

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

-----o0o-----

Lê Thị Kim Anh

**NGHIỆM KHÔNG ÂM CỦA PHƯƠNG
TRÌNH VI PHÂN HÀM BẬC NHẤT**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thành phố Hồ Chí Minh – 2011

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

-----o0o-----

Lê Thị Kim Anh

**NGHIỆM KHÔNG ÂM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
HÀM BẬC NHẤT**

Chuyên ngành : Toán Giải Tích

Mã số : 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. NGUYỄN ANH TUẤN**

Thành phố Hồ Chí Minh - 2011

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin kính gửi đến **PGS.TS. Nguyễn Anh Tuấn** lời cảm ơn sâu sắc về sự tận tình giúp đỡ của **Thầy** đối với tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn cũng như trong học tập.

Xin trân trọng cảm ơn **Quý Thầy Cô** thuộc khoa Toán của trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh đã tận tình truyền đạt kiến thức và kinh nghiệm quý báu cho tôi trong suốt những năm học tập.

Xin trân trọng cảm ơn Phòng Sau Đại Học trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn tất chương trình học tập và thực hiện luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn đến gia đình tôi, là chỗ dựa cho tôi về mọi mặt và đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi học tập và hoàn thành luận văn này.

Lê Thị Kim Anh

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN	1
MỤC LỤC	4
DANH MỤC CÁC KÍ HIỆU	6
MỞ ĐẦU	7
CHƯƠNG 1. VỀ CÁC TẬP $S_{ab}(a)$ VÀ $S_{ab}(b)$	9
1.1 Giới thiệu bài toán	9
1.2 Kết quả chuẩn bị.....	9
1.2.1 Định lí.....	9
1.2.2 Định nghĩa	11
1.2.3 Chú ý	11
1.2.4 Chú ý	11
1.2.5 Chú ý	12
1.3 Các kết quả chính	14
1.3.1 Định lí.....	14
1.3.2 Hệ quả	15
1.3.3 Chú ý.....	20
1.3.4 Định lí.....	25
1.3.5 Định lí.....	27
1.3.6 Hệ quả	28
1.3.7 Chú ý	28
1.3.8 Định lí.....	30
1.3.9 Các chú ý.....	35
1.3.10 Định lí.....	35
1.3.11 Hệ quả.....	35
1.3.12 Định lí.....	39
1.3.13 Định lí.....	39
1.3.14 Hệ quả.....	40
1.3.15 Định lí.....	41
1.3.16 Chú ý	41
1.3.17 Phương trình vi phân hàm với các đối số lệch.	41

CHƯƠNG II. CÁC TIÊU CHUẨN HIỆU QUẢ	56
2.1 Kết quả chuẩn bị	56
2.1.1 Định nghĩa	56
2.1.2 Chú ý.....	56
2.2 Các kết quả chính	56
2.2.1 Các mệnh đề.....	56
2.2.2 Bổ đề	59
2.2.3 Định lý.....	62
2.2.4 Định lý.....	63
2.2.5 Hệ quả	64
2.2.6 Định lý.....	65
2.2.7 Định lý.....	66
2.2.8 Hệ quả	66
2.2.9 Phương trình vi phân với các đôi số lệch.....	66
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ.....	70
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	71

DANH MỤC CÁC KÍ HIỆU

$\mathbb{R}$	Tập tất cả các số thực, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty]$.
$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$	Tập hợp các số thực không âm
$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$	Tập hợp các số thực không dương
$C([a, b]; \mathbb{R})$	Không gian Banach các hàm số liên tục $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ với chuẩn $\ u\ _C = \max \{ u(t) : a \leq t \leq b\}$.
$C([a, b]; \mathbb{R}_+)$	Tập các hàm $\{u \in C([a, b]; \mathbb{R}) : u(t) \geq 0, t \in [a, b]\}$
$C_{t_0}([a, b]; \mathbb{R}_+)$	Tập các hàm $\{u \in ([a, b]; \mathbb{R}_+) : u(t_0) = 0\}$, với $t_0 \in [a, b]$
$\tilde{C}([a, b]; D)$, với $D \subseteq \mathbb{R}$	Tập các hàm số liên tục tuyệt đối $u: [a, b] \rightarrow D$
$L([a, b]; \mathbb{R})$	Không gian Banach các hàm khả tích Lebesgue $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ với chuẩn $\ p\ _L = \int_a^b p(s) ds$
$L([a, b]; D)$, với $D \subseteq \mathbb{R}$	Tập các hàm khả tích Lebesgue $p: [a, b] \rightarrow D$.
M_{ab}	Tập các hàm đo được $\tau: [a, b] \rightarrow [a, b]$
$\tilde{L}_{ab}$	Tập các toán tử tuyến tính bị chặn mạnh $\ell: C([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R})$
P_{ab}	Tập các toán tử tuyến tính $\ell \in \tilde{L}_{ab}$, $\ell: C([a, b]; \mathbb{R}_+) \rightarrow L([a, b]; \mathbb{R}_+)$
Toán tử t_0 – Volterra, với $t_0 \in [a, b]$	Tập các toán tử $\ell \in \tilde{L}_{ab}$ sao cho với bất kỳ $a_1 \in [a, t_0]$, $b_1 \in [t_0, b]$, $a_1 \neq b_1$ và $v \in C([a, b]; \mathbb{R})$ nếu $v(t) = 0, \forall t \in [a_1, b_1]$ thì $\ell(v)(t) = 0, \forall t \in [a_1, b_1]$
$[x]_+$	$[x]_+ = \frac{1}{2}(x + x) = \frac{1}{2}x(\operatorname{sgn} x + 1)$
$[x]_-$	$[x]_- = \frac{1}{2}(x - x) = \frac{1}{2}x(\operatorname{sgn} x - 1)$

MỞ ĐẦU

Lý thuyết bài toán biên cho phương trình vi phân thường (PTVPT) và phương trình vi phân hàm (PTVPH) ra đời từ thế kỉ 18, song đến nay vẫn được nhiều người quan tâm nhờ các ứng dụng của nó trong các lĩnh vực vật lý, cơ học, kinh tế, nông nghiệp,

Từ quan điểm đương thời, có thể nói rằng phương pháp giải tích hàm và phương pháp topo là những phương pháp hữu dụng nhất. Qua những ứng dụng có tính hệ thống của các phương pháp này, cơ sở lý thuyết về bài toán biên cho một lớp rộng PTVPH đã được xây dựng.

Tuy nhiên cho đến tận bây giờ, thực tế bài toán biên cho PTVPH được nghiên cứu với những kết quả chưa có tính hệ thống. Việc nghiên cứu về PTVPH có hệ thống luôn gặp nhiều khó khăn ngay cả trong phương trình tuyến tính. Ví dụ, câu hỏi về tính giải được của bài toán biên đơn giản nhất (bài toán giá trị đầu):

$$u'(t) = p(t)u(\tau(t)) + q(t), \quad u(a) = 0,$$

(với $p, q : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả tích Lebesgue và $\tau : [a; b] \rightarrow [a; b]$ là hàm đo được), không bao giờ trở nên tầm thường như với phương trình vi phân thông thường, có nghĩa là trong trường hợp $\tau(t) = t, t \in [a; b]$.

Về phần PTVP thường, một vài kết quả đủ mạnh đã được xây dựng cho bài toán giá trị biên, sử dụng những phương pháp mà cơ sở của nó nằm trong giải tích toán học hiện đại. Việc này thể hiện những nỗ lực để điều chỉnh các phương pháp của giải tích toán học trong việc nghiên cứu PTVPH. Những năm gần đây nỗ lực này đã thành công trong trường hợp một vài bài toán biên của PTVPH. Đặc biệt trong các công trình của I.Kiguradze, P.Buza, R.Hakl... những điều kiện phức tạp về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của một lớp rộng bài toán biên cho PTVPH cả tuyến tính lẫn phi tuyến đã được tìm ra.

Chính vì những kết quả nhận được trong các nghiên cứu này tôi quyết định sử dụng phương pháp giải tích toán học và các nghiên cứu về bài toán biên của PTVP với những điều chỉnh phù hợp cho PTVPH. Phần lớn phương pháp được sử dụng là áp dụng các kỹ thuật về bất đẳng thức vi phân.

Trong luận văn này tôi nghiên cứu về vấn đề tồn tại nghiệm không âm của bài toán biên cho phương trình vi phân hàm bậc nhất tuyến tính. Bài toán như sau:

Xét sự tồn tại và duy nhất nghiệm không âm u của phương trình :

$$u'(t) = \ell(u)(t) + q(t)$$

với điều kiện biên

$$u(a) = c \text{ (hoặc, } u(b) = c)$$

Trong đó $q \in L([a, b]; \mathbb{R}_+)$ (hoặc $q \in L([a, b]; \mathbb{R}_-)$), $c \in \mathbb{R}_+$ và $\ell \in \tilde{L}_{ab}$.

Trường hợp đặc biệt của bài toán là phương trình vi phân với đối số lệch

$$u'(t) = p(t)u(\tau(t)) - g(t)u(\mu(t)) + q(t)$$

với $p, g \in L([a, b]; \mathbb{R}_+)$, $q \in L([a, b]; \mathbb{R})$, $\tau, \mu \in M_{ab}$.

Luận văn gồm 2 chương:

Chương I: Nội dung chính của chương 1 là xây dựng các điều kiện cần và đủ để một toán tử tuyến tính $\ell \in \tilde{L}_{ab}$ thuộc tập $S_{ab}(a)$ (hoặc $S_{ab}(b)$). Trong phần cuối của chương ta áp dụng các kết quả ở trên cho phương trình vi phân hàm với các đối số lệch.

Chương II: Nội dung chính của chương 2 là xây dựng các tiêu chuẩn hiệu quả cho các điều kiện cần và đủ ở chương 1 để một toán tử $\ell \in \tilde{L}_{ab}$ thuộc tập $S_{ab}(a)$ (hoặc $S_{ab}(b)$).

CHƯƠNG 1

VỀ CÁC TẬP $S_{ab}(a)$ VÀ $S_{ab}(b)$

1.1 Giới thiệu bài toán

Xét bài toán tồn tại và duy nhất nghiệm không âm u của phương trình

$$u'(t) = \ell(u)(t) + q(t) \quad (1.1)$$

với điều kiện biên

$$u(a) = c \quad (1.2)$$

hoặc,

$$u(b) = c \quad (1.3)$$

Trong đó $q \in L([a, b]; \mathbb{R}_+)$ (hoặc, $q \in L([a, b]; \mathbb{R}_-)$), $c \in \mathbb{R}_+$ và $\ell \in \tilde{L}_{ab}$.

Nghiệm của phương trình (1.1) là hàm $u \in \tilde{C}([a, b]; \mathbb{R})$ thỏa (1.1) hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Trường hợp riêng của phương trình (1.1) là phương trình vi phân với đối số lệch

$$u'(t) = p(t)u(\tau(t)) - g(t)u(\mu(t)) + q(t) \quad (1.4)$$

Trong đó $p, g \in L([a, b]; \mathbb{R}_+)$, $q \in L([a, b]; \mathbb{R})$, $\tau, \mu \in M_{ab}$.

Cùng với bài toán (1.1), (1.2) (hoặc (1.3)) ta xét bài toán thuần nhất tương ứng

$$u'(t) = \ell(u)(t) \quad (1.1_0)$$

với điều kiện biên thuần nhất

$$u(a) = 0 \quad (1.2_0)$$

hoặc

$$u(b) = 0 \quad (1.3_0)$$

1.2 Kết quả chuẩn bị

1.2.1 Định lý

Bài toán (1.1), (1.2) (hoặc (1.1), (1.3)) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi bài toán thuần nhất tương ứng (1.1₀), (1.2₀) (hoặc (1.1₀), (1.2₀)) chỉ có nghiệm tầm thường.

Chứng minh

Đặt $B = C([a, b], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ là không gian Banach chứa các phần tử $v = (u, c_0)$, trong đó $u \in C([a, b], \mathbb{R})$, $c_0 \in \mathbb{R}$ và chuẩn $\|v\| = \|u\|_C + |c_0|$

Với tùy ý $v = (u, c_0)$ cố định, $t_0 \in [a, b]$ ta đặt

$$f(v)(t) = \left(c_0 + u(t_0) + \int_{t_0}^t \ell(u)(s) ds, c_0 - u(a) \right)$$

và đặt

$$h(t) = \left(\int_{t_0}^t q(s) ds, c \right), \quad \forall t \in [a, b]$$

Khi đó bài toán (1.1), (1.2) trở thành phương trình các toán tử trong B

$$v = f(v) + h$$

do $v = (u, c_0)$ là nghiệm của phương trình trên khi và chỉ khi $c_0 = 0$ và u là nghiệm của bài toán (1.1), (1.2)

- f là toán tử compact. Thật vậy :

Ta chứng minh $f(M)$ là tập compact tương đối nếu M là một tập bị chặn trong B .

Đặt $M = \{v \in B : \|v\| \leq K\}$ với K dương.

Do ℓ là toán tử tuyến tính bị chặn mạnh nên có $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $|\ell(u)(t)| \leq \eta(t) \|u\|_C$,

$\forall u \in C([a, b], \mathbb{R})$, $\forall t \in [a, b]$ và với mọi $v \in M$ ta có

$$\|f(v)(t)\| \leq 2|c_0| + 2\|u\|_C + \left| \int_{t_0}^t \ell(u)(s) ds \right| \leq 2K + \|u\|_C \int_a^b \eta(s) ds \leq 2K + K \int_a^b \eta(s) ds$$

Suy ra $f(M)$ bị chặn đều.

Mặt khác, với $t, s \in [a, b]$ ta có

$$\begin{aligned} \|f(v)(t) - f(v)(s)\| &= \left\| \left(\int_t^s \ell(u)(\xi) d\xi, 0 \right) \right\| = \left| \int_t^s \ell(u)(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \|u\|_C \left| \int_t^s \eta(\xi) d\xi \right| \leq K \left| \int_t^s \eta(\xi) d\xi \right| \end{aligned}$$

Suy ra $f(M)$ đồng liên tục đều.

Theo định lý Ascoli-Arzelà f là toán tử compact.

- Áp dụng luận phiên Fredholm cho phương trình các toán tử, phương trình $v = f(v) + h$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $v = f(v)$ chỉ có nghiệm tầm thường, tương đương với bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường.

1.2.2 Định nghĩa

Ta nói một toán tử $\ell \in \tilde{L}_{ab}$ thuộc về tập $S_{ab}(a)$ (hoặc $S_{ab}(b)$) nếu ℓ thỏa 2 điều kiện sau:

- (i) Bài toán (1.1₀), (1.2₀) (hoặc (1.1₀), (1.3₀)) chỉ có nghiệm tầm thường.
- (ii) Với mọi $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ (hoặc $q \in L([a, b], \mathbb{R}_-)$) và $c \in \mathbb{R}_+$, thì nghiệm của bài

toán (1.1), (1.2) (hoặc (1.1), (1.3)) là không âm.

Theo định lí 1.2.1 ta thấy nếu $\ell \in S_{ab}(a)$ (hoặc $\ell \in S_{ab}(b)$) thì bài toán (1.1), (1.2) (hoặc (1.1), (1.3)) có nghiệm duy nhất với mọi $c \in \mathbb{R}_+$ và $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ (hoặc mọi $c \in \mathbb{R}_-$ và $q \in L([a, b], \mathbb{R}_-)$)

1.2.3 Chú ý

Theo Định lí 1.2.1 nếu $\ell \in S_{ab}(a)$ (tương ứng $\ell \in S_{ab}(b)$) thì với mỗi $c \in \mathbb{R}_+$ và $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ (hoặc $q \in L([a, b], \mathbb{R}_-)$), bài toán (1.1), (1.2) (hoặc (1.1), (1.3)) có nghiệm duy nhất, không âm.

1.2.4 Chú ý

Từ Định lí 1.2.1 ta thấy $\ell \in S_{ab}(a)$ (hoặc $\ell \in S_{ab}(b)$), nếu và chỉ nếu với mọi $u, v \in \tilde{C}([a, b], \mathbb{R})$ thỏa các bất đẳng thức sau:

- (i) $u'(t) \leq \ell(u)(t) + q(t), \quad t \in [a, b]$
- (ii) $v'(t) \geq \ell(v)(t) + q(t), \quad t \in [a, b]$
- (iii) $u(a) \leq v(a)$ (hoặc $u(b) \geq v(b)$)

thì $u(t) \leq v(t)$ (hoặc $u(t) \geq v(t)$)

Chứng minh

- Điều kiện cần: Giả sử $\ell \in S_{ab}(a)$ ta chứng minh rằng với mọi $u, v \in \tilde{C}([a, b], \mathbb{R})$ thỏa ba bất đẳng thức (i), (ii), (iii) thì $u(t) \leq v(t)$. Thật vậy:

Đặt $w(t) = v(t) - u(t)$. Theo (i), (ii), (iii) ta có

$$w'(t) \geq \ell(w)(t), \quad t \in [a, b] \quad \text{và} \quad w(a) \geq 0$$

Khi đó dễ dàng thấy $w(t)$ là nghiệm của bài toán sau:

$$w'(t) = \ell(w)(t) + q(t) \quad \text{và} \quad w(a) = c$$

với $q(t) = w'(t) - \ell(w)(t) \geq 0$ và $c = w(a) \geq 0$

Do đó theo định nghĩa của $\ell \in S_{ab}(a)$ bài toán trên có nghiệm duy nhất $w(t)$ không âm. Từ đó suy ra $u(t) \leq v(t)$.

• Điều kiện đủ: Giả sử rằng với mọi $u, v \in \tilde{C}([a, b], \mathbb{R})$ thỏa ba bất đẳng thức (i), (ii), (iii) thì $u(t) \leq v(t)$, ta chứng minh $\ell \in S_{ab}(a)$ theo Chú ý 1.2.3. Thật vậy:

▪ Bước 1: Chứng minh bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm duy nhất

Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm của bài toán (1.1), (1.2)

Đặt $u = u_1, v = u_2$, thì u, v thỏa ba bất đẳng thức (i), (ii), (iii) suy ra $u_1(t) \leq u_2(t)$

Đặt $u = u_2, v = u_1$, thì u, v thỏa ba bất đẳng thức (i), (ii), (iii) suy ra $u_2(t) \leq u_1(t)$

Do đó $u_1(t) = u_2(t)$. Vậy bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm duy nhất.

▪ Bước 2: Giả sử u_0 là nghiệm của bài toán (1.1), (1.2), ta chứng minh $u_0(t) \geq 0, t \in [a, b]$.

Chọn $u(t) \equiv 0$ và đặt $v(t) \equiv u_0(t)$

Ta thấy u, v thỏa ba bất đẳng thức (i), (ii), (iii) suy ra $u(t) \leq v(t), t \in [a, b]$ hay

$$u_0(t) \geq 0, \quad t \in [a, b]$$

Vậy $\ell \in S_{ab}(a)$.

1.2.5 Chú ý

Nếu $\ell \in P_{ab}$ (hoặc $-\ell \in P_{ab}$) thì $\ell \in S_{ab}(a)$ (hoặc $\ell \in S_{ab}(b)$) khi và chỉ khi bài toán

$$u'(t) \leq \ell(u)(t), \quad u(a) = 0 \tag{1.5}$$

hoặc

$$u'(t) \geq \ell(u)(t), \quad u(b) = 0 \tag{1.6}$$

không có nghiệm không âm khác tầm thường.

Chứng minh

- Điều kiện cần: Giả sử $\ell \in S_{ab}(a)$, ta chứng minh bài toán (1.5) không có nghiệm không âm khác tầm thường. Thật vậy:

Gọi u là nghiệm của bài toán (1.5)

Áp dụng Chú ý 1.2.4 với $v(t) \equiv 0$, $q(t) \equiv 0$ ta được $u(t) \leq 0$ với $t \in [a, b]$.

- Điều kiện đủ: Giả sử bài toán (1.5) không có nghiệm không âm khác tầm thường. Ta chứng minh $\ell \in S_{ab}(a)$ theo định nghĩa 1.2.2. Thật vậy:

- Bước 1: Gọi u_0 là nghiệm của bài toán thuần nhất (1.1₀), (1.2₀). Ta chứng minh

$$u_0(t) \equiv 0$$

Ta có:

$$|u_0(t)|' = [u_0(t) \operatorname{sgn}(u_0(t))]' = u_0'(t) \operatorname{sgn} u_0(t) = \ell(u_0)(t) \operatorname{sgn} u_0(t)$$

Mặt khác, do

$$\ell \in P_{ab} \Rightarrow \begin{cases} \ell(|u_0|)(t) \geq \ell(u_0)(t) \\ \ell(|u_0|)(t) \geq -\ell(u_0)(t) \end{cases} \Rightarrow \ell(|u_0|)(t) \geq |\ell(u_0)(t)| \geq \ell(u_0)(t) \operatorname{sgn} u_0(t)$$

Nên ta có

$$|u_0(t)|' \leq \ell(|u_0|)(t), \quad t \in [a, b]$$

$$|u_0(a)| = 0$$

Vì vậy, $|u_0|$ là nghiệm của bài toán (1.5). Như vậy, $|u_0| \equiv 0$ nghĩa là bài toán thuần nhất (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường.

- Bước 2: Gọi u là nghiệm của bài toán (1.1), (1.2) với $q \in L([a, b]; \mathbb{R}_+)$ và $c \in \mathbb{R}_+$.

Ta chứng minh $u(t) \geq 0$

Đặt

$$v(t) = u(t) - c, \quad t \in [a, b]$$

Ta có

$$\begin{aligned} v'(t) &= u'(t) = \ell(u)(t) + q(t) \geq \ell(u)(t) \\ \ell(v)(t) &= \ell(u - c)(t) = \ell(u)(t) - \ell(c)(t) \leq \ell(u)(t) \end{aligned} \Rightarrow v'(t) \geq \ell(v)(t)$$

Do $\ell \in P_{ab}$ nên $|v|'(t) \leq \ell(|v|)(t)$ (chứng minh giống ở bước 1).

Do đó ta có

$$\begin{cases} |v'| (t) \leq \ell(|v|)(t) \\ v'(t) \geq \ell(v)(t) \end{cases} \Rightarrow |v'| (t) - v'(t) \leq \ell(|v|)(t) - \ell(v)(t) \Rightarrow 2[v]_-' (t) \leq \ell(2[v]_-)(t)$$

Từ đó suy ra

$$[v(t)]_-' \leq \ell([v]_-)(t), \quad t \in [a, b]$$

Mặt khác từ điều kiện biên $u(a) = c$ ta có $v(a) = 0$ hay $[v]_-(a) = 0$

Như vậy ta thấy $[v]_-$ là nghiệm của bài toán (1.5)

Suy ra $[v]_- \equiv 0 \Rightarrow |v(t)| = v(t), \quad t \in [a, b]$

Mà $u(t) = v(t) + c, \quad t \in [a, b]$ nên $u(t) \geq 0, \quad t \in [a, b]$.

Theo Định nghĩa 1.2.2 ta có toán tử $\ell \in S_{ab}(a)$.

1.3 Các kết quả chính

1.3.1 Định lí

Giả sử $\ell \in P_{ab}$. Khi đó $\ell \in S_{ab}(a)$ nếu và chỉ nếu tồn tại $\gamma \in \tilde{C}([a, b], (0, +\infty))$ thỏa bất đẳng thức

$$\gamma'(t) \geq \ell(\gamma)(t), \quad t \in [a, b] \quad (1.7)$$

Chứng minh

• Điều kiện đủ

Giả sử tồn tại hàm số $\gamma \in \tilde{C}([a, b], (0, +\infty))$ thỏa bất đẳng thức (1.7) ta chứng minh $\ell \in S_{ab}(a)$ theo Định nghĩa 1.2.2

- Bước 1: Ta chứng minh toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường

Giả sử u là nghiệm không tầm thường của bài toán (1.1₀), (1.2₀). Do $\ell \in P_{ab}$ và từ (1.1₀), (1.2₀) ta có

$$|u'(t)| = \ell(u)(t) \operatorname{sgn} u(t) \leq \ell(|u|)(t), \quad t \in [a, b] \quad (1.8)$$

Do $\gamma(t) \neq 0$ suy ra $\frac{|u(t)|}{\gamma(t)}$ là hàm liên tục nên tồn tại $t_* \in (a, b]$ sao cho $\frac{|u(t_*)|}{\gamma(t_*)} = \lambda_*$ với

$$\lambda_* = \max \left\{ \frac{|u(t)|}{\gamma(t)} : t \in [a, b] \right\}$$

Đặt $v(t) = \lambda_* \gamma(t) - |u(t)|$, $t \in [a, b]$. Rõ ràng:

$$v(t) \geq 0, \quad t \in [a, b], \quad v(a) = \lambda_* \gamma(a) > 0, \quad v(t_*) = 0 \quad (1.9)$$

Từ (1.7), (1.8) và (1.9) ta có $v'(t) \geq \lambda_* \ell(\gamma)(t) - \ell(|u|)(t) = \ell(v)(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$ mâu thuẫn với (1.9). Vì vậy bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường.

▪ Bước 2: Giả sử u_0 là nghiệm của bài toán (1.1), (1.2) với $c \in \mathbb{R}_+$ và $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$. Ta sẽ chứng minh $u_0(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$

Giả sử rằng $[u_0(t)]_- \not\equiv 0$. Do $\ell \in P_{ab}$ và (1.1) ta có

$$[u_0(t)]'_- = \frac{1}{2}(\ell(u_0)(t) \operatorname{sgn} u_0(t) - \ell(u_0)(t)) + \frac{1}{2}q(t)(\operatorname{sgn} u_0(t) - 1) \leq \ell([u_0]_-)(t), \quad \text{với } t \in [a, b] \quad (1.10)$$

Ta có thể chọn $t_0 \in (a, b]$ sao cho $\frac{[u_0(t_0)]_-}{\gamma(t_0)} = \lambda_0$ với $\lambda_0 = \max \left\{ \frac{[u_0(t)]_-}{\gamma(t)} : t \in [a, b] \right\}$

Đặt $v_0(t) = \lambda_0 \gamma(t) - [u_0(t)]_-$, $t \in [a, b]$. Rõ ràng:

$$v_0(t) \geq 0, \quad t \in [a, b], \quad v_0(a) = \lambda_0 \gamma(a) > 0, \quad v_0(t_0) = 0 \quad (1.11)$$

Từ (1.7), (1.10) và (1.11) ta có $v'_0(t) \geq \ell(v_0)(t) \geq 0$ hầu khắp nơi trên $[a, b]$, nhưng điều này mâu thuẫn với (1.11). Từ mâu thuẫn này ta chứng minh được $[u_0(t)]_- \equiv 0$.

Do đó $u_0(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$.

Vậy $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

• Điều kiện cần: Hiển nhiên

1.3.2 Hệ quả

Giả sử $\ell \in P_{ab}$ và thỏa ít nhất một trong ba điều kiện sau:

a) ℓ là một toán tử a – Volterra.

b) Tồn tại một số nguyên không âm k , một số tự nhiên $m > k$, một số $\alpha \in (0, 1)$ sao cho

$$\rho_m(t) \leq \alpha \rho_k(t), \quad t \in [a, b] \quad (1.12)$$

với

$$\rho_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} 1, \rho_{i+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t \ell(\rho_i)(s) ds, \quad t \in [a, b] \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.13)$$

c) Tồn tại $\bar{\ell} \in P_{ab}$ sao cho

$$\int_a^b \bar{\ell}(1)(s) \exp \left(\int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi \right) ds < 1 \quad (1.14)$$

và trên tập $C_a([a, b], \mathbb{R}_+)$ có bất đẳng thức

$$\ell(\mathcal{G}(v))(t) - \ell(1)(t) \mathcal{G}(v)(t) \leq \bar{\ell}(v)(t), \quad t \in [a, b] \quad (1.15)$$

với

$$\mathcal{G}(v)(t) = \int_a^t \ell(v)(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

thì $\ell \in S_{ab}(a)$.

Chứng minh

a) Đặt

$$\gamma(t) = \exp \left(\int_a^t \ell(1)(s) ds \right), \quad t \in [a, b]$$

Ta có:

- $\gamma \in \tilde{C}([a, b], (0, +\infty))$ (hiển nhiên)
- $\gamma'(t) = \exp \left(\int_a^t \ell(1)(s) ds \right) \cdot \ell(1)(t) \geq \ell(\gamma)(t), \quad t \in [a, b]$

Từ định lí 1.3.1 suy ra $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

b) Đặt

$$\gamma(t) = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^k \rho_j(t) + \sum_{j=k+1}^m \rho_j(t), \quad t \in [a, b]$$

Ta có:

- $\gamma \in \tilde{C}([a, b], (0, +\infty))$ (hiển nhiên)
- Vì $\rho_{i+1}(t) = \int_a^t \ell(\rho_i)(s) ds$ nên $(\rho_{i+1}(t))' = \ell(\rho_i)(t)$, suy ra

$$\gamma'(t) = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{k-1} \ell(\rho_j)(t) + \sum_{j=k}^{m-1} \ell(\rho_j)(t)$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 \ell(\gamma)(t) &= (1-\alpha) \sum_{j=0}^k \ell(\rho_j)(t) + \sum_{j=k+1}^m \ell(\rho_j)(t) \\
 &= (1-\alpha) \sum_{j=0}^{k-1} \ell(\rho_j)(t) + \sum_{j=k}^{m-1} \ell(\rho_j)(t) - \ell(\rho_k)(t) + (1-\alpha) \ell(\rho_k)(t) + \ell(\rho_m)(t) \\
 &= \gamma'(t) + \ell(\rho_m)(t) - \alpha \ell(\rho_k)(t)
 \end{aligned}$$

Vì $\ell(\rho_m)(t) - \alpha \ell(\rho_k)(t) \leq 0$ (giả thiết)

Nên $\gamma'(t) \geq \ell(\gamma)(t)$, $t \in [a, b]$

Từ Định lí 1.3.1 suy ra $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

c) Theo (1.14) ta có thể lấy $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\int_a^b \bar{\ell}(1)(s) \exp\left(\int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi\right) ds < 1 - \varepsilon \exp\left(\int_a^b \ell(1)(\xi) d\xi\right)$$

Đặt

$$\gamma(t) = \varepsilon \exp\left(\int_a^t \ell(1)(\xi) d\xi\right) + \int_a^t \bar{\ell}(1)(s) \exp\left(\int_s^t \ell(1)(\xi) d\xi\right) ds, \quad t \in [a, b]$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
 \gamma(t) &= \varepsilon \exp\left(\int_a^t \ell(1)(\xi) d\xi\right) + \int_a^t \bar{\ell}(1)(s) \exp(v(t) - v(s)) ds \\
 &= \varepsilon \exp\left(\int_a^t \ell(1)(\xi) d\xi\right) + \exp(v(t)) \int_a^t \bar{\ell}(1)(s) \exp(-v(s)) ds
 \end{aligned}$$

với

$$v(t) = \int_a^t \ell(1)(\xi) d\xi.$$

và

$$\begin{aligned}
 \gamma'(t) &= \varepsilon \ell(1)(t) \exp\left(\int_a^t \ell(1)(\xi) d\xi\right) + v'(t) \exp(v(t)) \int_a^t \bar{\ell}(1)(s) \exp(-v(s)) ds + \\
 &\quad \exp(v(t)) \bar{\ell}(1)(t) \exp(-v(t)) \\
 &= \varepsilon \ell(1)(t) \exp\left(\int_a^t \ell(1)(\xi) d\xi\right) + \ell(1)(t) \int_a^t \bar{\ell}(1)(s) \exp(v(t) - v(s)) ds + \bar{\ell}(1)(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \ell(1)(t) \exp \left(\int_a^t \ell(1)(\xi) d\xi \right) + \ell(1)(t) \int_a^t \bar{\ell}(1)(s) \exp \left(\int_s^t \ell(1)(\xi) d\xi \right) ds + \bar{\ell}(1)(t) \\
&= \ell(1)(t) \gamma(t) + \bar{\ell}(1)(t)
\end{aligned}$$

Hiển nhiên,

$$\gamma \in \tilde{C}([a, b], (0, +\infty)), \gamma(t) < 1, t \in [a, b]$$

Và do $\bar{\ell} \in P_{ab}$ nên $\gamma'(t) = \ell(1)(t)\gamma(t) + \bar{\ell}(1)(t) \geq \ell(1)(t)\gamma(t) + \bar{\ell}(\gamma)(t)$, $t \in [a, b]$

Theo Định lí 1.3.1 ta có

$$\tilde{\ell} \in S_{ab}(a), \quad (1.16)$$

với

$$\tilde{\ell}(v)(t) = \ell(1)(t)v(t) + \bar{\ell}(v)(t), \quad t \in [a, b] \quad (1.17)$$

Từ Chú ý 1.2.5 điều này đủ để chỉ ra rằng bài toán $u'(t) \leq \ell(u)(t)$, $u(a) = 0$ không có nghiệm không tầm thường không âm. Thật vậy:

Giả sử hàm $u \in \tilde{C}([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa mãn (1.5) tức là $u'(t) \leq \ell(u)(t)$, $u(a) = 0$

Đặt

$$w(t) = \mathcal{G}(u)(t) = \int_a^t \ell(u)(s) ds, \quad t \in [a, b] \quad (1.18)$$

Hiển nhiên $w'(t) = \ell(u)(t)$ với $t \in [a, b]$ và

$$0 \leq u(t) \leq \int_a^t \ell(u)(s) ds = w(t), \quad w(a) = 0 \quad (1.19)$$

Mặt khác từ (1.15) ta có:

$$\begin{aligned}
&\ell(\mathcal{G}(u))(t) - \ell(1)(t)\mathcal{G}(u)(t) \leq \bar{\ell}(u)(t) \\
&\Rightarrow \ell(w)(t) - \ell(1)(t)w(t) \leq \bar{\ell}(u)(t)
\end{aligned}$$

Điều này kết hợp với (1.18), (1.19), và điều kiện $\ell \in P_{ab}$ ta có:

$$\begin{aligned}
w'(t) = \ell(u)(t) &\leq \ell(w)(t) = \ell(1)(t)w(t) + \ell(w)(t) - \ell(1)(t)w(t) \\
&\leq \ell(1)(t)w(t) + \bar{\ell}(u)(t)
\end{aligned}$$

Tuy nhiên, $\bar{\ell} \in P_{ab}$, nên từ (1.17), (1.19) suy ra

$$w'(t) \leq \ell(1)(t)w(t) + \bar{\ell}(w)(t) = \tilde{\ell}(w)(t)$$

Từ đây kết hợp với (1.16), (1.19) và Chú ý 1.2.5 ta suy ra $w \equiv 0$, do đó $u \equiv 0$.

Từ Chú ý 1.2.5 suy ra $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

1.3.3 Chú ý

Từ Hệ quả 1.3.2 ta có :

- Nếu $\ell \in P_{ab}$ và $\int_a^t \ell(1)(s)ds < 1$ thì $\ell \in S_{ab}(a)$. Thật vậy:

Chọn $k = 0$ và $m = 1$ thì các điều kiện của Hệ quả 1.3.2 b) được thỏa mãn nên $\ell \in S_{ab}(a)$.

- Nếu $\ell \in P_{ab}$, $\int_a^t \ell(1)(s)ds = 1$ và bài toán (1.1_0) , (1.2_0) chỉ có nghiệm tầm thường thì ta cũng có $\ell \in S_{ab}(a)$. Thật vậy:

Nếu (1.1_0) , (1.2_0) chỉ có nghiệm tầm thường thì theo tính chất Fredholm, bài toán

$$u'(t) = \ell(u)(t), u(a) = 1 \quad (1.20)$$

có nghiệm duy nhất u . Giả sử u có giá trị âm. Đặt

$$m = \max \{-u(t) : t \in [a, b]\},$$

Và chọn $t_0 \in [a, b]$ sao cho $u(t_0) = -m$. Lấy tích phân hai vế của (0.1_0) từ a đến t_0 ta có:

$$m + 1 = -\int_a^{t_0} \ell(u)(s)ds \leq m \int_a^b \ell(1)(s)ds.$$

Do giả thiết $\int_a^b \ell(1)(s)ds = 1$, ta dẫn đến mâu thuẫn $m < m$. Do đó $u(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$, và từ giả thiết $\ell \in P_{ab}$, (1.20) suy ra $u(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$. Vì vậy theo Định lý 1.3.1 ta có $\ell \in S_{ab}(a)$.

- Điều kiện $\alpha \in (0, 1)$ trong Hệ quả 1.3.2b) là nghiêm ngặt, ta không thể thay thế bởi điều kiện $\alpha \in (0, 1]$. Thật vậy:

Ví dụ 1:

Giả sử $\alpha = 1$

Lấy $p \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa

$$\int_a^b p(s) ds = 1$$

Và $\ell \in P_{ab}$ được định nghĩa

$$\ell(v)(t) = p(t)v(b)$$

Với ℓ được định nghĩa như vậy ta có:

$$\rho_0(t) = 1$$

$$\rho_1(t) = \int_a^t \ell(\rho_0)(s) ds = \int_a^t p(s) \rho_0(b) ds = \int_a^t p(s) ds$$

$$\rho_2(t) = \int_a^t \ell(\rho_1)(s) ds = \int_a^t p(s) \rho_1(b) ds = \int_a^t p(s) ds$$

Chúng minh bằng quy nạp ta dễ dàng thấy rằng với mọi số tự nhiên $k > 1$ thì

$$\rho_k(t) = \int_a^t p(s) ds$$

Do đó với mọi số tự nhiên k, m ta có $\rho_m(t) = \rho_k(t)$ nên điều kiện (1.12) được thỏa mãn với $\alpha = 1$.

Tuy nhiên khi đó hàm số $u(t) = \int_a^t p(s) ds, \quad t \in [a, b]$ là nghiệm không tầm thường của bài toán (1.1₀), (1.2₀). Vì vậy theo Định nghĩa 1.2.2 $\ell \notin S_{ab}(a)$.

• Hơn nữa, nếu $\alpha = 1 + \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý thì Hệ quả 1.3.2b) cũng không đúng. Thật vậy:

Ví dụ 2:

Giả sử $\alpha = 1 + \varepsilon$, với $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý

Lấy $p \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa

$$\int_a^b p(s) ds = 1 + \varepsilon$$

Và $\ell \in P_{ab}$ được định nghĩa

$$\ell(v)(t) = p(t)v(b)$$

Theo ví dụ 1 thì $\rho_m(t) = \int_a^t p(s) ds$ với mọi số tự nhiên $m > 1$ nên lấy m là một số tự nhiên bất kỳ và $k = m-1$ thì điều kiện (1.12) được thỏa mãn.

Khi đó bài toán (1.1_0) , (1.2_0) chỉ có nghiệm tầm thường, thật vậy:

Ta có

$$u'(t) = \ell(u)(t) \Leftrightarrow u'(t) = p(t)u(b)$$

Lấy tích phân hai vế $u'(t) = p(t)u(b)$ từ a đến b ta được

$$u(b) = (1 + \varepsilon)u(b) \Leftrightarrow u(b) = 0 \text{ nên } u'(t) = 0 \text{ với } \forall t \in [a, b], \text{ kết hợp với } u(a) = 0 \text{ suy ra } u \equiv 0$$

Tuy nhiên $u(t) = 1 - \frac{1}{\varepsilon} \int_a^t p(s)ds$ là nghiệm của bài toán $u'(t) = \ell(u)(t)$, $u(a) = 1$ với ℓ

được định nghĩa ở trên, và $u(b) = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$ nên $\ell \notin S_{ab}(a)$.

- Bất đẳng thức (1.14) trong Hệ quả 1.3.2c) là nghiêm ngặt, ta không thể thay thế bởi đẳng

thức $\int_a^b \bar{\ell}(1)(s) \exp\left(\int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi\right) ds = 1$. Thật vậy:

Ví dụ 3:

Lấy $p \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa

$$\int_a^b p(s)ds = 1$$

Và $\ell, \bar{\ell} \in P_{ab}$ được định nghĩa

$$\ell(v)(t) = p(t)v(b), \quad \bar{\ell}(v)(t) = p(t) \int_t^b p(s)v(b)ds$$

Khi đó

$$\bar{\ell}(1)(t) = p(t) \int_t^b p(s)ds = \ell(1)(t) \int_t^b \ell(1)(s)ds$$

Đặt

$$v(s) = \int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi$$

Ta có

$$\int_a^b \bar{\ell}(1)(s) \exp\left(\int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi\right) ds = \int_a^b \ell(1)(s) \cdot \int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi \exp\left(\int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi\right) ds =$$

$$-\int_a^b v'(s).v(s).e^{v(s)} ds = -\int_a^b v(s).e^{v(s)} dv(s) = \left(e^{v(s)} - v(s).e^{v(s)} \right) \Big|_a^b = 1$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \ell(\mathcal{G}(v))(t) - \ell(1)(t).\mathcal{G}(v)(t) &= p(t).\mathcal{G}(v)(b) - \ell(1)(t).\mathcal{G}(v)(t) \\ &= p(t) \int_a^b \ell(v)(s) ds - p(t) \int_a^t \ell(v)(s) ds = p(t) \int_t^b \ell(v)(s) ds = p(t) \int_t^b p(s).v(b) ds \leq \bar{\ell}(v)(t) \end{aligned}$$

nên bất đẳng thức (1.15) cũng được thỏa mãn.

Tuy nhiên ta thấy hàm số $u(t) = \int_a^t p(s) ds$, $t \in [a, b]$ là nghiệm không tầm thường của bài toán (1.1₀), (1.2₀). Vì vậy theo Định nghĩa 1.2.2 $\ell \notin S_{ab}(a)$.

- Hơn nữa, bất đẳng thức (1.14) trong Hệ quả 1.3.2c) cũng không thể thay thế bởi đẳng

thức $\int_a^b \bar{\ell}(1)(s) \exp \left(\int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi \right) ds = 1 + \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý. Thật vậy:

Ví dụ 4:

Lấy $p \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa

$$\int_a^b p(s) ds = 1 + \varepsilon, \text{ với } \varepsilon > 0 \text{ nhỏ tùy ý}$$

Và $\ell, \bar{\ell} \in P_{ab}$ được định nghĩa $\ell(v)(t) = p(t)v(b)$, $\bar{\ell}(v)(t) = p(t) \int_t^b p(s)v(b) ds$

Khi đó

$$\bar{\ell}(1)(t) = p(t) \int_t^b p(s) ds = \ell(1)(t) \int_t^b \ell(1)(s) ds$$

Đặt

$$v(s) = \int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi$$

Ta có

$$\begin{aligned} \int_a^b \bar{\ell}(1)(s) \exp \left(\int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi \right) ds &= \int_a^b \ell(1)(s) \cdot \int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi \exp \left(\int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi \right) ds = \\ &= -\int_a^b v'(s).v(s).e^{v(s)} ds = -\int_a^b v(s).e^{v(s)} dv(s) = \left(e^{v(s)} - v(s).e^{v(s)} \right) \Big|_a^b = 1 + \varepsilon e^{1+\varepsilon} \end{aligned}$$

Theo ví dụ 3 ta có bất đẳng thức (1.15) cũng được thỏa mãn và do đó với toán tử ℓ được định nghĩa như vậy thì bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường.

Tuy nhiên $u(t) = 1 - \frac{1}{\varepsilon} \int_a^t p(s) ds$ là nghiệm của bài toán $u'(t) = \ell(u)(t)$, $u(a) = 1$ với ℓ

được định nghĩa ở trên, và $u(b) = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$ nên $\ell \notin S_{ab}(a)$.

1.3.4 Định lí

Giả sử $-\ell \in P_{ab}$, ℓ là một toán tử a – Volterra, và tồn tại một hàm $\gamma \in \tilde{C}([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa

$$\gamma(t) > 0, \quad t \in [a, b] \quad (1.21)$$

$$\gamma'(t) \leq \ell(\gamma)(t), \quad t \in [a, b] \quad (1.22)$$

Thì $\ell \in S_{ab}(a)$.

Chứng minh

Ta biết rằng nếu ℓ là một toán tử a – Volterra thì bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường (xem [4, Định lí 1.2']). Do đó, theo Định lí 1.2.1, bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm duy nhất.

Giả sử u là nghiệm của bài toán (1.1), (1.2) với $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ và $c \in \mathbb{R}_+$. Ta cần chứng minh

$$u(t) \geq 0, \text{ với } t \in [a, b] \quad (1.23)$$

+ Nếu $c = 0$ và $q \not\equiv 0$ thì u không thể không dương trên $[a, b]$, thật vậy:

Giả sử $u(t) \leq 0$, với $t \in [a, b]$ thì do $-\ell \in P_{ab}$ nên $\ell(u)(t) = -\ell(-u)(t) > 0$ suy ra

$u'(t) = \ell(u)(t) + q(t) > 0$, và do $u(a) = 0$ ta có $u(t) \geq 0$, với $t \in [a, b]$ (mâu thuẫn).

Vậy bất kỳ trường hợp nào ta cũng có $\max\{u(t) : t \in [a, b]\} > 0$

Giả sử (1.23) không đúng. Khi đó tồn tại $t_0 \in (a, b)$ sao cho

$$u(t_0) < 0 \quad (1.24)$$

Đặt

$$v(t) = \lambda \gamma(t) - u(t), \quad t \in [a, b],$$

với

$$\lambda = \max \left\{ \frac{u(t)}{\gamma(t)} : t \in [a, t_0] \right\}$$

Tương tự như trên, vì ℓ là toán tử $a - \text{Volterra}$, $-\ell \in P_{ab}$, $\max \{u(t) : t \in [a, t_0]\} > 0$, và

$$0 < \lambda < +\infty \text{ nên tồn tại } t_1 \in [a, t_0] \text{ sao cho } v(t_1) = 0 \quad (1.25)$$

Điều này rõ ràng là

$$v(t) \geq 0, \text{ với } t \in [a, t_0] \quad (1.26)$$

Từ (1.1) và (1.22) ta có

$$v'(t) = \lambda \gamma'(t) - u'(t) = \lambda \gamma'(t) - \ell(u)(t) - q(t) \leq \lambda \ell(\gamma)(t) - \ell(u)(t) - q(t) = \ell(v)(t) - q(t)$$

với $t \in [a, b]$

Do đó từ (1.26), điều kiện $-\ell \in P_{ab}$, ℓ là một toán tử $a - \text{Volterra}$ ta suy ra:

$$v'(t) \leq 0, \text{ với } t \in [a, t_0].$$

Từ (1.25) ta có:

$$v(t) \leq 0, \text{ với } t \in [t_1, t_0]$$

Nhưng do (1.21) và (1.24) dẫn đến mâu thuẫn $0 < v(t_0) \leq 0$.

Vậy $u(t) \geq 0$, với $t \in [a, b]$. Suy ra $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

1.3.5 Định lí

Giả sử $-\ell \in P_{ab}$, ℓ là một toán tử $a - \text{Volterra}$, và

$$\int_a^b |\ell(1)(s)| ds < 1 \quad (1.27)$$

Thì $\ell \in S_{ab}(a)$.

Chứng minh

Ta biết rằng nếu ℓ là một toán tử $a - \text{Volterra}$ thì bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường (xem [4, Định lí 1.2']). Do đó, theo Định lí 1.2.1, bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm duy nhất.

Giả sử u là nghiệm của bài toán (1.1), (1.2) với $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ và $c \in \mathbb{R}_+$. Ta cần chứng minh $u(t) \geq 0$, với $\forall t \in [a, b]$. Thật vậy:

Giả sử ngược lại là tồn tại $t_* \in (a, b]$ thỏa

$$u(t_*) < 0. \quad (1.28)$$

Tương tự chứng minh của Định lí 1.3.4 ta có

$$\max \{u(t) : t \in [a, t_*]\} > 0 \quad (1.29)$$

Chọn $t^* \in [a, t_*]$ sao cho:

$$u(t^*) = \max \{u(t) : t \in [a, t_*]\} \quad (1.30)$$

Lấy tích phân hai vế của (1.1) từ t^* đến t_* , kết hợp với (1.27), (1.29), (1.30), giả thiết

$-\ell \in P_{ab}$, $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ và ℓ là một toán tử a – Volterra ta suy ra:

$$\begin{aligned} u(t^*) - u(t_*) &= -\int_{t^*}^{t_*} \ell(u)(s) ds - \int_{t^*}^{t_*} q(s) ds \leq \int_{t^*}^{t_*} |\ell(u)(s)| ds \leq \\ &\int_a^b |\ell(u)(s)| ds \leq u(t^*) \int_a^b |\ell(1)(s)| ds \leq u(t^*). \end{aligned}$$

Suy ra: $u(t_*) \geq 0$

Điều này mâu thuẫn với (1.28) nên $u(t) \geq 0$, với $t \in [a, b]$. Vậy $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

1.3.6 Hệ quả

Giả sử $-\ell \in P_{ab}$, ℓ là một toán tử a – Volterra, và

$$\int_a^b |\tilde{\ell}(1)(s)| \exp\left(\int_a^s |\ell(1)(\xi)| d\xi\right) ds < 1 \quad (1.31)$$

với

$$\tilde{\ell}(v)(t) = \ell(\tilde{\theta}(v))(t) - \ell(1)(t) \tilde{\theta}(v)(t), \quad t \in [a, b]$$

$$\tilde{\theta}(v)(t) = \int_a^t \ell(\tilde{v})(s) ds, \quad \tilde{v}(t) = v(t) \exp\left(\int_a^t \ell(1)(s) ds\right), \quad t \in [a, b]$$

Thì $\ell \in S_{ab}(a)$.

Chứng minh

Ta biết rằng nếu ℓ là một toán tử a – Volterra thì bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường (xem [4, Định lí 1.2']). Do đó, theo Định lí 1.2.1, bài toán (1.1), (1.2) có nghiệm duy nhất.

Giả sử u là nghiệm của bài toán (1.1), (1.2) với $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ và $c \in \mathbb{R}_+$. Ta cần chứng minh $u(t) \geq 0$, với $\forall t \in [a, b]$. Thật vậy:

Từ (1.1) ta có: $u'(t) = \ell(1)(t)u(t) + \ell(u)(t) - \ell(1)(t)u(t) + q(t)$, với $t \in [a, b]$ (1.32)

Mặt khác lấy tích phân hai vế của (1.1) từ a đến t và do (1.2) ta có:

$$u(t) = c + \int_a^t \ell(u)(s) ds + \int_a^t q(s) ds, \text{ với } t \in [a, b] \quad (1.33)$$

Từ (1.32) ta có:

$$u(t) = c + \int_a^t \ell(u)(s) ds + \int_a^t q(s) ds = q^*(t) + \theta(u)(t)$$

với

$$\theta(v)(t) = \int_a^t \ell(v)(s) ds, \quad q^*(t) = c + \int_a^t q(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

Nên

$$\ell(u)(t) = \ell(q^*)(t) + \ell(\theta(u))(t) \Leftrightarrow \ell(\theta(u))(t) = \ell(u)(t) - \ell(q^*)(t) \quad (1.34)$$

Từ (1.32), (1.33), (1.34) suy ra

$$\begin{aligned} u'(t) &= \ell(1)(t)u(t) + \ell(u)(t) - \ell(1)(t) \left[c + \int_a^t \ell(u)(s) ds + \int_a^t q(s) ds \right] + q(t) \\ &= \ell(1)(t)u(t) - \ell(1)(t) \left[c + \int_a^t q(s) ds \right] - \ell(1)(t) \int_a^t \ell(u)(s) ds + \ell(u)(t) + q(t) \\ &= \ell(1)(t)u(t) - \ell(1)(t)q^*(t) - \ell(1)(t)\theta(u)(t) + \ell(u)(t) + q(t) \\ &= \ell(1)(t)u(t) - \ell(1)(t)\theta(u)(t) + \left[\ell(q^*)(t) - \ell(1)(t)(q^*)(t) + q(t) \right] - \ell(q^*)(t) + \ell(u)(t) \\ &= \ell(1)(t)u(t) - \ell(1)(t)\theta(u)(t) + q_0(t) + \left[\ell(u)(t) - \ell(q^*)(t) \right] \\ &= \ell(1)(t)u(t) + \ell(\theta(u))(t) - \ell(1)(t)\theta(u)(t) + q_0(t), \quad t \in [a, b] \end{aligned} \quad (1.35)$$

với

$$q_0(t) = \ell(q^*)(t) - \ell(1)(t)q^*(t) + q(t), \quad t \in [a, b], \quad (1.36)$$

Từ điều kiện $-\ell \in P_{ab}$ và ℓ là một toán tử a – Volterra ta có :

$$\ell(q^*)(t) - \ell(1)(t)q^*(t) \geq 0 \text{ với } t \in [a, b].$$

Do đó với $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ ta có:

$$q_0(t) \geq 0, \quad t \in [a, b] \quad (1.37)$$

Đặt

$$w(t) = u(t) \exp \left(- \int_a^t \ell(1)(s) ds \right), \quad t \in [a, b] \quad (1.38)$$

Thì $w(a) = c$, và từ (1.35) ta suy ra

$$\begin{aligned} w'(t) &= u'(t) \exp \left(- \int_a^t \ell(1)(s) ds \right) - u(t) \ell(1)(t) \exp \left(- \int_a^t \ell(1)(s) ds \right) \\ &= \exp \left(- \int_a^t \ell(1)(s) ds \right) [u'(t) - u(t) \ell(1)(t)] \\ &= \exp \left(- \int_a^t \ell(1)(s) ds \right) [\ell(\theta(u))(t) - \ell(1)(t) \theta(u)(t) + q_0(t)] \\ &= \exp \left(- \int_a^t \ell(1)(s) ds \right) \tilde{\ell}(w)(t) + \tilde{q}(t), \quad t \in [a, b] \end{aligned} \quad (1.39)$$

với

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}(v)(t) &= \ell(\tilde{\theta}(v))(t) - \ell(1)(t) \tilde{\theta}(v)(t) \quad t \in [a, b], \\ \tilde{\theta}(v)(t) &= \theta(\tilde{v})(t), \quad \tilde{v}(t) = v(t) \exp \left(\int_a^t \ell(1)(s) ds \right), \quad t \in [a, b], \\ \tilde{q}(t) &= q_0(t) \exp \left(- \int_a^t \ell(1)(s) ds \right), \quad t \in [a, b]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Dễ dàng thấy rằng $-\tilde{\ell} \in P_{ab}$, $\tilde{\ell}$ là một toán tử a – Volterra. Thật vậy:

+ Do $-\ell \in P_{ab}$, ℓ là toán tử a - Volterra nên lấy $v \in C([a, b], \mathbb{R}_+)$ thì

$$\tilde{v}(t) > 0, \quad \forall t \in [a, b] \Rightarrow \tilde{\theta}(v)(t) < 0, \quad \forall t \in [a, b]$$

Suy ra

$$\tilde{\ell}(v)(t) = \ell(\tilde{\theta}(v))(t) - \ell(1)(t) \tilde{\theta}(v)(t) \leq 0, \quad \forall t \in [a, b]$$

+ Do ℓ là toán tử a - Volterra nên $\tilde{\ell}$ là một toán tử a – Volterra.

Suy ra $\tilde{\ell} \in -P_{ab}$, $\tilde{\ell}$ là toán tử a-Vollterra

với

$$\tilde{\ell}(v)(t) = \exp \left(\int_a^t |\ell(1)(s)| ds \right) \tilde{\ell}(v)(t).$$

Từ điều này cùng với (1.37), (1.39), (1.40) ta có

$$w'(t) = \tilde{\ell}(w)(t) + \tilde{q}(t), \quad w(a) = c$$

với $\tilde{\ell} \in -P_{ab}$, $\tilde{\ell}$ là toán tử a-Vollterra, $\tilde{q}(t) \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$

Mặt khác từ (1.31) ta có

$$\int_a^b |\tilde{\ell}(1)(s)| ds < 1$$

Nên theo Định lí 1.3.5 ta có $w(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$. Do đó theo (1.38) ta có $u(t) \geq 0$, với $t \in [a, b]$. Vậy $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

1.3.7 Chú ý

- Điều kiện (1.21) trong Định lí 1.3.4 không thể thay thế được bởi điều kiện $\gamma(t) > 0$, $t \in [a, b_1)$ với $b_1 \in (a, b)$. Thật vậy:

Ví dụ 1:

Giả sử $b_1 \in (a, b)$ và $\varepsilon \in (0, 2)$. Lấy $g \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa

$$\int_a^{b_1} g(s) ds = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_{b_1}^b g(s) ds = 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặt

$$\mu(t) = \begin{cases} a, & t \in [a, b_1) \\ b_1, & t \in [b_1, b] \end{cases}, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^t g(s) ds, & t \in [a, b_1) \\ 0, & t \in [b_1, b] \end{cases}.$$

Và toán tử ℓ được định nghĩa

$$\ell(v)(t) = -g(t)v(\mu(t))$$

Hiển nhiên, toán tử ℓ được định nghĩa như trên thỏa mãn tất cả các giả thiết của Định lí 1.3.4 ngoại trừ điều kiện (1.21) được thay bằng điều kiện $\gamma(t) > 0$, $\forall t \in [a, b_1)$ với $b_1 \in (a, b)$

Mặt khác, vì ℓ là toán tử a – Volterra, nên hàm

$$u(t) = \begin{cases} 1 - \int_a^t g(s) ds, & t \in [a, b_1) \\ \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \int_{b_1}^t g(s) ds\right), & t \in [b_1, b] \end{cases}$$

là nghiệm duy nhất của bài toán $u'(t) = \ell(u)(t)$, $u(a) = 1$ và $u(b) = -\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < 0$. Do

đó, $\ell \notin S_{ab}(a)$.

- Điều kiện (1.27) trong Định lý 1.3.5 không thể thay thế được bởi điều kiện

$\int_a^b |\ell(1)(s)| ds \leq 1 + \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$ tùy ý. Thật vậy:

Ví dụ 2:

Giả sử $\varepsilon > 0$

Lấy $g \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa

$$\int_a^b g(s) ds = 1 + \varepsilon$$

Và toán tử ℓ được định nghĩa

$$\ell(v)(t) = -g(t)v(a)$$

Dễ dàng thấy rằng toán tử ℓ được định nghĩa ở trên thỏa mãn

$$\int_a^b |\ell(1)(s)| ds \leq 1 + \varepsilon$$

Hiển nhiên, vì ℓ là toán tử a – Volterra, nên hàm

$$u(t) = 1 - \int_a^t g(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

là nghiệm duy nhất của bài toán $u'(t) = \ell(u)(t)$, $u(a) = 1$. Mặt khác, $u(b) = -\varepsilon < 0$. Vì vậy, $\ell \notin S_{ab}(a)$.

- Ví dụ 2 cũng cho ta thấy điều kiện (1.31) trong Hệ quả 1.3.6 cũng không thể thay thế bởi

điều kiện $\int_a^b |\tilde{\ell}(1)(s)| \exp\left(\int_a^s |\ell(1)(\xi)| d\xi\right) ds < 1 + \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$ tùy ý.

1.3.8 Định lí

Giả sử $\ell = \ell_0 - \ell_1$ với $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$, $\ell_0 \in S_{ab}(a)$, $-\ell_1 \in S_{ab}(a)$ thì $\ell \in S_{ab}(a)$.

Chứng minh

Để chứng minh $\ell \in S_{ab}(a)$ ta cần chứng minh nghiệm của bài toán (1.1), (1.2) không âm và bài toán thuần nhất (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường.

- Bước 1: Chứng minh nghiệm của bài toán (1.1), (1.2) không âm

Giả sử u là nghiệm của bài toán (1.1), (1.2) với $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$, $c \in \mathbb{R}_+$ và v là nghiệm của bài toán

$$v'(t) = -\ell_1(v)(t) - \ell_0([u]_-(t)), \quad v(a) = 0 \quad (1.41)$$

Vì $-\ell_1 \in S_{ab}(a)$ và $\ell_0 \in P_{ab}$ nên

$$v(t) \leq 0, \quad t \in [a, b] \quad (1.42)$$

Hơn nữa, từ các giả thiết $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$, $\ell_0 \in P_{ab}$ và (1.41) suy ra

$$v'(t) \leq -\ell_1(v)(t) + \ell_0(u)(t) + q(t), \quad t \in [a, b].$$

Vì vậy theo Chú ý 1.2.4 và giả thiết $-\ell_1 \in S_{ab}(a)$ ta có:

$$v(t) \leq u(t), \quad t \in [a, b] \quad (1.43)$$

Do (1.42) và (1.43) dẫn đến

$$v(t) \leq -[u(t)]_-, \quad t \in [a, b] \quad (1.44)$$

Mặt khác, do (1.41), (1.44), và điều kiện $\ell_0 \in P_{ab}$ ta có

$$v'(t) \geq \ell_0(v)(t) - \ell_1(v)(t), \quad t \in [a, b].$$

Vì vậy, do $\ell_1 \in P_{ab}$, (1.42), Chú ý 1.1.4 và $\ell_0 \in S_{ab}(a)$ ta thấy

$$v(t) \geq 0, \quad t \in [a, b],$$

Từ (1.43) suy ra $u(t) \geq 0$, với $\forall t \in [a, b]$.

• Bước 2: Chứng minh bài toán thuần nhất (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường. Thật vậy, giả sử u là nghiệm của bài toán (1.1₀), (1.2₀). Vì $-u$ cũng là nghiệm của (1.1₀), (1.2₀) nên cùng với kết quả trên ta có:

$$u(t) \geq 0, \quad -u(t) \geq 0 \quad t \in [a, b]$$

Vì vậy $u \equiv 0$.

Vậy theo định nghĩa thì $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

1.3.9 Các chú ý

1.3.9.1 Chú ý

• Giả thiết $\ell_0 \in S_{ab}(a), -\ell_1 \in S_{ab}(a)$ trong Định lí 1.3.8 không thể thay thế bởi giả thiết $(1-\varepsilon)\ell_0 \in S_{ab}(a), -\ell_1 \in S_{ab}(a)$ với $\varepsilon > 0$ tùy ý. Thật vậy:

Ví dụ 1:

Giả sử $\varepsilon > 0$

Lấy $p, g \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa

$$\int_a^b p(s) ds = 1 + \varepsilon, \quad \int_a^b g(s) ds < 1$$

Và

$$\ell_0(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} p(t)v(b), \quad \ell_1(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(t)v(a), \quad \ell = \ell_0 - \ell_1$$

Hiển nhiên

$$(1-\varepsilon)\ell_0 \in S_{ab}(a) \text{ và } -\ell_1 \in S_{ab}(a).$$

Với ℓ_0, ℓ_1 được định nghĩa như trên bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có nghiệm tầm thường. Thật vậy, lấy tích phân hai vế (1.1₀) từ a tới b ta có:

$$\begin{aligned}
\int_a^b u'(t) dt &= \int_a^b \ell(u)(t) dt \\
\Leftrightarrow u(t) \Big|_a^b &= \int_a^b (\ell_0(u)(t) - \ell_1(u)(t)) dt \\
\Leftrightarrow u(b) &= \int_a^b (p(s)u(b) - g(s)u(a)) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow u(b) &= \int_a^b p(s)u(b) dt \\
\Leftrightarrow u(b) &= (1 + \varepsilon)u(b) \\
\Rightarrow \varepsilon u(b) &= 0 \Rightarrow u(b) = 0
\end{aligned}$$

Do đó,

$$u'(t) = \ell(u)(t) = \ell_0(u)(t) - \ell_1(u)(t) = p(t)u(b) - g(t)u(a) = 0$$

cùng với $u(a) = 0$ ta có $u \equiv 0$.

Suy ra bài toán $u'(t) = \ell(u)(t)$, $u(a) = 1$ với $\ell = \ell_0 - \ell_1$ có nghiệm duy nhất là u .

Mặt khác, tích phân hai vế $u'(t) = \ell(u)(t)$ từ a tới b ta có :

$$\begin{aligned}
\int_a^b u'(t) dt &= \int_a^b \ell(u)(t) dt \\
\Leftrightarrow u(t) \Big|_a^b &= \int_a^b (\ell_0(u)(t) - \ell_1(u)(t)) dt \\
\Leftrightarrow u(b) - u(a) &= \int_a^b (p(s)u(b) - g(s)u(a)) dt \\
\Leftrightarrow u(b) - 1 &= \int_a^b (p(s)u(b) - g(s)) dt \\
\Leftrightarrow u(b) - 1 &= (1 + \varepsilon)u(b) - \int_a^b g(s) ds \\
\Leftrightarrow \varepsilon u(b) &= \int_a^b g(s) ds - 1 < 0,
\end{aligned}$$

Suy ra $u(b) < 0$. Vậy $\ell \notin S_{ab}(a)$.

• Hơn nữa, giả thiết $\ell_0 \in S_{ab}(a), -\ell_1 \in S_{ab}(a)$ trong Định lý 1.3.8 cũng không thể thay thế bởi giả thiết $\ell_0 \in S_{ab}(a), -(1-\varepsilon)\ell_1 \in S_{ab}(a)$ với $\varepsilon > 0$ tùy ý. Thật vậy:

Ví dụ 2 :

Giả sử $\varepsilon > 0$

Lấy $p, g \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa

$$\int_a^b g(s) ds = 1 + \varepsilon, \quad \int_a^b p(s) ds < 1$$

Và

$$\ell_0(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} p(t)v(b), \quad \ell_1(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(t)v(a), \quad \ell = \ell_0 - \ell_1$$

Hiển nhiên,

$$\ell_0 \in S_{ab}(a) \text{ và } -(1-\varepsilon)\ell_1 \in S_{ab}(a).$$

Theo Ví dụ 1.3.9.2 với ℓ_0, ℓ_1 được định nghĩa như trên bài toán (1.1₀), (1.2₀) chỉ có

nghiệm tầm thường. Nên bài toán $u'(t) = \ell(u)(t), u(a) = 1$ có nghiệm duy nhất là u .

Mặt khác, tích phân hai vế $u'(t) = \ell(u)(t)$ từ a tới b ta có:

$$\begin{aligned}
\int_a^b u'(t) dt &= \int_a^b \ell(u)(t) \\
\Leftrightarrow u(t) \Big|_a^b &= \int_a^b (\ell_0(u)(t) - \ell_1(u)(t)) dt \\
\Leftrightarrow u(b) - u(a) &= \int_a^b (p(s)u(b) - g(s)u(a)) ds \\
\Leftrightarrow u(b) - 1 &= \int_a^b (p(s)u(b) - g(s)) ds \\
\Leftrightarrow u(b) - 1 &= u(b) \int_a^b p(s) ds - (1 + \varepsilon) \\
\Leftrightarrow \varepsilon &= u(b) \left(\int_a^b p(s) ds - 1 \right)
\end{aligned}$$

Vì $\int_a^b p(s) ds < 1$ nên $u(b) < 0$. Vậy, $\ell \notin S_{ab}(a)$.

1.3.9.2 Chú ý

Giả sử $\ell \in \tilde{L}_{ab}$. Đặt

$$\hat{\ell}(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} -\psi(\ell(\varphi(v)))(t),$$

với $\psi : L([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow L([a, b], \mathbb{R})$ là toán tử được định nghĩa $\psi(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(a + b - t)$

và φ là một thu hẹp của toán tử ψ trong không gian $C([a, b], \mathbb{R})$.

Nghĩa là, nếu $u \in \tilde{C}([a, b]; \mathbb{R})$ thỏa bất đẳng thức

$$u'(t) \leq \ell(u)(t) \quad (u'(t) \geq \ell(u)(t)), \quad t \in [a, b] \quad (1.45)$$

thì hàm số

$$v(t) = \varphi(u)(t), \quad t \in [a, b]$$

thỏa bất đẳng thức

$$v'(t) \geq \hat{\ell}(v)(t) \quad (v'(t) \leq \hat{\ell}(v)(t)), \quad t \in [a, b] \quad (1.46)$$

Với cách định nghĩa hàm φ như trên ta dễ dàng thấy nếu $v(t) = \varphi(u)(t)$, $t \in [a, b]$ thì

$$u(t) = \varphi(v)(t), \quad t \in [a, b].$$

Hơn nữa, nếu $v \in \tilde{C}([a, b], \mathbb{R})$ thỏa bất đẳng thức (1.46) thì hàm $u(t) = \varphi(v)(t)$, $t \in [a, b]$ thỏa bất đẳng thức (1.45) và $u(a) = 0$ thì $v(b) = 0$ nên theo Chú ý 1.2.5 ta có $\ell \in S_{ab}(a)$ ($\ell \in S_{ab}(b)$) khi và chỉ khi $\hat{\ell} \in S_{ab}(b)$ ($\hat{\ell} \in S_{ab}(a)$).

1.3.10 Định lí

Giả sử $-\ell \in P_{ab}$. Thì $\ell \in S_{ab}(b)$ nếu và chỉ nếu tồn tại $\gamma \in \tilde{C}([a, b], (0, +\infty))$ thỏa bất đẳng thức

$$\gamma'(t) \leq \ell(\gamma)(t) \text{ với } t \in [a, b]$$

Chứng minh

- Điều kiện đủ

Theo Chú ý 1.3.9.2 ta có:

$$v(t) = \varphi(u)(t) = u(a + b - t), \quad t \in [a, b]$$

nên

$$\hat{\ell}(v)(t) = -\psi(\ell(\varphi(v)))(t) = -\ell(\varphi(v))(a + b - t) = -\ell(u)(a + b - t) = -\ell(v)(t) \text{ với } t \in [a, b]$$

(1.47)

Mà $-\ell \in P_{ab}$ nên $\hat{\ell} \in P_{ab}$.

Đặt

$$\alpha(t) = \varphi(\gamma)(t)$$

thì

$$\alpha \in \tilde{C}([a, b], (0, +\infty))$$

Theo (1.45), (1.46) thì $\alpha'(t) \geq \hat{\ell}(\alpha)(t)$

Từ Định lí 1.3.1 suy ra $\hat{\ell} \in S_{ab}(a)$. Theo Chú ý 1.3.9.2 suy ra $\ell \in S_{ab}(b)$. $\square$

- Điều kiện cần: hiển nhiên

1.3.11 Hệ quả

Giả sử $-\ell \in P_{ab}$ và thỏa ít nhất một trong ba điều sau:

a) ℓ là toán tử $b - \text{Volterra}$

b) Tồn tại một số nguyên không âm k , một số tự nhiên $m > k$, và một số thực $\alpha \in (0,1)$ sao cho

$$\rho_m(t) \leq \alpha \rho_k(t), \quad t \in [a, b]$$

với

$$\rho_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} 1, \rho_{i+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_t^b \ell(\rho_i)(s) ds, \quad t \in [a, b] \quad (i = 0, 1, \dots)$$

c) Tồn tại sao cho

$$\int_a^b \bar{\ell}(1)(s) \exp \left(\int_a^s |\ell(1)(\xi)| d\xi \right) ds < 1 \quad (1.48)$$

và trên tập $C_b([a, b], \mathbb{R}_+)$ có bất đẳng thức

$$\ell(1)(t) \mathcal{G}(v)(t) - \ell(\mathcal{G}(v))(t) \leq \bar{\ell}(v)(t), \quad t \in [a, b] \quad (1.49)$$

với

$$\mathcal{G}(v)(t) = - \int_t^b \ell(v)(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

Thì $\ell \in S_{ab}(b)$.

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh nếu ℓ là một toán tử a – Volterra thì $\hat{\ell}$ là toán tử b – Volterra.

Lấy bất kỳ $a_1 \in [a, b)$, ta cần chứng minh với bất kỳ hàm $v \in C([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa

$v(t) = 0, \forall t \in [a_1, b]$ thì $\hat{\ell}(v)(t) = 0, \forall t \in [a_1, b]$. Thật vậy:

Do ℓ là một toán tử a – Volterra nên $\ell(v)(t) = 0, \forall t \in [a_1, b]$

Nên theo (1.47)

$$\hat{\ell}(v)(t) = -\psi(\ell(\varphi(v)))(t) = -\ell(v)(t) = 0$$

Vậy $\hat{\ell}$ là toán tử b – Volterra.

Tương tự ta cũng có nếu ℓ là toán tử b – Volterra thì $\hat{\ell}$ là toán tử a – Volterra.

a) Vì ℓ là toán tử b – Volterra nên theo chứng minh trên $\hat{\ell}$ là toán tử a – Volterra.

Mặt khác từ (1.47) ta có $-\ell \in P_{ab}$ thì $\hat{\ell} \in P_{ab}$

Do đó từ Hệ quả 1.3.2 suy ra $\hat{\ell} \in S_{ab}(a)$

Vậy theo Chú ý 1.3.9.2 $\ell \in S_{ab}(b)$.

b) Đặt

$$\gamma(t) = (1-\alpha) \sum_{j=0}^k \rho_j(t) + \sum_{j=k+1}^m \rho_j(t), \quad t \in [a, b]$$

Ta có:

- $\gamma \in \widetilde{C}([a, b], (0, +\infty))$ (hiền nhiên)
- Vì $\rho_{i+1}(t) = - \int_t^b \ell(\rho_i)(s) ds$ nên $(\rho_{i+1}(t))' = \ell(\rho_i)(t)$, suy ra

$$\gamma'(t) = (1-\alpha) \sum_{j=0}^{k-1} \ell(\rho_j)(t) + \sum_{j=k}^{m-1} \ell(\rho_j)(t)$$

Do đó

$$\begin{aligned} \ell(\gamma)(t) &= (1-\alpha) \sum_{j=0}^k \ell(\rho_j)(t) + \sum_{j=k+1}^m \ell(\rho_j)(t) \\ &= (1-\alpha) \sum_{j=0}^{k-1} \ell(\rho_j)(t) + \sum_{j=k}^{m-1} \ell(\rho_j)(t) - \ell(\rho_k)(t) + (1-\alpha) \ell(\rho_k)(t) + \ell(\rho_m)(t) \\ &= \gamma'(t) + \ell(\rho_m)(t) - \alpha \ell(\rho_k)(t) \end{aligned}$$

Vì $-\ell \in P_{ab}$ và $\rho_m(t) \leq \alpha \rho_k(t)$, $t \in [a, b]$ nên $\ell(\rho_m)(t) - \alpha \ell(\rho_k)(t) \geq 0$

Suy ra

$$\gamma'(t) \leq \ell(\gamma)(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

Từ Định lí 1.3.10 suy ra $\ell \in S_{ab}(b)$. $\square$

c) Theo (1.48) ta có thể lấy $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\int_a^b \bar{\ell}(1)(s) \exp\left(\int_a^s |\ell(1)(\xi)| d\xi\right) ds < 1 - \varepsilon \exp\left(\int_a^b |\ell(1)(\xi)| d\xi\right)$$

Đặt

$$\gamma(t) = \varepsilon \exp\left(\int_t^b |\ell(1)(\xi)| d\xi\right) + \int_t^b \bar{\ell}(1)(s) \exp\left(\int_t^s |\ell(1)(\xi)| d\xi\right) ds, \quad t \in [a, b]$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \varepsilon \exp\left(-\int_t^b \ell(1)(\xi) d\xi\right) + \int_t^b \bar{\ell}(1)(s) \exp(v(t) - v(s)) ds \\ &= \varepsilon \exp\left(-\int_t^b \ell(1)(\xi) d\xi\right) + \exp(v(t)) \int_a^t \bar{\ell}(1)(s) \exp(-v(s)) ds \end{aligned}$$

với

$$v(t) = \int_a^t \ell(1)(\xi) d\xi.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \varepsilon \ell(1)(t) \exp\left(-\int_t^b \ell(1)(\xi) d\xi\right) + v'(t) \exp(v(t)) \int_t^b \bar{\ell}(1)(s) \exp(-v(s)) ds + \\ &\exp(v(t)) \left[-\bar{\ell}(1)(t) \exp(-v(t))\right] = \varepsilon \ell(1)(t) \exp\left(-\int_t^b \ell(1)(\xi) d\xi\right) + \\ &\ell(1)(t) \int_t^b \bar{\ell}(1)(s) \exp(v(t) - v(s)) ds - \bar{\ell}(1)(t) \\ &= \varepsilon \ell(1)(t) \exp\left(\int_t^b |\ell(1)(\xi)| d\xi\right) + \ell(1)(t) \int_t^b \bar{\ell}(1)(s) \exp\left(\int_t^s |\ell(1)(\xi)| d\xi\right) ds - \bar{\ell}(1)(t) \\ &= \ell(1)(t) \gamma(t) - \bar{\ell}(1)(t) \end{aligned}$$

Hiển nhiên, $\gamma \in \tilde{C}([a, b], (0, +\infty))$, $\gamma(t) < 1$, $t \in [a, b]$

Và do $\bar{\ell} \in P_{ab}$ nên $\gamma'(t) = \ell(1)(t) \gamma(t) - \bar{\ell}(1)(t) \leq \ell(1)(t) \gamma(t) - \bar{\ell}(\gamma)(t)$, $t \in [a, b]$

Đặt

$$\tilde{\ell}(v)(t) = \ell(1)(t) v(t) - \bar{\ell}(v)(t), \quad t \in [a, b] \quad (1.50)$$

thì do $-\ell \in P_{ab}$, $\bar{\ell} \in P_{ab}$ nên $\tilde{\ell} \in -P_{ab}$

Theo Định lí 1.3.10

$$\tilde{\ell} \in S_{ab}(b), \quad (1.51)$$

Từ Chú ý 1.2.5 điều này đủ để chỉ ra rằng bài toán $u'(t) \geq \ell(u)(t)$, $u(b) = 0$ không có nghiệm không tầm thường không âm. Thật vậy:

Giả sử hàm $u \in \tilde{C}([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa mãn (1.6) tức là $u'(t) \geq \ell(u)(t)$, $u(b) = 0$

Đặt

$$w(t) = \mathcal{J}(u)(t) = -\int_t^b \ell(u)(s) ds, \quad t \in [a, b] \quad (1.52)$$

Hiển nhiên $w'(t) = \ell(u)(t)$ với $t \in [a, b]$ và

$$0 \leq u(t) = -\int_t^b u'(s) ds \leq -\int_t^b \ell(u)(s) ds = w(t), \quad w(b) = 0 \quad (1.53)$$

Mặt khác từ (1.49) ta có:

$$\begin{aligned}\ell(1)(t)g(u)(t) - \ell(g(u))(t) &\leq \bar{\ell}(u)(t) \\ \Rightarrow \ell(1)(t)w(t) - \ell(w)(t) &\leq \bar{\ell}(u)(t)\end{aligned}$$

Điều này kết hợp với (1.52), (1.53), và điều kiện $-\ell \in P_{ab}$ ta có:

$$\begin{aligned}w'(t) = \ell(u)(t) &\geq \ell(w)(t) = \ell(1)(t)w(t) + \ell(w)(t) - \ell(1)(t)w(t) \\ &\geq \ell(1)(t)w(t) - \bar{\ell}(u)(t)\end{aligned}$$

Tuy nhiên, $\bar{\ell} \in P_{ab}$, nên từ (1.50), (1.53) suy ra

$$w'(t) \geq \ell(1)(t)w(t) - \bar{\ell}(w)(t) = \tilde{\ell}(w)(t)$$

Từ đây kết hợp với (1.51), (1.53) và Chú ý 1.2.5 ta suy ra $w \equiv 0$, do đó $u \equiv 0$.

Từ Chú ý 1.2.5 suy ra $\ell \in S_{ab}(b)$. $\square$

1.3.12 Định lí

Giả sử $\ell \in P_{ab}$, ℓ là toán tử b -Volterra, và tồn tại một hàm $\gamma \in \tilde{C}([a, b], \mathbb{R}_+)$ sao cho

$$\begin{aligned}\gamma(t) &> 0, \quad t \in [a, b] \\ -\gamma'(t) &\geq \ell(\gamma)(t), \quad t \in [a, b]\end{aligned}$$

Thì $\ell \in S_{ab}(b)$.

Chứng minh

Vì $\ell \in P_{ab}$, ℓ là toán tử b -Volterra nên $-\hat{\ell} \in P_{ab}$ và $\hat{\ell}$ là toán tử a -Volterra.

Mặt khác, theo giả thiết ta có :

$$\begin{aligned}\gamma(t) &> 0, \quad t \in [a, b] \\ \gamma'(t) &\leq -\ell(\gamma)(t) = \hat{\ell}(\gamma)(t), \quad t \in [a, b]\end{aligned}$$

Nên theo Định lí 1.3.4 thì $\hat{\ell} \in S_{ab}(a)$. Do đó theo Chú ý 1.3.9.2 $\ell \in S_{ab}(b)$. $\square$

1.3.13 Định lí

Giả sử $\ell \in P_{ab}$, ℓ là toán tử b -Volterra, và

$$\int_a^b \ell(1)(s) ds \leq 1$$

Thì $\ell \in S_{ab}(b)$.

Chứng minh

Vì $\ell \in P_{ab}$, ℓ là toán tử b -Volterra và $\int_a^b \ell(1)(s) ds \leq 1$

Nên $-\hat{\ell} \in P_{ab}$, $\hat{\ell}$ là toán tử a – Volterra và

$$\int_a^b |\hat{\ell}(1)(s)| ds = \int_a^b |-\ell(1)(s)| ds = \int_a^b \ell(1)(s) ds \leq 1$$

Do đó theo Định lí 1.3.5 thì $\hat{\ell} \in S_{ab}(a)$.

Vì vậy theo Chú ý 1.3.9.2 $\ell \in S_{ab}(b)$. $\square$

1.3.14 Hệ quả

Giả sử $\ell \in P_{ab}$, ℓ là toán tử b – Volterra, và

$$\int_a^b \tilde{\ell}(1)(s) \exp\left(\int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi\right) ds \leq 1$$

với

$$\tilde{\ell}(v)(t) = \ell(\tilde{\theta}(v))(t) - \ell(1)(t)\tilde{\theta}(v)(t), \quad t \in [a, b]$$

$$\tilde{\theta}(v)(t) = -\int_t^b \ell(\tilde{v})(s) ds, \quad \tilde{v}(t) = v(t) \exp\left(-\int_t^b \ell(1)(s) ds\right), \quad t \in [a, b]$$

Thì $\ell \in S_{ab}(b)$.

Chứng minh

Định nghĩa toán tử $\hat{\ell}$ như Chú ý 1.3.9.2 thì bài toán (1.1), (1.3) tương đương với bài toán

$$v'(t) = \hat{\ell}(v)(t) + q(t), \quad v(a) = 0 \quad \text{với} \quad v(t) = \varphi(u)(t) = u(a + b - t), \quad \forall t \in [a, b]$$

và $\ell \in P_{ab}$, ℓ là toán tử b – Volterra thì $-\hat{\ell} \in P_{ab}$, $\hat{\ell}$ là toán tử a – Volterra.

Mặt khác khi đó giả thiết $\int_a^b \tilde{\ell}(1)(s) \exp\left(\int_s^b \ell(1)(\xi) d\xi\right) ds \leq 1$ tương đương với

$$\int_a^b |\tilde{\ell}(1)(s)| \exp\left(\int_a^s |\hat{\ell}(1)(\xi)| d\xi\right) ds \leq 1$$

với

$$\tilde{\ell}(v)(t) = \hat{\ell}(\tilde{\theta}(v))(t) - \hat{\ell}(1)(t)\tilde{\theta}(v)(t), \quad t \in [a, b]$$

$$\tilde{\theta}(v)(t) = \int_a^t \hat{\ell}(\tilde{v})(s) ds, \quad \tilde{v}(t) = v(t) \exp\left(\int_a^t \ell(1)(s) ds\right), \quad t \in [a, b]$$

Do đó theo Hệ quả 1.3.6 thì $\hat{\ell} \in S_{ab}(a)$. Suy ra theo Chú ý 1.3.9.2 $\ell \in S_{ab}(b)$. $\square$

1.3.15 Định lí

Giả sử $\ell = \ell_0 - \ell_1$ với $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$, $\ell_0 \in S_{ab}(b)$, $-\ell_1 \in S_{ab}(b)$ thì $\ell \in S_{ab}(b)$. Thì $\ell \in S_{ab}(b)$.

Chứng minh

Định nghĩa $\hat{\ell}_0, \hat{\ell}_1$ tương tự $\hat{\ell}$ ở Chú ý 1.3.9.2

Từ giả thiết và (1.47) ta có $-\ell = -\ell_0 - (-\ell_1)$ hay $\hat{\ell} = \hat{\ell}_0 - \hat{\ell}_1$.

Vì $\ell_0 \in S_{ab}(b)$, $-\ell_1 \in S_{ab}(b)$ nên $\hat{\ell}_0 \in S_{ab}(a)$, $-\hat{\ell}_1 \in S_{ab}(a)$

Theo Định lí 1.3.10 thì $\hat{\ell} \in S_{ab}(a)$.

Vì vậy theo Chú ý 1.3.9.2 $\ell \in S_{ab}(b)$. $\square$

1.3.16 Chú ý

Ta cũng có chú ý cho các điều kiện trong các Định lí 1.3.12, 1.3.13, 1.3.15 và Hệ quả 1.3.11, 1.3.14 tương tự các Chú ý 1.3.3.1, 1.3.7.1, 1.3.9.1, 1.3.9.2 cho các điều kiện trong các Định lí 1.3.4, 1.3.5, 1.3.8 và Hệ quả 1.3.2, 1.3.6.

1.3.17 Phương trình vi phân hàm với các đối số lệch.

Áp dụng các Định lí 1.3.1 - 1.3.15 cho phương trình vi phân với các đối số lệch ta có kết quả sau.

1.3.17.1 Định lí

Giả sử $p \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$, $\tau \in M_{ab}$ và thỏa ít nhất một trong ba điều kiện sau:

a)

$$\int_a^t p(s) \int_a^{\tau(s)} p(\xi) d\xi ds \leq \alpha \int_a^t p(s) ds, t \in [a, b] \quad (1.54)$$

với $\alpha \in (0, 1)$

b)

$$\int_a^t p(s) \sigma(s) \left(\int_s^{\tau(s)} p(\xi) d\xi \right) \exp \left[\int_a^b p(\eta) d\eta \right] < 1, \quad (1.55)$$

với

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(\tau(t) - t)), \quad t \in [a, b]$$

c) $\int_a^{\tau^*} p(s) ds \neq 0$ và

$$\operatorname{ess\,sup} \left\{ \int_t^{\tau(t)} p(s) ds : t \in [a, b] \right\} < \lambda^*, \quad (1.56)$$

với

$$\lambda^* = \sup \left\{ \frac{1}{x} \ln \left(x + \frac{x}{\exp \left(x \int_a^{\tau^*} p(s) ds - 1 \right)} \right) : x > 0 \right\},$$

$$\tau^* = \operatorname{ess\,sup} \{ \tau(t) : t \in [a, b] \}.$$

Thì toán tử ℓ được định nghĩa

$$\ell(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} p(t)v(\tau(t)) \quad (1.57)$$

thuộc tập $S_{ab}(a)$.

Chứng minh

a) Theo (1.54) và (1.57) ta có

$$\rho_2(t) \leq \alpha \rho_1(t), \quad t \in [a, b].$$

với

$$\rho_1(t) = \int_a^t p(s) ds = \int_a^t \ell(1)(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

$$\rho_2(t) = \int_a^t p(s) \int_a^{\tau(s)} p(\xi) d\xi ds = \int_a^t \ell(\rho_1)(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Như vậy với $m = 2$, $k = 1$ điều kiện (1.12) trong Hệ quả 1.3.2 b) được thỏa mãn.

Do đó $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

b) Giả sử $\bar{\ell}$ là toán tử được định nghĩa

$$\bar{\ell}(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} p(t)\sigma(t) \int_t^{\tau(t)} p(s)v(\tau(s)) ds. \quad (1.58)$$

Hiển nhiên, $\bar{\ell} \in P_{ab}$, và với bất kỳ $v \in C_a([a, b], \mathbb{R}_+)$,

$$\begin{aligned}
& \ell(\mathcal{G}(v))(t) - \ell(1)(t)\mathcal{G}(v)(t) = p(t)\mathcal{G}(v)(\tau(t)) - \ell(1)(t)\mathcal{G}(v)(t) \\
& = p(t) \int_a^{\tau(t)} \ell(v)(s) ds - \ell(1)(t) \int_a^t \ell(v)(s) ds \\
& = p(t) \left(\int_a^t \ell(v)(s) ds + \int_t^{\tau(t)} \ell(v)(s) ds \right) - \ell(1)(t) \int_a^t \ell(v)(s) ds \\
& = p(t) \left(\int_a^t \ell(v)(s) ds + \int_t^{\tau(t)} \ell(v)(s) ds \right) - p(t) \int_a^t \ell(v)(s) ds \\
& = p(t) \int_t^{\tau(t)} \ell(v)(s) ds = p(t) \int_t^{\tau(t)} p(s)v(\tau(s)) ds \leq \bar{\ell}(v)(t), \quad t \in [a, b]
\end{aligned}$$

với

$$\mathcal{G}(v)(t) = \int_a^t \ell(v)(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

Mặt khác, từ (1.55) suy ra bất đẳng thức (1.14) là đúng. Do đó các giả thiết của Hệ quả 1.3.2 c) được thỏa mãn. Vì vậy $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

c) Theo (1.56), tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\int_t^{\tau(t)} p(s) ds < \lambda^* - \varepsilon, \quad t \in [a, b]. \quad (1.59)$$

Chọn $x_0 > 0$ và $\delta \in (0, 1)$ sao cho

$$\frac{1}{x_0} \ln \left(x_0 + \frac{x_0(1-\delta)}{\exp \left(x_0 \int_a^{\tau^*} p(s) ds \right) - (1-\delta)} \right) > \lambda^* - \varepsilon, \quad (1.60)$$

Và đặt

$$\gamma(t) = \exp \left(x_0 \int_a^t p(s) ds \right) - 1 + \delta, \quad t \in [a, b].$$

Khi đó

$$\gamma'(t) = x_0 p(t) \exp \left(x_0 \int_a^t p(s) ds \right)$$

Kiểm tra từ (1.59) và (1.60) ta thấy bất đẳng thức (1.7) đúng. Do đó theo Định lý 1.2 thì $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

1.3.17.2 Chú ý

• Điều kiện $\alpha \in (0,1)$ trong Định lí 1.3.17.1a) là nghiêm ngặt, định lí sẽ không còn đúng khi $\alpha = 1$ hay $\alpha = 1 + \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý. Để thấy được điều này ta có thể xem các ví dụ 1 và ví dụ 2 ở Chú ý 1.3.3 với ℓ là toán tử được định nghĩa $\ell(v)(t) = p(t)v(\tau(t))$.

• Bất đẳng thức (1.55) trong Định lí 1.3.17.1b) không thể thay thế bởi đẳng thức

$$\int_a^t p(s)\sigma(s) \left(\int_s^{\tau(s)} p(\xi) d\xi \right) \exp \left[\int_a^b p(\eta) d\eta \right] = 1 \quad \text{hay} \quad \text{đẳng} \quad \text{thức}$$

$$\int_a^t p(s)\sigma(s) \left(\int_s^{\tau(s)} p(\xi) d\xi \right) \exp \left[\int_a^b p(\eta) d\eta \right] = 1 + \varepsilon \quad \text{với } \varepsilon > 0 \text{ nhỏ tùy ý.}$$

Để thấy được điều này ta có thể xem các ví dụ 3 và ví dụ 4 ở Chú ý 1.3.3 với $\ell, \bar{\ell}$ là toán tử được định nghĩa

$$\ell(v)(t) = p(t)v(\tau(t)), \quad \bar{\ell}(v)(t) = p(t)\sigma(t) \int_t^{\tau(t)} p(s)v(\tau(s)) ds, \quad \text{với}$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(\tau(t) - t))$$

1.3.17.3 Định lí

Giả sử $g \in L([a,b], \mathbb{R}_+)$, $\mu \in M_{ab}$, $\mu(t) \leq t$, $t \in [a,b]$ và thỏa

$$\int_a^b g(s) ds \leq 1 \quad (1.61)$$

hoặc

$$\int_a^b g(s) \left(\int_{\mu(s)}^s g(\xi) \exp \left[\int_{\mu(\xi)}^s g(\eta) d\eta \right] d\xi \right) ds \leq 1, \quad (1.62)$$

hoặc $g \not\equiv 0$ và

$$\text{ess sup} \left\{ \int_{\mu(t)}^t g(s) ds : t \in [a,b] \right\} < \eta^*, \quad (1.63)$$

với

$$\eta^* = \sup \left\{ \frac{1}{x} \ln \left(x + \frac{x}{\exp \left(x \int_a^{\tau^*} g(s) ds - 1 \right)} \right) : x > 0 \right\}.$$

Thì toán tử ℓ được định nghĩa

$$\ell(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} -g(t)v(\mu(t)) \quad (1.64)$$

thuộc tập $S_{ab}(a)$.

Chứng minh

- Rõ ràng nếu (1.61) đúng thì toán tử ℓ được định nghĩa ở (1.64) thỏa mãn điều kiện (1.27). Do đó theo Định lý 1.3.5 thì $\ell \in S_{ab}(a)$.
- Rõ ràng nếu (1.62) đúng thì toán tử ℓ được định nghĩa ở (1.64) thỏa mãn điều kiện (1.31), với $\tilde{\ell}$ được định nghĩa ở Hệ quả 1.3.6. Do đó theo Hệ quả 1.3.6 thì $\ell \in S_{ab}(a)$.
- Giả sử ta có bất đẳng thức (1.63), khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\int_{\mu(t)}^t g(s) ds < \eta^* - \varepsilon, \quad t \in [a, b] \quad (1.65)$$

Chọn $x_0 > 0$ và $\delta \in (0, 1)$ sao cho

$$\frac{1}{x_0} \ln \left(x_0 + \frac{x_0(1-\delta)}{\exp \left(x_0 \int_a^b g(s) ds - (1-\delta) \right)} \right) > \eta^* - \varepsilon, \quad (1.66)$$

Và đặt

$$\gamma(t) = \exp \left(x_0 \int_t^b g(s) ds \right) - 1 + \delta, \quad t \in [a, b].$$

Từ (1.65) và (1.66) ta thấy các bất đẳng thức (1.21) và (1.22) được thỏa mãn. Do đó theo Định lý 1.3.4 thì $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

1.3.17.4 Chú ý

- Điều kiện (1.61) trong Định lý 1.3.17.3 không thể thay thế bởi điều kiện

$$\int_a^b g(s) ds \leq 1 + \varepsilon$$

- Điều kiện (1.62) trong Định lý 1.3.17.3 không thể thay thế bởi điều kiện

$$\int_a^b g(s) \left(\int_{\mu(s)}^s g(\xi) \exp \left[\int_{\mu(\xi)}^s g(\eta) d\eta \right] d\xi \right) ds \leq 1 + \varepsilon,$$

với $\varepsilon > 0$ tùy ý.

Để thấy được điều này ta có thể xem ví dụ 2 ở Chú ý 1.3.7 với ℓ là toán tử được định nghĩa $\ell(v)(t) = -g(t)v(\mu(t))$.

1.3.17.5 Định lý

Giả sử $p, g \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$, $\tau, \mu \in M_{ab}$, $\mu(t) \leq t$, $t \in [a, b]$ và hàm p, τ thỏa ít nhất một trong các điều kiện a), b), c) trong Định lý 1.3.17.1, còn hàm g, μ thỏa (1.61) hoặc (1.62) hoặc (1.63) trong Định lý 1.3.17.3. Thì toán tử ℓ được định nghĩa

$$\ell(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} p(t)v(\tau(t)) - g(t)v(\mu(t)) \quad (1.67)$$

thuộc tập $S_{ab}(a)$.

Chứng minh

Ta định nghĩa hai toán tử ℓ_0, ℓ_1 như sau:

$$\ell_0(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} p(t)v(\tau(t)); \ell_1(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(t)v(\mu(t))$$

Khi đó $\ell = \ell_0 - \ell_1$.

Từ giả thiết và theo Định lý 1.3.17.1 ta có $\ell_0 \in S_{ab}(a)$.

Từ giả thiết và theo Định lý 1.3.17.3 ta có $-\ell_1 \in S_{ab}(a)$.

Do đó theo Định lý 1.3.8 $\ell \in S_{ab}(a)$. $\square$

1.3.17.6 Định lý

Giả sử $g \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$, $\mu \in M_{ab}$ và thỏa ít nhất một trong ba điều sau:

a)

$$\int_t^b g(s) \int_{\mu(s)}^s g(\xi) d\xi ds \leq \alpha \int_t^b g(s) ds, \quad t \in [a, b], \text{ với } \alpha \in (0, 1);$$

b)

$$\int_a^b g(s) \sigma(s) \left(\int_{\mu(s)}^s g(\xi) d\xi \right) \exp \left[\int_a^s g(\eta) d\eta \right] ds < 1,$$

với

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn}(t - \mu(t))), \quad t \in [a, b];$$

c) $\int_t^b g(s) ds \neq 0$ và

$$\operatorname{ess\,sup} \left\{ \int_{\mu(t)}^t g(s) ds : t \in [a, b] \right\} < \mathcal{G}^*,$$

với

$$\mathcal{G}^* = \sup \left\{ \frac{1}{x} \ln \left(x + \frac{x}{\exp \left(x \int_{\mu_*}^b g(s) ds - 1 \right)} \right) : x > 0 \right\},$$

$$\mu_* = \operatorname{ess\,inf} \{ \mu(t) : t \in [a, b] \}.$$

Thì toán tử ℓ được định nghĩa ở (1.64) thuộc tập $S_{ab}(b)$.

Chứng minh

Định lí này được suy ra từ Định lí 1.3.17.1 và Chú ý 1.3.9.2.

1.3.17.7 Định lí

Giả sử $p \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$, $\tau \in M_{ab}$, $\tau(t) \leq t$, $t \in [a, b]$ và thỏa

$$\int_a^b p(s) ds \leq 1 \tag{1.68}$$

hoặc

$$\int_a^b p(s) \left(\int_s^{\tau(s)} p(\xi) \exp \left[\int_s^{\tau(\xi)} p(\eta) d\eta \right] d\xi \right) ds \leq 1, \tag{1.69}$$

hoặc $g \neq 0$ và

$$\operatorname{ess\,sup} \left\{ \int_t^{\tau(t)} p(s) ds : t \in [a, b] \right\} < \kappa^*, \quad (1.70)$$

với

$$\kappa^* = \sup \left\{ \frac{1}{x} \ln \left(x + \frac{x}{\exp \left(x \int_a^b p(s) ds - 1 \right)} \right) : x > 0 \right\}.$$

Thì toán tử ℓ được định nghĩa ở (1.57) thuộc tập $S_{ab}(b)$.

Chứng minh

Định lí này được suy ra từ Định lí 1.3.17.3 và Chú ý 1.3.9.2.

1.3.17.8 Định lí

Giả sử $p, g \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$, $\tau, \mu \in M_{ab}$, $\tau(t) \geq t$, $t \in [a, b]$, và các hàm g, μ thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện a), b), c) trong Định lí 1.3.17.6, trong đó các hàm p, τ thỏa (1.68) hoặc (1.69), hoặc (1.70) trong Định lí 1.3.17.7. Thì toán tử ℓ được định nghĩa ở (1.67) thuộc tập $S_{ab}(b)$.

Chứng minh

Định lí này được suy ra từ Định lí 1.3.17.5 và Chú ý 1.3.9.2.

CHƯƠNG II

CÁC TIÊU CHUẨN HIỆU QUẢ

Trong chương 2 này chúng ta sẽ xét các tiêu chuẩn hiệu quả cho các điều kiện cần và đủ ở chương 1 để một toán tử $\ell \in \tilde{L}_{ab}$ thuộc tập $S_{ab}(a)$ (hoặc $S_{ab}(b)$).

2.1 Kết quả chuẩn bị

2.1.1 Định nghĩa

Ta nói rằng một toán tử $\ell \in \tilde{L}_{ab}$ thuộc tập $\tilde{S}_{ab}$, nếu phương trình thuần nhất (1.1₀) có ít nhất một nghiệm dương.

2.1.2 Chú ý

Giả sử $\ell \in \tilde{L}_{ab}$ là một toán tử t_0 -Volterra, với $t_0 \in [a, b]$ và $\ell \in \tilde{S}_{ab}$. Hiển nhiên, với bất kỳ $a_1 \in [a, t_0]$ và $b_1 \in [t_0, b]$, $a_1 \neq b_1$ thì kết luận $\ell \in \tilde{S}_{a_1 b_1}$ cũng đúng.

Chứng minh

Vì $\ell \in \tilde{S}_{ab}$ nên $\ell \in \tilde{L}_{ab}$ và phương trình thuần nhất $u'(t) = \ell(u)(t)$ tồn tại nghiệm $u(t) \geq 0$, $\forall t \in [a, b]$. Từ đó suy ra $\ell \in \tilde{L}_{a_1 b_1}$ và $u(t)$ là nghiệm phương trình $u'(t) = \ell(u)(t)$ thỏa $u(t) \geq 0$, $\forall t \in [a_1, b_1]$. Vậy $\ell \in \tilde{S}_{a_1 b_1}$.

2.2 Các kết quả chính

2.2.1 Các mệnh đề

2.2.1.1 Mệnh đề

$$P_{ab} \cap \tilde{S}_{ab} = P_{ab} \cap S_{ab}(a).$$

Chứng minh.

- Giả sử $\ell \in P_{ab} \cap S_{ab}(a)$ và u là nghiệm của

$$u'(t) = \ell(u)(t), \quad u(a) = 1 \tag{2.1}$$

Vì $\ell \in S_{ab}(a)$ nên ta có $u(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$. Mặt khác $\ell \in P_{ab}$, nên từ (2.1) ta có $u'(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$, do đó $u(t) > 0$, $t \in [a, b]$. Vì vậy, $P_{ab} \cap S_{ab}(a) \subseteq P_{ab} \cap \tilde{S}_{ab}$.

- Giả sử $\ell \in P_{ab} \cap \tilde{S}_{ab}$ theo Định nghĩa 2.1.1 phương trình (0.1₀) có một nghiệm dương γ .

Khi đó theo Định lý 1.3.1 suy ra $\ell \in S_{ab}(a)$. Vì vậy $P_{ab} \cap \tilde{S}_{ab} \subseteq P_{ab} \cap S_{ab}(a)$.

$$\text{Vậy } P_{ab} \cap \tilde{S}_{ab} = P_{ab} \cap S_{ab}(a)$$

2.2.1.2 Mệnh đề

Giả sử ℓ là toán tử b – Volterra, $\ell \in P_{ab} \cap \tilde{S}_{ab}$. Thì $\ell \in S_{ab}(b)$.

Chứng minh.

Vì ℓ là toán tử b – Volterra, nên bài toán (1.1₀), (1.3₀) chỉ có nghiệm tầm thường nên bài toán (1.1), (1.3) có nghiệm duy nhất. Giả sử u là nghiệm của (1.1), (1.3) với $c \in \mathbb{R}_+, q \in L([a, b], \mathbb{R}_-)$. Đặt:

$$v_\varepsilon = \varepsilon + u(t), \quad t \in [a, b], \quad (2.2)$$

với $\varepsilon > 0$, ta thấy:

$$v_\varepsilon(t) > 0, \quad t \in [a, b] \quad (2.3)$$

Thật vậy, nếu (2.3) không đúng, vì $v_\varepsilon(b) > 0$, tồn tại $t_\varepsilon \in [a, b)$ sao cho:

$$v_\varepsilon(t) > 0, \quad t \in [a, b], \quad v_\varepsilon(t_\varepsilon) = 0 \quad (2.4)$$

Hiển nhiên,

$$v'_\varepsilon(t) = u'(t) = \ell(u)(t) + q(t) = \ell(-\varepsilon + v_\varepsilon)(t) + q(t) = \ell(v_\varepsilon)(t) + q(t) - \varepsilon \ell(1)(t), \quad \text{với } t \in [a, b]$$

và từ giả thiết $q \in \ell([a, b], \mathbb{R}_-)$, $\ell \in P_{ab}, \varepsilon > 0$ suy ra

$$v'_\varepsilon(t) \leq \ell(v_\varepsilon)(t), \quad t \in [a, b] \quad (2.5)$$

Từ (2.4), (2.5) ta có $\begin{cases} v'_\varepsilon(t) \leq \ell(v_\varepsilon)(t) \\ v_\varepsilon(t) = 0 \end{cases}$ nên v_ε là nghiệm bài toán $\begin{cases} u'(t) \leq \ell(u)(t) \\ u(t) = 0 \end{cases}$

Mà theo Chú ý 1.2.5 ta có $\ell \in S_{t_\varepsilon b}(a)$ khi và chỉ khi bài toán $\begin{cases} u'(t) \leq \ell(u)(t) \\ u(t) = 0 \end{cases}$ không có

nghiệm không âm khác tầm thường. Mà $v_\varepsilon(t) > 0, t \in [a, b]$ nên $\ell \notin S_{t_\varepsilon b}(a)$. Do đó theo

Mệnh đề 2.3.1 suy ra $\ell \notin \tilde{S}_{t_\varepsilon b}$. Từ đó theo Chú ý 2.1.2 điều này mâu thuẫn với giả thiết

$$\ell \in \tilde{S}_{ab}.$$

Vì vậy, với $\varepsilon > 0$ tùy ý, từ (2.2) và (2.3) suy ra

$$u(t) \geq 0, \quad t \in [a, b]$$

Vậy $\ell \in S_{ab}(b)$. $\square$

2.2.1.3 Mệnh đề

$$(-P_{ab}) \cap \tilde{S}_{ab} = (-P_{ab}) \cap S_{ab}(b), \text{ với } -P_{ab} = \{\ell \in \tilde{L}_{ab} : -\ell \in P_{ab}\}.$$

Chứng minh.

Mệnh đề này được suy ra từ Mệnh đề 2.2.1.1 và Chú ý 1.3.9.2.

2.2.1.4 Mệnh đề

Giả sử ℓ là toán tử $a - Volterra$, $\ell \in (-P_{ab}) \cap \tilde{S}_{ab}$. Thì $\ell \in S_{ab}(a)$.

Chứng minh.

Mệnh đề này được suy ra từ Mệnh đề 2.2.1.2 và Chú ý 1.3.9.2

2.2.1.5 Mệnh đề

Giả sử ℓ là toán tử $a b - Volterra$, $\ell \in P_{ab} \cap S_{ab}(a)$. Thì $\ell \in S_{ab}(b)$.

Chứng minh.

Mệnh đề này được suy ra từ Mệnh đề 2.2.1.1 và Mệnh đề 2.2.1.2.

2.2.1.6 Mệnh đề

Giả sử ℓ là toán tử $a - Volterra$, $\ell \in (-P_{ab}) \cap S_{ab}(b)$. Thì $\ell \in S_{ab}(a)$.

Chứng minh.

Mệnh đề này được suy ra từ Mệnh đề 2.2.1.3 và Mệnh đề 2.2.1.4.

2.2.2 Bổ đề

Giả sử $\ell = \ell_0 - \ell_1$, với $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$, và tồn tại $\alpha, \beta \in \tilde{C}([a, b], \mathbb{R}_+)$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \text{ với } t \in [a, b] \text{ và}$$

$$\begin{aligned} \beta'(t) &\geq \ell_0(\beta)(t) - \ell_1(\alpha)(t) + q(t), & t \in [a, b] \\ \alpha'(t) &\leq \ell_0(\alpha)(t) - \ell_1(\beta)(t) + q(t), & t \in [a, b] \end{aligned} \tag{2.6}$$

tương ứng.

$$\begin{aligned}\beta'(t) &\leq -\ell_1(\beta)(t) + \ell_0(\alpha)(t) + q(t), \quad t \in [a, b] \\ \alpha'(t) &\geq -\ell_1(\alpha)(t) + \ell_0(\beta)(t) + q(t), \quad t \in [a, b]\end{aligned}\tag{2.7}$$

Thì với mỗi $c \in [\alpha(a), \beta(a)]$, tương ứng $c \in [\alpha(b), \beta(b)]$, bài toán (1.1) có ít nhất một nghiệm u thỏa mãn điều kiện đầu (1.2), tương ứng (1.3), và

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a, b]\tag{2.8}$$

Chứng minh.

Định nghĩa toán tử $\chi : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$

$$\chi(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(|v(t) - \alpha(t)| - |v(t) - \beta(t)| + \alpha(t) + \beta(t))\tag{2.9}$$

Ta có,

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{2}(|v(t) - \alpha(t)| - |v(t) - \beta(t)|) + \alpha(t) + \beta(t) \leq \chi(v)(t) \\ & \leq \frac{1}{2}(|v(t) - \alpha(t)| - |v(t) - \beta(t)|) + \alpha(t) + \beta(t) \\ & \Leftrightarrow \alpha(t) \leq \chi(v)(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a, b], \quad v \in C([a, b], \mathbb{R})\end{aligned}\tag{2.10}$$

Đặt $T : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$ là toán tử được định nghĩa như sau

$$T(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} c + \int_a^t (\hat{\ell}_0(v)(s) - \hat{\ell}_1(v)(s)) ds + \int_a^t q(s) ds\tag{2.11}$$

Tương ứng,

$$T(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} c - \int_t^b (\hat{\ell}_0(v)(s) - \hat{\ell}_1(v)(s)) ds - \int_t^b q(s) ds\tag{2.12}$$

với

$$\hat{\ell}_0(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ell_0(\chi(v))(t), \quad \hat{\ell}_1(v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1(\chi(v))(t).$$

Do (2.10), và các giả thiết $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$, ta có mỗi $v \in C([a, b], \mathbb{R})$, hàm $T(v)$ thuộc tập $\tilde{C}([a, b], \mathbb{R})$ và

$$|T(v)(t)| \leq M, \quad t \in [a, b],\tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\ell_0\alpha(t)(t) - \ell_1(\beta)(t) + q(t) &\leq \frac{d}{dt}T(v)(t) \\ &\leq \ell_0(\beta)(t) - \ell_1(\alpha)(t) + q(t), \quad t \in [a, b]\end{aligned}\tag{2.14}$$

với

$$M = |c| + \int_a^b \left(\ell_0(|\alpha| + |\beta|)(s) + \ell_1(|\alpha| + |\beta|)(s) + |q(s)| \right) ds.$$

Theo (2.13), (2.14), và bổ đề Arzela Ascoli, rõ ràng toán tử T đi từ không gian $C([a, b], \mathbb{R})$ vào tập con compact tương đối của nó. Vì vậy, theo định lý điểm bất động Schauder, tồn tại $u \in C([a, b], \mathbb{R})$ sao cho

$$u(t) = T(u)(t), \quad t \in [a, b]. \quad (2.15)$$

Hiển nhiên, $u \in \tilde{C}([a, b], \mathbb{R})$ và $u(a) = c$ tương ứng $u(b) = c$ nên theo 2.8 ta có

$$u(a) - \beta(a) \leq 0 \text{ tương ứng } u(b) - \beta(b) \leq 0 \quad (2.16)$$

Từ (2.14), (2.15) và (2.16) ta có

$$(u(t) - \beta(t))' = \frac{d}{dt} T(u)(t) - \beta'(t) \leq \ell_0(\beta)(t) - \ell_1(\alpha)(t) + q(t) - \beta'(t) \leq 0, \text{ với } t \in [a, b]$$

tương ứng,

$$(u(t) - \beta(t))' = \frac{d}{dt} T(u)(t) - \beta'(t) \geq \ell_0(\alpha)(t) - \ell_1(\beta)(t) + q(t) - \beta'(t) \geq 0, \text{ với } t \in [a, b]$$

Vì vậy từ (2.16) ta có $u(t) \leq \beta(t)$, $t \in [a, b]$. Tương tự ta có thể chứng minh $u(t) \geq \alpha(t)$, $t \in [a, b]$, vì vậy (2.8) được thỏa

Theo (2.8), (2.9) và (2.11), tương ứng (2.12), từ (2.15) suy ra

$$u(t) = c + \int_a^t (\ell_0(u)(s) - \ell_1(u)(s)) ds + \int_a^t q(s) ds, \text{ với } t \in [a, b]$$

tương ứng,

$$u(t) = c - \int_t^b (\ell_0(u)(s) - \ell_1(u)(s)) ds - \int_t^b q(s) ds, \text{ với } t \in [a, b]$$

Tức là, u là nghiệm của (1.1) thỏa (1.3), tương ứng (1.4). $\square$

2.2.3 Định lý

Giả sử $\ell = \ell_0 - \ell_1$ với $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$, với $\ell_0 \in S_{ab}(a)$, $-\ell_1 \in S_{ab}(b)$ và ℓ_1 là toán tử $a - Volterra$ thì $\ell \in \tilde{S}_{ab}$.

Chứng minh.

Theo giả thiết ta có $-\ell_1 \in S_{ab}(b)$, $-\ell_1 \in -P_{ab}$ nên $-\ell_1 \in S_{ab}(b) \cap -P_{ab}$. Mặt khác ℓ_1 là toán tử $a - Volterra$ nên theo Mệnh đề 2.2.1.6 $-\ell_1 \in S_{ab}(a)$ và theo Định lý 1.3.8 thì $\ell \in S_{ab}(a)$. Do Định nghĩa 1.2.2, bài toán thuần nhất (1.1_0) , (1.2_0) chỉ có nghiệm tầm thường, do đó bài toán (2.1) có nghiệm duy nhất.

Giả sử u là nghiệm của (2.1) . Vì điều kiện $\ell \in S_{ab}(a)$ ta có

$$u(t) \geq 0, \text{ với } t \in [a, b] \quad (2.17)$$

Vì vậy, từ giả thiết $\ell_0 \in P_{ab}$, ta có

$$u'(t) \geq -\ell_1(u)(t), \quad t \in [a, b] \quad (2.18)$$

Giả sử tồn tại $b_1 \in (a, b]$ sao cho

$$u(b_1) = 0.$$

Vì ℓ_1 là toán tử $a - Volterra$, từ (2.17), (2.18), Chú ý 1.2.5 và Mệnh đề 2.2.1.3 suy ra $-\ell_1 \notin \tilde{S}_{ab_1}$. Nhưng theo Chú ý 2.1.2 điều này mâu thuẫn với giả thiết $-\ell_1 \in \tilde{S}_{ab}$. Do đó u là một nghiệm dương của (1.1_0) , tức là $\ell \in \tilde{S}_{ab}$. $\square$

Chú ý

Trong định lý 2.2.3 giả thiết

$$\ell_0 \in S_{ab}(a), \quad -\ell_1 \in S_{ab}(b)$$

không thể thay thế bởi giả thiết

$$(1-\varepsilon)\ell_0 \in S_{ab}(a), \quad -\ell_1 \in S_{ab}(b)$$

hoặc giả thiết

$$\ell_0 \in S_{ab}(a), \quad -(1-\varepsilon)\ell_1 \in S_{ab}(b)$$

với mọi $\varepsilon > 0$.

Để thấy rõ điều này ta có thể xem các ví dụ 1 và ví dụ 2 ở Chú ý 1.3.9.1.

2.2.4 Định lý

Giả sử $\ell = \ell_0 - \ell_1$ với $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ và tồn tại các hàm $\alpha, \beta \in \tilde{C}([a, b]; \mathbb{R}_+)$ thỏa các bất đẳng thức

$$\beta'(t) \leq -\ell_1(\beta)(t) + \ell_0(\alpha)(t), \quad t \in [a, b], \quad (2.19)$$

$$\alpha'(t) \geq -\ell_1(\alpha)(t) + \ell_0(\beta)(t), \quad t \in [a, b], \quad (2.20)$$

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a, b]. \quad (2.21)$$

Hơn nữa, nếu một trong các điều kiện sau đúng:

$$\alpha(t) > 0, \quad t \in [a, b]; \quad (2.22)$$

$$\alpha(t) > 0, \quad t \in (a, b], \quad \alpha(a) = 0, \quad \ell_0 \in S_{ab}(a) \quad (2.23)$$

$$\alpha(t) > 0, \quad t \in [a, b), \quad \alpha(b) = 0, \quad -\ell_1 \in S_{ab}(b) \quad (2.24)$$

Thì $\ell \in \tilde{S}_{ab}$.

Chứng minh.

Từ (2.19), (2.21), Bổ đề 2.2.2 suy ra (1.1₀) có nghiệm u thỏa mãn điều kiện đầu

$$u(b) = \beta(b) \text{ và}$$

$$u(t) \geq \alpha(t), \text{ với } t \in [a, b] \quad (2.25)$$

• Giả sử (2.22) là đúng thì từ (2.25) suy ra u là một nghiệm dương của (1.1₀), do đó $\ell \in \tilde{S}_{ab}(a)$.

• Giả sử (2.23), tương ứng (2.24) là đúng thì từ (2.25) suy ra

$$u(t) > 0, \text{ với } t \in (a, b], \text{ tương ứng } t \in [a, b) \quad (2.26)$$

Do (2.26), điều kiện $\ell_1 \in P_{ab}$, tương ứng điều kiện $\ell_0 \in P_{ab}$, từ (1.1₀) ta có

$$u'(t) \leq \ell_0(u)(t), \text{ tương ứng } u'(t) \geq \ell_1(u)(t) \text{ với } t \in [a, b].$$

Do $\ell_0 \in S_{ab}(a)$, tương ứng $-\ell_1 \in S_{ab}(b)$, và Chú ý 1.2.5, ta có $u(a) \neq 0$, tương ứng $u(b) \neq 0$. Vì vậy từ (2.26) ta có u là một nghiệm dương của (1.1₀), do đó $\ell \in \tilde{S}_{ab}$. $\square$

2.2.5 Hệ quả

Giả sử $\ell = \ell_0 - \ell_1$ với $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ và tồn tại một hàm $\beta \in \tilde{C}([a, b]; (0, +\infty))$ thỏa các bất đẳng thức

$$\beta'(t) \leq -\ell_1(\beta)(t), \quad t \in [a, b], \quad (2.27)$$

$$\beta(a) \int_a^b \ell_0(1)(s) ds < \beta(b). \quad (2.28)$$

thì $\ell \in \tilde{S}_{ab}$.

Chứng minh.

Theo 2.28 tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\varepsilon + \beta(a) \int_a^b \ell_0(1)(s) ds \leq \beta(b). \quad (2.29)$$

Đặt

$$\alpha(t) = \varepsilon + \beta(a) \int_a^t \ell_0(1)(s) ds \leq \beta(b), \quad t \in [a, b]$$

Từ (2.27) suy ra β không tăng, tức là,

$$\beta(b) \leq \beta(t) \leq \beta(a), \quad t \in [a, b]. \quad (2.30)$$

Do đó, hiển nhiên các bất đẳng thức (2.19), (2.20) và (2.22) đúng.

Mặt khác, (2.29) và (2.30) ta có

$$\alpha(t) \leq \varepsilon + \beta(a) \int_a^b \ell_0(1)(s) ds \leq \beta(b) \leq \beta(t), \quad t \in [a, b]$$

nên (2.21) được thỏa.

Vì vậy các giả thiết của Định lý 2.2.4 được thỏa mãn, nên $\ell \in \tilde{S}_{ab}$. $\square$

2.2.6 Định lý

Giả sử $\ell = \ell_0 - \ell_1$ với $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$, với $\ell_0 \in S_{ab}(a), -\ell_1 \in S_{ab}(b)$ và ℓ_0 là một toán tử b-Volterra thì $\ell \in \tilde{S}_{ab}$.

Chứng minh.

Định lý này được suy ra từ Định lý 2.2.3 và Chú ý 1.3.9.2.

2.2.7 Định lý

Giả sử $\ell = \ell_0 - \ell_1$ với $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ và tồn tại các hàm $\alpha, \beta \in \tilde{C}([a, b]; \mathbb{R}_+)$ thỏa các bất đẳng thức (2.21) và

$$\beta'(t) \geq \ell_0(\beta)(t) - \ell_1(\alpha)(t), \quad t \in [a, b],$$

$$\alpha'(t) \leq \ell_0(\alpha)(t) - \ell_1(\beta)(t), \quad t \in [a, b].$$

Hơn nữa, nếu có ít nhất một trong các điều kiện (2.22), (2.23), (2.24) được thỏa thì $\ell \in \tilde{S}_{ab}$.

Chứng minh .

Định lý này được suy ra từ Định lý 2.2.4 và Chú ý 1.3.9.2.

2.2.8 Hệ quả

Giả sử $\ell = \ell_0 - \ell_1$ với $\ell_0, \ell_1 \in P_{ab}$ và tồn tại một hàm $\beta \in \tilde{C}([a, b]; (0, +\infty))$ thỏa các bất đẳng thức

$$\beta'(t) \geq \ell_0(\beta)(t), \quad t \in [a, b], \quad \beta(b) \int_a^b \ell_1(1)(s) ds < \beta(a).$$

Thì $\ell \in \tilde{S}_{ab}$.

Chứng minh .

Hệ quả này được suy ra từ Hệ quả 2.2.5 và Chú ý 1.3.9.2.

2.2.9 Phương trình vi phân với các đối số lệch

Áp dụng các định lý trên cho phương trình vi phân với đối số lệch ta có kết quả sau.

2.2.9.1 Định lý

Giả sử $p, g \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$, $\tau, \mu \in M_{ab}$, $\mu(t) \leq t$, $t \in [a, b]$ và các hàm p, τ thỏa một trong các điều kiện a), b), c) trong Định lý 1.3.17.1 và các hàm g, μ thỏa một trong các điều kiện a), b), c) trong Định lý 1.3.17.6 thì toán tử ℓ được định nghĩa ở (1.67) thuộc tập $\tilde{S}_{ab}$.

Chứng minh .

Định lý này được suy ra từ Định lý 1.3.17.1; 1.3.17.6 và 2.2.3.

2.2.9.2 Định lý

Giả sử $p, g \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$, $\tau, \mu \in M_{ab}$ các hàm g, μ thỏa a) (tương ứng c)) trong Định lý 1.3.17.6, và

$$\left((1-\alpha) \left(1 + \int_a^b g(s) ds \right) + \int_a^b g(s) \int_{\mu(s)}^b g(\xi) d\xi ds \right) \int_a^b p(s) ds < 1-\alpha,$$

tương ứng

$$\left(\left(x_0 \int_a^b g(s) ds \right) - 1 + \delta \right) \int_a^b p(s) ds < \delta,$$

với $x_0 > 0$ và $\delta \in (0, 1)$ sao cho

$$\int_{\mu(t)}^t g(s) ds < \frac{1}{x_0} \left(x_0 + \frac{x_0(1-\delta)}{\exp \left(x_0 \int_a^b g(s) ds \right) - (1-\delta)} \right), t \in [a, b].$$

Thì toán tử ℓ được định nghĩa ở (1.67) thuộc tập $\tilde{S}_{ab}$.

Chứng minh. Đặt

$$\beta(t) = (1-\alpha) \left(1 + \int_t^b g(s) ds \right) + \int_t^b g(s) \int_{\mu(s)}^b g(\xi) d\xi ds$$

tương ứng.

$$\beta(t) = \exp \left(x_0 \int_t^b g(s) ds \right) - 1 + \delta$$

Dễ dàng thấy rằng hàm β thỏa mãn các giả thiết của Hệ quả 2.2.5.

2.2.9.3 Định lý

Giả sử $p, g \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$, $\tau, \mu \in M_{ab}$, $\tau(t) \geq t$, $t \in [a, b]$ và các hàm p, τ thỏa một trong các điều kiện a), b), c) trong Định lý 1.3.17.1, và các hàm g, μ thỏa một trong các điều kiện a), b), c) trong Định lý 1.3.17.6 thì toán tử ℓ được định nghĩa ở (1.67) thuộc tập $\tilde{S}_{ab}$.

Chứng minh .

Định lý này được suy ra từ Định lý 1.3.17.1; 1.3.17.6 và 2.2.6.

2.2.9.4 Định lý

Giả sử $p, g \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$, $\tau, \mu \in M_{ab}$ các hàm p, τ thỏa a) (tương ứng c)) trong Định lý 1.3.17.1, và

$$\left((1-\alpha) \left(1 + \int_a^b p(s) ds \right) + \int_a^b p(s) \int_a^{\tau(s)} p(\xi) d\xi ds \right) \int_a^b g(s) ds < 1-\alpha,$$

tương ứng

$$\left(\left(x_0 \int_a^b p(s) ds \right) - 1 + \delta \right) \int_a^b g(s) ds < \delta,$$

với $x_0 > 0$ và $\delta \in (0, 1)$ sao cho

$$\int_t^{\tau(t)} p(s) ds < \frac{1}{x_0} \left(x_0 + \frac{x_0(1-\delta)}{\exp \left(x_0 \int_{\mu^*}^b p(s) ds \right) - (1-\delta)} \right), t \in [a, b].$$

Thì toán tử ℓ được định nghĩa ở (1.67) thuộc tập $\tilde{S}_{ab}$.

Chứng minh .

Định lý này được suy ra từ Định lý 2.2.9.2 và Chú ý 1.3.9.2.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Mục đích của luận văn là nghiên cứu các điều kiện cần và đủ để bài toán biên cho phương trình vi phân hàm bậc nhất tuyến tính (1.1), (1.2) có duy nhất một nghiệm không âm và phương trình vi phân thuần nhất (1.1₀) tồn tại nghiệm dương. Nội dung chính của luận văn gồm 2 chương:

Chương 1. Chúng ta xây dựng điều kiện cần và đủ để một toán tử $\ell \in \tilde{L}_{ab}$ trong bài toán (1.1), (1.2) (hoặc (1.1), (1.3)) thuộc về tập $S_{ab}(a)$ (hoặc $S_{ab}(b)$). Kết quả chính là các Chú ý 1.2.3 – 1.2.5, các Định lý 1.3.1; 1.3.4; 1.3.5; 1.3.8, và các Hệ quả 1.3.2, 1.3.6.

Chương 2. Chúng ta đưa ra các tiêu chuẩn hiệu quả để một toán tử $\ell \in \tilde{L}_{ab}$ thuộc về tập $S_{ab}(a)$ (hoặc $S_{ab}(b)$). Cụ thể ta xét mối quan hệ của các tập $S_{ab}(a)$, $S_{ab}(b)$ với tập $\tilde{S}_{ab}$. Kết quả chính là các Mệnh đề 2.2.1.1 – 2.2.1.6 và các Định lý 2.2.3; 2.2.4.

Từ những vấn đề đưa ra trong luận văn, một câu hỏi đặt ra là các kết quả trên còn đúng hay không cho phương trình vi phân hàm bậc cao hay bài toán biên nhiều điểm cho phương trình vi phân hàm. Hơn nữa đối với các bài toán trên chúng tôi còn chưa nghiên cứu tính xấp xỉ nghiệm của nó do thời gian có hạn.

Chính vì vậy thông qua các kết quả đã đạt được trong luận văn này, tác giả mong muốn được mở rộng và tiếp tục nghiên cứu các vấn đề nêu trên. Tuy nhiên, với sự hiểu biết hạn chế của bản thân, tác giả rất mong học hỏi từ sự góp ý và chỉ bảo của Quý Thầy, Cô trong và ngoài Hội đồng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Haim Brezis (2002), *Giải tích hàm lý thuyết và ứng dụng*, NXB Đại Học Quốc Gia TP Hồ Chí Minh.

Tiếng Anh

[2] E. Bravyi (2000), “A note on the Fredholm property of boundary value problems for linear functional differential equations”, *Mem. Differential Equations Math. Phys*, 20, pp.133 – 135.

[3] E. Bravyi, R. Hakl, and A. Lomtatidze, *Optimal conditions for unique solvability of the Cauchy problems for first order linear functional differential equation*, Czechoslovak Math. J. (to appear).

[4] E. Bravyi, A. Lomtatidze, *A note on the cauchy problem for first order linear differential equations with a deviating argument*, Arch Math.

[5] I. Kiguradze and B. Puza (1997), “On boundary value problems for systems of linear function differential equation”, *Czech. Math*, 47(2), pp.341 – 373.

[6] I. Kiguradze and Puza (1997), “On boundary value problems for functional differential equations”, *Mem. Differential Equations Math. Phys*, 12, pp.106 – 113.

[7] R. Hakl, A. Lomtatidze, and B. Puza (2001), “On nonnegative solutions of first order scalar functional differential equations”, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 23, pp.51 – 84.