

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG**

NGUYỄN VĂN NGHĨA

**MỘT SỐ VẤN ĐỀ
VỀ ĐA THỨC ĐỐI XỨNG VÀ
BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN**

**Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60. 46. 40**

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **NGND.GS.TSKH NGUYỄN VĂN MẬU**

Phản biện 1: TS. Nguyễn Ngọc Châu
Phản biện 2: PGS.TS Trần Đạo Đồng

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đà Nẵng vào
ngày ...28 ..tháng 05 .năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại :

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại Học Sư Phạm – Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong chương trình toán học phổ thông thì đa thức có vị trí rất quan trọng vì nó không những là một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của Đại số mà còn là một công cụ đắc lực của Giải tích trong Lý thuyết xấp xỉ, Lý thuyết biểu diễn, Lý thuyết nội suy,... . Trong các kì thi học sinh giỏi toán quốc gia và Olympic toán khu vực và quốc tế thì các bài toán về đa thức cũng thường được đề cập đến và được xem như những bài toán khó của bậc phổ thông.

Những lĩnh vực phức tạp của đại số đối với học sinh phổ thông thường là giải phương trình và hệ phương trình bậc cao, phân tích các đa thức nhiều biến bậc cao thành nhân tử, chứng minh các đẳng thức và bất đẳng thức chứa nhiều biến số v.v.. Một trường hợp quan trọng và thường gặp trong các bài toán của các lĩnh vực nói trên là khi các biến số của đa thức có vai trò như nhau. Chúng ta gọi đa thức trong trường hợp này là đa thức đối xứng. Luận văn "*Một số vấn đề về đa thức đối xứng và bất đẳng thức liên quan*" trình bày một số vấn đề liên quan đến nhiều bài toán khó có chứa yếu tố đối xứng nếu biết áp dụng lý thuyết về đa thức đối xứng sẽ làm cho bài toán trở thành đơn giản hơn.

Luận văn nhằm giới thiệu cơ sở lý thuyết của các đa thức đối xứng và những ứng dụng của nó trong đại số sơ cấp. Các vấn đề của lý thuyết được trình bày một cách đơn giản theo hướng quy nạp, từ trường hợp hai biến, ba biến, đến nhiều biến. Các ví dụ áp dụng cũng được trình bày từ đơn giản đến phức tạp. Các bài toán được trình bày trong phần này chủ yếu là các bài toán khó, nhiều bài toán được trích ra từ các đề thi vào trường chuyên, vô địch của các nước hoặc Olympic Toán quốc tế.

Đề tài quan tâm đến nhiều đối tượng, trong đó đa thức đại số và các vấn đề liên quan hoàn toàn phù hợp với thực tế mà bản thân đang công tác.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Luận văn "*Một số vấn đề về đa thức đối xứng và bất đẳng thức liên quan*" nhằm thể hiện rõ vai trò quan trọng của Giải tích và đại số trong khảo sát đa thức. Luận văn này là chuyên đề nhằm tổng quan về đa thức đối xứng thông qua các định nghĩa, định lí, các ví dụ và bài tập áp dụng.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS - TSKH Nguyễn Văn Mậu và các sách chuyên đề về đa thức, phương trình và hệ phương trình và các bài báo toán học viết về đa thức đối xứng, nhằm hệ thống các dạng toán về đa thức.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu gián tiếp qua các trang web
www.mathlinks.ro
www.mathnfriend.net
www.diendantoanhoc.net

Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu của giáo viên hướng dẫn, của các đồng nghiệp cũng như các bạn học viên trong lớp.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông.

Đề tài đóng góp thiết thực cho việc dạy và học đa thức đối xứng, phương trình, bất phương trình và bất đẳng thức trong trường THPT, đem lại niềm đam mê sáng tạo từ những bài toán cơ bản nhất.

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương.

Chương 1 : Trình bày các khái niệm, định lý cơ bản, các kết quả cần sử dụng về đa thức đối xứng hai biến. Trong chương này cũng trình bày một số ví dụ và bài toán về mối liên hệ giữa các đồng nhất thức đại số - lượng giác cũng như các ứng dụng của các đồng nhất thức đại số - lượng giác.

Chương 2 : Trình bày định lý cơ bản, các kết quả cần sử dụng về đa thức đối xứng ba biến. Trong chương này cũng trình bày một số ví dụ và bài toán về mối liên hệ giữa các đồng nhất thức đại số - lượng giác cũng như các ứng dụng của các đồng nhất thức đại số - lượng giác.

Chương 3 : Nêu một số dạng ước lượng và tính toán trên đa thức đối xứng nhiều biến trong áp dụng.

CHƯƠNG 1

ĐA THỨC ĐỐI XỨNG HAI BIẾN VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN

1.1. Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1. Một đơn thức $f(x, y)$ của các biểu thức độc lập x, y (có thể $x, y \in \mathbb{C}$) được hiểu là hàm số có dạng

$$f(x, y) = a_{kl}x^ky^l,$$

trong đó a_{kl} là hằng số, k, l là những số nguyên không âm.

Số a_{kl} được gọi là hệ số, $k+l$ được gọi là bậc của đơn thức $f(x, y)$, được ký hiệu là

$$\deg f(x, y) = \deg[a_{kl}x^ky^l] = k + l.$$

Các số k, l tương ứng được gọi là bậc của đơn thức đối với các biến x, y .

Ví dụ 1.1. $3x^4y^2$ là đơn thức có bậc là 6.

Định nghĩa 1.2. Hai đơn thức của các biến x, y được gọi là đồng dạng (tương tự) nếu bậc của biến x và y tương ứng ở 2 đơn thức là bằng nhau và hệ số của 2 đơn thức là khác nhau. Chúng có dạng : Ax^ky^l, Bx^ky^l ($A \neq B$).

Định nghĩa 1.3. Giả sử Ax^ky^l, Bx^my^n là 2 đơn thức của các biến x, y . Ta nói rằng đơn thức Ax^ky^l trội hơn đơn thức của Bx^my^n theo thứ tự của các biến x, y , nếu $k > m$, hoặc $k = m$ và $l > n$.

Định nghĩa 1.4. Một hàm số $P(x, y)$ được gọi là một đa thức theo các biến số x, y nếu nó có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của

hữu hạn các đơn thức: Vậy đa thức $P(x, y)$ có dạng

$$P(x, y) = \sum_{k+l \leq m} a_{kl} x^k y^l.$$

Bậc lớn nhất của các đơn thức được gọi là bậc của đa thức.

Định nghĩa 1.5. Đa thức $P(x, y)$ được gọi là đa thức đối xứng, nếu nó không thay đổi khi đổi chỗ của x và y , nghĩa là

$$P(x, y) = P(y, x).$$

Ví dụ 1.2. $P(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q(x, y) = x^2y + y^2x$ là các đa thức đối xứng của các biến x và y .

Định nghĩa 1.6. Các đa thức σ_j ($j = 1, 2$), trong đó

$$\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$$

được gọi là các đa thức "đối xứng cơ sở" của các biến x, y .

Định nghĩa 1.7. Đa thức đối xứng $f(x, y)$ được gọi là thuần nhất bậc m , nếu:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y), \forall t \neq 0.$$

1.2. Tổng lũy thừa và công thức Waring

Các đa thức $s_k = x^k + y^k$, ($k = 1, 2, \dots$) được gọi là các tổng lũy thừa bậc k của các biến x, y .

Định lý 1.1 (Công thức Newton). Tính s_k theo s_{k-1} và s_{k-2}

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}. \quad (1.1)$$

Nhận xét 1.1. Với việc vận dụng công thức Newton ta hoàn toàn có thể biểu diễn mỗi tổng lũy thừa $s_m = x^m + y^m$ dưới dạng một đa thức bậc m của σ_1 và σ_2 .

Ví dụ 1.3. 1) $s_1 = x + y = \sigma_1$,

$$2) s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

$$3) s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$

$$4) s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2,$$

$$5) s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

Việc tính tổng lũy thừa s_k theo công thức lặp (1.1) không thuận tiện vì phải biết trước các tổng lũy thừa s_{k-1} và s_{k-2} .

Định lý 1.2 (Công thức Waring). *Tổng lũy thừa s_k được biểu diễn qua các đa thức đối xứng sơ sở σ_1, σ_2 theo công thức:*

$$\frac{s_k}{k} = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m!(k-2m)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m. \quad (1.2)$$

1.3. Các định lý cơ bản về đa thức đối xứng hai biến

Định lý 1.3 (định lý cơ bản). *Mọi đa thức đối xứng $P(x, y)$ của các biến x, y đều có thể biểu diễn được dưới dạng đa thức $p(\sigma_1, \sigma_2)$ theo các biến $\sigma_1 = x + y$ và $\sigma_2 = xy$ nghĩa là*

$$P(x, y) = p(\sigma_1, \sigma_2)$$

Định lý 1.4 (Tính duy nhất). *Nếu các đa thức $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ và $\psi(\sigma_1, \sigma_2)$ khi thay $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$ cho ta cùng một đa thức đối xứng $P(xy)$, thì chúng phải trùng nhau, nghĩa là $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \psi(\sigma_1, \sigma_2)$.*

Ví dụ 1.4. Biểu diễn đa thức đối xứng

$$f(x, y) = x^5 + x^4y + x^3y^3 + xy^4 + y^5$$

Giải. Dùng công thức Waring ta có

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^5 + y^5) + xy(x^3 + y^3) + (xy)^3 \\ &= S_5 + \sigma_2 S_3 + \sigma_2^3 \\ &= (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) + \sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) + \sigma_2^3 \\ &= \sigma_1^5 - 4\sigma_1^3\sigma_2 \end{aligned}$$

1.4. Tam thức bậc 2 và áp dụng

Định lý 1.5 (Định lý Viète thuận). *Xét phương trình bậc hai*

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0).$$

Nếu phương trình trên có 2 nghiệm x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Định lý 1.6 (Định lý đảo Viète). Nếu 2 số x, y thỏa điều kiện

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$$

thì x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2 - pt + q = 0.$$

1.5. Bất đẳng thức sinh bởi đa thức đối xứng 2 biến

Mệnh đề 1.1. Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Đặt $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$ khi đó

$$\sigma_1^2 \geq 4\sigma_2. \quad (1.3)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Mệnh đề 1.2. Nếu $\sigma_1 \geq 0$, thì với mọi n nguyên dương có bất đẳng thức

$$S_n \geq \frac{\sigma_1^n}{2^{n-1}} \quad (1.4)$$

trong đó S_n, σ_1 tương ứng là tổng lũy thừa và đa thức đối xứng cơ sở bậc một.

Mệnh đề 1.3. Với các ký hiệu như ở mệnh đề 2 ta có

$$2S_{m+n} \geq S_m S_n. \quad (1.5)$$

Mệnh đề 1.4. Cho đa thức đối xứng với hệ số dương $f(x_1, x_2)$. Khi đó, nếu x_1, x_2, y_1, y_2 là các số dương thỏa điều kiện

$$\begin{cases} x_1 x_2 \leq y_1 y_2 \\ x_1^n + x_2^n \leq y_1^n + y_2^n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

thì $f(x_1, x_2) \leq f(y_1, y_2)$.

CHƯƠNG 2

ĐA THỨC ĐỐI XỨNG BA BIẾN VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN

2.1. Định nghĩa cơ bản

Định nghĩa 2.1. Một đơn thức $\varphi(x, y, z)$ của các biến x, y, z được hiểu là hàm số có dạng

$$\varphi(x, y, z) = a_{klm}x^k y^l z^m,$$

trong đó $k, l, m \in \mathbb{N}$ được gọi là bậc của các biến x, y, z ; số $a_{klm} \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ được gọi là hệ số của đơn thức, còn số $k + l + m$ được gọi là bậc của đơn thức $\varphi(x, y, z)$.

Định nghĩa 2.2. Một hàm số $P(x, y, z)$ của các biến x, y, z được gọi là một đa thức nếu nó có thể biểu diễn ở dạng tổng hữu hạn các đơn thức:

$$P(x, y, z) = \sum_{k+l+m \leq n} a_{klm}x^k y^l z^m.$$

bậc lớn nhất của đơn thức trong đa thức được gọi là bậc của đa thức.

Định nghĩa 2.3. Đa thức $P(x, y, z)$ được gọi là đa thức đối xứng nếu nó không thay đổi với mọi hoán vị của x, y, z nghĩa là,

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= P(x, z, y) = P(y, x, z) = \\ &= P(y, z, x) = P(z, x, y) = P(z, y, x) \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.4. Đa thức $f(x, y, z)$ được gọi là thuần nhất bậc m nếu:

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z), \forall t \neq 0$$

Định nghĩa 2.5. *Các đa thức*

$$\begin{cases} \sigma_1 = x + y + z \\ \sigma_2 = xy + yz + zx \\ \sigma_3 = xyz \end{cases}$$

được gọi là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến x, y, z

Định nghĩa 2.6. *Các đa thức*

$$S_k = x^k + y^k + z^k, (k = 1, 2, 3...)$$

được gọi là tổng lũy thừa bậc k của các biến x, y, z .

Định nghĩa 2.7. *Các biểu thức*

$$S_{(-k)} = \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k}, (k = 1, 2, 3....)$$

được gọi là tổng nghịch đảo của các biến x, y, z .

Định nghĩa 2.8. *Đa thức đối xứng với các số hạng tối thiểu, một trong các số hạng của nó là đơn thức $x^k y^l z^m$ được gọi là quỹ đạo của đơn thức $x^k y^l z^m$ và được ký hiệu là $O(x^k y^l z^m)$.*

Muốn tìm quỹ đạo của một đơn thức $x^k y^l z^m$ cần bổ sung vào đơn thức tất cả hoán vị của x, y, z . Với $k \neq l \neq m$, ta có

$$O(x^k y^l z^m) = x^k y^l z^m + x^k y^m z^l + x^l y^m z^k + x^l y^k z^m + x^m y^l z^k + x^m y^k z^l.$$

Ví dụ 2.1.

$$O(x^5 y^2 z) = x^5 y^2 z + x^5 y z^2 + x^2 y^5 z + x^2 y z^5 + x y^5 z^2 + x y^2 z^5.$$

2.2. Các định lý cơ bản của đa thức đối xứng ba biến

Định lý 2.1. *(Công thức Newton). Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có hệ thức*

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \sigma_3 S_{k-3}. \quad (2.1)$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
 S_k &= \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \sigma_3 S_{k-3} = (x + y + z)(x^{k-1} + y^{k-1} + z^{k-1}) - \\
 &\quad - (xy + yz + zx)(x^{k-2} + y^{k-2} + z^{k-2}) + xyz(x^{k-3} + y^{k-3} + z^{k-3}) = \\
 &= (x^k + y^k + z^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^{k-1}z + yx^{k-1} + z^{k-1}x + zx^{k-1}) - \\
 &\quad - (x^{k-1}y + y^{k-1}x + x^{k-1}z + z^{k-1}x + y^{k-1}z + z^{k-1}y + xyz^{k-2} + \\
 &\quad + xzy^{k-2} + yzx^{k-2}) + (xyz^{k-2} + xzy^{k-2} + yzx^{k-2}) \\
 &= x^k + y^k + z^k = S_k
 \end{aligned}$$

Định lý 2.2. *Mỗi tổng lũy thừa $S_k = x^k + y^k + z^k$ đều có thể biểu diễn dưới dạng một đa thức bậc n theo các biến $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.*

Nhận xét 2.1. Mọi quỹ đạo của đơn thức đều có thể biểu diễn dưới dạng biểu thức gồm các đa thức đối xứng cơ bản

Định lý 2.3. *Mọi đa thức đối xứng ba biến x, y, z đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức theo các biến $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx, \sigma_3 = xyz$.*

Định lý 2.4. *(Tính duy nhất). Nếu hai đa thức $\varphi(t, u, v)$ và $\psi(t, u, v)$ khi thay $t = \sigma_1 = x + y + z, u = \sigma_2 = xy + yz + zx, v = \sigma_3 = xyz$ cho ta cùng một đa thức đối xứng $P(x, y, z)$ thì chúng phải đồng nhất bằng nhau.*

Mệnh đề 2.1. Cho $f_m(x, y, z)$ là một đa thức đối xứng thuần nhất bậc m . Khi đó $f_m(x, y, z)$ được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở theo công thức.

$$f_m(x, y, z) = \sum_{i+2j+3k=m} a_{ijk} \sigma_1^i \sigma_2^j \sigma_3^k, (i, j, k \in \mathbb{N}). \quad (2.2)$$

Mệnh đề trên được suy ra trực tiếp từ các định lý trên. Ta có một số ví dụ riêng cho mệnh đề này $f_1(x, y, z) = a_1 \sigma_1$

$$f_2(x, y, z) = a_1 \sigma_1^2 + a_2 \sigma_2,$$

$$f_3(x, y, z) = a_1 \sigma_1^3 + a_2 \sigma_1 \sigma_2 + a_3 \sigma_3,$$

$$f_4(x, y, z) = a_1 \sigma_1^4 + a_2 \sigma_1^2 \sigma_2 + a_3 \sigma_1 \sigma_3 + a_4 \sigma_2^2$$

.....

Trong đó các số $a_i, (i = 1, 2, \dots)$ là được xác định duy nhất.

Ta có thể xác định $a_i (i = 1, 2, \dots)$ bằng phương pháp là cho x, y, z nhận các giá trị cụ thể nào đó, thiết lập hệ ẩn là $a_i, (i = 1, 2, \dots)$ giải hệ ta được a_i .

2.3. Bất đẳng thức sinh bởi đa thức đối xứng ba biến

Trong phần này ta đồng nhất ký hiệu của đa thức đối xứng cơ sở ba biến như sau

$$\begin{cases} \sigma_1 = x + y + z \\ \sigma_2 = xy + yz + zx \\ \sigma_3 = xyz \end{cases}$$

2.3.1. Một số mệnh đề bất đẳng thức

Mệnh đề 2.2. Với các số thực x, y, z có các bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} a) \sigma_1^2 &\geq 3\sigma_2 \\ b) \sigma_2^2 &\geq 3\sigma_1\sigma_3 \end{aligned}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

Mệnh đề 2.3. Với các số dương x, y, z ta có.

$$\begin{aligned} a) \sigma_1\sigma_2 &\geq 9\sigma_3 \\ b) \sigma_1^3 &\geq 27\sigma_3 \\ c) \sigma_2^3 &\geq 27\sigma_3^2 \end{aligned}$$

Mệnh đề 2.4. Với các số dương x, y, z ta có các bất đẳng thức.

$$\begin{aligned} a) \sigma_1^2\sigma_2 &\geq 3\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 \\ b) \sigma_1\sigma_2^2 &\geq 2\sigma_1^2\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_3 \\ c) \sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_2^3 &\geq 6\sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned}$$

Mệnh đề 2.5. (Schur). Giả sử x, y, z là các số thực không âm. Khi đó với mọi $r > 0$ thì

$$f_r(x, y, z) = x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-y)(z-x) \geq 0$$

Mệnh đề 2.6. Với các số thực dương x, y, z có các bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} a) 2\sigma_1^3 + 9\sigma_3 &\geq 7\sigma_1\sigma_2, \\ b) \sigma_1^4 + 3\sigma_2^2 &\geq 4\sigma_1^2\sigma_2, \\ c) \sigma_2^3 + 9\sigma_3^2 &\geq 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3, \\ d) 2\sigma_2^3 + 9\sigma_3^2 &\geq 7\sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned}$$

Mệnh đề 2.7. Với các số không âm (x, y, z) có bất đẳng thức

$$S_k \geq \frac{\sigma_1^k}{3^{k-1}}, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Trong đó $S_k = x^k + y^k + z^k$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

Mệnh đề 2.8. Với các số không âm x, y, z và $S_k = x^k + y^k + z^k$ với $k = 1, 2, \dots$ có bất đẳng thức sau

$$S_m S_n \leq 3S_{m+n} \quad (2.3)$$

2.3.2. Vận dụng chứng minh bất đẳng thức.

Bài toán 2.1. Cho x, y, z là các số không âm thỏa $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$7(xy + yz + zx) \leq 2 + 9xyz$$

Bài toán 2.2. Cho các số dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx) \left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4}.$$

Bài toán 2.3. Giả sử a, b, c là các cạnh của 1 tam giác với diện tích bằng S . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

Bài toán 2.4. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài toán 2.5. Cho x, y, z là các số dương thoả mãn điều kiện $x + y + z = 3a$ chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)^n + \left(y + \frac{1}{z}\right)^n + \left(z + \frac{1}{x}\right)^n \geq 3\left(a + \frac{1}{a}\right)^n.$$

CHƯƠNG 3

ƯỚC LƯỢNG VÀ TÍNH TOÁN TRÊN ĐA THỨC ĐỐI XỨNG NHIỀU BIẾN

3.1. Các khái niệm cơ bản của đa thức đối xứng nhiều biến

Định nghĩa 3.1. Giả sử $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. Đa thức $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được hiểu là một hàm số có dạng $f(x) = \sum_{k=0}^m M_k(x)$, trong đó

$$M_k(x) = M_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=k} a_{j_1 j_2 \dots j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n},$$

$$j_i \in \mathbb{N} (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Định nghĩa 3.2. Đa thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là đối xứng nếu nó không đổi khi đổi chỗ giữa hai biến bất kỳ

Định nghĩa 3.3. Đa thức đối xứng $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là thuần nhất bậc m , nếu

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall t \neq 0.$$

Định nghĩa 3.4. (Đơn thức trội) Cho hai đơn thức $Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ và $Bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}$. Ta nói đơn thức thứ nhất trội hơn đơn thức thứ hai nếu $k_1 \geq l_1$ và $k_2 > l_2$; , , , , ; hoặc $k_1 = l_1$; $k_2 = l_2$;; $k_s = l_s$ và $k_{s+1} > l_{s+1}$.

Định nghĩa 3.5. (*Đa thức đối xứng cơ bản*) Ký hiệu

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sigma_0 = 1$$

$$\sigma_1(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sigma_2(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

$$\sigma_3(x) = \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} x_i x_j x_l$$

.....

$$\sigma_n(x) = x_1 x_2 \dots x_n$$

Ta gọi S_k là tổng lũy thừa, còn $\sigma_r(x)$, ($r = 1, 2, 3, \dots, n$) là các đa thức đối xứng cơ sở bậc r

Ví dụ 3.1. Với $n = 4$ ta có

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4$$

$$\sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Số các số hạng trong đa thức đối xứng bậc k : σ_k bằng

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3.2. Các định lý cơ bản của đa thức đối xứng nhiều biến

Định lý 3.1. (*Công thức truy hồi Newton*). Biểu diễn các tổng lũy thừa qua các đa thức đối xứng cơ sở.

Các tổng lũy thừa và các đa thức đối xứng cơ sở liên hệ với nhau theo công thức.

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \dots + (-1)^{i-1} \sigma_i S_{n-i} + \dots + (-1)^{k-1} k \sigma_k. \quad (3.1)$$

Định lý 3.2. (Định lý tồn tại.) Giả sử $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}....x_n^{k_n}$ là một đa thức đối xứng của n biến. Khi đó tồn tại đa thức $\phi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, sao cho nếu vào chỗ $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ thay các biểu thức

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(x) = x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{i=1}^n x_i \\ \sigma_2(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \\ \sigma_3(x) = \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} x_i x_j x_l \\ \\ \sigma_n(x) = x_1 x_2 x_n \end{array} \right.$$

thì ta nhận được đa thức $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ta gọi $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ là các đa thức đối xứng cơ sở của các số $x_1, x_2, ..., x_n$

3.3. Bất đẳng thức sinh bởi các đa thức đối xứng

Phần này ta nghiên cứu một số bài toán bất đẳng thức chứa nhiều biến số (có thể n biến).

3.3.1. Định lý Rolle và ứng dụng

Định lý 3.3. Giả sử hàm số $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trong khoảng (a, b) . Khi đó, nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất 1 điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Hệ quả 3.1. Giả sử $P(x) = 0$ là đa thức bậc n trên trường số thực có n nghiệm thực $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ thì đa thức đạo hàm $P'(x) = 0$ có $n - 1$ nghiệm thực $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ sao cho $x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq ... \leq x_{n-1} \leq y_{n-1} \leq x_n$.

Nhận xét 3.1. Ký hiệu $\sigma_{k,n} = \sigma_{k,n}(x)$ là đa thức đối xứng cơ sở của bộ số thực $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và xét đa thức

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2)...(t - x_n)$$

hay là

$$\begin{aligned} f(t) = & t^n - \sigma_{1,n}(x)t^{n-1} + \sigma_{2,n}(x)t^{n-2} - \\ & + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1,n}(x)t + (-1)^n\sigma_n(x). \end{aligned}$$

không mất tính tổng quát, ta giả thiết rằng $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Giả sử $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ là các nghiệm của $f'(t) = 0$. từ định lý Rolle suy ra

$$x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq y_{n-1} \leq x_n.$$

Ta có

$$f'(t) = nt^{n-1} - (n-1)\sigma_{1,n}(x)t^{n-2} + (n-2)\sigma_{2,n}(x)t^{n-3} - \dots \dots \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1,n}(x).$$

vì $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ là nghiệm của $f'(t) = 0$, nên theo Viete ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1,n-1}(y) = y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} = \frac{n-1}{n}\sigma_{1,n}(x), \\ \sigma_{2,n-1}(y) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} y_i y_j = \frac{n-2}{n}\sigma_{2,n}(x), \\ \\ \sigma_{n-1,n-1}(y) = y_1 y_2 \dots y_{n-1} = \frac{1}{n}\sigma_{n-1,n}(x) \end{array} \right.$$

Như vậy ta có công thức

$$\sigma_{k,n-1}(y) = \frac{n-k}{n} \sigma_{k,n}(x), (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{v\`a} \quad \sigma_{0,n} = 1 \quad (3.2)$$

Ý nghĩa của công thức trên là từ các bất đẳng thức có số biến ít hơn ta có thể sinh ra các bất đẳng thức mới với số biến hơn 1 bằng cách. Từ bất đẳng thức có $n - 1$ biến ban đầu ta chuyển về bất đẳng thức có n biến

3.3.2. Một số mệnh đề sử dụng để chứng minh các bất đẳng thức

Mệnh đề 3.1. Với đa thức đối xứng $n \geq 2$ biến thực $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ta có bất đẳng thức

$$\sigma_1^2(x) \geq \frac{2n}{n-1} \sigma_2(x). \quad (3.3)$$

Mệnh đề 3.2. Với mọi bộ số không âm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ta có bất đẳng thức.

$$\sigma_1(x)\sigma_{n-1}(x) \geq n^2\sigma_n(x) \quad (3.4)$$

Mệnh đề 3.3. Với mọi bộ số thực không âm $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, và các bất đẳng thức đối xứng cơ sở σ_k , ($k = 1, 2, 3, 4$)

Ta có các bất đẳng thức sau

$$1)\sigma_1^2 \geq \frac{8}{3}\sigma_2, \quad 2)\sigma_1\sigma_3 \geq 16\sigma_4, \quad 3)\sigma_2^2 \geq 36\sigma_4,$$

Mệnh đề 3.4. Với bộ số không âm x_1, x_2, x_3, x_4 và các đa thức đối xứng cơ sở σ_k , ($k = 1, 2, 3, 4$)

Ta có các bất đẳng thức sau.

$$\begin{aligned} 4)\sigma_2^2 &\geq \frac{9}{4}\sigma_1\sigma_3, & 5)\sigma_1\sigma_2 &\geq 6\sigma_3, & 6)\sigma_2^3 &\geq \frac{27}{2}\sigma_3^2, \\ 7)9\sigma_1^2\sigma_2 &\geq 18\sigma_1\sigma_3 + 16\sigma_2^2, & 8)2\sigma_1\sigma_2^2 &\geq 3\sigma_1^2\sigma_3 + 4\sigma_2\sigma_3, \\ 9)27\sigma_1^3\sigma_3 + 32\sigma_2^3 &\geq 144\sigma_1\sigma_2\sigma_3, & 10)9\sigma_1^3 + 48\sigma_3 &\geq 32\sigma_1\sigma_2. \end{aligned}$$

Mệnh đề 3.5. Với bộ số không âm x_1, x_2, x_3, x_4 và các đa thức đối xứng cơ sở σ_k , ($k = 1, 2, 3, 4$)

Ta có các bất đẳng thức sau.

$$\begin{aligned} 11)\sigma_3^2 &\geq \frac{8}{3}\sigma_2\sigma_4, & 12)\sigma_2\sigma_3 &\geq 6\sigma_1\sigma_4, & 13)\sigma_1^3 &\geq 16\sigma_3, \\ 14)3\sigma_3^2 + 3\sigma_1^2\sigma_4 &\geq 16\sigma_2\sigma_4, & 15)3\sigma_1^4 + 3\sigma_1\sigma_3 &\geq 8\sigma_1^2\sigma_2 + 48\sigma_4. \end{aligned}$$

Kết hợp hệ quả của định lý Rolle và những mệnh đề trên ta có thể sáng tạo ra nhiều bất đẳng thức với số biến nhiều hơn từ những bất đẳng thức của mệnh đề trên.

Ví dụ 3.2. Cho 5 số y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 thoả $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 5$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4} + \frac{1}{y_5}\right)^2 + 20\frac{1}{y_1y_2y_3y_4y_5} \geq 4 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \frac{1}{y_iy_j}.$$

Nhận xét 3.2. Ta hoàn toàn tương tự ví dụ trên có thể làm bài toán suy ngược, từ những bất đẳng thức đã có với k biến, có thể chuyển về bất đẳng thức của những đa thức đối xứng cơ sở rồi vận dụng công thức (3.4) thay thế đa thức đối xứng cơ sở k biến bởi những đa thức đối xứng cơ sở $k+1$ hoặc $k-1$ biến. Ta nhận được bất đẳng thức mới với số biến nhiều hơn (hoặc ít hơn)

3.3.3. Bất đẳng thức chứa các đa thức đối xứng đồng bậc

Với khái niệm đa thức đối xứng đồng bậc n biến số ở trên, ta xét một số bài toán sau.

Bài toán 3.1. Với Mỗi dãy số $z_1, z_2, \dots$ ta kí hiệu

$$\sigma_1(z_1, z_2, \dots, z_k) = z_1 + z_2 + \dots + z_k, k \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\sigma_2(z_1, z_2, \dots, z_k) = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{k-1} z_k, k \in \mathbb{Z}^+.$$

Cho hai dãy số giảm và không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$ và $a_1, a_2, \dots, a_n$ và số $n \in \mathbb{Z}^+$ thoả mãn điều kiện

$$\sigma_1(x_1) \geq \sigma_1(a_1),$$

$$\sigma_1(x_1, x_2) \geq \sigma_1(a_1, a_2),$$

.....

$$\sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \geq \sigma_1(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}),$$

$$\sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \sigma_1(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

Chúng minh rằng

$$\sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \sigma_2(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Bài toán 3.2. Với mỗi dãy các số $z_1, z_2, \dots$ ta ký hiệu

$$\sigma_1(z_1, z_2, \dots, z_k) = z_1 + z_2 + \dots + z_k, k \in \mathbb{R}^+.$$

Cho đa thức $f(x)$ có $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và cho hai dãy số giảm không âm $x_1, x_2, \dots$ và $a_1, a_2, \dots$ và số $n \in \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện

$$\sigma_1(x_1) \geq \sigma_1(a_1)$$

$$\sigma_1(x_1, x_2) \geq \sigma_1(a_1, a_2)$$

.....

$$\sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \geq \sigma_1(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

$$\sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \sigma_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

. Chúng minh rằng

$$\sigma_1(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \geq \sigma_1(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)).$$

Nhận xét 3.3. Ta hoàn toàn có thể tự chọn một hàm $f(x) = \alpha.x^\beta$ với $\alpha > 0, \beta > 1$ thì $f''(x) = \alpha.\beta.(\beta - 1).x^{\beta-2} > 0$ kết hợp với một bộ số không âm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và dãy số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ bất kỳ thỏa điều kiện giả thiết bài toán 3.2 thì ta đã có 1 bài toán mới, mà phương pháp chứng minh hoàn toàn tương tự.

Một số bài toán bất đẳng thức lượng giác, lượng giác trong tam giác cũng có thể áp dụng bài toán 3.2 để giải.

Ví dụ 3.3. Cho tam giác $\triangle ABC$ không nhọn. Chứng minh rằng

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 1 + \sqrt{2}$$

Ví dụ 3.4. Cho tam giác $\triangle ABC$ không nhọn. Chứng minh rằng

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 2\sqrt{2} - 1$$

Nhận xét 3.4. Bài toán 3.2 là một công cụ để ta có thể tạo ra nhiều bất đẳng thức mới với 2, 3, ..., n biến số bằng một giả thiết hợp lý và chọn hàm $f(x)$ có $f''(x) > 0$.

Với những bài toán bất đẳng thức mà có giả thiết có dạng giống giả thiết trên thì ta có thể nghĩ ngay đến phương pháp giải áp dụng bài 3.2, điều quan trọng ở đây là có nhiều bài toán ta không thể nhận biết ngay lập tức hàm $f(x)$ mà phải thông qua nhiều bước biến đổi tương đương ta mới có được hàm $f(x)$ để vận dụng.

3.3.4. Bất đẳng thức giữa các hàm đối xứng

Bài toán 3.3. Xét bộ số dương $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ chứng minh rằng

$$\frac{\sigma_2(x+y)}{\sigma_1(x+y)} - \frac{\sigma_2(x)}{\sigma_1(x)} - \frac{\sigma_2(y)}{\sigma_1(y)} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n y_j - y_i \sum_{j=1}^n x_j \right)^2}{2\sigma_1(x+y)\sigma_1(x)\sigma_1(y)}. \quad (3.5)$$

Hệ quả 3.2. Giả sử $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ là hai bộ số dương.

Khi đó từ (3.5) và (??) ta suy ra

$$\sigma_2(x+y) = \sigma_2(x) + \sigma_2(y), \quad \frac{\sigma_2(x+y)}{\sigma_1(x+y)} \geq \frac{\sigma_2(x)}{\sigma_1(x)} + \frac{\sigma_2(y)}{\sigma_1(y)} \quad (3.6)$$

Bài toán 3.4. Chứng minh rằng nếu

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ là bộ số n biến số dương, $r = 2, 3, \dots, n$. Khi đó

$$\frac{\sigma_r(x+y)}{\sigma_{r-1}(x+y)} \geq \frac{\sigma_r(x)}{\sigma_{r-1}(x)} + \frac{\sigma_r(y)}{\sigma_{r-1}(y)} \quad (3.7)$$

Bài toán 3.5. Chứng minh rằng nếu

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ là bộ số n biến số dương thì

$$[\sigma_r(x+y)]^{\frac{1}{r}} > [\sigma_r(x)]^{\frac{1}{r}} + [\sigma_r(y)]^{\frac{1}{r}} \quad (3.8)$$

Bài toán 3.6. Cho $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ là các số thực dương. Đặt $p_k = \frac{k!(n-k)!}{n!} \sigma_k$ và $p_0 = 1, \sigma_k = \sigma_k(a), p_k = p_k(a)$. Chứng minh rằng

$$p_{k-1}p_{k+1} \leq p_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (1)$$

Bài toán 3.7. Cho $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ là các số thực dương và không đồng thời bằng nhau. Đặt $p_k = \frac{k!(n-k)!}{n!} \sigma_k$ và $p_0 = 1, \sigma_k = \sigma_k(a), p_k = p_k(a)$. Chứng minh rằng

$$\sigma_{r-1}\sigma_{r+1} < (\sigma_r)^2$$

Nhận xét 3.5. Từ những bài toán trên ta có thể sáng tạo ra nhiều bất đẳng thức mới, bằng phương pháp chọn một bộ số n biến bất kỳ $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $r \leq n$ tùy ý ta có bất đẳng thức theo các đa thức đối xứng cơ sở, thay các đa thức đối xứng cơ sở bởi bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thì có bất đẳng thức mới

Để bài toán thêm phần phức tạp ta cho vào giả thiết một điều kiện bất kỳ của bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

KẾT LUẬN

Các kết quả chính của luận văn "*Một số vấn đề về đa thức đối xứng và bất đẳng thức liên quan*" đã tập trung nghiên cứu, trình bày một số vấn đề:

- Trình bày các phương pháp chứng minh và các tính chất của đa thức đối xứng 2, 3 hoặc n biến thông qua một số tính chất và mệnh đề.

- Khảo sát vấn đề biểu diễn đa thức đối xứng chứa n biến theo các đa thức đối xứng cơ bản của n biến, từ đó vận dụng các tính chất đã được chứng minh về đa thức đối xứng cơ bản để suy ra các tính chất của đa thức đã cho. ứng với một đa thức đối xứng bất kỳ thì ta đều tìm được thuật toán chuyển nó về một đa thức chứa các đa thức đối xứng cơ bản

- Trình bày định lý Rolle đối với đa thức thực: Nếu đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có k nghiệm thực thì đa thức $P'(x)$ có ít nhất $k - 1$ nghiệm thực và hệ quả của định lý Rolle. Từ đó, nêu phương pháp chứng minh bất đẳng thức k biến, bằng cách vận dụng một bất đẳng thức đơn giản đã được chứng minh đúng với số biến $(k - 1)$ hoặc $(k + 1)$ rồi kết hợp hệ quả định lý Rolle chuyển về bất đẳng thức (k) biến mà ta cần chứng minh.

- Trình bày một số bài toán về bất đẳng thức tổng quát k biến được biểu diễn dưới dạng các đa thức đối xứng cơ bản. Từ đó, nêu cách sáng tạo nhiều bất đẳng thức mới với số biến cụ thể $k = (2, 3, 4, ..)$ tùy theo độ phức tạp của bài toán mà ta cần trình bày.

Luận văn là một tài liệu chuyên đề về đa thức đối xứng và ứng dụng giải toán bất đẳng thức .