

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Nguyễn Ngọc Duy Khương

**NGHIỆM DƯỠNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHẦN
TRUNG HÒA ĐỐI SỐ LỆCH**

Chuyên ngành : **Toán Giải tích**

Mã số : **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. LÊ HOÀN HÓA

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn của mình, tôi đã nhận được rất nhiều sự quan tâm, giúp đỡ, động viên của quý thầy cô trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, của gia đình và bạn bè đồng nghiệp.

Đầu tiên tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc và chân thành nhất đến PGS. TS. Lê Hoàn Hóa, người đã tận tình hướng dẫn, có những ý kiến đóng góp quý báu giúp tôi hoàn thành tốt luận văn của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý thầy cô trong Hội đồng chấm luận văn đã dành thời gian quý báu và những góp ý sâu sắc cho buổi bảo vệ luận văn của tôi.

Tôi xin cảm ơn tất cả quý thầy cô Khoa Toán – Tin trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã tận tình hướng dẫn tôi trong suốt khóa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ủy ban nhân dân Tỉnh Tiền Giang, Sở Nội vụ, Sở Giáo dục và Đào tạo Tiền Giang, Quý thầy cô phòng Sau đại học trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Ban giám hiệu trường THPT Vĩnh Kim đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi học tập và hoàn thành luận văn.

Tôi xin cảm ơn Quý thầy cô, các bạn bè đồng nghiệp trường THPT Vĩnh Kim, các bạn học viên cao học Toán K18 đã luôn động viên, khuyến khích, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập.

Sau cùng tôi xin gửi tất cả tình cảm yêu thương và lòng biết ơn sâu sắc đến gia đình tôi, những người thân yêu của tôi đã tạo niềm tin, là chỗ dựa vững chắc giúp tôi học tập và hoàn thành tốt luận văn của mình.

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 8 năm 2010

Nguyễn Ngọc Duy Khương

LỜI CAM ĐOAN

Trong quá trình làm luận văn này, tôi đã nghiên cứu, tìm hiểu và tham khảo ở sách vở, các bài báo toán học của các nhà khoa học và luận văn của các khóa trước, tôi có sử dụng một số kết quả đã được chứng minh để hoàn thành tốt luận văn của mình.

Nhưng tôi xin cam đoan không sao chép luận văn đã có và xin hoàn toàn chịu mọi trách nhiệm với lời cam đoan của mình.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Lý thuyết phương trình vi phân đóng vai trò quan trọng trong ứng dụng thực tiễn của Toán học. Hầu hết các quá trình tự nhiên đều tuân thủ theo một qui luật nào đó mà phương trình vi phân có thể mô tả được. Bằng chứng là các ngành Toán học, Cơ học, Vật lý, Hóa học, Sinh vật, Kinh tế, Sinh thái môi trường... và Xã hội học đều liên quan đến phương trình vi phân. Vì thế phương trình vi phân là một môn học cần thiết cho hầu hết các ngành ở bậc cao đẳng và đại học. Một trong những vấn đề mà các nhà toán học đã, đang và sẽ còn nghiên cứu về phương trình vi phân là *nghiệm của phương trình vi phân trung hòa đối số lệch*. Hiểu được tầm quan trọng của vấn đề trên nên tôi chọn đề tài: “**Nghiệm dương của phương trình vi phân trung hòa đối số lệch**” để nghiên cứu tìm hiểu sâu hơn về vai trò và ứng dụng của nó trong cuộc sống và trong các lĩnh vực liên quan.

2. Mục đích:

Mục đích của luận văn này là nghiên cứu về tính ổn định của nghiệm và nghiệm dương của phương trình vi phân tuyến tính trung hòa đối số lệch để chứng tỏ lý thuyết ổn định sẽ được sử dụng như thế nào, như là một công cụ trong việc thiết lập những kết quả ổn định của phương trình vi phân về bản chất khác.

3. Đối tượng, phạm vi và phương pháp nghiên cứu:

Trong phạm vi nghiên cứu của luận văn này tôi chỉ tập trung nghiên cứu về tính ổn định của nghiệm và nghiệm dương của phương trình vi phân tuyến tính trung hòa đối số lệch có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left[x(t) + \sum_{j=1}^{\ell} p_j(t)x(t - \tau_j(t)) \right] + \sum_{i=1}^m q_i(t)x(t - \sigma_i(t)) = 0, \quad (*)$$

Một trong những phương pháp chính được sử dụng để nghiên cứu vấn đề trên trong luận văn này là phương pháp khái quát hóa phương trình đặc trưng, dựa vào ý tưởng đi tìm nghiệm của hệ tuyến tính có dạng:

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right)$$

Mục đích chính là áp dụng phương pháp này cho phương trình (*) để tìm điều kiện tồn tại của nghiệm dương và để khái quát, mở rộng kết quả được chứng minh trong trường hợp đặc biệt của phương trình (*) có dạng:

$$\frac{d}{dt}[x(t) - P(t)x(t - \tau)] + Q(t)x(t - \sigma) = 0,$$

Luận văn gồm có 2 chương:

+ **Chương 1:** Trích từ bài báo [12] Trình bày một số kết quả về tính ổn định của phương trình vi phân tuyến tính trung hòa đối số lệch có dạng:

$$\frac{d}{dt}[x(t) - P(t)x(t - \tau)] + Q(t)x(t - \sigma) = 0,$$

+ **Chương 2:** Trích từ bài báo [11] Khảo sát điều kiện tồn tại nghiệm dương của phương trình vi phân tuyến tính trung hòa đối số lệch có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) + \sum_{j=1}^{\ell} p_j(t)x(t - \tau_j(t))\right] + \sum_{i=1}^m q_i(t)x(t - \sigma_i(t)) = 0,$$

Trong luận văn, một số kết quả sử dụng sẽ được phát biểu dưới dạng Định lý hoặc Bổ đề không chứng minh.

4. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu:

Cùng với sự phát triển của ngành Toán Giải tích, Đại số, Hình học vi phân, Đa tạp... phương trình vi phân luôn được hiện đại hóa. Bên cạnh đó công cụ máy tính điện tử với các phần mềm chuyên dùng đã làm tăng khả năng ứng dụng thực tiễn của môn học này. Việc xác định được nghiệm, đặc biệt là nghiệm dương của phương trình vi phân trung hòa đối số lệch có ý nghĩa quan trọng trong việc giải quyết các bài toán dẫn đến phương trình vi phân. Từ đó, ta có thể giải quyết các bài toán biến đổi các quá trình khi nghiên cứu các hiện tượng Tự nhiên và Xã hội. Trong những năm gần đây, ngày càng có nhiều nghiên cứu cho thấy tầm quan trọng của phương trình vi phân trung hòa đối số lệch được ứng dụng vào nhiều lĩnh vực khác nhau trong các ngành

khoa học và đời sống như: Vật lý, Sinh học, Sinh thái học, Sinh lý học, Môi trường, Kinh tế, Địa chất, Khảo cổ học...

Chương 1

TÍNH ỔN ĐỊNH TIỆM CẬN CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH TRUNG HÒA ĐỐI SỐ LỆCH

Xét phương trình vi phân tuyến tính trung hòa đối số lệch:

$$\frac{d}{dt}[x(t) - P(t)x(t - \tau)] + Q(t)x(t - \sigma) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (1.1)$$

trong đó: $\tau, \sigma \in (0, \infty)$, $P \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ và $Q \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$.

Định nghĩa 1.1: Nghiệm $x_0(t)$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ và $t_0 \in \mathbb{R}_+$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sao cho với mọi nghiệm $x(t)$ của phương trình (1.1) thỏa điều kiện $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$ thì $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$.

Định nghĩa 1.2: Nghiệm $x_0(t)$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định đều nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi nghiệm $x(t)$ của phương trình (1.1) thỏa mãn tại một điểm $t_0 \in \mathbb{R}_+$ nào đó điều kiện $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$ thì $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$.

Định nghĩa 1.3: Nghiệm $x_0(t)$ của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận đều nếu nó ổn định và với mỗi $t_0 \in \mathbb{R}$, tồn tại $\delta = \delta(t_0) > 0$ sao cho với mọi nghiệm $x(t)$ của phương trình (1.1) thỏa điều kiện $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$ thì $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - x_0(t)| = 0, \forall t \geq t_0$.

Bổ đề 1: (Xem [7])

Giả sử $\tau, \sigma \in (0, \infty)$, $P \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ và $Q \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$ thỏa với $P(t) \equiv -1$ và

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(s) ds = \infty.$$

Khi đó mỗi nghiệm của phương trình

$$\frac{d}{dt}[x(t) + x(t - \tau)] + Q(t)x(t - \sigma) = 0, \quad t \geq t_0$$

dao động.

Bổ đề 2: (Xem [7])

Giả sử $\tau, \sigma \in (0, \infty)$, $P \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ và $Q \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$ và $\int_{t_0}^{\infty} Q(s) ds = \infty$ thỏa,

$$P(t) \leq -1 \text{ và } \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t+\sigma}^{t+\tau} \left[\frac{Q(s-\tau)}{-P(s-\sigma)} \right] ds > \frac{1}{e}$$

Khi đó, mỗi nghiệm của phương trình (1.1) dao động.

Trong chương này chúng ta sẽ thiết lập các điều kiện để nghiệm không của phương trình (1.1) là ổn định đều và tất cả các nghiệm của phương trình đều ổn định tiệm cận.

1.1. Tính ổn định đều và ổn định tiệm cận trong trường hợp $P(t)$ không là hàm hằng.

1.1.1. Định lý 1.1.

Giả sử $|P(t)| \leq p$, $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và

$$p < \frac{1}{4}, \quad 2p + \int_t^{t+\sigma} Q(s)ds \leq \frac{3}{2}, \quad t \geq t_0, \quad (1.2)$$

hoặc

$$\frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2}, \quad \int_t^{t+\sigma} Q(s)ds \leq \sqrt{2(1-2p)}, \quad t \geq t_0. \quad (1.3)$$

Khi đó nghiệm không của phương trình (1.1) là ổn định đều.

Chứng minh

Đặt: $\rho = \max\{\tau, \sigma\}$, $\delta = \min\{\tau, \sigma\}$.

Chọn một số nguyên dương m sao cho $m\delta \geq 3\sigma$. Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, đặt:

$$\eta = \frac{(1-p)\varepsilon}{(1+p)(2p+3)^m}$$

Ta sẽ chứng minh rằng với bất kỳ $t' \geq t_0, \phi \in C([t'-\rho, t], (-\eta, \eta))$, ta có:

$$|x(t)| < \varepsilon, t \geq t' \quad (1.4)$$

trong đó $x(t)$ là nghiệm của phương trình (1.1) thỏa điều kiện ban đầu $x(s) = \phi(s)$ với

$$s \in [t'-\rho, t'].$$

$$\text{Đặt: } z(t) = x(t) - P(t)x(t-\tau) \quad (1.5)$$

Ta có kết quả (Xem [15, Định lý 1])

$$|x(t)| < (2p+3)^m \eta, \quad t \in [t', t'+m\delta]. \quad (1.6)$$

Kế tiếp ta chứng minh (1.4). Bằng phương pháp phản chứng, giả sử (1.4) không đúng, khi đó theo (1.6) ta có $T > t'+m\delta$ sao cho $|x(T)| = \varepsilon$ và $|x(t)| < \varepsilon$ với $t' \leq t < T$.

Không làm mất tính tổng quát, giả sử rằng $x(T) = \varepsilon$. Ta có:

$$z(T) = x(T) - P(T)x(T-\tau) > (1-p)\varepsilon > 0. \quad (1.7)$$

Suy ra:

$$z(t' + m\delta) = x(t' + m\delta) - P(t' + m\delta)x(t' + m\delta - \tau) > (1 - p)\varepsilon \leq z(T)$$

Từ (1.7) tồn tại $T_0 \in (t' + m\delta, T]$ sao cho $z(T_0) = \max\{z(t) : t' + m\delta \leq t \leq T\}$ và $z(t) < z(T_0)$ với $t' + m\delta \leq t < T_0$.

Đặt:

$$y(t) = z(t) - p\varepsilon, \quad t \geq t'. \quad (1.8)$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} -x(t - \sigma) &= -z(t - \sigma) - P(t - \sigma)x(t - \sigma - \tau) \\ &\leq -z(t - \sigma) + p\varepsilon \\ &= -y(t - \sigma), \quad t' + \sigma \leq t \leq T_0. \end{aligned}$$

Từ (1.1) và (1.8), ta có:

$$y'(t) = z'(t) = -Q(t)x(t - \sigma) \leq -Q(t)y(t - \sigma), \quad t' + \sigma \leq t \leq T_0. \quad (1.9)$$

Do $0 < p \leq \frac{1}{2}$, dễ dàng thấy rằng $y(T_0) \geq z(T) - p\varepsilon > (1 - 2p)\varepsilon \geq 0$.

Tiếp theo ta chứng minh $y(T_0 - \sigma) \leq 0$. Giả sử ngược lại $y(T_0 - \sigma) > 0$. Khi đó có một lân cận trái $(T_0 - \sigma - h, T_0 - \sigma)$ của $T_0 - \sigma$, với $h > 0$, sao cho $y(t) > 0$ trên $(T_0 - \sigma - h, T_0 - \sigma)$ và $y(t - \sigma) > 0$ trên $(T_0 - h, T_0)$. Theo (1.9), ta thấy rằng $z(t)$ không tăng trên $(T_0 - h, T_0)$. Điều này trái với $z(T_0) = \max\{z(t) : t' + m\delta \leq t \leq T\}$ và $z(t) < z(T_0)$ với $t' + m\delta \leq t < T_0$. Vì thế $y(T_0 - \sigma) \leq 0$. Do đó, tồn tại $\zeta \in [T_0 - \sigma, T_0)$ sao cho $y(\zeta) = 0$. Từ (1.9), ta có

$$y'(t) \leq Q(t)\varepsilon, \quad t' + \sigma \leq t \leq T_0. \quad (1.10)$$

Lấy tích phân 2 vế (1.10) từ $t - \sigma$ đến ζ ta được:

$$-y(t - \sigma) \leq \varepsilon \int_{t - \sigma}^{\zeta} Q(s)ds, \quad \zeta \leq t \leq T_0.$$

Thế vào (1.9), ta có:

$$y'(t) \leq \varepsilon Q(t) \int_{t - \sigma}^{\zeta} Q(s)ds, \quad \zeta \leq t \leq T_0. \quad (1.11)$$

Cuối cùng ta chứng minh:

$$y(T_0) \leq (1 - 2p)\varepsilon, \quad (1.12)$$

Xét ba trường hợp:

✦ **Trường hợp 1:** $0 < p < \frac{1}{4}$ và $\int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds \leq 1$.

Trong trường hợp này, ta lấy tích phân 2 vế của (1.11) từ ζ đến T_0 , ta có:

$$\begin{aligned} y(T_0) &\leq \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta} Q(s) ds dt \\ &= \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \left[\int_{t-\sigma}^t Q(s) ds - \int_{\zeta}^t Q(s) ds \right] dt \\ &\leq \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \left[\frac{3}{2} - 2p - \int_{\zeta}^t Q(s) ds \right] dt \\ &= \varepsilon \left[\left(\frac{3}{2} - 2p \right) \int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 \right] \\ &\leq (1 - 2p)\varepsilon. \end{aligned}$$

✦ **Trường hợp 2:** $0 < p < \frac{1}{4}$ và $\int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds > 1$.

Chọn $T_1 \in (\zeta, T_0)$ sao cho: $\int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds = 1$.

Sau đó lần lượt lấy tích phân (1.10) từ ζ đến T_1 và lấy tích phân (1.11) từ T_1 đến T_0 , ta có:

$$y(T_0) \leq \varepsilon \int_{\zeta}^{T_1} Q(t) dt + \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta} Q(s) ds dt$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \left[\int_{T_1}^{T_0} Q(t) dt \int_{\zeta}^{T_1} Q(s) ds + \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta} Q(s) ds dt \right] \\
&= \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma}^{T_1} Q(s) ds dt \\
&\leq \varepsilon \left[\left(\frac{3}{2} - 2p \right) \int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
&= (1 - 2p) \varepsilon.
\end{aligned}$$

✦ **Trường hợp 3:** $\frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2}$ và $\int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds \leq \sqrt{2(1-2p)}$.

Lấy tích phân (1.11) từ ζ đến T_0 , ta được:

$$\begin{aligned}
y(T_0) &\leq \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta} Q(s) ds dt \\
&= \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \left[\int_{t-\sigma}^t Q(s) ds - \int_{\zeta}^t Q(s) ds \right] dt \\
&\leq \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \left[\sqrt{2(1-2p)} - \int_{\zeta}^t Q(s) ds \right] dt \\
&= \varepsilon \left[\sqrt{2(1-2p)} \int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
&\leq (1-2p) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Các trường hợp 1 – 3 chứng tỏ rằng (1.12) đúng. Điều này mâu thuẫn với

$$y(T_0) \geq z(T) - p\varepsilon > (1-2p)\varepsilon > 0.$$

Vậy định lý được chứng minh xong.

1.1.2. Định lý 1.2.

Giả sử $|P(t)| \leq p$, $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(s) ds = \infty \quad (1.13)$$

Nếu:

$$p < \frac{1}{4}, \quad 2p + \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\sigma}^t Q(s) ds < \frac{3}{2} \quad (1.14)$$

hoặc

$$\frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\sigma}^t Q(s) ds < \sqrt{2(1-2p)} \quad (1.15)$$

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (1.1) tiến về 0 khi $t \rightarrow \infty$.

Chứng minh

Gọi $x(t)$ là nghiệm của phương trình (1.1). Ta sẽ chứng minh:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (1.16)$$

ở đây $x(t)$ dao động hoặc không dao động.

Đặt $z(t)$ như trong chứng minh của định lý 1.1, tức là:

$$z(t) = x(t) - P(t)x(t - \tau)$$

Theo chứng minh của định lý 1.1, $x(t)$ bị chặn.

Đặt: $\mu = \limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)|$.

Khi đó $0 \leq \mu < \infty$ và

$$M = \limsup_{t \rightarrow \infty} |z(t)| \geq (1-p)\mu. \quad (1.17)$$

Ta sẽ chứng minh $\mu = 0$.

Giả sử $\mu > 0$. Khi đó với bất kỳ $\varepsilon \in (0, (1-2p)\mu)$, tồn tại $A \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$,

$B \in \left(0; \sqrt{2(1-2p)}\right)$ và $T > t_0$ sao cho:

$$|x(t)| < \mu + \varepsilon, \quad t \geq T - \rho,$$

và

$$\int_{t-\sigma}^t Q(s) ds < \begin{cases} A - 2p & \text{nếu } p < \frac{1}{4} \\ B & \text{nếu } \frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2} \end{cases}; t \geq T \quad (1.18)$$

Đặt:

$$y(t) = z(t) - p(\mu + \varepsilon), \quad t \geq T - \sigma \quad (1.19)$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} -x(t - \sigma) &= -z(t - \sigma) - P(t - \sigma)x(t - \sigma - \tau) \\ &\leq -z(t - \sigma) + p(\mu + \varepsilon) \\ &= -y(t - \sigma), \quad t \geq T. \end{aligned}$$

Từ (1.1) và (1.19), ta có:

$$y'(t) = z'(t) = -Q(t)x(t - \sigma) \leq -Q(t)y(t - \sigma), \quad t \geq T. \quad (1.20)$$

Ở đây $z'(t)$ là đạo động và có một dãy tăng $\{T_n\}$ sao cho $T_n > T + \tau + 2\sigma$, $T_n \longrightarrow \infty$, $|z(T_n)| \longrightarrow M$ khi $n \longrightarrow \infty$, $|z(T_n)| > (1-p)(\mu - \varepsilon)$ và T_n là cực đại địa phương trái của $|z(t)|$.

Ta xét trường hợp $z(T_n) > 0$. Trường hợp $z(T_n) \leq 0$ là tương tự, ta không chứng minh ở đây.

Ta có:

$$y(T_n) \geq z(T_n) - p(\mu + \varepsilon) > (1-2p)(\mu + \varepsilon) - \varepsilon > 0$$

Do định nghĩa của T_n , ta cũng dễ dàng thấy rằng $y(T_n - \sigma) \leq 0$. Vì thế, tồn tại $\zeta_n \in [T_n - \sigma, T_n)$ sao cho $y(\zeta_n) = 0$.

Từ (1.20), ta có:

$$y'(t) \leq Q(t)(\mu + \varepsilon), \quad t \geq T \quad (1.21)$$

Lấy tích phân (1.21) từ $t - \sigma$ đến ζ_n , ta được:

$$-y(t - \sigma) \leq (\mu + \varepsilon) \int_{t-\sigma}^{\zeta_n} Q(s) ds, \quad \zeta_n \leq t \leq T_n.$$

Thế vào (1.20), ta có:

$$y'(t) \leq (\mu + \varepsilon) Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta_n} Q(s) ds, \quad \zeta_n \leq t \leq T_n \quad (1.22)$$

Đặt:

$$L = \begin{cases} \max \left\{ A - 2p - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} & \text{nếu } p < \frac{1}{4} \\ \frac{B^2}{2} & \text{nếu } \frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

thì: $L < 1 - 2p$. Ta sẽ chứng minh:

$$y(T_n) \leq L(\mu + \varepsilon). \quad (1.23)$$

Ta xét ba trường hợp sau:

✦ **Trường hợp 1:** $0 < p < \frac{1}{4}, \int_{\zeta_n}^{T_n} Q(s) ds \leq 1$.

Trong trường hợp này, ta lấy tích phân (1.22) từ ζ_n đến T_n , ta được:

$$\begin{aligned}
 y(T_n) &\leq (\mu + \varepsilon) \int_{\zeta_n}^{T_n} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta_n} Q(s) ds dt \\
 &= (\mu + \varepsilon) \int_{\zeta_n}^{T_n} Q(t) \left(\int_{t-\sigma}^t Q(s) ds - \int_{\zeta_n}^t Q(s) ds \right) dt \\
 &= (\mu + \varepsilon) \int_{\zeta_n}^{T_n} Q(t) \left(A - 2p - \int_{\zeta_n}^t Q(s) ds \right) dt \\
 &= (\mu + \varepsilon) \left[(A - 2p) \int_{\zeta_n}^{T_n} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\zeta_n}^{T_n} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
 &\leq (\mu + \varepsilon) \left[\max \{A - 2p, 1\} - \frac{1}{2} \right] \\
 &= L(\mu + \varepsilon).
 \end{aligned}$$

✦ **Trường hợp 2:** $0 < p < \frac{1}{4}, \int_{\zeta_n}^{T_n} Q(s) ds > 1$.

Chọn $\eta_n \in (\zeta_n, T_n)$ sao cho $\int_{\eta_n}^{T_n} Q(s) ds = 1$.

Sau đó lần lượt lấy tích phân (1.21) từ ζ_n đến η_n và lấy tích phân (1.22) từ η_n đến T_n , ta được:

$$y(T_n) \leq (\mu + \varepsilon) \int_{\zeta_n}^{\eta_n} Q(t) dt + (\mu + \varepsilon) \int_{\eta_n}^{T_n} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta_n} Q(s) ds dt$$

$$\begin{aligned}
&= (\mu + \varepsilon) \left[\int_{\eta_n}^{T_n} Q(t) dt \int_{\zeta_n}^{\eta_n} Q(s) ds + \int_{\eta_n}^{T_n} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta_n} Q(s) ds dt \right] \\
&= (\mu + \varepsilon) \int_{\eta_n}^{T_n} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\eta_n} Q(s) ds dt \\
&\leq (\mu + \varepsilon) \left[(A - 2p) \int_{\eta_n}^{T_n} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\eta_n}^{T_n} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
&= (\mu + \varepsilon) \left(A - 2p - \frac{1}{2} \right) \\
&\leq L(\mu + \varepsilon).
\end{aligned}$$

✦ **Trường hợp 3:** $\frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2}, \int_{\zeta_n}^{T_n} Q(s) ds \leq B$.

Lấy tích phân (1.22) từ ζ_n đến T_n , ta được:

$$\begin{aligned}
y(T_n) &\leq (\mu + \varepsilon) \int_{\zeta_n}^{T_n} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta_n} Q(s) ds dt \\
&= (\mu + \varepsilon) \int_{\zeta_n}^{T_n} Q(t) \left[\int_{t-\sigma}^t Q(s) ds - \int_{\zeta_n}^t Q(s) ds \right] dt \\
&\leq (\mu + \varepsilon) \int_{\zeta_n}^{T_n} Q(t) \left(B - \int_{\zeta_n}^t Q(s) ds \right) dt \\
&= (\mu + \varepsilon) \left[B \int_{\zeta_n}^{T_n} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\zeta_n}^{T_n} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{2} B^2 (\mu + \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$= L(\mu + \varepsilon).$$

Các trường hợp 1 – 3 chứng tỏ rằng (1.23) đúng.

Từ (1.23), ta có:

$$z(T_n) \leq (L + p)(\mu + \varepsilon).$$

Cho $n \longrightarrow \infty$ và $\varepsilon \longrightarrow 0$, ta có:

$$M = \limsup_{n \rightarrow \infty} z(T_n) \leq (L + p)\mu < (1 - p)\mu$$

Điều này mâu thuẫn với (1.17). Vì vậy, $\mu = 0$.

Vậy định lý được chứng minh xong.

1.1.3. Định lý 1.3.

Giả sử $0 \leq P(t) \leq p$, $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$p + \frac{3}{2}p^N \leq 1 \text{ và}$$

$$2p \left(1 - \frac{1}{4}p\right) + \int_t^{t+3\sigma+(N-1)\tau} Q(s)ds \leq \frac{3}{2}, \quad t \geq t_0. \quad (1.24)$$

Khi đó nghiệm không của phương trình (1.1) là ổn định đều.

Chứng minh

Đặt: $\rho = \max\{\tau, \sigma\}$, $\delta = \min\{\tau, \sigma\}$

Chọn một số nguyên dương m sao cho $m\delta \geq 2(3\sigma + N\tau)$. Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, đặt

$$\eta = \frac{(1-p)\varepsilon}{(1+p)(2p+3)^m}. \text{ Ta sẽ chứng minh rằng với bất kỳ } t' \geq t_0, \phi \in C([t'-\rho, t'], (-\eta, \eta)),$$

ta có $x(t)$ thỏa mãn:

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad t \geq t'$$

trong đó $x(t)$ là nghiệm của phương trình (1.1) thỏa điều kiện ban đầu $x(s) = \phi(s)$ với $s \in [t'-\rho, t']$.

Tương tự như chứng minh định lý 1.1, ta có thể chứng minh $|x(t)| < (2p+3)^m \eta$, $t \in [t', t' + m\delta]$ được thỏa, kéo theo $|x(t)| < \varepsilon$, $t' \leq t \leq t' + m\delta$.

Tiếp theo ta chứng minh $|x(t)| < \varepsilon$, $t > t' + m\delta$. Bằng phương pháp phản chứng, giả sử với $T > t' + m\delta$ sao cho $|x(T)| = \varepsilon$ và $|x(t)| < \varepsilon$ với $t' \leq t < T$. Không làm mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $x(T) = \varepsilon$. Vì vậy, (1.7) đúng và tồn tại $T_0 \in (t' + m\delta, T]$ sao cho $z(T_0) = \max\{z(t) : t' + m\delta \leq t \leq T\}$ và $z(t) < z(T)$ với $t' + m\delta \leq t < T_0$. Có hai khả năng:

$$z(t) > 0, \quad t \in [T_0 - (3\sigma + (N-1)\tau), T_0],$$

hoặc tồn tại $\zeta \in [T_0 - (3\sigma + (N-1)\tau), T_0]$ sao cho:

$$z(\zeta) = 0, \quad z(t) > 0, \quad t \in (\zeta, T_0].$$

✦ Xét trường hợp $z(t) > 0$, ta có:

$$-x(t) < p^i \varepsilon, \quad t \in [T_0 - (3\sigma + (N-i)\tau), T_0], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.25)$$

và

$$\begin{aligned} z'(t) &= Q(t) [-z(t-\sigma) - P(t-\sigma)x(t-\sigma-\tau)] \\ &\leq -Q(t) [z(t-\sigma) - p^N \varepsilon], \quad t \in [T_0 - 2\sigma, T_0]. \end{aligned}$$

Đặt:

$$y(t) = z(t) - p^N \varepsilon, \quad t \geq t'. \quad (1.26)$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} y'(t) &= z'(t) \\ &= -Q(t)x(t-\sigma) \leq -Q(t)y(t-\sigma), \quad t \in [T_0 - 2\sigma, T_0]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Tương tự chứng minh định lý 1.1, từ (1.27) dễ dàng kết luận rằng $y(T_0 - \sigma) \leq 0$. Hơn nữa $y(T_0) \geq z(T) - p^N \varepsilon > (1 - p - p^N) \varepsilon > 0$. Do đó tồn tại $\zeta \in [T_0 - \sigma, T_0)$ sao cho $y(\zeta) = 0$. Từ (1.26) và (1.27), ta có:

$$y'(t) \leq Q(t)p^N \varepsilon, \quad t \in [T_0 - 2\sigma, T_0]. \quad (1.28)$$

Lấy tích phân (1.28) từ ζ đến T_0 , ta được

$$-y(t - \sigma) \leq p^N \varepsilon \int_{t-\sigma}^{\zeta} Q(s) ds, \quad t \in [T_0 - \sigma, T_0].$$

Thế vào (1.27), ta có:

$$y'(t) \leq p^N \varepsilon Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta} Q(s) ds, \quad t \in [T_0 - \sigma, T_0]. \quad (1.29)$$

Có hai trường hợp xảy ra:

- *Trường hợp 1:* $\int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds \leq 1 - p$. Trong trường hợp này ta lấy tích phân (1.29) từ ζ

đến T_0 , ta được:

$$\begin{aligned} y(T_0) &\leq p^N \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta} Q(s) ds \, dt \\ &= p^N \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \left[\int_{t-\sigma}^t Q(s) ds - \int_{\zeta}^t Q(s) ds \right] dt \\ &\leq p^N \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \left[\frac{(1-p)(3-p)}{2} - \int_{\zeta}^t Q(s) ds \right] dt \\ &= p^N \varepsilon \left[\frac{(1-p)(3-p)}{2} \int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 \right] \\ &\leq (1-p)^2 p^N \varepsilon \leq (1-p-p^N) \varepsilon. \end{aligned}$$

- *Trường hợp 2:* $\int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds > 1 - p$. Chọn $T_1 \in (\zeta, T_0]$ sao cho $\int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds = 1 - p$. Sau

đó, lần lượt lấy tích phân (1.28) từ ζ đến T_1 và (1.29) từ T_1 đến T_0 , ta được:

$$\begin{aligned}
y(T_0) &\leq p^N \varepsilon \int_{\zeta}^{T_1} Q(t) dt + p^N \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta} Q(s) ds dt \\
&= p^N \varepsilon \left[\int_{T_1}^{T_0} Q(t) dt \int_{\zeta}^{T_1} Q(s) ds + p \int_{\zeta}^{T_1} Q(s) ds + \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma}^{\zeta} Q(s) ds dt \right] \\
&= p^N \varepsilon \left[\int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma}^{T_1} Q(s) ds dt + p \left(\int_{\zeta}^{T_0} Q(s) ds + \int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds \right) \right] \\
&\leq p^N \varepsilon \left[\frac{(1-p)(3-p)}{2} \int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + p \left(\frac{(1-p)(3-p)}{2} - \int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds \right) \right] \\
&= (1-p)^2 p^N \varepsilon \leq (1-p-p^N) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hai trường hợp này chứng tỏ rằng:

$$y(T_0) \leq (1-p-p^N) \varepsilon, \quad (1.30)$$

Điều này mâu thuẫn với $y(T_0) \geq y(T) > (1-p-p^N) \varepsilon$.

✦ Xét trường hợp tồn tại $\zeta \in [T_0 - (3\sigma + (N-1)\tau), T_0]$ sao cho:
 $z(\zeta) = 0, \quad z(t) > 0, \quad t \in (\zeta, T_0]$. Ta có:

$$z'(t) \leq Q(t) \varepsilon, \quad t' \leq t \leq T_0, \quad (1.31)$$

và

$$z'(t) \leq \varepsilon Q(t) \left[p + \int_{t-(3\sigma+(N-1)\tau)}^{\zeta} Q(s) ds \right], \quad \zeta \leq t \leq T_0. \quad (1.32)$$

Có hai trường hợp xảy ra:

- *Trường hợp 1:* $\int_{\zeta}^{T_0} Q(s)ds \leq 1-p$. Trong trường hợp này ta lấy tích phân (1.32) từ ζ

đến T_0 , ta được

$$\begin{aligned}
 z(T_0) &\leq \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \left[p + \int_{t-3\sigma-(N-1)\tau}^{\zeta} Q(s)ds \right] dt \\
 &= \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \left[p + \int_{t-3\sigma-(N-1)\tau}^t Q(s)ds - \int_{\zeta}^t Q(s)ds \right] dt \\
 &\leq \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \left[p + \frac{(1-p)(3-p)}{2} - \int_{\zeta}^t Q(s)ds \right] dt \\
 &= \varepsilon \left[\frac{3-2p+p^2}{2} \int_{\zeta}^{T_0} Q(s)ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\zeta}^{T_0} Q(s)ds \right)^2 \right] \\
 &\leq (1-p)\varepsilon.
 \end{aligned}$$

- *Trường hợp 2:* $\int_{\zeta}^{T_0} Q(s)ds > 1-p$. Chọn $T_2 \in (\zeta, T_0)$ sao cho $\int_{T_2}^{T_0} Q(s)ds = 1-p$. Sau

đó, lần lượt lấy tích phân (1.31) từ ζ đến T_2 và (1.32) từ T_2 đến T_0 , ta được:

$$\begin{aligned}
 z(T_0) &\leq \varepsilon \int_{\zeta}^{T_2} Q(t)dt + \varepsilon \int_{T_2}^{T_0} Q(t) \left[p + \int_{t-3\sigma-(N-1)\tau}^{\zeta} Q(s)ds \right] dt \\
 &= \varepsilon \left[\int_{T_2}^{T_0} Q(t)dt \int_{\zeta}^{T_2} Q(s)ds + p \int_{\zeta}^{T_0} Q(s)ds + \int_{T_2}^{T_0} Q(t) \int_{t-3\sigma-(N-1)\tau}^{\zeta} Q(s)ds dt \right] \\
 &= \varepsilon \left[\int_{T_2}^{T_0} Q(t) \int_{t-3\sigma-(N-1)\tau}^{T_2} Q(s)ds dt + p \int_{\zeta}^{T_0} Q(s)ds \right]
 \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon \left[\frac{(1-p)(3-p)}{2} \int_{T_2}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{T_2}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 + p \frac{(1-p)3-p}{2} \right]$$

$$\leq (1-p)\varepsilon.$$

Hai trường hợp này chứng tỏ rằng:

$$z(T_0) \leq (1-p)\varepsilon, \quad (1.33)$$

Điều này mâu thuẫn với $z(T_0) \geq z(T) > (1-p)\varepsilon$.

Vậy định lý được chứng minh xong.

Tương tự định lý 1.2 và định lý 1.3 và kết hợp Bổ đề 1, ta có thể đưa ra định lý sau về tiêu chuẩn tiệm cận của nghiệm phương trình (1.1).

1.1.4. Định lý 1.4.

Giả sử $0 \leq P(t) \leq p$, $p \in (0, 1)$ và tồn tại số nguyên dương N sao cho $p + \frac{3p^N}{2} \leq 1$.

$$\text{Nếu } \int_{t_0}^{\infty} Q(s) ds = \infty$$

và

$$2p \left(1 - \frac{1}{4} \right) p + \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-(3\sigma+(N-1)\tau)}^t Q(s) ds < \frac{3}{2}$$

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (1.1) tiến về 0 khi $t \rightarrow \infty$.

1.2. Tính ổn định đều và ổn định tiệm cận trong trường hợp $P(t)$ là hàm hằng.

1.2.1. Định lý 2.1.

Giả sử $|P(t)| \equiv p$, $p \in (0, 1)$ và tồn tại một số nguyên dương N sao cho $4p^N \leq 1$ và

$$\int_t^{t+\sigma+(N-1)\tau} Q(s) ds \leq \frac{3-4p^N}{2(1-p^N)}(1-p), \quad t \geq t_0 \quad (1.34)$$

Khi đó nghiệm không của phương trình (1.1) là ổn định.

Chứng minh

Đặt: $\rho = \max\{\tau, \sigma\}$, $\delta = \min\{\tau, \sigma\}$

Chọn một số nguyên dương m sao cho $m\delta \geq 2(\sigma + N\tau)$. Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, đặt:

$$\eta = \frac{(1-p)\varepsilon}{(1+p)(2p+3)^m}$$

Ta sẽ chứng minh với bất kỳ $t' \geq t_0$, $\phi \in C([t'-\rho, t'], (-\eta, \eta))$ ta có $x(t)$ thỏa $|x(t)| < \varepsilon$, $t \geq t'$, trong đó $x(t)$ là nghiệm của phương trình (1.1) thỏa điều kiện ban đầu $x(s) = \phi(s)$ với $s \in [t'-\rho, t']$.

Tương tự như chứng minh định lý 1.1, ta có:

$$|x(t)| < (2p+3)^m \eta, \quad t \in [t', t'+m\delta] \quad (1.6)$$

Tiếp theo ta chứng minh $|x(t)| < \varepsilon$, $t \geq t'$. Bằng phương pháp phản chứng, giả sử điều này không đúng, khi đó theo (1.6) có $T > t'+m\delta$ sao cho $|x(T)| = \varepsilon$ và $|x(t)| < \varepsilon$ với $t' \leq t < T$. Không làm mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $x(T) = \varepsilon$. Khi đó (1.7) là đúng và tồn tại $T_0 \in (t'+m\delta, T]$ sao cho $z(T_0) = \max\{z(t) : t'+m\delta \leq t \leq T\}$ và $z(t) < z(T_0)$ với $t'+m\delta \leq t < T_0$.

Đặt:

$$y(t) = z(t) - \frac{1-p}{1-p^N} p^N \varepsilon, \quad t \geq t' \quad (1.35)$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} -x(t-\sigma) &= -\sum_{i=0}^{N-1} p^i z(t-\sigma-i\tau) - p^N x(t-\sigma-N\tau) \\ &\leq -\sum_{i=0}^{N-1} p^i z(t-\sigma-i\tau) - p^N \varepsilon \\ &= -\sum_{i=0}^{N-1} p^i y(t-\sigma-i\tau), \quad T_0 - \sigma - (N-1)\tau \leq t \leq T_0 \end{aligned}$$

Từ (1.1) và (1.35), ta có:

$$y'(t) = z'(t) = -Q(t)x(t-\sigma), \quad t \geq t' \quad (1.36)$$

và

$$y'(t) \leq -Q(t) \sum_{i=0}^{N-1} p^i y(t - \sigma - i\tau), \quad T_0 - \sigma - (N-1)\tau \leq t \leq T_0. \quad (1.37)$$

Dễ dàng thấy rằng:

$$y(T_0) \geq z(T) - \frac{(1-p)p^N \varepsilon}{1-p^N} > \frac{(1-p)(1-2p^N)}{1-p^N} \varepsilon \geq 0$$

Tiếp theo ta chứng minh tồn tại $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ sao cho $y(T_0 - \sigma - j\tau) \leq 0$. Giả sử trái lại, $y(T_0 - \sigma - j\tau) > 0$, $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Khi đó, có một lân cận trái $(T_0 - \sigma - j\tau - h, T_0 - \sigma - j\tau)$ với mọi $h > 0$ của $T_0 - \sigma - j\tau$ sao cho $y(t) > 0$ trên $(T_0 - \sigma - j\tau - h, T_0 - \sigma - j\tau)$ và $y(t - \sigma - j\tau) > 0$ trên $(T_0 - h, T_0)$, $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Do đó theo (1.37), ta thấy $y(t)$ là không tăng trên $(T_0 - h, T_0)$. Điều này trái với định nghĩa T_0 và $y(T_0 - \sigma - j\tau) \leq 0$ với $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Vì thế, tồn tại $\zeta \in [T_0 - \sigma - (N-1)\tau, T_0)$ sao cho $y(\zeta) = 0$ và $y(t) > 0$, $t \in (\zeta, T_0]$. Từ (1.36), ta có:

$$y'(t) \leq Q(t)\varepsilon, \quad t' \leq t \leq T_0 \quad (1.38)$$

Nếu $t - \sigma - i\tau \leq \zeta$ với $t \in [T_0 - \sigma - (N-1)\tau, T_0)$ thì ta lấy tích phân (1.38) từ $t - \sigma - (N-1)\tau$ đến ζ , ta được:

$$-y(t - \sigma - i\tau) \leq \varepsilon \int_{t - \sigma - (N-1)\tau}^{\zeta} Q(s) ds, \quad t - \sigma - i\tau \leq \zeta.$$

Nếu $\zeta < t - \sigma - i\tau \leq T_0$ với $t \in [T_0 - \sigma - (N-1)\tau, T_0]$ thì:

$$-y(t - \sigma - i\tau) < 0 \leq \varepsilon \int_{t - \sigma - (N-1)\tau}^{\zeta} Q(s) ds, \quad \zeta < t - \sigma - i\tau \leq T_0.$$

Thế vào (1.37), ta có:

$$y'(t) \leq \varepsilon \frac{1-p^N}{1-p} Q(t) - \varepsilon \int_{t - \sigma - (N-1)\tau}^{\zeta} Q(s) ds, \quad \zeta \leq t \leq T_0. \quad (1.39)$$

Có hai trường hợp xảy ra:

✦ **Trường hợp 1:** $\frac{1-p^N}{1-p} \int_{\zeta}^{T_0} Q(s)ds \leq 1$. Trong trường hợp này, ta lấy tích phân (1.39)

từ ζ đến T_0 , ta được:

$$\begin{aligned}
 y(T_0) &\leq \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma-(N-1)\tau}^{\zeta} Q(s)ds dt \\
 &= \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \left[\int_{t-\sigma-(N-1)\tau}^t Q(s)ds - \int_{\zeta}^t Q(s)ds \right] dt \\
 &\leq \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{\zeta}^{T_0} Q(t) \left[\frac{3-4p^N}{2(1-p^N)}(1-p) - \int_{\zeta}^t Q(s)ds \right] dt \\
 &\leq \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \left[\frac{3-4p^N}{2(1-p^N)}(1-p) \int_{\zeta}^{T_0} Q(s)ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\zeta}^{T_0} Q(s)ds \right)^2 \right] \\
 &\leq \frac{1-2p^N}{1-p^N} (1-p) \varepsilon.
 \end{aligned}$$

✦ **Trường hợp 2:** $\frac{1-p^N}{1-p} \int_{\zeta}^{T_0} Q(s)ds > 1$. Chọn $T_1 \in (\zeta, T_0)$ sao cho $\frac{1-p^N}{1-p} \int_{T_1}^{T_0} Q(s)ds = 1$.

Sau đó lần lượt lấy tích phân (1.38) từ ζ đến T_1 và lấy tích phân (1.39) từ T_1 đến T_0 , ta được:

$$\begin{aligned}
 y(T_0) &\leq \varepsilon \int_{\zeta}^{T_1} Q(t)dt + \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma-(N-1)\tau}^{\zeta} Q(s)ds dt \\
 &= \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t)dt \int_{\zeta}^{T_1} Q(s)ds + \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma-(N-1)\tau}^{\zeta} Q(s)ds dt \\
 &= \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-\sigma-(N-1)\tau}^{T_1} Q(s)ds dt
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \left[\frac{3-4p^N}{2(1-p^N)} (1-p) \int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 \right]$$

$$\leq \frac{1-2p^N}{1-p^N} (1-p) \varepsilon.$$

Kết hợp hai trường hợp 1 – 2, ta có kết luận:

$$y(T_0) \leq \frac{1-2p^N}{1-p^N} (1-p) \varepsilon, \quad (1.40)$$

Điều này mâu thuẫn với $y(T_0) \geq y(T) > \frac{(1-2p^N)(1-p)}{1-p^N} \varepsilon$.

Vậy định lý được chứng minh xong.

Tương tự Định lý 1.2 và Định lý 2.1 và kết hợp Bổ đề 2, ta có thể đưa ra định lý sau về một tiêu chuẩn tiệm cận của nghiệm của phương trình (1.1).

1.2.2. Định lý 2.2.

Giả sử $|P(t)| \equiv p$, $p \in (0,1)$ và tồn tại một số nguyên dương N sao cho $4p^N \leq 1$.

Nếu

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(s) ds = \infty \text{ và } \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-(\sigma+(N-1)\tau)}^t Q(s) ds < \frac{3-4p^N}{2(1-p^N)} (1-p)$$

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (1.1) tiến về 0 khi $t \longrightarrow \infty$.

Chương 2

NGHIỆM DƯƠNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH TRUNG HÒA ĐỐI SỐ LỆCH

Xét phương trình vi phân tuyến tính trung hòa đối số lệch:

$$\frac{d}{dt} \left[x(t) + \sum_{j=1}^{\ell} p_j(t) x(t - \tau_j(t)) \right] + \sum_{i=1}^m q_i(t) x(t - \sigma_i(t)) = 0, \quad (2.1)$$

với $t_0 \leq t < T \leq \infty$, và thỏa mãn:

$$(H_1) \quad p_j \in C^1[[t_0, T), \mathbb{R}], \tau_j \in C^1[[t_0, T), \mathbb{R}^+], \quad j = 1, 2, \dots, \ell.$$

$$(H_2) \quad q_i \in C[[t_0, T), \mathbb{R}], \sigma_i \in C[[t_0, T), \mathbb{R}^+], \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Mục đích chính của chúng ta là áp dụng phương pháp khái quát hóa phương trình đặc trưng vào phương trình (2.1) mà nó dựa trên ý tưởng đi tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính có dạng:

$$x(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right)$$

để tìm ra các điều kiện tồn tại nghiệm dương của phương trình, để khái quát hóa và mở rộng các kết quả đã được chứng minh trong các trường hợp đặc biệt của phương trình (2.1).

Trước khi làm rõ các kết quả đó, chúng ta đi qua hai kết quả đặc trưng của những nghiên cứu gần đây, đã nghiên cứu trường hợp đặc biệt của phương trình (2.1), xem [3] có dạng:

$$\frac{d}{dt} [x(t) + P(t)x(t - \tau)] + Q(t)x(t - \sigma) = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{với } P \in C^1[[t_0, \infty), \mathbb{R}], Q \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}], \tau \in (0, \infty), \sigma \in [0, \infty) \quad (2.2)$$

Ta có các kết quả sau:

Định lý A: Giả sử (2.2) được thỏa và tồn tại số dương μ sao cho:

$$|P(t)|\mu e^{\mu\tau} + |\dot{P}(t)|e^{\mu\tau} + |Q(t)|e^{\mu\sigma} \leq \mu \quad \text{với } t \geq t_0$$

Khi đó, với mỗi $t_1 \geq t_0$, phương trình (1.1) sẽ có nghiệm dương trong khoảng $[t_1, \infty)$.

Trong trường hợp đôi số lệch thay đổi được xét cho các phương trình có dạng:

$$\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^m q_i(t)x(t - \sigma_i(t)) = 0 \quad (2.3)$$

trong đó: $t_0 < T \leq \infty, q_i \in C[[t_0, T), \mathbb{R}], \sigma_i \in C[[t_0, T), \mathbb{R}^+], i = 1, 2, \dots, m$

của một vài tác giả. Kết quả đưa ra điều kiện đủ để tồn tại nghiệm dương của phương trình (2.3) trên $[t_0, T)$ (xem [7]).

Định lý B: *Giả sử rằng tồn tại tại số dương μ sao cho:*

$$\sum_{i=1}^m |q_i(t)| e^{\mu \sigma_i(t)} \leq \mu$$

với $t_0 \leq t < T$. Khi đó, với mỗi

$$\Phi \in \left\{ \varphi \in C[[t_{-1}, t_0], \mathbb{R}^+] : \varphi(t_0) > 0, \varphi(t) \leq \varphi(t_0), t_{-1} \leq t \leq t_0 \right\}$$

nghiệm phương trình (2.3) trong khoảng (t_0, Φ) vẫn có đại lượng dương khi $t_0 \leq t < T$.

2.1. Chú thích, định nghĩa.

Định nghĩa:

$$T_{-1}^1 = \min_{1 \leq j \leq \ell} \left\{ \inf_{t_0 \leq t < T} \{t - \tau_j(t)\} \right\}, \quad T_{-1}^2 = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \inf_{t_0 \leq t < T} \{t - \sigma_i(t)\} \right\}$$

và

$$t_{-1} = \min \{T_{-1}^1, T_{-1}^2\}.$$

Hàm $x : [t_{-1}, T) \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là nghiệm của phương trình (2.1) nếu x liên tục trên $[t_{-1}, T)$ và thỏa phương trình (2.1) trên (t_0, T) . Điều kiện ban đầu của nghiệm của phương trình (2.1) có dạng:

$$x(t) = \Phi(t), \quad t_{-1} \leq t \leq t_0, \quad \Phi \in C^1[[t_{-1}, t_0), \mathbb{R}^+]. \quad (2.4)$$

Nghiệm của bài toán giá trị đầu (2.1), (2.4) là hàm liên tục trên $[t_{-1}, T)$ nó trùng

với Φ trên $[t_{-1}, t_0)$ sao cho $x(t) + \sum_{j=1}^{\ell} p_j(t)x(t - \tau_j(t))$ khả vi và thỏa phương trình

(2.1) trên (t_0, T) .

Nghiệm duy nhất của bài toán giá trị đầu (2.1), (2.4) trên (t_0, T) được ký hiệu $x = x(\Phi)$ và nó luôn thuộc đoạn $[t_0, T)$.

Hàm liên tục $x : [t_{-1}, T) \rightarrow \mathbb{R}$ là dao động nếu $x > 0$ tùy ý với mọi $a \geq t_{-1}$, tồn tại số $c > a$ sao cho $x(c) = 0$. Ngược lại, x được gọi là không dao động.

Phương trình (2.1) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{\ell} \left[p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t)) \dot{x}(t - \tau_j(t)) + \dot{p}_j(t)x(t - \tau_j(t)) \right] \\ + \sum_{i=1}^m q_i(t)x(t - \sigma_i(t)) = 0. \end{aligned}$$

Bài toán giá trị đầu có dạng này là một kết quả. Đặt Φ như (2.4). Nghiệm của bài toán giá trị đầu (2.1), (2.4) là hàm liên tục trên $[t_{-1}, T)$ nó trùng với Φ trên $[t_{-1}, t_0)$, x sẽ khả vi liên tục và thỏa phương trình (2.1) trên (t_0, T) ngoại trừ các điểm k với $r = t_0 - t_{-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Mặt khác, nếu

$$\begin{aligned} \Phi(t_0) = - \sum_{j=1}^{\ell} \dot{p}_j(t) \Phi(t_0 - \tau_j(t_0)) - \\ - \sum_{j=1}^{\ell} p_j(t_0)(1 - \dot{\tau}_j(t_0)) \Phi(t_0 - \tau_j(t_0)) - \sum_{i=1}^m q_i(t) \Phi(t - \sigma_i(t)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

khi đó nghiệm x khả vi liên tục với mọi $t \geq t_{-1}$. Do đó, hệ thức (2.5) là cần và đủ để nghiệm x có đạo hàm liên tục với mọi $t \geq t_{-1}$.

Trong phần kế, ta định nghĩa một cách chính xác phương trình đặc trưng tổng quát được liên kết với bài toán giá trị đầu (2.1), (2.4). Áp dụng $x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds\right)$ ta sẽ thu được phương trình tích phân:

$$\alpha(t) + \sum_{j=1}^{\ell} \left[p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t)) \frac{\dot{\Phi}(h_j(t))}{\dot{\Phi}(t_0)} \alpha(H_j(t)) + \dot{p}_j(t) \frac{\Phi(h_j(t))}{\Phi(t_0)} \right] \times$$

(2.6)

$$\times \exp\left(-\int_{H_j(t)}^t \alpha(s) ds\right) + \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{\Phi(g_i(t))}{\Phi(t_0)} \exp\left(-\int_{G_i(t)}^t \alpha(s) ds\right) = 0$$

được gọi là phương trình đặc trưng.

Ta sẽ sử dụng các ký hiệu sau:

$$h_j(t) = \min\{t_0, t - \tau_j(t)\}, \quad H_j(t) = \max\{t_0, t - \tau_j(t)\}, \quad t \in [t_0, T], \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

$$g_i(t) = \min\{t_0, t - \sigma_i(t)\}, \quad G_i(t) = \max\{t_0, t - \sigma_i(t)\}, \quad t \in [t_0, T], \quad i = 1, 2, \dots, m$$

và $[a]_+ := \max(0, a)$ và $[a]_- := \max(0, -a)$ được gọi là phần dương và âm của số thực a .

2.2. Kết quả chính.

Định lý 2.2.1

Giả sử (H_1) và (H_2) được thỏa và đặt như (2.5) và $\dot{\Phi}(t_0) > 0$ được thỏa mãn. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

- Bài toán giá trị đầu (2.1), (2.4) có nghiệm dương trên $[t_0, T)$.
- Phương trình đặc trưng tổng quát (2.6) có nghiệm liên tục trên $[t_0, T)$.
- Tồn tại các hàm $\beta, \gamma \in C[[t_0, T), \mathbb{R}]$ sao cho $\beta(t) \leq \gamma(t)$ và

$$\beta(t) \leq \delta(t) \leq \gamma(t) \text{ kéo theo } \beta(t) \leq (S\delta)(t) \leq \gamma(t), \quad (2.7)$$

với mỗi hàm $\delta \in C[[t_0, T), \mathbb{R}]$ và $t_0 \leq t < T$, trong đó:

$$(S\delta)(t) = -\sum_{j=1}^{\ell} \left[p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t)) \frac{\dot{\Phi}(h_j(t))}{\dot{\Phi}(t_0)} \delta(H_j(t)) + \dot{p}_j(t) \frac{\Phi(h_j(t))}{\Phi(t_0)} \right] \times$$

(2.8)

$$\times \exp\left(-\int_{H_j(t)}^t \delta(s) ds\right) + \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{\Phi(g_i(t))}{\Phi(t_0)} \exp\left(-\int_{G_i(t)}^t \delta(s) ds\right).$$

Chứng minh

✦ a) $\Rightarrow$ b) : Đặt $x = x(\Phi)$ là nghiệm của bài toán giá trị đầu (2.1), (2.4) và giả sử rằng $x(t) > 0$ với $t_0 \leq t < T$. Nó sẽ chứng tỏ rằng hàm liên tục α được định nghĩa:

$$\alpha(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}, \quad t_0 \leq t < T$$

là nghiệm của (2.6) trên $[t_0, T)$. Phương trình (2.1) tương đương với

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{\ell} \left[p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t)) \dot{x}(t - \tau_j(t)) + \dot{p}_j(t)x(t - \tau_j(t)) \right] + \\ + \sum_{i=1}^m q_i(t)x(t - \sigma_i(t)) = 0 \end{aligned}$$

Chia cho $x(t)$, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} + \sum_{j=1}^{\ell} \left[p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t)) \frac{\dot{x}(t - \tau_j(t))}{x(t)} + \dot{p}_j(t) \frac{x(t - \tau_j(t))}{x(t)} \right] + \\ + \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{x(t - \sigma_i(t))}{x(t)} = 0 \end{aligned}$$

Theo định nghĩa α :

$$x(t) = \Phi(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right),$$

và khi đó:

$$\frac{x(H_j(t))}{x(t)} = \exp \left(- \int_{H_j(t)}^t \alpha(s) ds \right), \quad \frac{x(G_i(t))}{x(t)} = \exp \left(- \int_{G_i(t)}^t \alpha(s) ds \right),$$

trong đó $j = 1, 2, \dots, \ell$; $i = 1, 2, \dots, m$ và $t_0 \leq t < T$. Hiển nhiên nó giống như giá trị của j , i , và t của

$$\frac{x(t - \tau_j(t))}{x(H_j(t))} = \frac{\Phi(h_j(t))}{\Phi(t_0)}, \quad \frac{x(t - \sigma_i(t))}{x(G_i(t))} = \frac{\Phi(g_i(t))}{\Phi(t_0)}$$

Còn lại ta cần chứng tỏ rằng:

$$\frac{\dot{x}(t - \tau_j(t))}{\dot{x}(H_j(t))} = \frac{\dot{\Phi}(h_j(t))}{\dot{\Phi}(t_0)}, \quad t_0 \leq t < T, \quad j=1,2,\dots,\ell.$$

Ta có: $t - \tau_j(t) \geq t_0$ kéo theo $h_j(t) = t_0$ và $H_j(t) = t - \tau_j(t)$, khi đó:

$$\frac{\dot{x}(t - \tau_j(t))}{\dot{x}(H_j(t))} = \frac{\dot{x}(H_j(t))}{\dot{x}(H_j(t))} = 1 = \frac{\dot{\Phi}(h_j(t))}{\dot{\Phi}(t_0)}$$

Mặt khác, $t - \tau_j(t) < t_0$ kéo theo $h_j(t) = t - \tau_j(t)$ và $H_j(t) = t_0$, khi đó:

$$\frac{\dot{x}(t - \tau_j(t))}{\dot{x}(H_j(t))} = \frac{\dot{x}(h_j(t))}{\dot{x}(t_0)} = \frac{\dot{\Phi}(h_j(t))}{\dot{\Phi}(t_0)}$$

Sử dụng các đẳng thức này và định nghĩa α , ta được đẳng thức (2.6)

$$\begin{aligned} \alpha(t) + \sum_{j=1}^{\ell} \left[p_j(t)(1 - \tau_j(t)) \frac{\dot{\Phi}(h_j(t))}{\dot{\Phi}(t_0)} \alpha(H_j(t)) + \dot{p}_j(t) \frac{\Phi(h_j(t))}{\Phi(t_0)} \right] \times \\ \times \exp \left(- \int_{H_j(t)}^t \alpha(s) ds \right) + \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{\Phi(g_i(t))}{\Phi(t_0)} \exp \left(- \int_{G_i(t)}^t \alpha(s) ds \right) = 0 \end{aligned}$$

Vậy ta có $a) \Rightarrow b)$.

✦ $b) \Rightarrow c)$: Nếu α là nghiệm liên tục của (2.6), thì lấy $\beta(t) \equiv \gamma(t) \equiv \alpha(t)$, $t_0 \leq t < T$ và điều chứng minh là hiển nhiên vì thực sự $\alpha = S\alpha$.

Vậy ta có $b) \Rightarrow c)$.

✦ $c) \Rightarrow a)$: Trước hết cần chứng tỏ rằng, với giả thiết dưới của c), phương trình (2.6) có nghiệm liên tục $\alpha(t)$ trên $[t_0, T)$, và hàm x được định nghĩa:

$$x(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t_{-1} \leq t < t_0; \\ \Phi(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right), & t_0 \leq t < T \end{cases} \quad (2.9)$$

là nghiệm dương của bài toán giá trị đầu (2.1), (2.4).

Nghiệm liên tục của phương trình (2.6) sẽ lập thành giới hạn của dãy hàm $\{\alpha_k(t)\}$ được định nghĩa như dãy xấp xỉ liên tiếp. Lấy bất kỳ hàm $\alpha_0 \in C[[t_0, T), \mathbb{R}]$ sao cho:

$$\beta(t) \leq \alpha_0(t) \leq \gamma(t), \quad t_0 \leq t < T$$

và đặt:

$$\alpha_{k+1}(t) = (S\alpha_k)(t), \quad t_0 \leq t < T, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Theo giả thiết (2.5), ta có:

$$\beta(t) \leq \alpha_k(t) \leq \gamma(t), \quad t_0 \leq t < T, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

và rõ ràng $\alpha_k \in C[[t_0, T), \mathbb{R}]$. Ta chứng tỏ dãy $\{\alpha_k(t)\}$ hội tụ đều trên khoảng con compact bất kỳ $[t_0, T_1]$ của $[t_0, T)$.

Đặt:

$$M_1 := \max_{t_0 \leq t \leq T_1} \sum_{j=1}^{\ell} \left| p_j(t) (1 - \tau_j(t)) \frac{\dot{\Phi}(h_j(t))}{\dot{\Phi}(t_0)} \right|,$$

$$M_2 := \max_{t_0 \leq t \leq T_1} \sum_{j=1}^{\ell} \left| \dot{p}_j(t) \frac{\Phi(h_j(t))}{\Phi(t_0)} \right|,$$

$$M_3 := \max_{t_0 \leq t \leq T_1} \sum_{i=1}^m \left| q_i(t) \frac{\Phi(g_i(t))}{\Phi(t_0)} \right|,$$

$$L := \max_{t_0 \leq t \leq T_1} \left\{ \max \{ |\beta(t)|, |\gamma(t)| \} \right\}$$

$$M := \max \{ M_1, M_2, M_3 \},$$

$$N_1 := M e^{L(T_1 - t_0)},$$

$$N := \max \{ N_1(L + 2), 2LN_1 \}$$

Khi đó từ (2.10), ta được:

$$\max_{t_0 \leq t \leq T_1} |\alpha_k(t)| \leq L, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Áp dụng định lý giá trị trung bình, ta có:

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\int_{H_j(t)}^t \alpha_k(s) ds\right) - \exp\left(-\int_{H_j(t)}^t \alpha_{k-1}(s) ds\right) \\ &= e^{-\mu_{k,j}(t)} \int_{H_j(t)}^t [\alpha_k(s) - \alpha_{k-1}(s)] ds \end{aligned}$$

với mọi $j = 1, 2, \dots, \ell$; $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{và } t_0 \leq t \leq T_1, \mu_{k,j}(t) \text{ ở giữa } \int_{H_j(t)}^t \alpha_k(s) ds \text{ và } \int_{H_j(t)}^t \alpha_{k-1}(s) ds.$$

Từ $H_j(t) \geq t_0$ với $j = 1, 2, \dots, \ell$ và $t_0 \leq t \leq T_1$, $|\mu_{k,j}(t)| \leq L(T_1 - t_0)$ và

$$\begin{aligned} & \left| \exp\left(-\int_{H_j(t)}^t \alpha_k(s) ds\right) - \exp\left(-\int_{H_j(t)}^t \alpha_{k-1}(s) ds\right) \right| \\ & \leq e^{L(T_1 - t_0)} \int_{t_0}^t |\alpha_k(s) - \alpha_{k-1}(s)| ds \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\left| \exp \left(- \int_{G_i(t)}^t \alpha_k(s) ds \right) - \exp \left(- \int_{G_i(t)}^t \alpha_{k-1}(s) ds \right) \right|$$

$$\leq e^{L(T_1-t_0)} \int_{t_0}^t |\alpha_k(s) - \alpha_{k-1}(s)| ds$$

với $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots$ và $t_0 \leq t \leq T_1$.

Lặp lại chứng minh ở trên, ta có:

$$\left| \alpha_k(H_j(t)) \exp \left(- \int_{H_j(t)}^t \alpha_k(s) ds \right) - \alpha_{k-1}(H_j(t)) \exp \left(- \int_{H_j(t)}^t \alpha_{k-1}(s) ds \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| \alpha_k(H_j(t)) \left[\exp \left(- \int_{H_j(t)}^t \alpha_k(s) ds \right) - \exp \left(- \int_{H_j(t)}^t \alpha_{k-1}(s) ds \right) \right] \right| +$$

$$+ \left| \left[\alpha_k(H_j(t)) - \alpha_{k-1}(H_j(t)) \right] \exp \left(- \int_{H_j(t)}^t \alpha_{k-1}(s) ds \right) \right| \leq$$

$$\leq L e^{L(T_1-t_0)} \int_{t_0}^t |\alpha_k(s) - \alpha_{k-1}(s)| ds + 2L e^{L(T_1-t_0)}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
& \left| \alpha_{k+1}(t) - \alpha_k(t) \right| \leq \sum_{j=1}^{\ell} \left| p_j(t) (1 - \dot{t}_j(t)) \frac{\dot{\Phi}(h_j(t))}{\dot{\Phi}(t_0)} \right| \times \\
& \times \left| \alpha_k(H_j(t)) \exp \left(- \int_{H_j(t)}^t \alpha_k(s) ds \right) - \alpha_{k-1}(H_j(t)) \exp \left(- \int_{H_j(t)}^t \alpha_{k-1}(s) ds \right) \right| + \\
& + \sum_{j=1}^{\ell} \left| \dot{p}_j(t) \frac{\Phi(h_j(t))}{\Phi(t_0)} \right| \left| \exp \left(- \int_{H_j(t)}^t \alpha_k(s) ds \right) - \exp \left(- \int_{H_j(t)}^t \alpha_{k-1}(s) ds \right) \right| + \\
& + \sum_{i=1}^m \left| q_i(t) \frac{\Phi(g_i(t))}{\Phi(t_0)} \right| \left| \exp \left(- \int_{G_i(t)}^t \alpha_k(s) ds \right) - \exp \left(- \int_{G_i(t)}^t \alpha_{k-1}(s) ds \right) \right| \leq \\
& \leq 2LN_1 + N_1(L+2) \int_{t_0}^t |\alpha_k(s) - \alpha_{k-1}(s)| ds \leq N + N \int_{t_0}^t |\alpha_k(s) - \alpha_{k-1}(s)| ds,
\end{aligned}$$

Ta thấy rằng:

$$\left| \alpha_{k+1}(t) - \alpha_k(t) \right| \leq N \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N(t-t_0)^i}{i!} + 2L \frac{N(t-t_0)^k}{k!}$$

với $k = 0, 1, 2, \dots$ và $t_0 \leq t \leq T_1$.

Từ

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{N(t-t_0)^i}{i!} = e^{N(t-t_0)} \text{ và } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(t-t_0)^k}{k!} = 0 \text{ với } t_0 \leq t \leq T_1,$$

Theo tiêu chuẩn Weierstrass ta có dãy

$$\alpha_k(t) = \alpha_0(t) + \sum_{j=0}^{k-1} [\alpha_{j+1}(t) - \alpha_j(t)] \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \quad t_0 \leq t \leq T_1)$$

hội tụ đều, từ đó giới hạn hàm

$$\alpha(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k(t) \tag{2.11}$$

thì liên tục và là nghiệm của phương trình (2.6) trên $[t_0, T_1]$.

Cuối cùng, thực ra $x(t)$ được định nghĩa như (2.9) là nghiệm của bài toán giá trị đầu (2.1), (2.4) có thể chứng minh bằng phép thế trực tiếp:

$$\dot{x}(t) = x(t)\alpha(t)$$

$$\begin{aligned} &= -x(t) \sum_{j=1}^{\ell} \left[p_j(t)(1-\tau_j(t)) \frac{\dot{\Phi}(h_j(t))}{\dot{\Phi}(t_0)} \alpha(H_j(t)) + \dot{p}_j(t) \frac{\Phi(h_j(t))}{\Phi(t_0)} \right] \times \\ &\quad \times \exp\left(-\int_{H_j(t)}^t \alpha(s)ds\right) - x(t) \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{\Phi(g_i(t))}{\Phi(t_0)} \exp\left(-\int_{G_i(t)}^t \alpha(s)ds\right) \\ &= -x(t) \sum_{j=1}^{\ell} p_j(t)(1-\tau_j(t)) \frac{\dot{x}(t-\tau_j(t))}{\dot{x}(H_j(t))} \frac{\dot{x}(H_j(t))}{x(H_j(t))} \frac{x(H_j(t))}{x(t)} - \\ &\quad - x(t) \sum_{j=1}^{\ell} \dot{p}_j(t) \frac{x(t-\tau_j(t))}{x(H_j(t))} \frac{x(H_j(t))}{x(t)} - x(t) \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{x(t-\sigma_i(t))}{x(G_i(t))} \frac{x(G_i(t))}{x(t)} \\ &= -\sum_{j=1}^{\ell} \left[p_j(t)(1-\tau_j(t)) \dot{x}(t-\tau_j(t)) + \dot{p}_j(t) x(t-\tau_j(t)) \right] - \\ &\quad - \sum_{i=1}^m q_i(t) x(t-\sigma_i(t)) \end{aligned}$$

$$= -\sum_{j=1}^{\ell} \frac{d}{dt} [p_j(t) x(t-\tau_j(t))] - \sum_{i=1}^m q_i(t) x(t-\sigma_i(t)), \text{ với } t_0 \leq t < T$$

Vậy ta có c) $\Rightarrow$ a).

Vậy định lý được chứng minh xong.

2.3. Sự tồn tại của nghiệm dương.

Sử dụng Định lý 2.1 làm rõ điều kiện tồn tại của nghiệm dương. Tương tự cũng có thể chứng tỏ điều kiện tồn tại của nghiệm âm.

Đặt:

$$F := \left\{ \Phi \in C^1 \left[[t_{-1}, t_0], \mathbb{R}^+ \right] : 0 < \Phi(t) \leq \Phi(t_0), 0 < \dot{\Phi}(t) \leq \dot{\Phi}(t_0), t_{-1} \leq t \leq t_0 \right\}$$

Định lý sau đây là tổng quát hóa Định lý 2.1.

2.3.1. Định lý 2.2.

Giả sử có (H_1) $p_j \in C^1[[t_0, T), \mathbb{R}]$, $\tau_j \in C^1[[t_0, T), \mathbb{R}^+]$, $j=1, 2, \dots, \ell$.

(H_2) $q_i \in C[[t_0, T), \mathbb{R}]$, $\sigma_i \in C[[t_0, T), \mathbb{R}^+]$, $i=1, 2, \dots, m$.

và tồn tại số dương μ sao cho:

$$\sum_{j=1}^{\ell} \left[|p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t))| \mu + |\dot{p}_j(t)| \right] e^{\mu \tau_j(t)} + \sum_{i=1}^m |q_i(t)| e^{\mu \sigma_i(t)} \leq \mu \quad (2.12)$$

với $t_0 \leq t < T$. Khi đó, với mỗi $\Phi \in F$ thỏa điều kiện (2.5), nghiệm $x(\Phi)$ của phương trình (2.1) có đại lượng dương trong $t_0 \leq t < T$.

Chứng minh

Ta chứng tỏ rằng điều kiện (c) trong Định lý 2.1 thỏa mãn với $\beta(t) = -\mu$ và $\gamma(t) = \mu$, $t_0 \leq t < T$. Với bất kỳ hàm liên tục δ , với $\beta(t) \leq \delta(t) \leq \gamma$, ta có:

$$-\mu \tau_j(t) \leq -\mu(t - H_j(t)) \leq \int_{H_j(t)}^t \delta(s) ds \leq \mu(t - H_j(t)) \leq \mu \tau_j(t),$$

$$(j=1, 2, \dots, \ell)$$

và

$$-\mu \sigma_i(t) \leq -\mu(t - G_i(t)) \leq \int_{G_i(t)}^t \delta(s) ds \leq \mu(t - G_i(t)) \leq \mu \sigma_i(t),$$

$$(i=1, 2, \dots, m)$$

với $t_0 \leq t < T$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} -\mu &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \left[|p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t))| \mu + |\dot{p}_j(t)| \right] e^{\mu \tau_j(t)} - \sum_{i=1}^m |q_i(t)| e^{\mu \sigma_i(t)} \\ &\leq (S\delta)(t) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \left[|p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t))| \mu + |\dot{p}_j(t)| \right] e^{\mu \tau_j(t)} + \sum_{i=1}^m |q_i(t)| e^{\mu \sigma_i(t)} \leq \mu \end{aligned}$$

với $t_0 \leq t < T$.

Do đó, theo Định lý 2.1, nghiệm $x(\Phi)(t)$ của phương trình (2.1) thuộc (t_0, Φ) là đại lượng dương trên $[t_0, T)$.

Vậy định lý được chứng minh xong.

Áp dụng định lý này cho vài trường hợp đặc biệt:

Đặt:

$$\tau(t) := \max_{j=1, \ell} \tau_j(t), \quad \sigma(t) := \max_{i=1, m} \sigma_i(t),$$

$$\bar{p}(t) := \sum_{j=1}^{\ell} |p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t))|,$$

$$\bar{r}(t) := \sum_{j=1}^{\ell} |\dot{p}_j(t)|, \quad \bar{q}(t) := \sum_{i=1}^m |q_i(t)|.$$

Khi đó, từ bất đẳng thức (2.11), ta có:

$$(\bar{p}(t)\mu + \bar{r}(t))e^{\mu\tau(t)} + \bar{q}(t)e^{\mu\sigma(t)} \leq \mu, \quad (2.13)$$

Nó thì đồng nhất với (2.12) đối với trường hợp trung hòa đơn.

Bây giờ, xét trường hợp đặc biệt:

Đặt:

$$\tau := \sup_{t \in [t_0, T)} \tau(t), \quad \sigma := \sup_{t \in [t_0, T)} \sigma(t),$$

$$\bar{p} := \sup_{t \in [t_0, T)} \bar{p}(t), \quad \bar{r} := \sup_{t \in [t_0, T)} \bar{r}(t), \quad \bar{q} := \sup_{t \in [t_0, T)} \bar{q}(t)$$

Khi đó, từ bất đẳng thức (2.12), ta có:

$$(\bar{p}\mu + \bar{r})e^{\mu\tau} + \bar{q}e^{\mu\sigma} \leq \mu. \quad (2.14)$$

nó thì đồng nhất với (2.12) đối với trường hợp trung hòa hệ số đơn và hệ số hằng.

Trong trường hợp $\tau = \sigma = \lambda$, ta có:

$$e^{\mu\lambda} \leq \frac{\mu}{p\mu + r + q} \quad (2.15)$$

Nếu $\frac{1}{p} > 1$ và $\lambda < \lambda_0$ với vài điểm tới hạn λ_0 , thì (2.14) có nghiệm dương. Điểm tới hạn λ_0 có thể thành lập bởi sự quan sát mà đạo hàm bên trái và bên phải dẫn đến μ thì bằng với λ_0 . Khi đó, λ_0 là nghiệm duy nhất của phương trình:

$$\exp\left(\frac{2A\lambda}{A\lambda + \sqrt{A\lambda}\sqrt{4\bar{p} + A\lambda}}\right) = \frac{2}{2\bar{p} + A\lambda + \sqrt{A\lambda}\sqrt{4\bar{p} + A\lambda}}$$

với $A = \bar{r} + \bar{q}$. Chú ý rằng trong trường hợp trung hòa $\bar{p} = \bar{r} = 0$, ta thu được kết quả đã biết $\lambda_0 = \frac{1}{eq}$.

2.3.2. Định lý 2.3.

Giả sử rằng có

$$(H_1) \quad p_j \in C^1[[t_0, T), \mathbb{R}], \tau_j \in C^1[[t_0, T), \mathbb{R}^+], j = 1, 2, \dots, \ell.$$

$$(H_2) \quad q_i \in C[[t_0, T), \mathbb{R}], \sigma_i \in C[[t_0, T), \mathbb{R}^+], i = 1, 2, \dots, m.$$

và với mọi $t \in [t_0, T)$ thỏa:

$$0 \leq \tau_1(t) \leq \tau_2(t) \leq \dots \leq \tau_\ell(t), \quad (2.16)$$

$$0 \leq \sigma_1(t) \leq \sigma_2(t) \leq \dots \leq \sigma_m(t), \quad (2.17)$$

$$\sum_{j=1}^v p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t)) \leq 0, \quad \sum_{j=1}^v \dot{p}_j(t) \leq 0, \quad v = 1, 2, \dots, \ell \quad (2.18)$$

$$\sum_{i=1}^v q_i(t) \leq 0, \quad v = 1, 2, \dots, m \quad (2.19)$$

$$\sum_{j=1}^{\ell} [p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t))]_- < 1. \quad (2.20)$$

Nếu tồn tại hàm tăng dương $\gamma \in C[[t_0, T), \mathbb{R}]$ sao cho:

$$\gamma(t) \geq \frac{\sum_{j=1}^{\ell} [\dot{p}_j(t)]_- + \sum_{i=1}^m [q_i(t)]_-}{1 - \sum_{j=1}^{\ell} [p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t))]_-} \quad (2.21)$$

thì với mỗi $\Phi \in F$ nó thỏa mãn điều kiện (2.5), phương trình (2.1) có nghiệm dương tăng trên $[t_0, T)$. Đây là nghiệm thỏa bất đẳng thức

$$x(t) \leq \Phi(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \gamma(s) ds \right) \quad (2.22)$$

Chứng minh

Nó sẽ chứng tỏ rằng mệnh đề (c) của Định lý 2.1 đúng với $\beta(t) = 0$ và $\gamma(t)$ với $t_0 \leq t < T$.

Với hàm $\delta \in [[t_0, T], \mathbb{R}]$ bất kỳ nằm giữa β và γ thỏa:

$$\begin{aligned} (S\delta)(t) &\leq \sum_{j=1}^{\ell} [p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t))]_- \gamma(t) + \sum_{j=1}^{\ell} [\dot{p}_j(t)]_- + \sum_{i=1}^m [q_i(t)]_- \\ &\leq \gamma(t) \left[\sum_{j=1}^{\ell} [p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t))]_- \right] + \gamma(t) \left[1 - \sum_{j=1}^{\ell} [p_j(t)(1 - \dot{\tau}_j(t))]_- \right] \\ &\leq \gamma(t) \end{aligned}$$

Bởi vì các bất đẳng thức

$$H_1(t) \geq H_2(t) \geq \dots \geq H_{\ell}(t), \quad t_0 \leq t < T,$$

$$G_1(t) \geq G_2(t) \geq \dots \geq G_m(t), \quad t_0 \leq t < T,$$

nên hệ thức (2.18) và (2.19) đúng.

$$\begin{aligned} (S\delta)(t) &\geq \left[- \sum_{j=1}^{\ell} p_j(t)(1 - \dot{\tau}(t)) \right] \min_{1 \leq j \leq \ell} \left\{ \frac{\dot{\Phi}(h_j(t))}{\dot{\Phi}(t_0)} \right\} \cdot 0 \cdot \exp \left(- \int_{H_{\ell}(t)}^t \delta(s) ds \right) \\ &\quad + \left[- \sum_{j=1}^{\ell} \dot{p}_j(t) \right] \frac{\Phi(h_j(t))}{\Phi(t_0)} \exp \left(- \int_{H_{\ell}(t)}^t \delta(s) ds \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left[- \sum_{i=1}^m q_i(t) \right] \frac{\Phi(g_i(t))}{\Phi(t_0)} \exp \left(- \int_{G_m(t)}^t \delta(s) ds \right)$$

$$\geq 0 \text{ với } t_0 \leq t < T.$$

Do đó, nghiệm $x(t) = x(\Phi)(t)$ của phương trình (2.1) là dương trên $[t_0, T)$. Như trong chứng minh Định lý 2.1, $x(t)$ có thể viết dưới dạng:

$$x(t) = \Phi(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right), \quad t_0 \leq t < T$$

với $\alpha(t)$ là nghiệm liên tục của phương trình đặc trưng (2.6) sao cho $0 \leq \alpha(t) \leq \gamma(t)$ với $t_0 \leq t < T$. Từ đó, x là nghiệm tăng của phương trình (2.1).

Vậy định lý được chứng minh xong.

KẾT LUẬN

Trong quá trình nghiên cứu luận văn, bằng cách tìm hiểu các định nghĩa và chứng minh các định lý tôi nhận thấy phương trình vi phân tuyến tính trung hòa đôi số lệch dạng:

$$\frac{d}{dt} \left[x(t) + \sum_{j=1}^{\ell} p_j(t) x(t - \tau_j(t)) \right] + \sum_{i=1}^m q_i(t) x(t - \sigma_i(t)) = 0, \quad (2.1)$$

có tính ổn định của nghiệm không, và tất cả các nghiệm của phương trình đều ổn định tiệm cận trong trường hợp đặc biệt của phương trình trên có dạng:

$$\frac{d}{dt} [x(t) - P(t)x(t - \tau)] + Q(t)x(t - \sigma) = 0,$$

Và bằng phương pháp khái quát hóa phương trình đặc trưng đã chứng tỏ được điều kiện tồn tại nghiệm dương của phương trình (2.1).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phú, *Cơ sở phương trình vi phân và Lý thuyết ổn định*, Nhà xuất bản Giáo dục 2000.
- [2] Hoàng Tụy, *Hàm thực và Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.
- [3] Chuanxi, Q., Ladas, G., *Existence of Positive Solutions for Neutral Differential Equations*, Journal of Applied Mathematics and Simulation 2 (1989), 267 – 276.
- [4] G. Gao, *On $3/2$ asymptotic stability of one – Dimensional Functional Differential Equations with Unbounded Delay*, Kexue Tongbao 33 (1993), 683 – 686 (in Chinese).
- [5] Giang, D. V., Györi, I., *Oscillation of a Linear Neutral Delay Differential Equations with Unbounded Time Lag*, Differential Equations and Dynamical System 14 (1993), 267 – 274.
- [6] K. Gopalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics* (Kluwer Academic, Boston, 1992).
- [7] I. Györi, G. Ladas, *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*, Clarendon Press – Oxford, 1991.
- [8] V. B. Kolmanovskii, L. Torelli and R. Vermiglio, *Stability of Some Test Equations with Delay*, Siam J. Math. Analysis 25 (1994), 948 – 961.
- [9] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics* (Academic, Boston, 1993).
- [10] G. Ladas and Y. G. Sficas, *Asymptotic Behavior of Oscillatory Solutions*, Hiroshima Math. J. 18 (1988), 351 – 359.
- [11] Hajnalka Péics, János Karsai, *Positive Solutions of Neutral Delay Differential Equation*, Novi Sad J.Math, Vol. 32, No.2,2002, 95 –108
- [12] X. H. Tang, Xingfu Zou, *Asymptotic Stability Of a Neutral Differential Equation*, Proc. Edi. Math. Soc. 45 (2002), 333 – 347).
- [13] T. Yoneyama, *On the $3/2$ Stability Theorem for one – Dimensional Delay – Differential Equations*, J. Math. Analysis Applic. 125 (1987), 161 – 173.
- [14] J. A. Yorke, *Asymptotic Stability for one Dimensional Differential – Delay Equations*, J. Diff. Eqns 7 (1970), 189 – 202.

- [15] J. S. Yu, *Asymptotic Stability for Nonautonomous Scalar Neutral Differential Equations*, J.Math.Analysis Applic. 203(1996), 850-860.
- [16] Yuecai, F., Yunen, D., *Oscillatory and Asymptotic Behaviour of First Order Differential Equations with Piecewise Constant Deviating Arguments*, Annales of Differential Equations, 15 4(1999), 345–351.