BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

VÕ THỊ NHẬT VI

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG, 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **PGS.TS ĐINH THANH ĐỨC**

Phản biện 1: **TS. Cao Văn Nuôi**

Phản biện 2: **GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu**

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ Khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 28 tháng 5 năm 2011.

* Có thể tìm hiểu luận văn tại:
- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài:

Jensen là người đầu tiên đã đưa ra định nghĩa hàm lồi thông qua bất đẳng thức hàm như sau:

Cho $\mathbb{I}$ là một tập mở trên $\mathbb{R}$. Một hàm $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi (nữa lồi) nếu

$$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{I}$$

và f được gọi là lõm nếu bất đẳng thức đổi chiều.

Ý tưởng này là một đóng góp to lớn của Jensen trong toán học nói chung và trong lí thuyết hàm lồi nói riêng. Đặc biệt trong lĩnh vực toán sơ cấp bất đẳng thức Jensen là công cụ rất mạnh trong việc chứng minh các bất đẳng thức toán học. Như ta đã biết phép chứng minh quen thuộc của các bất đẳng thức cổ điển như AM-GM (bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân), Cauchy, Bunhiacowski...là phép chứng minh qui nạp. Tuy nhiên, phép chứng minh này còn khá dài dòng và phức tạp. Bất đẳng thức Jensen thật sự là một cách giải quyết tối ưu trong trường hợp này.

Thêm vào đó gần đây trong các bài báo khoa học [9] (2006), trong tạp chí JIPM: Journal for inequalities in applied mathemtics, J. L. Diaz-Barrero đã đưa ra các kết quả về ứng dụng của bất đẳng thức Jensen trong hình học đã cho ra các bất đẳng thức liên quan đến các yếu tố trong tam giác rất thú vị và [8] (2006) P. G popescu và J. L. Diaz-Barrero các kết quả về bất đẳng thức số học dạng ràng buộc và không ràng buộc cũng rất có ý nghĩa.

Đề tài *"Một số vấn đề về bất đẳng thức Jensen và ứng dụng"* sẽ trình bày rõ các kết quả trong [8], [9] đồng thời luận văn sẽ trình bày các tính chất của hàm lồi, đặc biệt giới thiệu bất đẳng thức Jensen dạng tổng quát của nó và quan trọng hơn cả là trình bày các ứng dụng của bất đẳng thức Jensen đối với lớp hàm lồi hai lần khả vi một cách hệ thống.

Đề tài phù hợp với sở thích của bản thân, là một trong những phương pháp quan trọng để chứng minh bất đẳng thức. Nó đóng góp thiết thực cho việc dạy và học bất đẳng thức ở trường phổ thông, đem lại niềm đam mê và kích thích tư duy sáng tạo cho học sinh.

2. Mục đích nghiên cứu:

Đề tài tập trung nghiên cứu hàm lồi theo nghĩa Jensen, các tính chất của hàm lồi, bất đẳng thức Jensen và các ứng dụng của bất đẳng thức Jensen đối với lớp hàm hai lần khả vi.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

- Khảo sát lý thuyết về hàm lồi, bất đẳng thức Jensen; một số áp dụng trong việc ứng dụng của bất đẳng thức Jensen.

- Khảo sát lý thuyết tổng quát và đặc biệt ứng dụng trong chương trình Toán học dành cho học sinh giỏi thuộc các đội tuyển quốc gia, quốc tế.

4. Phương pháp nghiên cứu:

- Phương pháp nghiên cứu tư liệu: Các tài liệu mà giáo viên hướng dẫn đưa, trên các trang web và các bài báo khoa học gần đây có liên quan đến đề tài, sách giáo khoa phổ thông trung học, các tài liệu tham khảo dành cho giáo viên, tạp chí toán học tuổi trẻ, các đề tài nghiên cứu giáo dục có liên quan...

- Phương pháp tiếp cận lịch sử: sưu tầm, phân tích, tổng hợp tư liệu.

- Phương pháp tiếp cận hệ thống.

5. Ý nghĩa khoa học:

Luận văn với đề tài *"Một số vấn đề về bất đẳng thức Jensen và ứng dụng"* sẽ hệ thống các tính chất của hàm lồi, xây dựng tính chất cho lớp các hàm lồi hẹp hơn như lớp các hàm lồi liên tục, khả vi, 2 lần khả vi. Đây là lớp hàm có nhiều ứng dụng thú vị nhất là trong lĩnh vực toán học ở bậc THPT. Đặc biệt luận văn sẽ trình bày và chứng minh bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức đặc trưng cho hàm lồi, rất quan trọng trong toán học. Từ đó đưa ra một số ứng dụng của bất đẳng thức quan trọng này. Đây là một vấn đề khoa học cơ bản mang nhiều ứng dụng trong giảng dạy ở các bậc THPT, trong các trường Cao đẳng, Đại học cho các ngành sư phạm toán và đề tài cũng là công cụ để học sinh, sinh viên tham khảo trong quá trình tự rèn luyện trao dồi kiến thức toán học về lĩnh vực bất đẳng thức.

6. Cấu trúc luận văn:

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn được chia thành hai chương:

Chương 1: Chúng tôi trình bày các kiến thức cơ bản về hàm lồi, các tính chất của hàm lồi, đặc biệt giới thiệu về bất đẳng thức Jensen, mô tả ý nghĩa hình học cũng như một số mở rộng của nó.

Chương 2: Trong phần này chúng tôi sẽ một số ứng dụng của bất đẳng thức Jensen trong đại số, trong lượng giác và hình học.

Chương 1

Hàm lồi và một số tính chất của Hàm lồi. Bất đẳng thức Jensen

1.1 Hàm lồi và một số tính chất

1.1.1 Hàm lồi

Định nghĩa 1.1 ([1]). *Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lồi (lồi dưới) trên $\mathbb{I}(a;b) \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có*

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \tag{1.1}$$

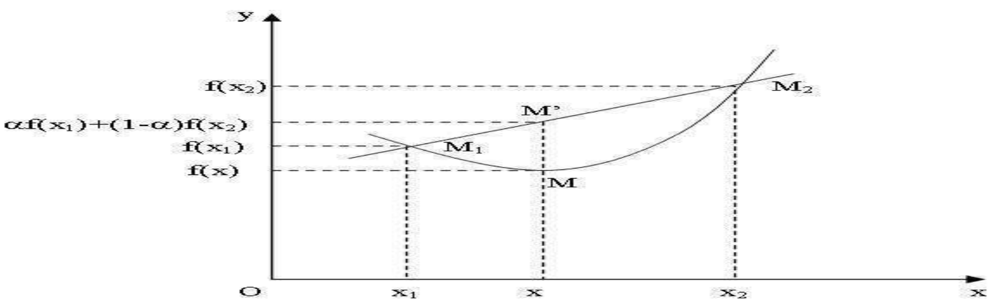
Nếu dấu "=" trong xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$, thì ta nói hàm số $f(x)$ là lồi thực sự (chặt) trong $\mathbb{I}$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lõm (lồi trên) trên $\mathbb{I}(a;b) \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, *ta đều có*

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \tag{1.2}$$

Nếu dấu "=" trong xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$, thì ta nói hàm số $f(x)$ là lõm thực sự (chặt) trong $\mathbb{I}$.

1.1.2 Mô tả hình học



$f(x)$ lồi trên $\mathbb{I}$ khi và chỉ khi với mọi điểm M_1, M_2 thuộc đồ thị $(C) : y = f(x)$ đều có cung M_1M_2 của đồ thị (C) nằm ở phía dưới ở đoạn thẳng M_1M_2.

1.1.3 Một số tính chất

Tính chất 1.1 ([1])**.** *Nếu $f(x)$ lồi (lõm) trên $\mathbb{I}(a;b)$ thì $g(x) := cf(x)$ là hàm lõm (lồi) trên $\mathbb{I}(a;b)$ khi $c < 0$ ($c > 0$).*

Tính chất 1.2 ([1])**.** *Tổng hữu hạn các hàm lồi trên $\mathbb{I}(a;b)$ là một hàm lồi trên $\mathbb{I}(a;b)$.*

Tính chất 1.3 ([1])**.** *Nếu* $f(x)$ *là hàm số liên tục và lồi trên* $\mathbb{I}(a;b)$ *và nếu* $g(x)$ *lồi và đồng biến trên tập giá trị của* $f(x)$ *thì* $g(f(x))$ *là hàm lồi trên* $\mathbb{I}(a;b)$*.*

Tính chất 1.4 ([1])**.** *Cho* $f(x)$ *là hàm số xác định trên* $\mathbb{I}(a;b)$

1. *Nếu* $f(x)$ *là hàm số liên tục và lõm trên* $\mathbb{I}(a;b)$ *và nếu* $g(x)$ *lồi và nghịch biến trên trên tập giá trị của* $f(x)$ *thì* $g(f(x))$ *là hàm lồi trên* $\mathbb{I}(a;b)$*.*

2. *Nếu* $f(x)$ *là hàm số liên tục và lõm trên* $\mathbb{I}(a;b)$ *và nếu* $g(x)$ *lõm và đồng biến trên tập giá trị của* $f(x)$ *thì* $g(f(x))$ *là hàm lõm trên* $\mathbb{I}(a;b)$*.*

3. *Nếu* $f(x)$ *là hàm số liên tục và lồi trên* $\mathbb{I}(a;b)$ *và nếu* $g(x)$ *lõm và nghịch biến trên tập giá trị của* $f(x)$ *thì* $g(f(x))$ *là hàm lõm trên* $\mathbb{I}(a;b)$*.*

Tính chất 1.5 ([1])**.** *Nếu* $f(x)$ *là hàm số liên tục và đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) trên* $\mathbb{I}(a;b)$ *và nếu* $g(x)$ *là hàm ngược của* $f(x)$ *thì ta có các kết luận sau:*

1. $f(x)$ *lõm, đồng biến* $\Leftrightarrow$ $g(x)$ *lồi, đồng biến.*

2. $f(x)$ *lõm, nghịch biến* $\Leftrightarrow$ $g(x)$ *lõm, nghịch biến.*

3. $f(x)$ *lồi, nghịch biến* $\Leftrightarrow$ $g(x)$ *lồi, nghịch biến.*

Tính chất 1.6 ([1]). *Nếu $f(x)$ là hàm khả vi trên $\mathbb{I}(a;b)$ thì $f(x)$ là hàm lồi trên $\mathbb{I}(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)$ là đơn điệu tăng trên $\mathbb{I}(a;b)$.*

Tính chất 1.7 ([6]). *Giả sử f có đạo hàm trên khoảng $\mathbb{I}$. Nếu tiếp tuyến tại mỗi điểm của đường cong $(C): y = f(x)$ nằm phía dưới của (C), thì f lồi trên $\mathbb{I}$.*

1.2 Bất đẳng thức Jensen

1.2.1 Các định lí

Định lý 1.1 ([10]). *Nếu $f(x)$ lồi và liên tục thì tại mỗi điểm của đường cong $y = f(x)$ có ít nhất một đường thẳng đi qua, đường thẳng này nằm phía dưới đường cong hoặc trên nó.*

Định lý 1.2 ([1]). *Nếu $f(x)$ khả vi bậc hai trên $\mathbb{I}(a;b)$ thì $f(x)$ lồi (lõm) trên $\mathbb{I}(a;b)$ khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0 (f(x) \leq 0)$ trên $\mathbb{I}(a;b)$.*

Định lý 1.3 ([1]). *Nếu $f(x)$ lồi trên $(a;b)$ thì tồn tại các đạo hàm một phía $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ với mọi $x \in (a;b)$ và $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.*

Định lý 1.4 ([1]). *Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $\mathbb{I}(a;b)$ thì $f(x)$ liên tục trên $(a;b)$.*

Định lý 1.5 ([2](Jensen)). *Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $\mathbb{I}(a;b)$ là*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{I}(a;b).$$

Định lý 1.6 ([2])**.** *Cho hàm số* $f = f(x)$ *xác định trên* $\mathbb{I}(a;b)$, $f(x)$ *khả vi hai lần và* $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{I}$, *ta có*

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

1.2.2 Bất đẳng thức Jensen và một số mở rộng của bất đẳng thức Jensen

Định lý 1.7 ([10]**Bất đẳng thức Jensen**)**.** *Giả sử* f *là hàm lồi trên tập mở* $\mathbb{I}$ *và* $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{I}$. *Khi đó ta có*

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}. \quad (1.3)$$

Với mọi hàm lồi chặt đẳng thức chỉ xảy ra khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. *Khi hàm* $f(x)$ *là hàm lõm trên tập mở* $\mathbb{I}$ *thì ta có bất đẳng thức đổi chiều. Và với mọi hàm lõm chặt dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Định lý 1.8 ([10]**Bất đẳng thức Jensen tổng quát**)**.** *Cho* f *là hàm liên tục và lồi trên* $\mathbb{I}$. *Nếu* $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{I}$ *và* $t_1, t_2, \cdots, t_n \in (0;1)$ *sao cho* $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$. *Khi đó*

$$f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n) \leq t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n). \quad (1.4)$$

Với mọi hàm lồi chặt đẳng thức chỉ xảy ra khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. *Khi hàm* $f(x)$ *là hàm lõm trên tập mở* $\mathbb{I}$ *thì ta có bất đẳng thức đổi chiều. Và với mọi hàm lõm chặt dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Hệ quả 1.1. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục và lồi trên $\mathbb{I}$. Khi đó ta có*

$$\frac{r_1f(x_1)+r_2f(x_2)+\cdots+r_nf(x_n)}{r_1+r_2+\cdots+r_n}\geq f\Big(\frac{r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n}{r_1+r_2+\cdots+r_n}\Big).$$

Nếu f lõm ta có chiều ngược lại của bất đẳng thức với các $x_i \in \mathbb{I}, \forall r_i \in \mathbb{R}^+, i=\overline{1,n}$.

Hệ quả 1.2. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục và lồi trên $\mathbb{I}$, khi đó $\forall x_i \in \mathbb{I}, \forall r_i \in \mathbb{R}^+, i=\overline{1,n}$ ta có*

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\geq f\Big(\frac{r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n}{r_1+r_2+\cdots+r_n}\Big)+$$
$$+f\Big(\frac{r_2x_1+r_3x_2+\cdots+r_1x_n}{r_1+r_2+\cdots+r_n}\Big)+\cdots+f\Big(\frac{r_nx_1+\cdots+r_{n-1}x_n}{r_1+r_2+\cdots+r_n}\Big).$$

Vế phải là n số hạng $f(\cdots)$ và nếu hàm lõm thì ta có bất đẳng thức đổi chiều.

Định lý 1.9 ([1]). *Giả sử $f(x)$ xác định trong khoảng $(a;b)$ khả vi hai lần và $f''(x)\geq 0$ và $x_1, x_2 \in (a;b)$ sao cho $x_1 < x_2$. Khi đó với mọi $\alpha \in [0;\frac{x_2-x_1}{2}]$ ta đều có*

$$f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_1+\alpha)+f(x_2-\alpha).$$

Định lý 1.10 ([5]). *Cho hai dãy $\{x_k\}, \{y_k\}$ thoả điều kiện*

$$x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n, y_1\geq y_2\geq\cdots\geq y_n$$

và

$$\begin{cases} x_1\geq y_1\\ x_1+x_2\geq y_1+y_2\\ x_1+x_2+x_3\geq y_1+y_2+y_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\geq y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\\ x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_n\end{cases}$$

Khi đó, với mọi hàm số f(x) lồi, tức là $(f''(x) \geq 0)$ *trên* $\mathbb{R}$*, ta đều có*

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n).$$

Tương tự, với mọi hàm số f(x) lõm, tức là $(f''(x) \leq 0)$ *trên* $\mathbb{R}$*, ta đều có*

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_i = y_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

Chương 2

Một số ứng dụng của bất đẳng thức Jensen

2.1 Một số ứng dụng trong đại số

2.1.1 Chứng minh các bất đẳng thức cổ điển

Định lý 2.1 ([7]). *Cho* $a_{ij} > 0$ *với* $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ *và* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m > 0$ *với* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 1$. *Chứng minh rằng:*

$$a_{11}^{\alpha_1} a_{21}^{\alpha_2} \cdots a_{m1}^{\alpha_m} + \cdots + a_{1n}^{\alpha_1} a_{2n}^{\alpha_2} \cdots a_{mn}^{\alpha_m} \leq \Big(a_{11} + \cdots + a_{1n}\Big)^{\alpha_1} \cdot \cdots \Big(a_{m1} + \cdots + a_{mn}\Big)^{\alpha_m}.$$

Hệ quả 2.1 (**Bất đẳng thức AM-GM**). *Cho* $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$ *khi đó*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Hệ quả 2.2 ([7]**Bất đẳng thức Holder**). *Cho* $a_1, a_2, \cdots, a_n;$

$b_1, b_2, \cdots, b_n > 0; p, q > 0$ *và* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Chứng minh rằng:*

$$\left(a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$
$$\geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Hệ quả 2.3 ([7])**.** *Cho*

$x_1, x_2, \cdots, x_m > 0$; $y_1, y_2, \cdots, y_m > 0$. *Khi đó*

$$\left(x_1 x_2 \cdots x_m\right)^{\frac{1}{m}} + \left(y_1 y_2 \cdots y_m\right)^{\frac{1}{m}} \leq \left(x_1 + y_1\right)^{\frac{1}{m}} + \left(x_2 + y_2\right)^{\frac{1}{m}} +$$
$$+ \cdots + \left(x_m + y_m\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Định lý 2.2 ([7])**.** *Chứng minh rằng với*

$x_1, x_2, \cdots, x_m$; $y_1, y_2, \cdots, y_m > 0$ *và với* $p \geq 1$. *Ta có*

$$\Big((x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^p + (y_1 + y_2 + \cdots + y_m)^p\Big)^{\dfrac{1}{p}} \leq (x_1^p + y_1^p)^{\frac{1}{p}} +$$
$$+ (x_2^p + y_2^p)^{\frac{1}{p}} + \cdots + (x_m^p + y_m^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Hệ quả 2.4 ([7]**Bất đẳng thức Minkowski**)**.** *Cho*

$x_1, x_2, \cdots, x_m > 0$; $y_1, y_2, \cdots, y_m > 0$ *và* $p > 1$. *Chứng minh rằng:*

$$\left(x_1^p + x_2^p + \cdots + x_m^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(y_1^p + y_2^p + \cdots + y_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \Big[(x_1 + y_1)^p +$$
$$+ (x_2 + y_2)^p + \cdots + (x_m + y_m)^p\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

2.1.2 Chứng minh các bất đẳng thức thường gặp khác

Ví dụ 2.1 (**Bất đẳng thức AM-GM (suy rộng)**). *Cho* $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ *và* $p_1, p_2, \cdots, p_n > 0$. *Khi đó*

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leq \Big(\frac{a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\Big)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

Dấu $=$ *xảy ra khi và chỉ khi* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ví dụ 2.2. *Cho* $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} \geq \Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\Big)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ví dụ 2.3 ([2]). *Cho* $\alpha > 1$ *và các* $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \geq \Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\Big)^\alpha.$$

Ví dụ 2.4 ([5]). *Cho n số dương* $x_1, x_2, \cdots, x_n$. *Các số:*

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}; \quad m_g = \sqrt[n]{x_1x_2 \cdots x_n},$$
$$m_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}; \quad m_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Theo thứ tự gọi là trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình toàn phương, trung bình điều hòa của n số đã cho. Chứng minh rằng:

$$m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_q.$$

Khi nào có đẳng thức?

Ví dụ 2.5 ([10]**Bất đẳng thức trung bình lũy thừa**). *Cho $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ và $s < t$, nếu:*

$$S_r = \Big(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\Big)^{\frac{1}{r}},$$

Khi đó, $S_r \leq S_t$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ví dụ 2.6 ([5]**Bất đẳng thức Young**). *Cho hai số thực $p > 1, q > 1$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng với hai số không âm bất kì a,b ta có:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^p = b^q$.

Ví dụ 2.7 ([5]). *Chứng minh các bất đẳng thức sau:*

$$\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}, \forall a, b \geq 0.$$
$$\Big(\frac{a+b+c}{3}\Big)^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}, \forall a, b, c \geq 0.$$

Ví dụ 2.8 ([5]). *Chứng minh bất đẳng thức:*

$$\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^n \leq \frac{x^n+y^n}{2}, \forall x, y \geq 0, n \geq 1.$$

Ví dụ 2.9 ([5]). *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k và với mọi số không âm $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ta đều có*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{2k} \leq n^{2k-1}(x_1^{2k} + x_2^{2k} + \cdots + x_n^{2k}).$$

Ví dụ 2.10 ([5]**Bất đẳng thức Nesbitt**). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

2.1.3 Các bất đẳng thức số học dạng không ràng buộc và ràng buộc

Định lý 2.3 ([9]). *Cho các $a_0, a_1, \cdots, a_n$ là các số thực không âm. Khi đó, ta có:*

$$\exp\Big[\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}\frac{a_k}{2^n}\Big] \leq \frac{1}{8^n}\Big[\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}\frac{e^{a_k}}{\Big(1+a_k\Big)^2}\Big]\Big[\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}(1+a_k)\Big]^2.$$

Định lý 2.4 ([9]). *Cho $p_1, p_2, \cdots, p_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $\sum_{k=1}^{j} = P_j$. Nếu $a_1, a_2, \cdots, a_n$ là các số thực dương khi đó:*

$$\Big[\prod_{k=1}^{n}\Big(a_k+\sqrt{1+a_k^2}\Big)^{p_k}\Big]^{\frac{1}{P_n}} \leq \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}p_k a_k+\sqrt{1+\Big(\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}p_k a_k\Big)^2}.$$

Hệ quả 2.5 ([9]). *Cho $a_1, a_2, \cdots, a_n$ là tập hợp các số thực dương. Khi đó:*

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(a_k+\sqrt{1+a_k^2}\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sqrt{n^2+\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)^2}\Big).$$

Hệ quả 2.6 ([9]). *Với mọi $n \geq 1$, ta có:*

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(T_k+\sqrt{1+T_k^2}\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\Big(T_{n+1}+\sqrt{n^2+T_{n+1}^2}\Big).$$

Ở đây T_n là số tam giác thứ n, và $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Định lý 2.5 ([9])**.** *Cho n là một số nguyên dương và l là số nguyên bất kì. Khi đó*

$$(F_1^l + F_2^l + \cdots + F_n^l)\Big[\frac{1}{F_1^{l-4}} + \frac{1}{F_2^{l-4}} + \cdots + \frac{1}{F_n^{l-4}}\Big] \geq F_n^2 F_{n+1}^2$$

Ở đây, F_n là số Fibonacci thứ n được xác định bởi $F_0 = 0, F_1 = 1$ và với mọi $n \geq 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Định lý 2.6 ([9])**.** *Cho các $p_1, p_2, \cdots, p_n \in [0; 1)$ là tập hợp các số thực thỏa mãn $\sum_{k=1}^{j} p_k = P_j$. Nếu các $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số thực dương sao cho $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} = 1$, khi đó:*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^{p_k}}\Big) \geq P_n^2.$$

Hệ quả 2.7 ([9])**.** *Nếu $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số thực dương sao cho*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

Khi đó

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^{\frac{1}{x_k}}}.$$

Định lý 2.7 ([9])**.** *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Khi đó ta có*

$$a^{a(a+2b)} \cdot b^{b(b+2c)} \cdot c^{c(c+2a)} \geq \frac{1}{3}.$$

Định lý 2.8 ([9])**.** *Cho a, b, c là các số dương sao cho $ab + bc + ca = abc$. Khi đó*

$$\sqrt[b]{a}\sqrt[c]{b}\sqrt[a]{c}(a + b + c) \geq abc.$$

2.1.4 Một số ứng dụng khác

Ví dụ 2.11 ([10]). *Cho $a, b, c > 0$ và*

$$a + b + c = 1,$$

Khi đó hãy tìm giá trị nhỏ nhất của

$$(a + \frac{1}{a})^{10} + \Big(b + \frac{1}{b}\Big)^{10} + \Big(c + \frac{1}{c}\Big)^{10}.$$

Ví dụ 2.12 ([3]). *Cho các số thực dương $x_1, x_2, \cdots, x_n$ có tổng bằng 1. Hãy tìm GTNN của*

$$S = \Big(x_1 + \frac{1}{x_1}\Big)^2 + \Big(x_2 + \frac{1}{x_2}\Big)^2 + \cdots + \Big(x_n + \frac{1}{x_n}\Big)^2.$$

Ví dụ 2.13 ([4]). *Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng:*

$$6\Big(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\Big) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}.$$

Ví dụ 2.14 ([4]). *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

Ví dụ 2.15 ([4]). *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Ví dụ 2.16. *Giả sử các số thực dương $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bằng 1. Chứng minh rằng:*

$$T = \frac{x_1}{\sqrt{x_1x_2 + x_2^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2x_3 + x_3^2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{x_nx_1 + x_1^2}} \geq \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 2.17. *Cho* $x, y, z > 0$ *. Chứng minh rằng:*

$$x^5 + y^5 + z^5 \leq x^5\sqrt{\frac{x^2}{yz}} + y^5\sqrt{\frac{y^2}{zx}} + z^5\sqrt{\frac{z^2}{xy}}.$$

Ví dụ 2.18. *Nếu* $a, b, c, d > 0$ *và*

$$c^2 + d^2 = (a^2 + b^2)^3,$$

Khi đó:

$$\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d} \geq 1.$$

Ví dụ 2.19. *Cho các số* $m, n, p \in \mathbb{R}^+$*. Chứng minh rằng:*

$$(ma + nb)^2 + (na + mb)^2 \leq (m^2 + n^2)(a^2 + b^2).$$

$$(ma + nb + pc)^2 + (na + pb + mc)^2 + (pa + mb + nc)^2$$

$$\leq 3(m^2 + n^2 + p^2)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ví dụ 2.20. *Cho các số* $m, n, a, b \in \mathbb{R}^+$*. Chứng minh rằng:*

$$(m + n)^2 ab \leq (ma + nb)(na + mb).$$

2.2 Một số ứng dụng trong hình học và lượng giác

2.2.1 Một số ứng dụng trong tam giác

Định lý 2.9 ([8])**.** *Cho* ABC *là một tam giác nhọn, khi đó:*

$$\pi \sin\sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{\pi}} \geq A \sin\sqrt{A} + B \sin\sqrt{B} + C \sin\sqrt{C}.$$

Hệ quả 2.8 ([8]). *Trong tam giác nhọn bất kì ABC , khi đó:*

$$\pi \sin \sqrt{\frac{AC + BA + CB}{\pi}} \geq A \sin \sqrt{C} + B \sin \sqrt{A} + C \sin \sqrt{B}.$$

Định lý 2.10 ([8]). *Cho a, b, c là các cạnh của tam giác ABC và s là nửa chu vi của tam giác, khi đó:*

$$(a+1)^a (b+1)^b (c+1)^c \geq \left(\frac{2s+3}{3}\right)^s.$$

Định lý 2.11 ([8]). *Cho a, b, c là các cạnh của tam giác ABC và x, y, z là các số dương. Khi đó:*

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{8s^3}{3(x+y+z)}$$

ở đây s là nửa chu vi của tam giác.

Hệ quả 2.9 ([8]). *Trong tam giác ABC bất kì với các kí hiệu thông thường, ta có:*

$$\frac{a^3}{\sin A} + \frac{b^3}{\sin B} + \frac{c^3}{\sin C} \geq \frac{8s^3}{3R}.$$

Hệ quả 2.10 ([8]). *Trong bất kì tam giác ABC, với các kí hiệu thông thường ta có:*

$$\frac{a^3}{l_a^2} + \frac{b^3}{l_b^2} + \frac{c^3}{l_c^2} \geq \frac{8s}{3}.$$

2.2.2 Một số dạng liên quan đến lượng giác

Ví dụ 2.21 ([5]). *Chứng minh trong một tam giác bất kì ta luôn có :*

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}.$$

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}.$$

Ví dụ 2.22 ([5])**.** *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để* $\triangle ABC$ *là một tam giác đều là các góc của nó thỏa mãn hệ thức*

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{1+\cos B}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{1+\cos C}=\sqrt{3}.$$

Ví dụ 2.23 ([5])**.** *Chứng minh rằng trong* $\triangle ABC$ *bất kì ta có*

$$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\le\sin\frac{A+3B}{4}\cdot\sin\frac{B+3C}{4}\cdot\sin\frac{C+3A}{4}.$$

Ví dụ 2.24. *Cho tam giác ABC bất kì. Chứng minh*

$$\sin A+\sin B+\sin C\le\cos(\frac{A+B}{4})+\cos(\frac{B+C}{4})+\cos(\frac{C+A}{4}).$$

$$\sin A+\sin B+\sin C\le\cos(\frac{A}{3}+10)+\cos(\frac{B}{3}+10)+\cos(\frac{C}{3}+10).$$

Ví dụ 2.25 ([2])**.** *Cho n góc* $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ *thỏa các điều kiện* $\alpha_i\in(0;\frac{\pi}{2})$, $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$ *và* $\sum_{i=1}^n\alpha_i=\pi$. *Chứng minh rằng*

$$\Big(n-\sum_{i=1}^n\tan^2\alpha_i\Big)\div\Big(n+\sum_{i=1}^n\tan^2\alpha_i\Big)\le\cos\frac{2\pi}{n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Kết luận

Qua một thời gian tìm hiểu, tiếp cận và nghiên cứu về lí thuyết hàm lồi, bất đẳng thức Jensen, các hệ quả của bất đẳng thức Jensen luận văn đã hoàn thành và đạt được mục tiêu nghiên cứu của đề tài với những kết quả chính của luận văn *"Một số vấn đề về bất đẳng thức Jensen và ứng dụng"*

Trong chương 1 luận văn đã thu được các kết quả sau:

- Trình bày khái niệm hàm lồi,lõm theo nghĩa Jensen, mô tả ý nghĩa hình học của nó đồng thời hệ thống các tính chất của hàm lồi, lõm.

- Trình bày các định lí cơ bản và đặc biệt là bất đẳng thức Jensen, dạng tổng quát của bất đẳng thức Jensen, các hệ quả của nó và một số mở rộng của bất đẳng thức Jensen.

Trong chương 2 luận văn tác giả trình bày một số ứng dụng của bất đẳng thức Jensen cho lớp các hàm lồi 2 lần khả vi quen thuộc trong chương trình toán phổ thông như các hàm nêu ở các ví dụ 1.1, 1.2 và cũng thu được các kết quả:

- Ứng dụng của bất đẳng thức Jensen trong đại số. Cụ thể luận văn đã chứng minh các bất đẳng thức cổ điển như bất đẳng thức Holder, Cauchy, Bunhiacowski, AM-GM. Chúng là hệ quả của các định lí 2.1, 2.2. Mà phép chứng minh của các định lí này hoàn toàn sử dụng bất đẳng thức Jensen cho các hàm lồi 2 lần khả vi quen thuộc như đã trình bày trong luận văn, bên cạnh đó luận văn cũng chứng minh một số bất đẳng thức quan trọng khác như các bất đẳng thức Young, trung bình lũy thừa, Nesbitt, các ứng dụng khác như tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Và đặc biệt luận văn đã làm rõ các kết quả về các bất đẳng thức số học ràng buộc và không ràng buộc trong bài báo [9].

- Ứng dụng của bất đẳng thức Jensen trong hình học. Trong phần này luận văn trình bày và làm rõ các kết quả gần đây của việc ứng dụng bất đẳng thức Jensen trong tam giác đã thu được các bất đẳng thức về các yếu tố trong tam giác như các góc trong tam giác định lí 2.10, giữa các cạnh và chu vi định lí 2.11, đặc biệt giữa các cạnh và các số dương bất kì định lí 2.12 và do đó các số dương bất kì này có thể thay thế bằng các yếu tố khác của tam giác như đường phân giác, sin của các góc trong tam giác, chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp....

- Ứng dụng của bất đẳng thức Jensen trong lượng giác. Trong phần này luận văn cũng đã hệ thống một số bất đẳng thức lượng giác cơ bản về các góc trong tam giác, sử dụng bất đẳng thức Jensen để chứng minh không dùng nhiều đến các phép biến đổi lượng giác phức tạp đặc biệt là ví dụ 2.24.

Và đặc biệt luận văn cũng gợi mở một số vấn đề để có thể đào sâu trong tương lai. Chẳng hạn như việc sử dụng bất đẳng thức Jensen đối với lớp hàm lồi nói chung không nhất thiết phải liên tục. Hoặc là việc sử dụng các điều kiện ràng buộc ban đầu của các biến trong giả thiết ban đầu của bất đẳng thức sẽ cho nhiều kết quả khác. Hay cũng có thể nghiên cứu cho lớp các hàm lồi khả vi n lần với $n > 2$...