sẽ sáng tạo ra được nhiều BDT mới.

* Trước hết, ta thiết lập một số quy tắc cần dùng dưới đây.

Gọi chân các đường vuông góc hạ từ M xuống các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C là A_1, B_1, C_1 .

Ta sẽ thành lập sự liên hệ giữa hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$.

Rõ ràng $MA_1 = d_a = R_{a_1}$.

Vậy ta có liên hệ đầu tiên:

$$R_{a_1} = d_a. \quad (3.5)$$

Hạ cạnh $MH \perp C_1B_1$ thì $MH = d_{a_1}$,

$$MH = MB_1 \cdot \sin \alpha = MB_1 \cdot \frac{MC_1}{MA} = \frac{d_b d_c}{R_a}.$$

Vậy ta có liên hệ thứ hai:

$$d_{a_1} = \frac{d_b d_c}{R_a}. \quad (3.6)$$

Từ (3.6) ta có:

$$R_a = \frac{d_b d_c}{d_{a_1}}$$

hay

$$R_a = \frac{R_{b_1} \cdot R_{c_1}}{d_{a_1}}. \quad (3.7)$$

Ta lại có: $B_1C_1 = AM \cdot \sin \widehat{C_1AB_1} = AM \cdot \frac{BC}{2R}$. Mà $B_1C_1 = a_1$, $AM = R_a$, $BC = a$ nên ta được:

$$a_1 = \frac{a R_a}{2R}. \quad (3.8)$$

Từ (3.7) và (3.8) ta suy ra:

$$a = \lambda \frac{a_1 d_{a_1}}{R_{b_1} R_{c_1}}. \quad (3.9)$$

trong đó $\lambda = 2R$.

Một cách tương tự ta có các công thức đối với b_1, c_1

Các công thức (3.5), (3.6), (3.8) cho ta một "quy tắc biến đổi", được phát biểu như sau:

$$R_{a_1} \mapsto d_a; d_{a_1} \mapsto \frac{d_b \cdot d_c}{R_a}; a_1 \mapsto \frac{a \cdot R_a}{2R}. \quad (3.10)$$

Các công thức (3.5), (3.7), (3.9) cho ta một quy tắc khác:

$$R_a \mapsto \frac{R_{b_1} \cdot R_{c_1}}{d_{a_1}}; d_a \mapsto R_{a_1}; a \mapsto \lambda \frac{a_1 \cdot d_{a_1}}{R_{b_1} \cdot R_{c_1}}. \quad (3.11)$$

* Bây giờ, ta tiếp tục xây dựng một số "quy tắc biến đổi" khác, ta có thể thu được nhiều BDT rất thú vị.

3.2 Phép biến đổi thứ hai

Giả sử M là điểm nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$. Ta đặt

$$R_i = MA_i \text{ (i= 1,2,3),}$$

a_i là cạnh tương ứng với đỉnh A_i ,

h_i là đường cao hạ từ đỉnh A_i ,

d_i là khoảng cách từ M đến cạnh a_i ,

w_i là phân giác của góc tương ứng từ M đến cạnh a_i ,

$R'_i = MA'_i$ (A'_i là ảnh của A_i qua phép biến đổi nào đó),

d'_i là khoảng cách từ M đến cạnh a'_i .

Phép biến đổi xét trong phần này là phép nghịch đảo cực M, với tỉ số $k = R_1R_2R_3 > 0$. Khi đó, tập hợp những điểm bất động của phép nghịch đảo là đường tròn tâm M, bán kính bằng $\sqrt{k}$, gọi là đường tròn nghịch đảo.

Với phép nghịch đảo này, ta có:

$$R'_i = \frac{k}{R_i}. \quad (3.24)$$

Hơn nữa, ta có:

$$a_1^2 = R_2^2 + R_3^2 - 2R_2R_3 \cdot \cos \widehat{A_2MA_3} \text{ (và tương tự).}$$

Ngoài ra:

$$\begin{aligned} a_1'^2 &= R_2'^2 + R_3'^2 - 2R_2'R_3' \cdot \cos \widehat{A_2'MA_3'} \\ &= R_3^2R_1^2 + R_1^2R_2^2 - 2R_3R_1R_2 \cdot \cos \widehat{A_2MA_3} \\ &= R_1^2a_1^2. \end{aligned}$$

Do đó:

$$a'_i = a_i.R_i. \quad (3.25)$$

Lưu ý rằng, a_1R_1 , a_2R_2 , a_3R_3 cũng là ba cạnh của một tam giác. Ngoài ra, các chứng minh trên cũng đúng khi M nằm ngoài tam giác.

Hơn nữa, ta có $R_2R_3 \sin \widehat{A_2MA_3} = d_1a_1$ (và tương tự).

Ta cũng có:

$$R'_2R'_3 \sin \widehat{A'_2MA'_3} = d'_1a'_1 \text{ (và tương tự)}$$

hay

$$R_3R_1.R_1R_2 \sin \widehat{A_2MA_3} = d'_1a_1R_1.$$

Do đó:

$$d'_i = d_i.R_i. \quad (3.26)$$

Ngoài ra, từ hệ thức:

$$w_1^2 = R_2R_3 \left[1 - \frac{a_1^2}{(R_2 + R_3)^2} \right].$$

Ta suy ra: $w'_i = w_i.R_i$.

Từ đó ta có các hệ thức sau:

$$R' = \frac{kRS}{S'}, h'_i = \frac{h_i.S'}{S.R_i}, S' = \frac{\sum a_1R_1d'_1}{2}. \quad (3.27)$$

Trong đó S, R lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ và S', R' lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'_1A'_2A'_3$.

Từ các hệ thức (3.24) - (3.27) ta thấy rằng, với mỗi bất đẳng thức (hoặc đẳng thức) trong tam giác có dạng:

$$f(a_i, h_i, R_i, d_i, w_i, R, S) \geq 0.$$

Ta thu được một bất đẳng thức (đẳng thức) mới có dạng:

$$f \left(a_iR_i, \frac{h_i.S'}{S.R_i}, \frac{k}{R_i}, d_iR_i, w_iR_i, \frac{kRS}{S'}, \frac{\sum a_1R_1d'_1}{2} \right) \geq 0.$$

KẾT LUẬN

Trên cơ sở tập hợp kiến thức từ nhiều nguồn tài liệu khác nhau, luận văn đã đạt được một số kết quả sau:

- 1.** Hệ thống được một số kiến thức cơ bản liên quan đến tam giác, như một số hệ thức lượng, một số điểm đặc biệt và một số hệ thức vectơ cơ bản trong tam giác.
- 2.** Với góc nhìn của toán phổ thông, luận văn đã giới thiệu một cách cơ bản và chi tiết về đồng nhất thức Leibnitz tổng quát. Đồng nhất thức này chưa được trình bày một cách trọn vẹn trong chương trình phổ thông. Từ đó tìm kiếm những ứng dụng của nó. Rất nhiều hệ thức quan trọng trong chương trình Toán phổ thông là trường hợp riêng của đồng nhất thức này. Một số phương pháp sáng tác bài tập, phương pháp tạo ra những đẳng thức và bất đẳng thức mới đã được đề cập. Đây là một trong những đóng góp của luận văn.
- 3.** Luận văn đề cập đến một số hệ thức cảm sinh từ vị trí điểm nằm trong tam giác hoặc trong mối liên quan giữa điểm và tam giác đã cho với một điểm khác xác định trên mặt phẳng. Nhiều bài toán và hệ thức trong chương trình toán phổ thông có xuất phát điểm từ các hệ thức cơ bản này. Trên cơ sở đó luận văn cũng đề cập được một số phương pháp sáng tác bài tập, phương pháp tạo ra những đẳng thức và bất đẳng thức mới liên quan đến tam giác. Đây cũng là một trong những đóng góp của luận văn.
- 4.** Trên cơ sở tổng hợp một số tài liệu tham khảo, luận văn trình bày một cách hệ thống việc mở rộng một kết quả về Điểm Toricelli trong tam giác.
- 5.** Đề cập một số phép biến đổi trên tam giác, chủ yếu là phép nghịch đảo

với tỉ số dương cho trước xác định. Nhiều bài toán, định lý, hệ thức mới được tạo ra từ các phép biến đổi này. Đây cũng là một trong những phương pháp hữu hiệu nhằm sáng tác ra những hệ thức mới, tạo ra những bài toán mới, khá phong phú.