

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

---

**Võ Đức Hiền**

**NGHIÊN CỨU DIDACTIC**  
**VỀ DẠY HỌC CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU**  
**TRONG CHỦ ĐỀ GIẢI TÍCH**  
**Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG**

Chuyên ngành: **Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán**

Mã số: **60 14 10**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ GIÁO DỤC HỌC**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

**TS. LÊ VĂN PHÚC**

Thành phố Hồ Chí Minh-2009



## **LỜI CẢM ƠN**

Trân trọng cảm ơn Lãnh đạo và các phòng hữu quan, Lãnh đạo và các giảng viên của các khoa hữu quan, các thầy cô giảng dạy chuyên ngành didactic Toán, các giáo viên người Pháp trong Hội đồng Bảo vệ Đề cương Luận văn, Lãnh đạo và các chuyên viên của Phòng KHCN&SDH trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, Lãnh đạo và các phòng chức năng, các trường Trung học phổ thông hữu quan Sở Giáo Dục&Đào Tạo tỉnh Đồng Nai.

Đặc biệt, trân trọng cảm ơn TS. Lê Văn Phúc, thầy hướng dẫn khoa học luận văn.

Tôi cũng luôn nhớ các bạn bè và các đồng nghiệp thân thiết./.

**Võ Đức Hiền**

## MỞ ĐẦU

### 1. Ghi nhận ban đầu và câu hỏi xuất phát

Bài toán tối ưu liên quan đến cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Bài toán tối ưu xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh: học sinh giỏi, đại học, liên quan đến yêu cầu của thực tế.

Bài toán tối ưu hình thành như thế nào? Các quan niệm, các chiến lược giải liên quan đến tri thức trong sách giáo khoa phổ thông như thế nào? Cách trình bày của sách giáo khoa có giúp học sinh tiếp cận được với đặc trưng của bài toán tối ưu hay không? Có thể có một tiểu đồ án didactic không?

### 2. Mục đích nghiên cứu và lý thuyết tham chiếu

Mục đích nghiên cứu của luận văn là tìm câu trả lời cho câu hỏi đã đặt ra.

Để đạt được mục tiêu trên chúng tôi vận dụng các yếu tố công cụ của lý thuyết didactic toán. Cụ thể đó là các khái niệm của lý thuyết nhân chủng học: chuyển đổi didactic, quan hệ thể chế, quan hệ cá nhân đối với tri thức, tổ chức toán học; của lý thuyết tình huống: hợp đồng didactic.

Việc nghiên cứu bài toán tối ưu ở cấp độ tri thức khoa học được đặt trên cơ sở của một phân tích giáo trình đại học.

Đề tài luận văn yêu cầu nghiên cứu trong chủ đề Giải tích. Tuy nhiên, thực tế ở trường phổ thông, các bài toán tối ưu còn được học sinh nghiên cứu bằng những công cụ khác: Đại số, Hình học, Tọa độ.

Vì vậy chúng tôi xin được phép mở rộng chủ đề Giải tích sang cả các lĩnh vực: Đại số, Hình học, Tọa độ.

Trong phạm vi lý thuyết đã nêu, chúng tôi trình bày lại câu hỏi nghiên cứu như sau:

**Q1.** Bài toán tối ưu được hình thành như thế nào? Bài toán tối ưu xuất hiện trong những kiểu tình huống nào? Những đối tượng toán học, cách giải nào góp phần làm nảy sinh bài toán tối ưu?

**Q2.** Vết tham chiếu của bài toán tối ưu ở đại học thể hiện trong sách giáo khoa Toán phổ thông như thế nào? Việc nghiên cứu bài toán tối ưu ở phổ thông giúp việc giải quyết bài toán tối ưu ở đại học như thế nào?

**Q3.** Bài toán tối ưu được trình bày như thế nào trong sách giáo khoa phổ thông? Bằng những cách giải nào?

**Q4.** Những qui tắc nào của hợp đồng didactic được hình thành giữa giáo viên và học sinh trong quá trình dạy học bài toán tối ưu?

**Q5.** Những dạng bài toán tối ưu nào được nghiên cứu ở phổ thông?

**Q6.** Cách trình bày của sách giáo khoa có ảnh hưởng gì đến việc học tập bài toán tối ưu của học sinh ở trường phổ thông? Có giúp học sinh tiếp cận được với đặc trưng của bài toán tối ưu hay không? Có thể có một tiêu đề án didactic hay không?

### **3. Phương pháp nghiên cứu**

Để đạt được mục đích nghiên cứu chúng tôi xác định phương pháp nghiên cứu theo trình tự sơ đồ sau:

NGHIÊN CỨU LỊCH SỬ, TOÁN GIẢI TÍCH ĐẠI HỌC



NGHIÊN CỨU SÁCH GIÁO KHOA TOÁN PHỔ THÔNG

(Toán Tiểu học, Số học và Đại số Trung học cơ sở, Đại số và Giải tích 11, Giải tích 12, Hình học 12, 11, 10, Đại số 10, Hình học Trung học cơ sở)



NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM

(Quan hệ cá nhân của học sinh)



NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM TIÊU ĐỀ ÁN DẠY HỌC

Sơ đồ có thể được diễn đạt như sau:

-Nghiên cứu lịch sử của bài toán và bài toán trong giáo trình đại học nhằm tìm hiểu đặc trưng của bài toán: tìm hiểu lịch sử từ nguồn tài liệu <http://chronomath.com/> và Toán học cao cấp tập ba Phép tính giải tích nhiều biến số của Nguyễn Đình Trí ( Chủ biên ).

-Nghiên cứu sách giáo khoa Toán phổ thông nhằm tìm hiểu quan hệ thể chế đối với bài toán tối ưu. Chúng tôi cũng tìm hiểu hiệu quả của công cụ giải tích đối với bài toán đã được giải bằng các công cụ khác.

-Nghiên cứu thực nghiệm: qua kết quả nghiên cứu sách giáo khoa chúng tôi sẽ đặt các giả thuyết liên quan và từ đó việc thực nghiệm được tiến hành trong phạm vi phù hợp, được lựa chọn cụ thể.

Từ kết quả kiểm chứng giả thuyết chúng tôi có thể tiến hành thực nghiệm thứ hai, tiêu đề án dạy học.

#### **4.Cấu trúc luận văn**

Luận văn gồm có phần mở đầu, phần kết luận và ba chương.

Phần mở đầu trình bày ghi nhận ban đầu, câu hỏi xuất phát, mục đích nghiên cứu, lý thuyết tham chiếu, phương pháp nghiên cứu, cấu trúc luận văn.

Chương 1: Bài toán tối ưu ở cấp độ tri thức khoa học

Chương 2: Bài toán tối ưu ở cấp độ tri thức cần giảng dạy

Chương 3: Thực nghiệm

Phần kết luận là những kết quả đạt được qua các chương 1, 2, 3 và hướng nghiên cứu khác mở ra từ luận văn.

# Chương 1: BÀI TOÁN TỐI ƯU Ở CẤP ĐỘ TRI THỨC KHOA HỌC

## Mục tiêu chương

Chương 1 nhằm vào câu hỏi Q1: nghiên cứu lịch sử hình thành bài toán tối ưu, kiểu tình huống, cách giải bài toán để làm cơ sở tham chiếu.

### 1.1. Vài nét lịch sử về bài toán

Phần trình bày dựa vào tham khảo nguồn tài liệu: <http://www.chronomath.com/>

Jacques Bernoulli, cùng với người thân là Jean, đã phát biểu và giải quyết những bài toán về cơ học bằng phương trình vi phân với ràng buộc tối ưu như việc nghiên cứu cực trị trên đường cong hay mặt và dẫn đến những vấn đề về trắc địa: đường cong ngắn nhất.

#### 1.1.1. Bài toán sợi dây xích (1691)

Xét một sợi dây xích đồng chất, linh động, được treo cố định ở hai đầu A và B của nó. Ở vị trí cân bằng, sợi dây xích thuộc một mặt phẳng thẳng đứng. Cần tìm đường cong biểu diễn sợi dây xích.

#### Xuất phát của bài toán:

Từ trước ngành Điện lực, Galilée là người đầu tiên quan tâm đến sợi dây xích, ông dùng nó như một cung parabol.

Từ “Sợi dây xích” xuất phát từ Huygens, ông đã nghiên cứu nó trong cơ học. Độ cong cánh buồm chịu sức gió được nghiên cứu bởi Bernoulli, nó cũng tương ứng với sợi dây xích.

Bằng sự trả lời cho thách đố của Jacques Bernoulli, Jean Bernoulli, Huygens và Leibniz đã tìm được bản chất của sợi dây xích vào 1691: đường cong Cosinus hyperbolique (Giống Parabol):

$$Y = k(e^{X/k} + e^{-X/k}) / 2 = k \cosh(X / k)$$

#### Cách giải: phương trình vi phân

#### Ứng dụng:

Sợi dây xích treo ở hai đầu cho phép tính khoảng cách từ cung đến dây cung nhằm làm cho sức căng ở những điểm treo tốt nhất.

Kết quả này được ứng dụng trong đường dây cáp tải điện, xe lửa điện, cáp cầu treo.

### 1.1.2. Bài toán thời gian bé nhất và cung cycloide (1696)

Cho hai điểm A và B với các độ cao khác nhau, không cùng nằm trên một phương thẳng đứng. Cần tìm đường cong cho phép sự lăn xuống dốc nhanh nhất từ A đến B của một chất điểm M, có khối lượng m, chỉ chịu tác dụng của trọng lực.

#### **Xuất phát của bài toán:**

Nửa thế kỷ trước Galilée trong nghiên cứu về chuyển động trên mặt phẳng nghiêng đã tìm hiểu bài toán này và đã nghĩ rằng nghiệm là một cung tròn.

Bài toán cũng đã được giải quyết bởi Leibniz, Newton, L' Hopital bằng sự trả lời cho thách đố của Jean; Jacques đã gây sự tranh cãi bằng phép tính biến phân; Euler và đặc biệt Lagrange nhờ vào cơ học phân tích đã có sự chọn lọc về bài toán này.

**Cách giải:** Sử dụng phương trình Euler, nguyên lý bảo toàn năng lượng chúng ta được nghiệm là một cung cycloide.

**Ứng dụng:** xây dựng cầu thoát hiểm ( Tòa nhà, máy bay), ván trượt, trò chơi nhào lộn.

### 1.1.3. Tối ưu hóa diện tích với một chu vi đã cho (1698)

Trong tất cả các đường cong đóng có chu vi đã cho, đường cong nào tạo diện tích lớn nhất.

#### **Xuất phát của bài toán:**

Vào thế kỷ thứ 9 trước chúa giáng sinh, Hoàng hậu Elissa của Tyr ( Liban, Israel, Syrie) đã đến Byrsa ( Xứ da bò) ở bắc Phi ( Gần Tunis) tị nạn. Bà đã đề nghị xin nơi trú ẩn ( Thành phố Carthage sau này); người ta chỉ cho bà vùng đất mà da bò có thể bao quanh. Bà cắt nhỏ da bò và nối lại, được sợi dây dài gần 4 km.

**Cách giải:** Jacques Bernoulli đã chứng minh được bằng phép tính biến phân ( Phương trình Euler-Lagrange) rằng đường cong chứa diện tích lớn nhất là đường tròn.

#### **Nhận xét:**

-Bài toán tối ưu là bài toán thực tế, tìm điều kiện cho một đối tượng để một đại lượng cực trị.

Bài toán xuất phát từ việc giải quyết bài toán cơ học, trắc địa, hình học trong việc tìm dạng của đường cong để đạt được tối ưu về sức căng, thời gian, diện tích.

-Cách giải bài toán: phương trình vi phân.

-Ứng dụng của bài toán: đường dây cáp tải điện, xe lửa điện, cáp cầu treo-cầu thoát hiểm, ván trượt, trò chơi nhào lộn-tối ưu hóa diện tích với một chu vi đã cho.

## 1.2.Bài toán trong giáo trình toán đại học

Chúng tôi tìm hiểu từ giáo trình Toán học cao cấp tập ba Phép tính giải tích nhiều biến số, nhà xuất bản giáo dục của Nguyễn Đình Trí (Chủ biên).

### 1.2.1.Cực trị của hàm số nhiều biến số:

+**Định nghĩa:** tài liệu định nghĩa cực trị của hàm số tại một điểm  $M_0$  trên miền D bằng dấu của  $f(M)-f(M_0)$ .

Các kí hiệu sử dụng:

$$p = f'_x(M), q = f'_y(M), r = f''_{xx}(M), s = f''_{xy}(M), t = f''_{yy}(M).$$

+**Định lý 1.7:** điều kiện cần của cực trị tại điểm  $M_0$  của hàm số đối với p và q.

+Điều kiện cần cho phép thu hẹp việc tìm cực trị tại những điểm ở đó cả p và q đều triệt tiêu hoặc những điểm ở đó p hoặc q không tồn tại. ( Những điểm tới hạn)

+**Định lý 1.8:** dấu hiệu nhận biết cực trị tại một điểm  $M_0$  của hàm số bằng dấu của  $s^2 - rt$ .

Tài liệu cũng chú thích phạm vi xem xét và có một ví dụ tìm cực trị.

### 1.2.2.Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số nhiều biến số trong một miền đóng, bị chặn

Tài liệu nêu điều kiện đủ để hàm số đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong một miền, cách tìm chúng và ví dụ.

### 1.2.3.Cực trị có điều kiện

+**Định nghĩa:** các biến số của hàm số bị ràng buộc bằng một hệ thức.

+**Định lý về điều kiện cần có của cực trị có điều kiện:** đối với các đạo hàm riêng cấp một theo các biến số của hàm số và của hệ thức điều kiện.

+**Chú thích 1:**

Tài liệu nêu khái niệm về nhân tử Lagrange và phương pháp nhân tử Lagrange để tìm điểm cực trị có điều kiện của hàm số.

+**Chú thích 2:**

Định lý hoặc phương pháp nhân tử Lagrange giúp thu hẹp việc tìm cực trị có điều kiện của hàm số tại những điểm tới hạn; việc xem xét những điểm ấy có thực sự là điểm cực trị không, ví dụ, mở rộng cho hàm số  $n$  biến số ( $n \geq 3$ ).

#### 1.2.4. Các kiểu nhiệm vụ ( Tham khảo sách bài tập của cùng tác giả)

+**Kiểu nhiệm vụ T1:** Tìm cực trị của hàm số: 10 bài.

Ví dụ: bài 23i, trang 14: “ Tìm cực trị của hàm số  $y = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$  ” .

\*Kỹ thuật:

.Tìm các điểm tới hạn

.Xét dấu  $s^2 - rt$  hoặc phải xét thêm dấu của  $z(M) - z(M_0)$  ( Trường hợp  $s^2 - rt = 0$  )

.Kết luận.

+**Kiểu nhiệm vụ T2:** Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: 7 bài trang 14.

Ví dụ: bài 24c: “ Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $z = x^2 y(4 - x - y)$  trong miền đóng  $D$  giới hạn bởi các đường thẳng  $x=0, y=0, x+y=6$  ”.

\*Kỹ thuật:

.Tìm các điểm tới hạn

.So sánh giá trị của hàm tại các điểm tới hạn với các cực trị của hàm trên biên của miền  $D$

.Kết luận.

+**Kiểu nhiệm vụ T3:** Tìm cực trị có điều kiện: 4 bài, trang 14, 15.

Ví dụ: bài 25b: “ Tìm cực trị của hàm số  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  với điều kiện

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} ”.$$

\*Kỹ thuật:

.Dùng phương pháp nhân tử Lagrange biến bài toán có điều kiện về bài toán tìm cực trị bình thường( T1) và tìm điểm tới hạn hoặc giải hệ phương trình 1.24 và  $g(x, y) = 0$  và xét dấu của  $f(M) - f(M_0)$

.Kết luận.

**+Kiểu nhiệm vụ T4:** Tìm điều kiện để một đại lượng đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất:  
1 bài, trang 15.

“ Cho hình cầu bán kính R. Hình hộp chữ nhật nào nội tiếp trong hình cầu ấy có thể tích lớn nhất ”.

**\*Kỹ thuật:**

Xét hình hộp chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ nội tiếp trong mặt cầu

Gọi  $(x,y,z)$  là tọa độ của đỉnh nằm trong góc phần tám thứ nhất. Chúng ta phải tìm cực trị của hàm số  $f(x,y,z)=xyz$  với điều kiện

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

.Dùng T3

.Kết luận.

**Nhận xét:**

-Bài toán của T4 là kiểu của bài toán tối ưu trong lịch sử với tình huống thể tích hình học, được giải bằng công cụ giải tích: lập hàm số, tính đạo hàm.

-Các kiểu nhiệm vụ T1, T2, T3 là công cụ để giải bài toán T4

-Việc lập hàm số hoặc xử lý điểm tới hạn có thể sẽ là những khó khăn đối với sinh viên.

## **Kết luận chương 1**

-Kiểu của bài toán tối ưu:

Đó là bài toán thực tế, tìm điều kiện cho một đối tượng để một đại lượng đạt tối ưu (T4).

Cách trình bày nội dung của giáo trình đại học đi từ tri thức cực trị đến bài toán tối ưu như lịch sử.

-Phạm vi tác động, bài toán có liên quan:

Bài toán T4 xuất hiện trong các phạm vi: cơ học, trắc địa, hình học.

Bài toán thuộc các tình huống: sức căng, thời gian, chiều dài, diện tích, thể tích.

-Các đối tượng có liên quan đến bài toán: cực trị của hàm số, lập hàm số và tính đạo hàm, phương trình vi phân, Cơ học, Hình học.

-Cách giải bài toán:

Bài toán được giải bằng công cụ giải tích: lập hàm số, tính đạo hàm. ( Có sự chuyển đổi sự phạm từ cách giải bằng phương trình vi phân trong lịch sử về cách giải bằng lập hàm số và tính đạo hàm trong chương trình toán Giải tích của bậc đại học)

-Dự đoán ban đầu:

Sinh viên có thể gặp khó khăn trong việc xử lý điểm tới hạn để tìm cực trị của hàm số.

Chúng tôi nghĩ câu hỏi Q1 đã được trình bày.

## **Chương 2: BÀI TOÁN Ở CẤP ĐỘ TRI THỨC CẦN GIẢNG DẠY**

### **Mục tiêu chương**

Nghiên cứu bài toán tối ưu trong sách giáo khoa Toán phổ thông để tiếp tục tìm hiểu các câu hỏi đã đặt ra.

Trước hết, chúng tôi sẽ nghiên cứu bài toán trong sách giáo khoa toán Đại số và Giải tích 11, Giải tích 12 hiện hành, ban cơ bản.

Kết quả của chương 1 sẽ là tham chiếu cho sự phân tích của chương này.

### **2.1. Vài nét về bài toán tối ưu ở Tiểu học và Trung học cơ sở**

**2.1.1. Bậc tiểu học** ( Sách giáo khoa Toán 1, 2, 3 và Sách bài tập Toán 4, 5 hiện hành)

Có yêu cầu tìm số lớn nhất, số bé nhất khi học sinh học các tập số.

**2.1.2. Cấp Trung học cơ sở** ( Sách bài tập Số học, Đại số; hiện hành)

\*Lớp 6: phân ước số chung lớn nhất, bội số chung nhỏ nhất có nhiều bài toán tìm giá trị lớn nhất, bé nhất.

\*Từ lớp 7 đến lớp 9 bài toán cực trị xuất hiện như sau:

+Lớp 7: Dùng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối để giải: 3 bài [32, tập 1, tr8, 23, bài 32, 33, 141]

+Lớp 8: Dùng tổng bình phương: 2 bài [33, tập 1, tr30, bài 67a,b], nghiệm nguyên của bất phương trình: 2 bài [33, tập 2, tr47, bài 59,60]

+Lớp 9: Bất đẳng thức Cô-si: 2 bài [34, tập 1, tr13, 18, bài 67, 95], tổng bình phương: 3 bài [34, tập 1, tr15, 19, bài 82, 103; tập 2, tr148, bài 7]

Tổng cộng: 12 bài; trong đó dùng bất đẳng thức để giải: 5 bài

### **2.2. Bài toán tối ưu trong Đại số và Giải tích 11**

#### **2.2.1. Đại số và Giải tích 11( ĐS&GT11)**

+**Lý thuyết:**

Bài Hàm số lượng giác.

+**Bài tập:**

**Kiểu nhiệm vụ T2:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: 4 bài ( *Kỹ thuật lượng giác*): 2 bài 8a,b trang 18, 2 bài 3a,b trang 41.

Ví dụ: bài 8b: “ Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3 - 2\sin x$  ”.

**Kỹ thuật:**

Sử dụng miền giá trị của  $\sin x$

**2.2.2. Bài tập Đại số và Giải tích 11 ( BT ĐS&GT11)**

**Kiểu nhiệm vụ T2**

Gồm 7 bài ( *Kỹ thuật lượng giác*): bài 1.3a,b,c,d trang 12; bài 4a,b trang 36, bài 5 trang 221

Ví dụ: Bài 5 trang 221:

“ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x + 1 ”$$

**\*Kỹ thuật:**

.Biến đổi để được  $y = 2\sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$

.Kết luận

**Bảng 2.1. Thông Kê Đại số và Giải Tích 11**

| Tài liệu   | Kiểu nhiệm vụ | Kỹ thuật Lượng giác | Tổng Số bài |
|------------|---------------|---------------------|-------------|
| ĐS&GT11    | T2            | 4                   | 4           |
| BT ĐS&GT11 | T2            | 7                   | 7           |
| Cộng       | T2            | 11                  | 11          |

**2.3. Bài toán trong Giải tích 12**

**2.3.1. Giải tích 12 ( GT12)**

**2.3.1.1. Cực trị của hàm số ( Trang 13)**

**\*Lý thuyết**

+**Định nghĩa:** tài liệu định nghĩa cực trị tại điểm  $x_0$  của hàm số một biến số trên một khoảng theo kiểu của giáo trình đại học: theo dấu của  $f(x) - f(x_0)$ .

Điều kiện cần của cực trị.

+**Hai qui tắc tìm cực trị.**

## Qui tắc I

1. Tìm tập xác định
2. Tính  $f'(x)$ . Tìm các điểm tại đó  $f'(x) = 0$  hoặc  $f'(x)$  không xác định.
3. Lập bảng biến thiên
4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

## Qui tắc II

1. Tìm tập xác định.
2. Tính  $f'(x)$ . Giải phương trình  $f'(x) = 0$  và kí hiệu  $x_i (i = 1, 2, \dots)$  là các nghiệm của nó.
3. Tính  $f''(x)$  và  $f''(x_i)$ .
4. Dựa vào dấu của  $f''(x_i)$  suy ra cực trị của điểm  $x_i$ .

Ví dụ.

### Nhận xét:

Cách trình bày tri thức cực trị ở phổ thông giống như giáo trình Đại học: từ định nghĩa đến điều kiện cần, đến dấu hiệu nhận biết cực trị và ví dụ.

Qui tắc I: vận dụng định nghĩa.

Qui tắc II: có thể giải thích từ giáo trình Đại học.

Xét  $s^2 - rt$ .

Ở phổ thông:  $s = t = 0$

Vậy  $s^2 - rt = 0$  (Trường hợp nghi ngờ)

Chúng ta phải xét dấu của  $\Delta = f(M) - f(M_0)$ .

Theo công thức Taylor:  $\Delta$  cùng dấu với  $g(h, k) = rh^2 + 2shk + tk^2$ . [35, tr26]

$f''(x_0) > 0$ ; tức là  $r > 0$ .

Vậy  $g(h, k) = rh^2 > 0$ .

Vậy  $f(M) > f(M_0)$ :  $x_0$  là điểm cực tiểu.

Tương tự,  $f''(x_0) < 0$ :  $r < 0$

$f(M) < f(M_0)$ :  $x_0$  là điểm cực đại.

Đây là vết tham chiếu của bài toán trong giáo trình Đại học

**\*Bài tập:** ( Tham khảo tài liệu Giải bài tập Giải tích, chương trình cơ bản của Dương Đức Kim, Đỗ Duy Đồng )

**Kiểu nhiệm vụ T1:** Tìm các điểm cực trị của hàm số: 9 bài ( *Kỹ thuật giải tích* ): bài 1a,b,c,d,e trang 18, bài 2a,b,c,d trang 18.

Ví dụ: bài 2b:  $y = \sin 2x - x$ .

**Kỹ thuật:**

.Tìm tập xác định

.Tính đạo hàm cấp 1, tìm các điểm  $x_i$  sao cho  $f'(x_i) = 0$

.Tính đạo hàm cấp 2 tại  $x_i$  hoặc xét dấu  $f'(x)$

.Kết luận.

**Kiểu nhiệm vụ T4':** Tìm điều kiện để đạt cực trị: 2 bài ( *Kỹ thuật giải tích*): 5 trang 18 và 6 trang 18.

Ví dụ: bài 6: “ Xác định giá trị của tham số m để hàm số

$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m} \text{ đạt cực đại tại } x=2 ”.$$

**Kỹ thuật:**

.Tìm tập xác định

.Tính đạo hàm cấp 1

.Lập bảng biến thiên

.Sử dụng điều kiện hàm số đạt cực đại tại  $x=2$  để tìm m.

**Kiểu nhiệm vụ T5:** Chứng minh hàm số không có đạo hàm tại một điểm nhưng vẫn đạt cực trị tại điểm đó: 1 bài ( *Kỹ thuật giải tích*): 3 trang 18.

**Kiểu nhiệm vụ T6:** Chứng minh với mọi tham số m, hàm số  $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$  luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu: 1 bài ( *Kỹ thuật giải tích*): bài 4 trang 18.

**Nhận xét:**

Chúng tôi nghĩ học sinh có thể có khó khăn tìm cực trị.

Bước thứ hai của qui tắc 1 là “ Tính  $f'(x)$ . Tìm các điểm tại đó  $f'(x) = 0$  hoặc  $f'(x)$  không xác định”;

Bài toán cực trị có thể là kiểu nhiệm vụ T5: “ Chứng minh hàm số không có đạo hàm tại một điểm nhưng vẫn đạt cực trị tại điểm đó. ( Bài 3 trang 18).

### 2.3.1.2 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số (Trang 19)

#### \*Lý thuyết

##### .Định nghĩa

.Ví dụ tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên một khoảng.

.Cách tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn.

**Định lý:** điều kiện đủ để hàm số có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên một đoạn.

Ví dụ, qui tắc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

##### **Nhận xét:**

.Cách trình bày của sách giáo khoa, qui tắc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số liên tục trên đoạn giống giáo trình đại học- bài toán cực trị ở phổ thông là bài toán tìm cực trị trên biên của miền D.

.Có sự hiện diện của bài toán T4 giải bằng cách lập hàm số và tính đạo hàm ( Ví dụ 3 trang 22 ).

Đây là vết tham chiếu của bài toán trong giáo trình đại học.

#### \*Bài tập

**kiểu nhiệm vụ T2:** Tính giá trị lớn nhất, nhỏ nhất: 12 bài ( *Kỹ thuật giải tích* ): bài 1a,b,c,d trang 23, bài 4a,b trang 24, bài 5a,b trang 24, bài 8a,b,c,d trang 147.

Ví dụ: 4a trang 24: “ Tính giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{4}{1+x^2}$  ”.

##### **Kỹ thuật:**

.Tính đạo hàm cấp 1

.Lập bảng biến thiên

.Kết luận.

**Kiểu nhiệm vụ T4:** 4 bài ( *3 bài Kỹ thuật giải tích, 1 bài kỹ thuật đại số* ): 2, 3 trang 24, 11c trang 46 ( *Kỹ thuật đại số* ), 5 trang 121.

Ví dụ: 5 trang 121:

Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox. Đặt góc POM=

$$\alpha, OM=R \left( 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, R>0 \right).$$

Gọi  $v$  là khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh trục Ox.

1) Tính thể tích của  $v$  theo  $\alpha$  và R.

2) Tìm  $\alpha$  sao cho thể tích của  $v$  lớn nhất.

### **Kỹ thuật:**

.Lập hàm số

.Xét dấu đạo hàm.

### **Kiểu nhiệm vụ T4'**

6 bài ( 6 bài kỹ thuật giải tích ): bài 8a trang 44, bài 5b,ii trang 45, bài 7c, 8b, 10c trang 46, bài 5a trang 146.

### **Nhận xét:**

-Có bài toán T4 giải bằng cách lập hàm số và tính đạo hàm  
( Bài 5 trang 121 ).

-Học sinh có thể gặp khó khăn trong việc lập hàm số hoặc tìm cực trị; yêu cầu lập hàm số khá phong phú; học sinh không có khuôn mẫu thực hiện.

### **2.3.2.Bài tập Giải tích 12 ( BT GT12 )**

#### **Kiểu nhiệm vụ T1**

16 bài ( Kỹ thuật giải tích ): bài 1.8a,b,c,d,e; bài 1.9a,b,c,d; bài 1.10a,b,c,d; bài 1.11a,b,c trang 11.

#### **Kiểu nhiệm vụ T4**

4 bài ( Kỹ thuật giải tích ): bài 1.17, 1.18, 1.19, 1.20 trang 15.

#### **Kiểu nhiệm vụ T4'**

2 bài ( Kỹ thuật giải tích ): bài 1.12 trang 12, 1.33a trang 23.

#### **Kiểu nhiệm vụ T5**

1 bài ( Kỹ thuật giải tích ): bài 1.13 trang 12

#### **Kiểu nhiệm vụ T7: Xác định m để hàm số không có cực trị**

1 bài ( Kỹ thuật giải tích ): bài 1.14 trang 12

#### **Kiểu nhiệm vụ T2**

16 bài: bài 1.15a,b,c,d,e,g; bài 1.16a,b,c,d trang 15; bài 2.22 trang 92 (*Kỹ thuật giải tích*); bài 2.41 trang 108 ( *Kỹ thuật bất đẳng thức* ); bài 2.52a,b,c,d trang 110 ( *Kỹ thuật đại số* ).

**Bảng 2.2.Thống Kê Giải Tích 12**

| Tài liệu | Kiểu nhiệm vụ | Kỹ thuật Bất đẳng thức | Kỹ thuật Đại số | Kỹ thuật Giải tích | Tổng Số bài |
|----------|---------------|------------------------|-----------------|--------------------|-------------|
| GT12     | T1            |                        |                 | 9                  | 9           |
|          | T2            |                        |                 | 12                 | 12          |
|          | T4            |                        | 1               | 3                  | 4           |
|          | T4'           |                        |                 | 8                  | 8           |
|          | T5            |                        |                 | 1                  | 1           |
|          | T6            |                        |                 | 1                  | 1           |
| BT       | T1            |                        |                 | 16                 | 16          |
| GT12     | T2            | 1                      | 4               | 11                 | 16          |
|          | T4            |                        |                 | 4                  | 4           |
|          | T4'           |                        |                 | 2                  | 2           |
|          | T5            |                        |                 | 1                  | 1           |
|          | T7            |                        |                 | 1                  | 1           |
| Cộng     | T1            |                        |                 | 25                 | 25          |
|          | T2            | 1                      | 4               | 23                 | 28          |
|          | T4            |                        | 1               | 7                  | 8           |
|          | T4'           |                        |                 | 10                 | 10          |
|          | T5            |                        |                 | 2                  | 2           |
|          | T6            |                        |                 | 1                  | 1           |
|          | T7            |                        |                 | 1                  | 1           |

**Nhận xét về kỹ thuật giải tích:**

Trong số các bài toán được giải bằng kỹ thuật giải tích trên chỉ có 7 bài được giải bằng cách: lập hàm số và xét dấu đạo hàm.

Đó chính là những bài toán tối ưu T4. Cụ thể:

GT 12: Bài 2, 3 trang 24 ( Phạm vi hình học )

Bài 5 trang 121 ( Ứng dụng tích phân trong Hình học )

BTGT 12: Bài 1.17, 1.18 trang 15 ( Số học )

Bài 1.19, 1.20 trang 15 ( Vật lý, Hình học )

### Bảng 2.3.Thống kê các dạng toán

| Lớp  | Tài liệu            | Kỹ thuật<br>Bất đẳng thức | Kỹ thuật<br>Đại số                                                                   | Kỹ thuật Giải tích                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------|---------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 11   | ĐS&GT11             | /                         | /                                                                                    | /                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 12   | GT12<br><br>BT.GT12 | /                         | T4: 1 bài;<br>tổng lũy<br>thừa chắn<br><br>T2: 4 bài;<br>giải bất<br>phương<br>trình | T1: đa thức, hữu tỉ, vô<br>tỉ, lượng giác<br>T2: đa thức, hữu tỉ, vô<br>tỉ, tuyệt đối, $\ln x$ , $e^x$ ,<br>lượng giác<br>T4, T4': đa thức, hữu<br>tỉ, lượng giác<br>T5: $\sqrt{x}$ /<br>T6: đa thức<br>T1, T2: đa thức, hữu<br>tỉ, vô tỉ, lượng giác<br>T4, T4': đa thức, vô tỉ<br>T5: đa thức, lượng<br>giác<br>T7: hữu tỉ |
| Cộng |                     | 1 bài                     | 5 bài                                                                                | 70 bài ( T4: 7 bài )                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

**Bảng 2.4. Thông kê bài toán tối ưu T4 được giải bằng kỹ thuật giải tích**

| Tài liệu | Số bài                                                                                                       | Tên bài             | Nội dung                                                                  |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| GT 12    | 2                                                                                                            | Bài 2, 3 trang 24   | Tìm hình chữ nhật để diện tích lớn nhất hoặc chu vi nhỏ nhất              |
|          | 1                                                                                                            | 5 trang 121         | Tìm $\alpha$ để thể tích lớn nhất                                         |
| BT       | 2                                                                                                            | 1.17, 1.18 trang 15 | Tìm các số: tích chúng cực trị                                            |
| GT 12    | 2                                                                                                            | 1.19, 1.20 trang 15 | Tính thời điểm vận tốc lớn nhất, tìm tam giác vuông có diện tích lớn nhất |
| Nhận xét | ( Bài toán T4: 7 bài; với các tình huống: diện tích, chu vi, thể tích, tích tối ưu trong Số học và vận tốc ) |                     |                                                                           |

**Công nghệ được sử dụng trong kỹ thuật giải tích**

Lập hàm số, đạo hàm, ứng dụng tích phân, lượng giác, tìm cực trị, bảng biến thiên.

Ngoài phạm vi Giải tích còn có các bài toán tối ưu trong phạm vi khác: Hình học 12, Hình học 11, Đại số và Hình học 10; như vậy, kỹ thuật giải tích có ý nghĩa gì đối với các bài toán này? Chúng ta tiếp tục xem xét những bài toán này.

**2.4. Bài toán ngoài phạm vi Giải tích****2.4.1. Hình học 12****2.4.1.1. Hình học 12 ( HH12 )****+ Lý thuyết**

Tài liệu trình bày ba chương: chương I Khối đa diện, chương II Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu, chương III Phương pháp tọa độ trong không gian.

**+ Bài tập** ( Tham khảo Giải bài tập 12 chương trình cơ bản của Dương Đức Kim, Đỗ Duy Đồng )

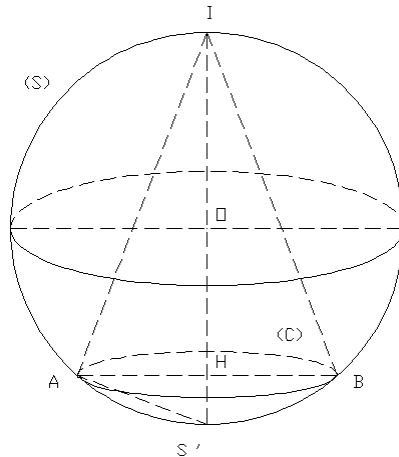
**Kiểu nhiệm vụ T4**

Ôn tập cuối năm chúng tôi tìm thấy 2 bài: 3 trang 99 ( *Kỹ thuật Bất đẳng thức* ), 4 trang 99 ( *Kỹ thuật tọa độ* )

Bài 3:

Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính R. Hình nón có đường tròn đáy (C) và đỉnh I đều thuộc (S) được gọi là hình nón nội tiếp mặt cầu (S). Gọi h là chiều cao của hình nón đó.

- Tính thể tích của hình nón theo r và h
- Xác định h để thể tích của hình nón là lớn nhất



Hình 2.1

**Kỹ thuật ( Hình 2.1 )**

.Để tìm được  $V_{nón} = \frac{1}{3} \pi h^2 (2r - h)$

.  $V_{nón} = \frac{1}{6} \pi (4r - 2h).h.h$  cực đại khi  $(4r - 2h).h.h$  cực đại

.Tổng của 3 thành phần  $4r - 2h + h + h = 4r$

.Nên tích có giá trị lớn nhất khi  $4r - 2h = h \Rightarrow h = \frac{4r}{3}$

#### 2.4.1.2. Bài tập Hình học 12 ( BT HH12 )

**+Kiểu nhiệm vụ T4:**

4 bài: 2.17 trang 53 ( *Kỹ thuật hình học* ), 2.32 trang 56 ( *Kỹ thuật hình học* ), 3.46 trang 115 ( *Kỹ thuật tọa độ* ), bài 3 ôn tập cuối năm, trang 143 ( *Kỹ thuật giải tích* )

Bài 2.32:

Cho đường tròn tâm O bán kính  $r'$ . Xét hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, S và A cố định,  $SA = h$  cho trước và có đáy ABCD là một tứ giác tùy ý nội tiếp đường tròn đã cho, trong đó các đường chéo AC và BD luôn luôn vuông góc với nhau.

- 

AC.BD lớn nhất khi và chỉ khi  $AC = BD = 2r'$ .

| Tài liệu | Kiểu nhiệm vụ | Kỹ thuật bắt đẳng thức | Kỹ thuật hình học | Kỹ thuật tọa độ | Kỹ thuật giải tích | Tổng số bài |
|----------|---------------|------------------------|-------------------|-----------------|--------------------|-------------|
| HH 12    | T4            | 1                      |                   | 1               |                    | 2           |
| BTHH12   | T4            |                        | 2                 | 1               | 1                  | 4           |
| Cộng     | T4            | 1                      | 2                 | 2               | 1                  | 6           |

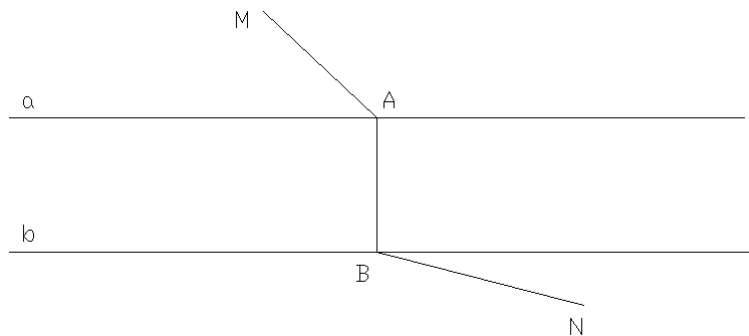
## +Lý thuyết

Sách trình bày ba chương: chương I Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng, chương II Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song, chương III Vectơ trong không gian. Quan hệ vuông góc trong không gian.

### +Bài tập

Cuối chương I, *Bài đọc thêm* Áp dụng phép biến hình để giải toán trang 37, tài liệu giới thiệu 7 bài toán; trong đó có hai bài liên quan đến tối ưu.

**\*Bài toán 1 ( Phép tịnh tiến ):** Hai điểm M, N của hai thành phố nằm ở hai phía của một con sông rộng có hai bờ a, b song song với nhau. M nằm phía bờ a, N nằm phía bờ b. Hãy tìm vị trí A nằm trên bờ a, B nằm trên bờ b để xây một chiếc cầu AB nối hai bờ sông đó sao cho AB vuông góc với hai bờ sông và tổng các khoảng cách MA+BN ngắn nhất.



Hình 2.3

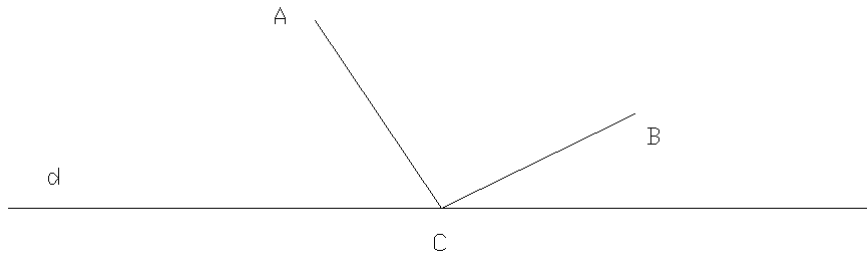
### **Bài giải:** ( Hình 2.3 )

Lấy các điểm C,D tương ứng thuộc a, b sao cho CD vuông góc với a.

Phép tịnh tiến theo  $\overrightarrow{CD}$  biến A thành B, M thành  $M'$ .

Khi đó,  $MA+BN$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow M'B+BN$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow M',B,N$  thẳng hàng

**\*Bài toán 2 ( Phép đối xứng trục ):** Trên một vùng đồng bằng có hai khu đô thị A và B nằm cùng về một phía đối với con đường sắt d (Giả sử con đường đó thẳng ). Hãy tìm một vị trí C trên d để xây dựng một nhà ga sao cho tổng các khoảng cách từ C đến trung tâm hai đô thị đó là ngắn nhất.



Hình 2.4

**Bài giải:** ( Hình 2.4 )

Gọi  $A'$  là ảnh của A qua phép đối xứng trục d.

Khi đó,  $AC+CB$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow A'C+CB$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow B, C, A'$  thẳng hàng

#### 2.4.2.2. Bài tập Hình học 11 ( BT HH11)

##### +Kiểu nhiệm vụ T4

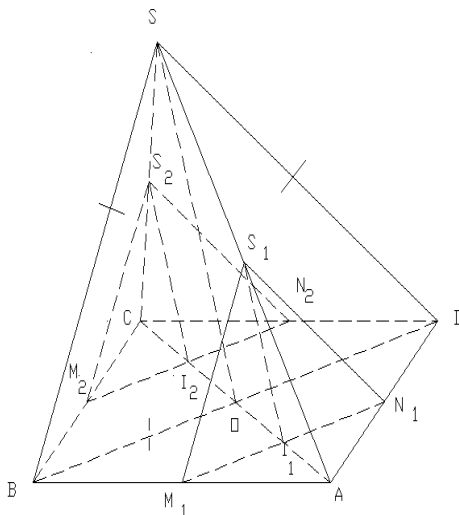
2 bài: 1.10 trang 16 ( Giống bài toán 2 trang 37, Bài đọc thêm, Sách giáo khoa, *phép đối xứng trục* ), 2.28 trang 74 ( *Kỹ thuật đại số* )

Bài 2.28:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD, O là giao điểm hai đường chéo,  $AC=a$ ,  $BD=b$ , tam giác SBD đều. Gọi I là điểm di động trên đoạn AC với  $AI=x$  ( $0 < x < a$ ). Lấy  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua I và song song với mặt phẳng (SBD).

a) Xác định thiết diện của mặt phẳng  $(\alpha)$  với hình chóp S.ABCD

b) Tìm diện tích S của thiết diện ở câu a) theo a, b, x. Tìm x để S lớn nhất.



## Hình 2.5

### Kỹ thuật ( Hình 2.5 )

a) Trường hợp 1: I thuộc đoạn AO. Khi đó I ở  $I_1$ . Thiết diện là tam giác đều  $S_1M_1N_1$ .

Trường hợp 2: I thuộc đoạn OC. I ở  $I_2$ . Thiết diện là tam giác đều  $S_2M_2N_2$

Trường hợp 3:  $I \equiv O$ . Thiết diện là tam giác đều SBD

b). Trường hợp 1: I thuộc đoạn AO ( $0 < x < \frac{a}{2}$ )

$$\frac{S_{S_1M_1N_1}}{S_{SBD}} = \left(\frac{M_1N_1}{BD}\right)^2 = \left(\frac{2x}{a}\right)^2$$

$$S_{S_1M_1N_1} = \frac{b^2 x^2 \sqrt{3}}{a^2}$$

Trường hợp 2: I thuộc đoạn OC ( $\frac{a}{2} < x < a$ )

$$S_{S_2M_2N_2} = \frac{b^2 \sqrt{3} (a-x)^2}{a^2}$$

Trường hợp 3:  $I \equiv O$

$$S_{SBD} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } S = \begin{cases} \frac{b^2 \sqrt{3} x^2}{a^2} & (0 < x < \frac{a}{2}) \\ \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} & (x = \frac{a}{2}) \\ \frac{b^2 \sqrt{3} (a-x)^2}{a^2} & (\frac{a}{2} < x < a) \end{cases}$$

.Vẽ đồ thị của S: S lớn nhất khi và chỉ khi  $x = \frac{a}{2}$

### +Kiểu nhiệm vụ T2

1 bài: 6 trang 182, phần Bài tập ôn cuối năm( *Kỹ thuật hình học* )

Cụ thể:

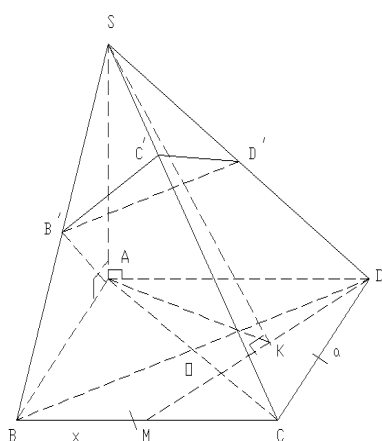
Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, cạnh SA=a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông

b) Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua A và vuông góc với SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại  $B', C', D'$ . Chứng minh  $B'D'$  song song với BD và  $AB'$  vuông góc với SB.

c) M là một điểm di động trên đoạn BC, gọi K là hình chiếu của S trên DM. Tìm tập hợp các điểm K khi M di động.

d) Đặt  $BM = x$ . Tính độ dài đoạn SK theo a và x. Tính giá trị nhỏ nhất của đoạn SK.



Hình 2.6

**Kỹ thuật** ( Do câu d độc lập, nên chỉ trình bày câu d) ( Hình 2.6 )

.Tính DM

.Tính AK từ diện tích tam giác AMD

$$.SK^2 = SA^2 + AK^2 : SK = a\sqrt{\frac{x^2 - 2ax + 3a^2}{x^2 - 2ax + 2a^2}}$$

.SK nhỏ nhất  $\Leftrightarrow$  AK nhỏ nhất  $\Leftrightarrow$  K trùng với O hay  $x=0$

**Bảng 2.6.Thống kê Hình học lớp 11**

| Tài liệu | Kiểu<br>nhiệm vụ | Kỹ thuật<br>đại số | Kỹ thuật<br>hình học | Tổng số<br>bài |
|----------|------------------|--------------------|----------------------|----------------|
| HH11     | T4               |                    | 2                    | 2              |
| BT HH11  | T4               | 1                  | 1                    | 2              |
|          | T2               |                    | 1                    | 1              |
| Cộng     | T2               |                    | 1                    | 1              |
|          | T4               | 1                  | 3                    | 4              |

### 2.4.3.Đại số 10

#### 2.4.3.1.Đại số 10 ( ĐS10 )

+**Lý thuyết:**

**\*Bài Bất đẳng thức**

Chứng minh bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ý nghĩa hình học: nội dung này đã xuất hiện từ lớp 9 ( Sách bài tập).

Tính chất của bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối.

**\*Bất phương trình bậc nhất hai ẩn, bài toán kinh tế:**

Ví dụ trang 97 theo kiểu nhiệm vụ T4:

Một phân xưởng có hai máy đặc chủng  $M_1, M_2$  sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là I và II. Một tấn sản phẩm loại I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại II lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại I phải dùng máy  $M_1$  trong 3 giờ và máy  $M_2$  trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại II phải dùng máy  $M_1$  trong 1 giờ và máy  $M_2$  trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy  $M_1$  làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy  $M_2$  một ngày chỉ làm việc không quá 4 giờ. Hãy đặt kế hoạch sản xuất sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

**Kỹ thuật:** ( Kỹ thuật Đại số )

Gọi  $x, y$  theo thứ tự là số tấn sản phẩm loại I, loại II sản xuất trong một ngày (  $x \geq 0, y \geq 0$  ). Như vậy tiền lãi mỗi ngày là  $L = 2x + 1,6y$  ( triệu đồng ) và số giờ làm việc mỗi ngày của máy  $M_1$  là  $3x + y$  và máy  $M_2$  là  $x + y$ .

Vì mỗi ngày máy  $M_1$  chỉ làm việc không quá 6 giờ, máy  $M_2$  không quá 4 giờ nên  $x, y$  phải thỏa hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán trở thành: trong các nghiệm của hệ bất phương trình, tìm nghiệm (  $x = x_0, y = y_0$  ) sao cho  $L = 2x + 1,6y$  lớn nhất.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là một tứ giác

. $L = 2x + 1,6y$  đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác miền nghiệm

**+Bài tập:**

**Kiểu nhiệm vụ T4:** tìm điều kiện để đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất: 2 bài: 6 trang 79( *Kỹ thuật bất đẳng thức* ), 3 trang 99 ( *Bài toán kinh tế, kỹ thuật đại số* ).

Bài 6 trang 79: “ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, trên các tia Ox, Oy lần lượt lấy các điểm A và B thay đổi sao cho đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính 1. Xác định tọa độ của A và B để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất ”.

**\*Kỹ thuật:**

.Lập biểu thức hình học của đoạn thẳng AB

.Dùng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm

.Kết luận.

**Kiểu nhiệm vụ T4’:**

1 bài: 6c trang 160 ( *Kỹ thuật đại số* )

Tính các hệ số a, b, c để hàm số  $y = ax^2 + bx + c$  có giá trị lớn nhất bằng 8 và đồ thị của nó qua A và B. ( A và B là giao điểm của các đồ thị của các hàm số:  $y = 2x(x+2)$ ,  $y = (x+2)(x+1)$  )

**2.4.3.2.Bài tập Đại số 10 ( BT ĐS10 )**

**+Kiểu nhiệm vụ T2**

5 bài: 3 trang 105, bài 11 trang 106, 12 trang 106, 13 trang 106 ( *Kỹ thuật bất đẳng thức* ), 5 trang 180 ( *Kỹ thuật lượng giác* )

Ví dụ: ( 3 trang 105 )

“ Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$  với  $0 < x < 1$  ”

**\*Kỹ thuật:**

.Áp dụng bất đẳng thức Cô-si hai lần cho các số dương:

$$\frac{1}{x} > 0, \frac{1}{1-x} > 0, \forall x \in (0;1)$$

.Ta được  $y \geq 4, \forall x \in (0;1)$

**+Kiểu nhiệm vụ T4’**

1 bài ( *Kỹ thuật đại số* ): bài 2 trang 116.

a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình

$$(H) \begin{cases} x + y + 2 \leq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ 2x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

b) Tìm  $x, y$  thỏa mãn (H) sao cho  $F = 2x + 3y$  đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

#### +Kiểu nhiệm vụ T4

1 bài ( *Kỹ thuật đại số* ): 49 trang 117

“ Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 8a. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3.000.000 đồng trên mỗi a, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4.000.000 đồng trên mỗi a. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công không quá 180”.

\*Kỹ thuật:

.Gọi  $x$  là diện tích trồng đậu,  $y$  là diện tích trồng cà:

$$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 8$$

Số công cần dùng là:  $20x + 30y \leq 180$  hay  $2x + 3y \leq 18$

Số tiền thu được là:  $F = 3.000.000x + 4.000.000y$  (đồng )

hay  $F = 3x + 4y$  ( triệu đồng )

Ta cần tìm  $x, y$  thỏa hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

sao cho  $F = 3x + 4y$  đạt giá trị lớn nhất

**Bảng 2.7.Thống Kê Đại Số Lớp 10**

| Tài liệu | Kiểu nhiệm vụ | Kỹ thuật Bất đẳng thức | Kỹ thuật Đại số | Kỹ thuật Lượng giác | Tổng Số bài |
|----------|---------------|------------------------|-----------------|---------------------|-------------|
| ĐS10     | T4            | 1                      | 1               | /                   | 2           |
|          | T4'           | /                      | 1               | /                   | 1           |
| BT       | T2            | 4                      | /               | 1                   | 5           |

|      |     |   |   |   |   |
|------|-----|---|---|---|---|
| ĐS10 | T4  | / | 1 | / | 1 |
|      | T4' | / | 1 | / | 1 |
| Cộng | T2  | 4 | / | 1 | 5 |
|      | T4  | 1 | 2 | / | 3 |
|      | T4' | / | 2 | / | 2 |

#### 2.4.4.Hình học 10

##### 2.4.4.1.Hình học 10 ( HH10 )

###### +Lý thuyết

Tài liệu trình bày ba chương: chương I Vector, chương II Tích vô hướng của hai vector và ứng dụng, chương III Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

+**Bài tập** ( Tham khảo sách giáo viên Hình học 10, nhà xuất bản giáo dục )

###### Kiểu nhiệm vụ T4

3 bài: 11 trang 62 ( Kỹ thuật hình học ), 4 trang 93 ( Kỹ thuật tọa độ ), 3 trang 100 ( Kỹ thuật hình học).

Bài 4, trang 93: “ Cho đường thẳng  $\Delta$ :  $x-y+2=0$  và hai điểm  $O(0;0)$ ,  $A(2;0)$ .

- Tìm điểm đối xứng của  $O$  qua  $\Delta$
- Tìm điểm  $M$  trên  $\Delta$  sao cho độ dài đường gấp khúc  $OMA$  ngắn nhất ”.

###### Kỹ thuật

.Gọi  $O'$  là điểm đối xứng của  $O$  qua  $\Delta$

. $OM+MA$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow O'M+MA$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow O',M,A$  thẳng hàng

##### 2.4.4.2.Bài tập Hình học 10 ( BT HH10 )

###### Kiểu nhiệm vụ T2

1 bài: 2.27 trang 86 ( Kỹ thuật tọa độ ):

“ Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm  $A(5;4)$  và  $B(3;-2)$ . Một điểm  $M$  di động trên trục hoành Ox. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$  ”

###### Kỹ thuật

.Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ :  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

.  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$  nhỏ nhất khi  $IM$  nhỏ nhất

. $M(x;0)$  nên  $IM = \sqrt{(x-4)^2 + 1} \geq 1$

### Kiểu nhiệm vụ T4

3 bài: 3.2 trang 131 ( Kỹ thuật tọa độ ), 3.38 trang 148 ( Kỹ thuật tọa độ ), 3.40 trang 149 ( Kỹ thuật tọa độ ).

Bài 3.2 trang 131:

Cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình tham số  $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

- Tìm điểm M nằm trên  $\Delta$  và cách A(0;1) một khoảng bằng 5
- Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng  $\Delta$  với đường thẳng  $x+y+1=0$
- Tìm điểm M trên  $\Delta$  sao cho AM ngắn nhất.

**Kỹ thuật** ( Chỉ trình bày cho câu c )

.Lập  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_\Delta}$  : vector chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$

.AM ngắn nhất  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{u_\Delta}$

.Tìm tọa độ của M

**Bảng 2.8.Thống kê Hình học lớp 10**

| Tài liệu | Kiểu nhiệm vụ | Kỹ thuật hình học | Kỹ thuật tọa độ | Tổng số bài |
|----------|---------------|-------------------|-----------------|-------------|
| HH 10    | T4            | 2                 | 1               | 3           |
| BT HH10  | T2            |                   | 1               | 1           |
|          | T4            |                   | 3               | 3           |
| Cộng     | T2            | 2                 | 1               | 1           |
|          | T4            |                   | 4               | 6           |

## 2.5.Tổng hợp thống kê và hiệu quả của kỹ thuật giải tích

### 2.5.1.Tổng hợp bài toán T4 theo các khối lớp

**Bảng 2.9.Bài toán T4 của khối Lớp 10**

| Tài liệu | Kiểu nhiệm vụ | Bất đẳng thức | Đại số | Lượng giác | Hình học | Tọa độ | Tổng số bài |
|----------|---------------|---------------|--------|------------|----------|--------|-------------|
| Đại số   | T2            | 4             | 2      | 1          |          |        | 5           |
|          | T4            | 1             |        |            |          |        | 3           |

|          |     |  |   |  |   |   |   |
|----------|-----|--|---|--|---|---|---|
|          | T4' |  | 2 |  |   |   | 2 |
| Hình học | T2  |  |   |  |   | 1 | 1 |
|          | T4  |  |   |  | 2 | 4 | 6 |

**Bảng 2.10. Bài toán T4 của khối Lớp 11**

| Tài liệu | Kiểu nhiệm vụ | Đại số | Lượng giác | Hình học | Tổng số bài |
|----------|---------------|--------|------------|----------|-------------|
| ĐS&GT    | T2            |        | 11         |          | 11          |
| Hình học | T2            |        |            | 1        | 1           |
|          | T4            | 1      |            | 3        | 4           |

**Bảng 2.11. Bài toán T4 của khối Lớp 12**

| Tài liệu  | Kiểu nhiệm vụ | Bất đẳng thức | Đại số | Hình học | Tọa độ | Giải tích | Tổng số bài |
|-----------|---------------|---------------|--------|----------|--------|-----------|-------------|
| Giải tích | T1            |               |        |          |        | 25        | 25          |
|           | T2            | 1             | 4      |          |        | 23        | 28          |
|           | T4            |               | 1      |          |        | 7         | 8           |
|           | T4'           |               |        |          |        | 10        | 10          |
|           | T5            |               |        |          |        | 2         | 2           |
|           | T6            |               |        |          |        | 1         | 1           |
|           | T7            |               |        |          |        | 1         | 1           |
| Hình học  | T4            | 1             |        | 2        | 2      | 1         | 6           |

### 2.5.2. Tổng hợp cấp Trung học phổ thông T4 theo các kỹ thuật

**Bảng 2.12. Bài toán T4 giải theo kỹ thuật bất đẳng thức**

| Tài liệu | Số bài | Tên bài        | Nội dung                                           |
|----------|--------|----------------|----------------------------------------------------|
| ĐS 10    | 1      | Bài 6 trang 79 | Xác định tọa độ của A, B để AB nhỏ nhất            |
| HH 12    | 1      | Bài 3 trang 99 | Xác định chiều cao h để thể tích hình nón lớn nhất |
| Cộng     | 2      |                |                                                    |

**Bảng 2.13. Bài toán T4 giải theo kỹ thuật đại số**

| Tài liệu | Số bài | Tên bài           | Nội dung                             |
|----------|--------|-------------------|--------------------------------------|
| ĐS 10    | 1      | Bài 3 trang 99    | - Bài toán kinh tế                   |
| BT ĐS 10 | 1      | Bài 49 trang 117  | - Bài toán kinh tế                   |
| BT HH 11 | 1      | Bài 2.28 trang 74 | Tìm x: diện tích thiết diện lớn nhất |
| GT 12    | 1      | Bài 11c trang 46  | Tìm m: MN nhỏ nhất                   |
| Cộng     | 4      |                   |                                      |

**Bảng 2.14. Bài toán T4 giải theo kỹ thuật hình học**

| Tài liệu | Số bài              | Tên bài                              | Nội dung                                                                                                             |
|----------|---------------------|--------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| HH10     | 2                   | Bài 11 trang 62, bài 3 trang 100     | -Trong các tam giác có điều kiện, tìm tam giác có diện tích lớn nhất<br>-Tìm N trên d: $NA^2 + NB^2 + NC^2$ nhỏ nhất |
| HH11     | 2<br>(Bài đọc thêm) | Bài toán 1, 2 trang 37               | -Tìm A,B trên 2 bờ sông: AB vuông góc bờ sông, MA+BN ngắn nhất<br>-Tìm C thuộc d: AC+CB ngắn nhất                    |
| BTHH11   | 1                   | Bài 1.10 tr 16                       | Tìm C thuộc d: AC+CB ngắn nhất                                                                                       |
| BTHH 12  | 2                   | Bài 2.17 trang 53, bài 2.32 trang 56 | -Tìm giá trị của CD: diện tích tam giác BCD lớn nhất<br>-ABCD là hình gì: thể tích hình chóp S.ABCD lớn nhất         |
| Cộng     | 7                   |                                      |                                                                                                                      |

**Bảng 2.15. Bài toán T4 giải theo kỹ thuật tọa độ**

| Tài liệu | Số bài | Tên bài                               | Nội dung                            |
|----------|--------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| HH 10    | 1      | Bài 4 trang 93                        | Tìm M: đường gấp khúc OMA ngắn nhất |
| BTHH 10  | 2      | Bài 3.2 trang 131, bài 3.38 trang 148 | Tìm M: AM ngắn nhất                 |
|          | 1      | Bài 3.40 trang 149                    | Tìm M: đường gấp khúc OMA ngắn nhất |
| HH 12    | 1      | Bài 4 trang 99                        | Tìm I: AI+BI nhỏ nhất               |
| BTHH 12  | 1      | Bài 3.46 trang 115                    | Tìm H: MH nhỏ nhất                  |
| Cộng     | 6      |                                       |                                     |

**Bảng 2.16. Bài toán T4 giải theo kỹ thuật giải tích**

| Tài liệu | Số bài | Tên bài | Nội dung |
|----------|--------|---------|----------|
|----------|--------|---------|----------|

|             |                                                                                                         |                     |                                                                           |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| GT 12       | 2                                                                                                       | Bài 2, 3 trang 24   | Tìm hình chữ nhật để diện tích lớn nhất hoặc chu vi nhỏ nhất              |
|             | 1                                                                                                       | 5 trang 121         | Tìm $\alpha$ để thể tích lớn nhất                                         |
| BT          | 2                                                                                                       | 1.17, 1.18 trang 15 | Tìm các số: tích chung cực trị                                            |
| GT 12       | 2                                                                                                       | 1.19, 1.20 trang 15 | Tính thời điểm vận tốc lớn nhất, tìm tam giác vuông có diện tích lớn nhất |
| BT<br>HH 12 | 1                                                                                                       | Bài 3 trang 143     | Tìm r: hình trụ tròn xoay có thể tích lớn nhất                            |
| Nhận xét    | ( Bài toán T4: 8 bài; với tình huống: diện tích, chu vi, thể tích, tích tối ưu trong Số học và vận tốc) |                     |                                                                           |

### **Bảng 2.17. Bài toán T4 giải theo kỹ thuật lượng giác**

( Không có bài toán T4 )

### **2.5.3. Công nghệ các kỹ thuật giải bài toán T4**

#### **Bảng 2.18. Công nghệ các kỹ thuật**

| Bất đẳng thức           | Đại số                                                         | Hình học                                                                                                                                                                                                      | Tọa độ                                                                                                          | Giải tích                                                                                                  |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cô-si cho<br>2 số; 3 số | -Hệ bất phương trình<br>-Vẽ Parabol<br>-Tổng các lũy thừa chẵn | - $S = \frac{1}{2} ab \sin C$<br>-Vector<br>-Phép tịnh tiến<br>-Phép đối xứng trục<br>- $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \text{đáy} \cdot \text{cao}$<br>- $S_{\text{tứ giác nội tiếp}} =$<br>$\frac{1}{2}$ các chéo | -Phép đối xứng trục<br>-Vec tơ<br>-Phương trình đường thẳng, mặt phẳng<br>-Khoảng cách<br>-Giải hệ phương trình | -Mô hình hóa hàm số-<br>Đạo hàm-<br>Ứng dụng tích phân-<br>Lượng giác-<br>Tìm cực trị-<br>Bảng biến thiên. |

#### **Nhận xét công nghệ các kỹ thuật:**

-Phép quay chưa được sử dụng để giải bài toán T4.

-Bất đẳng thức tham gia giải bài toán tối ưu còn chưa phong phú. Điều này dẫn chúng tôi đến tìm hiểu thêm bất đẳng thức hình học và bất đẳng thức khác đã được đưa vào sách giáo khoa phổ thông.

Sách giáo khoa hình học Trung học cơ sở, bất đẳng thức hình học chỉ xuất hiện ở lớp 7, Hình học 7 tập 2, chương III Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác.

Lý thuyết, thực hành học sinh 7 nghiên cứu các nội dung: quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác; quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu; quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác, bất đẳng thức tam giác.

Ngoài những kiểu nhiệm vụ: so sánh, chứng minh, còn có những kiểu nhiệm vụ liên quan đến bài toán tối ưu trong sách giáo khoa và sách bài tập:

**-Kiểu nhiệm vụ T2: Tìm cạnh lớn nhất của tam giác:** 2 bài: 3 trang 56, 6 trang 92, sách giáo khoa; **Đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc gì ?** : 1 bài: 4 trang 56, sách giáo khoa; **Ai đi xa nhất, gần nhất:** 1 bài: 5 trang 56, sách giáo khoa.

**-Kiểu nhiệm vụ T4: Tìm điều kiện để một đại lượng nhỏ nhất:** 7 bài: 21 trang 64, 49 trang 77, 66 trang 87, sách giáo khoa; 24 trang 26, 62 trang 31, 63 trang 31, 85 trang 33, sách bài tập.

Sách giáo khoa Trung học phổ thông, học sinh tiếp tục vận dụng bất đẳng thức tam giác để giải các bài toán tối ưu T4.

Đại số 10 nâng cao, bài đọc thêm trang 111 giới thiệu chứng minh bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki đối với 4 và 6 số thực và một ví dụ; bất đẳng thức này cũng được sử dụng giải bài tập: 4.23 trang 105, Bài tập Đại số 10 nâng cao.

Như vậy có thể nhận xét thêm ngoài bất đẳng thức Cô-si, việc tham gia giải bài toán tối ưu trong sách giáo khoa phổ thông còn có bất đẳng thức tam giác.

#### 2.5.4. Hiệu quả của kỹ thuật giải tích

**Bảng 2.19. Sử dụng Giải tích giải các T4 đã được giải bằng các kỹ thuật khác**

| TT | Kỹ thuật      | Số bài | Giải được bằng Giải tích                             |
|----|---------------|--------|------------------------------------------------------|
| 1  | Bất đẳng thức | 2      | 2 bài                                                |
| 2  | Đại số        | 4      | 2 bài<br>( 2 bài toán kinh tế: hàm số nhiều biến số) |
| 3  | Hình học      | 7      | 5 bài                                                |

|   |        |   |                                                                   |
|---|--------|---|-------------------------------------------------------------------|
|   |        |   | ( 2.17 trang 53, 2.32 trang 56, SBT HH 12: hàm số nhiều biến số ) |
| 4 | Tọa độ | 6 | 6 bài                                                             |

### **Kết luận chương 2**

-Bài toán T4 được nghiên cứu trong sách giáo khoa Toán phổ thông của các lớp 7, 10, 11, 12.

-Phạm vi tác động, bài toán có liên quan

Phạm vi tác động: Đại số, Hình học, Hình học giải tích, Giải tích.

Các tình huống của bài toán: tiền lãi, tổng bình phương các đoạn thẳng, chiều dài, diện tích, thể tích, tích số học, vận tốc.

-Các đối tượng có liên quan đến bài toán:

Lập hàm số, đạo hàm, ứng dụng tích phân, lượng giác, cực trị, bảng biến thiên, bất đẳng thức Cô-si, bất đẳng thức tam giác, phép đối xứng trục, véc tơ, phương trình đường thẳng, mặt phẳng, khoảng cách, giải hệ phương trình và hệ bất phương trình, phép tịnh tiến, vẽ parabol, tổng các lũy thừa chẵn.

-Cách giải bài toán T4:

Bài toán được giải bằng các kỹ thuật: bất đẳng thức, đại số, hình học, tọa độ, giải tích.

-Hiệu quả của kỹ thuật giải tích đối với các bài toán T4 đã được giải bằng các kỹ thuật khác:

Trong phạm vi chương trình Trung học phổ thông, kỹ thuật giải tích khá hiệu quả; kỹ thuật này có thể giải được một số các bài toán T4 đã được giải bằng kỹ thuật khác.

Tuy nhiên cũng có những bài toán trong chương trình mà kỹ thuật giải tích có thể có khó khăn hơn các kỹ thuật khác hay không thể can thiệp; bản thân những bài toán này là những hàm số nhiều biến số.

-Các giả thuyết nghiên cứu:

**H1:** Kỹ thuật giải tích chưa đủ hiệu quả để giải được tất cả các bài toán tối ưu ở phổ thông.

**H2:** Học sinh có khuynh hướng sử dụng phép đối xứng trục hoặc phép tịnh tiến để giải bài toán tối ưu ở phổ thông.

**H3:** Phép quay chưa được học sinh sử dụng để giải bài toán tối ưu ở phổ thông.

**H4:** Học sinh có khó khăn trong việc lập hàm số hay xử lý điểm tới hạn trong việc tìm cực trị để giải bài toán tối ưu bằng kỹ thuật giải tích.

Cần phải trở về thực tế dạy học để kiểm chứng tính hợp thức của các giả thuyết này. Việc này là một trong những mục đích nghiên cứu chúng tôi sẽ thực hiện ở chương sau.

Nghiên cứu trên cho chúng ta thấy bài toán tối ưu giải bằng phép quay không được xuất hiện trong chương trình lớp 11 ban cơ bản.

Vậy làm cách nào để học sinh nhận ra được trong tình huống nào việc sử dụng phép đối xứng trục hoặc phép tịnh tiến để giải bài toán tối ưu là có khó khăn và việc dùng phép quay là thuận lợi hơn cả. Điều này dẫn chúng tôi nghĩ đến việc tìm cách bổ sung một vài hoạt động nhằm giúp học sinh có thêm cơ hội tiếp xúc với phép quay trong việc giải bài toán tối ưu.

Bất đẳng thức tham gia giải bài toán tối ưu trong phạm vi sách giáo khoa phổ thông là bất đẳng thức Cô-si, bất đẳng thức tam giác.

Kỹ thuật lượng giác không có bài toán T4 nhưng phép tính lượng giác có tham gia vào bài toán T4.

Chúng ta cũng thấy sách giáo khoa còn sử dụng công cụ véc tơ để tìm vị trí một điểm cho biểu thức hình học nhỏ nhất.

Ứng dụng tích phân cũng hiện diện trong bài toán tối ưu.

Đây là cơ sở chúng ta có thể bổ sung thêm một cách hợp lý các bài toán tối ưu Trung học phổ thông; chúng ta cũng có thể nghiên cứu: có tình huống nào mà việc giải bài toán tối ưu bằng bất đẳng thức hình học hay bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki là thuận lợi hơn cả ?

Chúng tôi sẽ tiếp tục điều này ở chương sau.

Phân tích GT 12, chúng tôi có trình bày qui tắc II về tìm cực trị của hàm số: qui tắc này có thể giải thích từ giáo trình đại học: xét dấu biểu thức  $s^2 - rt$  (Ở phổ thông:  $s = t = 0$ ); bài toán tìm cực trị ở phổ thông là bài toán tìm cực trị trên biên của miền D.

Bài toán tối ưu ở phổ thông được tìm thấy ở các khối lớp của cấp Trung học phổ thông, cả ở lớp 7 cấp Trung học cơ sở; các bài toán thực tế này đều có dạng: tìm điều kiện để một đại lượng tối ưu.

Ở phổ thông có các phạm vi tác động: Đại số, Hình học, Hình học giải tích, Giải tích.

Các tình huống của bài toán ở phổ thông: tiền lãi, tổng bình phương các đoạn thẳng, chiều dài, diện tích, thể tích, tích số học, vận tốc.

Chúng ta nhận thấy trong lịch sử yêu cầu của các bài toán tối ưu là tìm đường cong để một đại lượng cực trị; có lẽ yêu cầu này chưa phù hợp với chương trình phổ thông ( Có sự chuyển đổi sự phạm); vì vậy học sinh chỉ tiếp xúc với những yêu cầu đơn giản như tìm hình chữ nhật để diện tích lớn nhất hoặc chu vi nhỏ nhất, tìm góc  $\alpha$ , hình trụ để thể tích lớn nhất, tìm các số để tích của chúng cực trị, tính thời điểm vận tốc lớn nhất, xác định tọa độ của A, B để AB nhỏ nhất, tìm vị trí của một điểm để đường gấp khúc ngắn nhất.

Cách giải bài toán: giáo trình Giải tích đại học giải bài toán bằng: lập hàm số và tính đạo hàm; bài toán phổ thông giải bằng kỹ thuật giải tích cũng giống như cách giải này.

Để xét bài toán phổ thông giúp gì cho bài toán tối ưu ở Đại học, chúng ta trở về cụ thể từng kiểu nhiệm vụ của giáo trình đại học đã xét trong chương 1.

T1: Tìm cực trị của hàm số nhiều biến số, kiến thức phổ thông tiếp tục phục vụ kỹ thuật giải của T1 là: đạo hàm, giải hệ phương trình, hình thức xét dấu.

T2: Tính giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số: đạo hàm, giải hệ phương trình, việc tính giá trị của hàm số hai biến số trên biên của miền D chính là tìm cực trị của hàm số một biến số, so sánh các giá trị của hàm số để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

T3: Tìm cực trị có điều kiện: đạo hàm, giải hệ phương trình.

T4: Tìm điều kiện để một đại lượng cực trị: hệ trục tọa độ, phương trình mặt cầu tâm O, bán kính R, lập hàm số của đại lượng cần tìm với điều kiện giả thiết đã cho, đạo hàm, giải hệ phương trình.

Chúng tôi nghĩ câu hỏi Q2 đã được cơ bản.

Nghiên cứu trên cho chúng ta thấy:

-Ở lớp 7, bài toán tối ưu T4 được trình bày trong sách giáo khoa và sách bài tập Hình học, tập 2, gồm 7 bài; trong đó có bài giống nhau về nội dung; dạng cơ bản là: cho hai điểm A và B nằm cùng một phía đối với đường thẳng d. Tìm trên d một điểm M sao cho  $MA + MB$  nhỏ nhất. Công nghệ giải bài toán lớp 7 là bất đẳng thức tam giác.

-Cấp Trung học phổ thông ( Đã có tổng hợp); cụ thể:

Kỹ thuật giải tích ( GT&BT GT12, BT HH12): bài toán T4 gồm 8 bài; các tình huống về: diện tích, chu vi, thể tích, tích số học, vận tốc.

Kỹ thuật bất đẳng thức ( ĐS10, HH12): 2 bài với tình huống: chiều dài đoạn thẳng, thể tích.

Kỹ thuật tọa độ ( HH&BT HH10, HH&BT HH12): 6 bài liên quan đến tình huống: chiều dài đường gấp khúc, chiều dài đoạn thẳng.

Kỹ thuật hình học ( HH10, HH&BT HH11, BT HH12): 7 bài, tình huống về: diện tích, tổng bình phương độ dài các đoạn thẳng, chiều dài đường gấp khúc, thể tích.

Kỹ thuật đại số ( ĐS&BT ĐS10, BT HH11, GT12): 6 bài, tình huống: bài toán kinh tế, diện tích, chiều dài đoạn thẳng.

Kỹ thuật giải tích là tham chiếu, nó có số bài toán T4 nhiều hơn cả; hơn nữa kỹ thuật giải tích như đã tổng hợp có thể giải được cơ bản các bài toán T4 đã được giải bằng các kỹ thuật khác; do vậy có lẽ kỹ thuật giải tích là chiếm ưu thế so với các kỹ thuật giải khác trong sách giáo khoa phổ thông.

Như thế, câu hỏi Q3 đã được trình bày.

Về những qui tắc của hợp đồng didactic được hình thành giữa giáo viên và học sinh trong quá trình dạy học bài toán tối ưu, chúng tôi chưa tìm thấy.

Sự trả lời câu hỏi Q4 đã được trình bày.

Ở phổ thông ngoài chương trình được qui định bởi sách giáo khoa dùng chung, Bộ Giáo Dục& Đào Tạo còn hướng dẫn chương trình cho các trường chuyên tỉnh, đề cương cho các kỳ thi chọn học sinh giỏi, tuyển sinh đại học.

Vì vậy, ngoài các bài toán trong sách giáo khoa, học sinh phổ thông còn phải tiếp cận với các bài toán ngoài sách giáo khoa phổ thông theo hướng dẫn của Bộ.

Qua nghiên cứu trên chúng ta thấy bài toán nâng cao có thể là:

-Bài toán phải dùng: phép quay, bất đẳng thức hình học, bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki và cũng có thể nội dung khác theo Bộ.

-Bài toán vẫn có thể sử dụng các công nghệ giải như trong sách giáo khoa nhưng mức độ khó cao hơn.

Chúng tôi đã trình bày câu hỏi Q5.

Cũng qua nghiên cứu chúng ta thấy cách trình bày bài toán tối ưu của sách giáo khoa phù hợp với lịch sử, từ bài toán cực trị đến bài toán tối ưu.

Sách giáo khoa trình bày bài toán có sự phong phú về phạm vi tác động, tình huống bài toán và cách giải.

Như vậy, sách giáo khoa có cố gắng trình bày bài toán tối ưu cho phù hợp với trình độ học sinh.

Hơn nữa, học sinh có thể hiểu được kiểu tình huống và cách giải bài toán bằng kỹ thuật giải tích.

Ta cũng nhận thấy có thể có một tiểu đồ án dạy học, tạo điều kiện cho học sinh tiếp cận với phép quay trong việc giải bài toán tối ưu. Điều này sẽ là mục tiêu nghiên cứu của chương tiếp theo.

Như vậy theo chúng tôi, câu hỏi Q6 đã được trình bày.

### **Chương 3: THỰC NGHIỆM**

#### **Mục tiêu của chương**

Chương này nhằm mục đích tìm câu trả lời cho câu hỏi đặt ra ở cuối chương 2 và kiểm chứng tính thích đáng của các giả thuyết nghiên cứu.

Chúng tôi nhắc lại những câu hỏi và giả thuyết đó như sau:

-Có thể xây dựng một tình huống cho phép học sinh lớp 11 tiếp cận việc giải bài toán tối ưu bằng phép quay ?

-Có tình huống nào mà việc giải bài toán tối ưu bằng bất đẳng thức hình học hay bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki là thuận lợi hơn cả ?

#### **Giả thuyết nghiên cứu:**

**H1:** Kỹ thuật giải tích chưa đủ hiệu quả để giải được tất cả các bài toán tối ưu ở phổ thông.

**H2:** Học sinh có khuynh hướng sử dụng phép đối xứng trục hoặc phép tịnh tiến để giải bài toán tối ưu ở phổ thông.

**H3:** Phép quay chưa được học sinh sử dụng để giải bài toán tối ưu ở phổ thông.

**H4:** Học sinh có khó khăn trong việc lập hàm số hay xử lý điểm tới hạn trong việc tìm cực trị để giải bài toán tối ưu bằng kỹ thuật giải tích.

Tuy nhiên trong phạm vi luận văn này, chúng tôi xin được phép không phải nghiên cứu và kiểm chứng câu hỏi và giả thuyết sau:

- Có tình huống nào mà việc giải bài toán tối ưu bằng bất đẳng thức hình học hay bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki là thuận lợi hơn cả ?

-Giả thuyết: H1, H4.

Như vậy để đạt được công việc còn lại chúng tôi thấy cần thiết phải tiến hành lần lượt hai thực nghiệm sau:

Thực nghiệm A: kiểm chứng H2, H3.

Thực nghiệm B: xây dựng, triển khai một tiểu đề án didactic cho phép học sinh sử dụng phép quay để giải bài toán tối ưu.

Như vậy thực nghiệm A là cơ sở để tiến hành thực nghiệm B

**Tình huống cơ sở được chọn:** chiều dài hình học.

### **Một vài điểm tựa**

Chúng tôi cần tìm hiểu thêm phép quay. Cụ thể, học sinh học gì về phép quay ? Sử dụng phép quay trong những kiểu bài toán nào ? Chương trình nâng cao sử dụng phép biến hình để giải bài toán tối ưu như thế nào ?

#### **-Trung học cơ sở:**

Học sinh chưa học phép quay. Tuy nhiên học sinh có thể thực hiện “ Vẽ thêm” để giải bài toán có thể dùng “ Phép quay ”.

Cụ thể: Thí dụ 6: “ Cho góc  $xOy$  và điểm  $A$  nằm trong góc đó. Xác định điểm  $B$  thuộc tia  $Ox$ , điểm  $C$  thuộc tia  $Oy$  sao cho  $OB=OC$  và tổng  $AB+AC$  là nhỏ nhất ”. [1, tr13]

#### **-Lớp 11:**

##### **+HH11:**

.Định nghĩa phép quay ( Trang 16 )

Hai tính chất của phép quay

.Các kiểu nhiệm vụ:

T1: Xác định ảnh của điểm, đường thẳng, tam giác qua phép quay trong hình học phẳng.

T2: Xác định ảnh của điểm, đường thẳng qua phép quay trong mặt phẳng  $Oxy$ .

##### **+BT HH11:**

Trang 22, 23, 24, 25 trình bày các dạng toán cơ bản, bài tập theo các kiểu nhiệm vụ sau:

T1: Xác định ảnh của tam giác qua phép quay.

T2: Xác định ảnh của điểm qua phép quay trong mặt phẳng  $Oxy$ .

T3: Chứng minh tính chất hình học.

T4: Dựng hình.

##### **+Hình học 11 nâng cao**

.Bài toán xác định vị trí xây dựng chiếc cầu nối hai khu dân cư ở hai bên sông để khoảng cách tối ưu, dùng phép tịnh tiến giải, trang 7. ( Bài toán này chỉ hiện diện ở bài đọc thêm SGK HH11).

.Bài toán xác định vị trí một điểm trên đường thẳng để tổng khoảng cách từ đó đến hai điểm nằm cùng phía với đường thẳng nhỏ nhất, dùng phép đối xứng trục giải, trang 12, 13.( Bài này ở bài đọc thêm SGK HH11 và SBT HH11 )

.Phần bài tập có bài dùng phép đối xứng trục để giải:

“ Cho góc nhọn  $xOy$  và một điểm  $A$  nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm  $B$  trên  $Ox$  và điểm  $C$  trên  $Oy$  sao cho tam giác  $ABC$  có chu vi nhỏ nhất ”. (Bài tập 9 trang 13, bài này không có ở ban cơ bản )

.Bài tập ôn chương I: có bài dùng phép tịnh tiến ( Bài 3 trang 34, ban cơ bản không có bài này):

“ Cho đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm phân biệt  $P, Q$  và hai điểm  $A, B$  nằm về một phía đối với  $d$ . Hãy xác định trên  $d$  hai điểm  $M, N$  sao cho  $\overline{MN} = \overline{PQ}$  và  $AM+BN$  bé nhất ”.

#### **+Bài tập Hình học 11 nâng cao:**

Chỉ có một bài: bài 18 trang 224, ôn tập cuối năm: Xác định  $\alpha$  để diện tích tam giác đạt giá trị lớn nhất ( Hình học không gian ).

#### **Nhận xét:**

Ở chương trình Hình học 11 ban cơ bản học sinh biết sử dụng phép quay cho trước để tìm ảnh của điểm, đường thẳng, tam giác hoặc biết tìm phép quay thích hợp và sử dụng tính chất của phép quay để chứng minh tính chất hình học, dựng hình.

Chương trình Hình học 11 nâng cao học sinh chỉ được học chính thức các bài toán tối ưu giải bằng phép đối xứng trục hoặc phép tịnh tiến; dạng bài tập có phong phú hơn chương trình cơ bản: góc nhọn  $xOy$ , phép tịnh tiến.

### **THỰC NGHIỆM A**

#### **3.1.Mục đích:**

Mục đích thực nghiệm A nhằm kiểm chứng H2 và H3.

#### **3.2.Bài toán cơ sở:**

**-Bài toán 1:** [ 2, tr 13, bài 9]

“ Cho góc nhọn  $xOy$  và một điểm  $A$  nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm  $B$  trên  $Ox$  và điểm  $C$  trên  $Oy$  sao cho tam giác  $ABC$  có chu vi nhỏ nhất ”.

**-Bài toán 2:** [ 2, tr34, bài 3]

“ Cho đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm phân biệt  $P, Q$  và hai điểm  $A, B$  nằm về một phía đối với  $d$ . Hãy xác định trên  $d$  hai điểm  $M, N$  sao cho  $\overline{MN} = \overline{PQ}$  và  $AM+BN$  bé nhất ”.

### 3.3.Bài toán thực nghiệm:

**-Câu hỏi 1:** ( Tham khảo [1, tr13, 37], [26, tr44] )

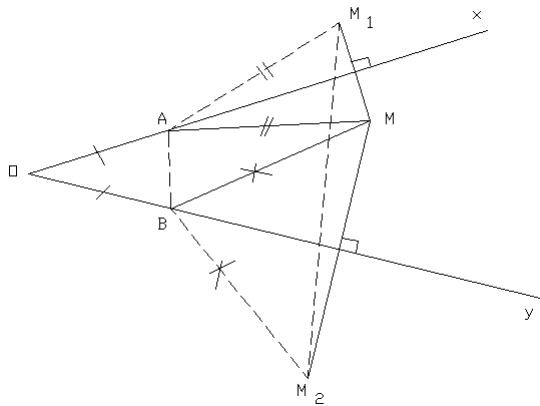
a) Cho góc nhọn  $xOy$  và  $A, B$  trong góc nhọn. Tìm  $X, Y$  trên  $Ox, Oy$  sao cho  $AX + XY + YB$  nhỏ nhất.

b) Cho trước điểm  $A$ , một đường thẳng  $d$  không qua  $A$ . Trên  $d$  ta đặt một đoạn thẳng  $BC = a$  (  $a$  là độ dài cho trước ). Tìm vị trí của đoạn  $BC$  để  $AB+AC$  nhỏ nhất.

c) Cho điểm các hướng dẫn giải của bài toán sau ( Tối đa là 10 điểm đối với một hướng dẫn) và cho biết lý do hướng dẫn đạt điểm đó; có thể đề nghị một hướng dẫn hoàn chỉnh khác.

Cho góc  $xOy$  và điểm  $M$  nằm trong góc này. Tìm trên  $Ox, Oy$  hai điểm  $A, B$  sao cho  $OA=OB$  và  $MA+MB$  nhỏ nhất.

**Hướng dẫn giải 1** ( Hình 3.1 )

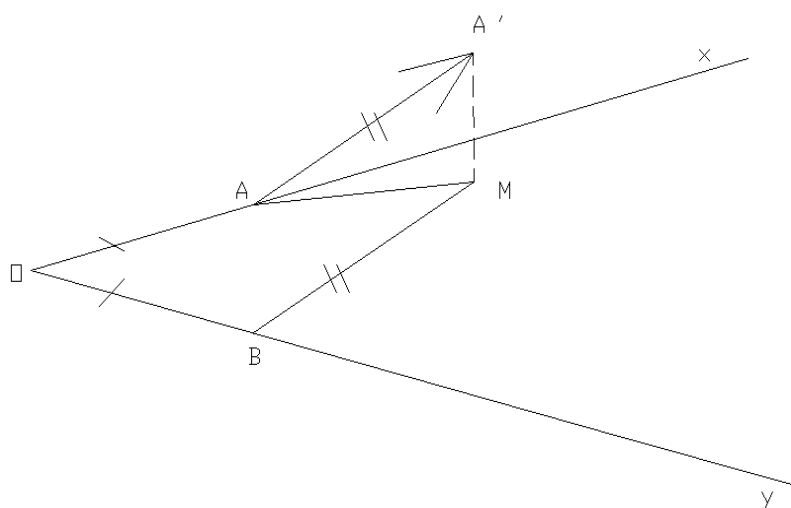


Hình 3.1

$MA+MB$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow M_1A+M_2B$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow M_1A+AB+BM_2$  nhỏ nhất

Vậy  $A, B$  là giao điểm của  $M_1M_2$  với  $Ox, Oy$ .

**Hướng dẫn giải 2** ( Hình 3.2 )



Hình 3.2

Phép tịnh tiến  $\overline{BM} : A \rightarrow A'$

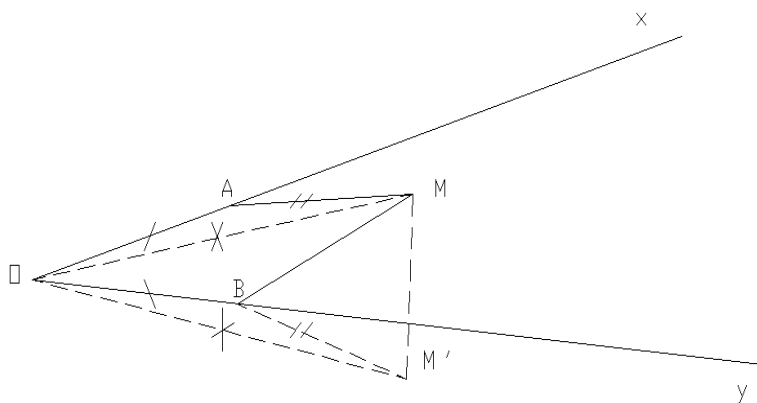
Vậy  $MB = AA'$

$MA + MB$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow MA + AA'$  nhỏ nhất

A là giao điểm của Ox và  $MA'$

B thuộc Oy và  $OB = OA$

**Hướng dẫn giải 3 ( Hình 3.3 )**



Hình 3.3

Gọi số đo hình học của góc đã cho là  $\alpha$ .

Phép quay tâm O, góc  $-\alpha : A \rightarrow B$

$$M \rightarrow M'$$

Vậy  $AM = BM'$

$MA + MB$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow MB + BM'$  nhỏ nhất

Vậy B là giao điểm của  $MM'$  và Oy

### **-Câu hỏi 2 ( Bài tập về nhà )**

Cho tam giác ABC với các góc nhọn và điểm M tùy ý.

- Có thể viết  $MA+MB+MC$  thành một tổng mới bằng tổng cũ, có dạng một đường gấp khúc liên nét với hai đầu cố định bằng cách sử dụng phép đối xứng trục ?
- Có thể viết  $MA+MB+MC$  thành một tổng mới bằng tổng cũ, có dạng một đường gấp khúc liên nét với hai đầu cố định bằng cách sử dụng phép tịnh tiến ?

### **3.4.Hình thức thực nghiệm:**

Thực nghiệm được tiến hành với học sinh lớp 11, khối A sau khi đã học xong chương I: phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng; có sự hiện diện của giáo viên thực nghiệm và giáo viên của lớp.

Đối tượng này nghiên cứu cả những bài toán tối ưu của chương trình nâng cao. Giáo viên thực nghiệm sẽ thông báo cho học sinh biết nội dung kiến thức cần chuẩn bị để làm bài thực nghiệm: bài toán thực tế, tìm điều kiện để một đại lượng tối ưu, giải bằng phép biến hình trong mặt phẳng.

Thời gian: 45 phút với hai hoạt động.

Hoạt động 1 (38 phút):

-Học sinh trả lời cá nhân câu hỏi 1.

-Giáo viên thực nghiệm sẽ phát đề đã được chuẩn bị sẵn, hướng dẫn học sinh làm bài ngay tại những chỗ dành sẵn trên đề.

-Học sinh được yêu cầu không trao đổi nhau trong thời gian làm bài để kết quả thực nghiệm được trung thực.

Giáo viên thực nghiệm sẽ có xem xét bài làm của học sinh sau đó.

Hoạt động 2 (7 phút):

Giáo viên hướng dẫn học sinh thực hiện câu hỏi 2 ở nhà.

Giáo viên thực nghiệm cũng phát đề câu hỏi 2 cho học sinh; học sinh sẽ làm bài ở nhà tại những chỗ dành riêng trên đề.

Hoạt động 1: nhằm kiểm chứng các giả thiết RE 2, H2.

Hoạt động 2: nhằm chuẩn bị cho thực nghiệm B được tiến hành vào một buổi khác, cũng với những học sinh này.

### 3.5. Phân tích tiên nghiệm:

#### 3.5.1. Bài toán a):

##### -Biến tình huống

V1: độ lớn của góc  $xOy$

V2: số điểm cho trong góc  $xOy$

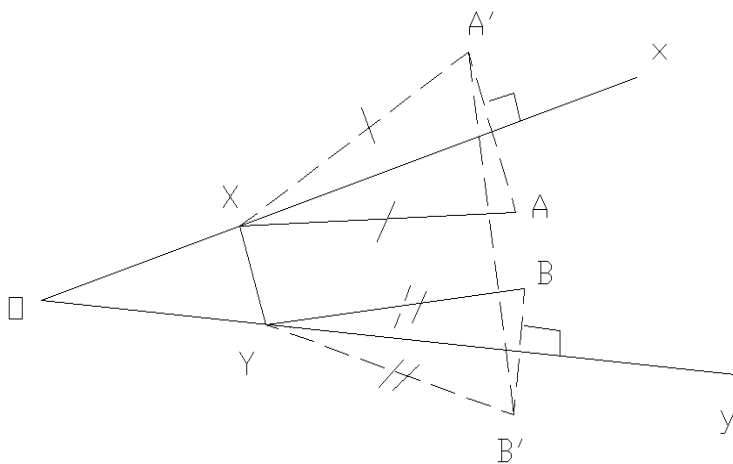
V3: phương thức làm việc của học sinh

##### -Biến didactic

V4: yêu cầu câu hỏi

##### -Chiến lược

#### .Phép đối xứng trục ( Hình 3.4 )



Hình 3.4

Vị trí của điểm cần tìm là giao điểm của  $A'B'$  với  $Ox$ ,  $Oy$ .

Học sinh cũng có thể sử dụng phép đối xứng trục nhưng lời giải sai.

.**Phép tịnh tiến** ( Chiến lược sai ): học sinh có thể dùng phép tịnh tiến nhưng hình vẽ, lời giải không đúng.

#### .**Kỹ thuật tọa độ** ( Hình 3.5 )



+V4: khi yêu cầu câu hỏi thay đổi học sinh có thể thay đổi chiến lược giải. Ở đây với yêu cầu câu hỏi đã nêu, học sinh có thể tùy ý chọn chiến lược. Tuy nhiên học sinh giải được bằng kỹ thuật tọa độ nếu như học sinh có thể giải được bằng phép đối xứng trục. Như vậy giữa hai chiến lược này học sinh sẽ dễ chọn giải bằng phép đối xứng trục: lời giải gọn gàng hơn.

**-Điều cần quan sát:** hình vẽ dùng phép đối xứng trục, lời giải có trình bày sự cố định của hai đầu đường gấp khúc mới, liền nét.

**-Dự đoán câu trả lời của học sinh:** phép đối xứng trục hoặc phép tịnh tiến.

### 3.5.2.Bài toán b):

**-Biến tình huống:**

V1: cho một điểm hay hai điểm cùng phía với đường thẳng

V2: phương thức làm việc của học sinh

**-Biến didactic:**

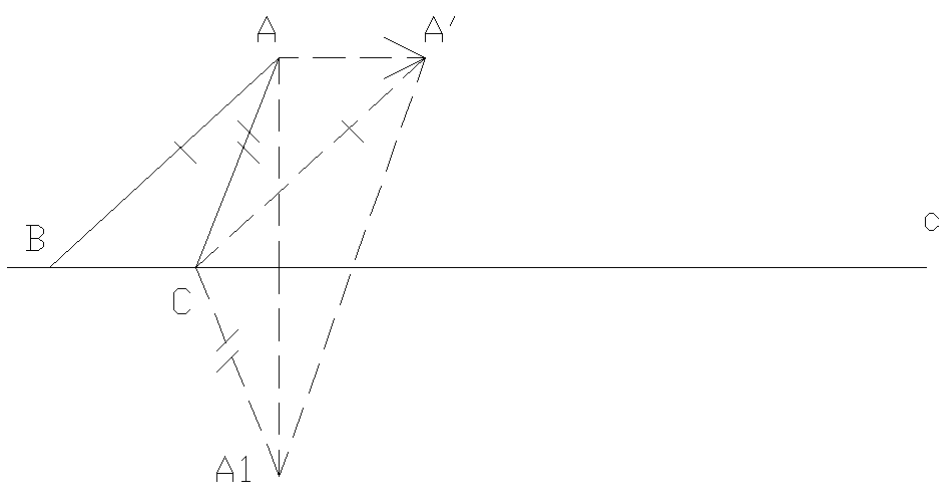
V3: khối lớp

V4: yêu cầu câu hỏi

**-Chiến lược:**

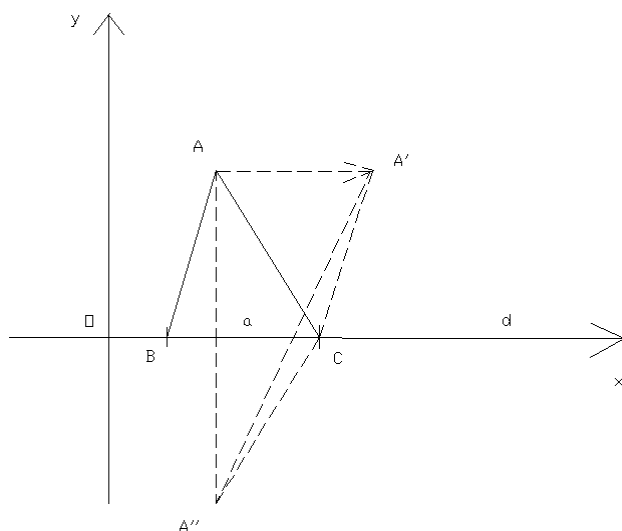
+ **Bất đẳng thức Cô-si**

+ **Phép biến hình:** sử dụng phép tịnh tiến hoặc phép đối xứng trục ( Hình 3.6); bài làm của học sinh có thể còn khuyết điểm.



Hình 3.6

+ **Kỹ thuật tọa độ** ( Hình 3.7 )



Hình 3.7

Chọn hệ trục tọa độ Oxy

$$A(a_1, a_2)$$

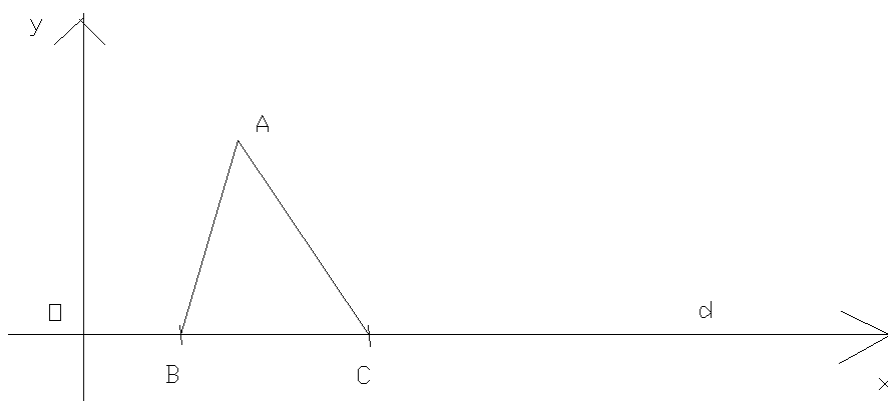
Tìm  $A''$ , điểm đối xứng của A qua Ox

$$\text{Tìm } A'(a_1 + a, a_2)$$

Lập phương trình của  $A'A''$

Tìm giao điểm của  $A'A''$  với Ox

+ **Giải tích** ( Hình 3.8 )



Hình 3.8

Chọn hệ trục tọa độ Oxy

$$B(x, 0)$$

$$C(x+a, 0)$$

$$A(a_1, a_2)$$

$$AB+AC= \sqrt{(x-a_1)^2 + a_2^2} + \sqrt{(x+a-a_1)^2 + a_2^2} \quad (\text{Hàm số một biến số})$$

**-Sự lựa chọn biến, giải thích, ảnh hưởng của biến đến chiến lược**

+V1: một điểm; bài toán cơ sở hai điểm

+V2: cá nhân

+V3: học sinh thực nghiệm là lớp 11 khối A; như vậy học sinh không thể dùng chiến lược giải tích để giải bài toán.

+V4: câu hỏi đặt ra. Tuy nhiên, như chúng tôi đã phân tích ở câu hỏi a), có lẽ học sinh sẽ sử dụng chiến lược phép biến hình.

**-Dự đoán câu trả lời của học sinh**

Học sinh sẽ vận dụng phép đối xứng trục hoặc phép tịnh tiến.

**-Cái có thể quan sát**

Trên hình vẽ học sinh sẽ dùng phép tịnh tiến để đưa bài toán về bài toán đối xứng trục cơ bản.

**3.5.3. Bài toán c):**

**-Biến tình huống**

V1: phương thức làm việc của học sinh

**-Biến didactic**

V2: khối lớp

V3: yêu cầu của câu hỏi

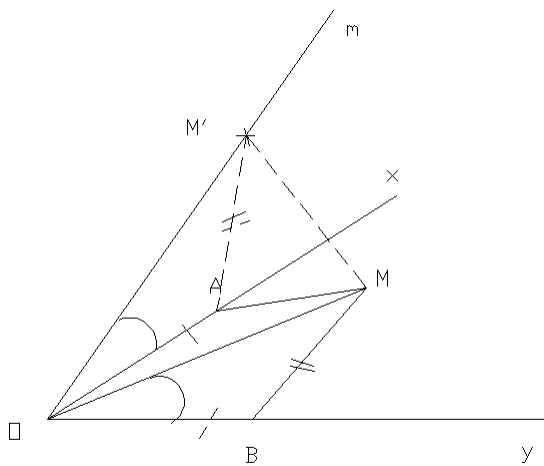
**-Chiến lược**

+**Phép đối xứng trục** ( Hướng dẫn giải 1 )

+**Phép tịnh tiến** ( Hướng dẫn giải 2 )

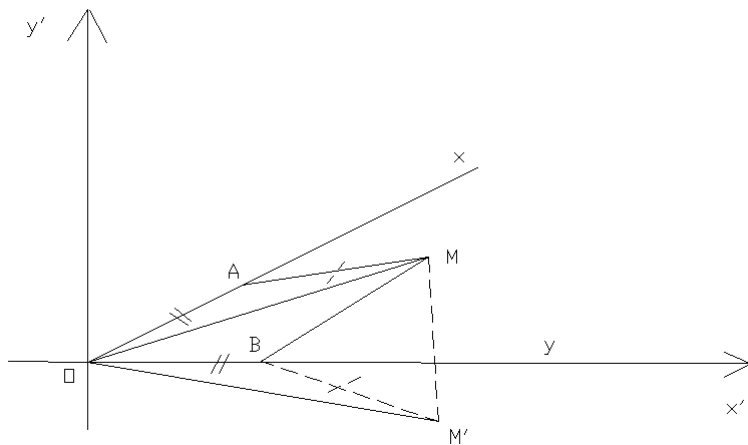
+**Phép quay** ( Hướng dẫn giải 3 )

+**Vẽ thêm đường phụ** ( Hình 3.9 )



Hình 3.9

### +Kỹ thuật tọa độ ( Hình 3.10 )



Hình 3.10

Chọn hệ trục tọa độ  $Ox'y'$

$M(a,b)$

Lập phương trình của đường thẳng qua O, M' vì  $\angle OM'B'$  không đổi

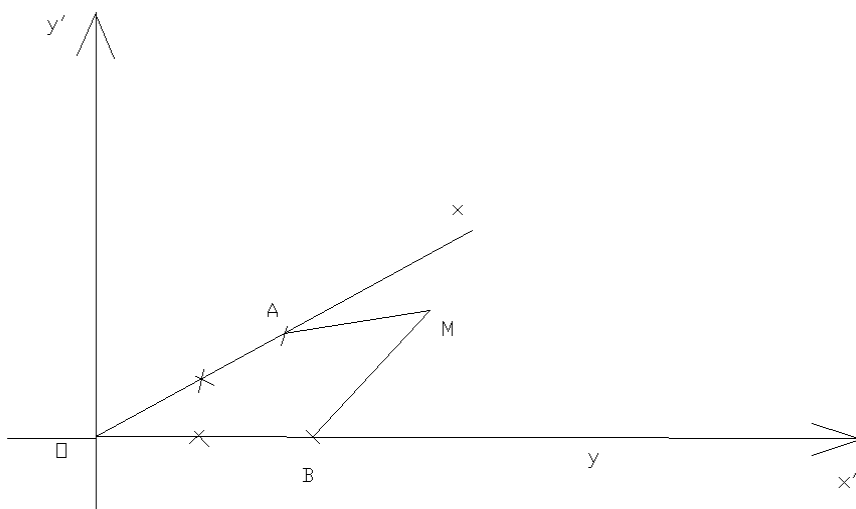
Lập phương trình đường tròn tâm O, bán kính OM

Tìm tọa độ giao điểm M' của đường tròn và của đường thẳng qua O, M'

Lập phương trình của MM'

Tìm giao điểm B của MM' và  $Ox'$

### +Giải tích ( Hình 3.11 )



Hình 3.11

Chọn hệ trục tọa độ  $Ox'y'$

$$A(x_2', y_2')$$

$$M(a, b)$$

$$B(x_1', 0)$$

$\alpha$  là góc  $xOy'$

$$MA + MB = \sqrt{(x_2' - a)^2 + (y_2' - b)^2} + \sqrt{(x_1' - a)^2 + b^2} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y_2' = \tan \alpha \cdot x_2' \\ x_1'^2 = x_2'^2 + y_2'^2 \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1),  $MA + MB$  sẽ là hàm số một biến số.

**-Giá trị biến được chọn, giải thích, ảnh hưởng của biến đến chiến lược**

+V1: cá nhân

+V2: học sinh chọn là lớp 11 khối A: học sinh không thể sử dụng chiến lược giải tích.

+V3: bài toán có ba hướng dẫn giải dùng các chiến lược phép đối xứng trục, phép tịnh tiến, phép quay; học sinh chọn một trong ba hướng dẫn giải đó và có thể đề nghị thêm hướng dẫn giải khác: chiến lược còn lại.

**-Phân tích ba hướng dẫn giải:**

.Hướng dẫn giải 1, 2: sai, được đưa ra nhằm cho học sinh thấy trong tình huống này không thể sử dụng phép đối xứng trục và phép tịnh tiến để giải vì đường gấp khúc

mới không tương đương đường gấp khúc cũ hoặc việc sử dụng phép tịnh tiến chưa đúng. Điều đó buộc học sinh phải nghĩ đến chiến lược khác.

.Hướng dẫn giải 3: đúng, giải bằng phép quay.

Do yêu cầu điểm ghi có sự giải thích kèm theo, nên học sinh có sự cân nhắc lựa chọn; điểm ghi cũng phản ánh sự lựa chọn một trong ba hướng dẫn giải này. Trong cả ba hướng dẫn giải chúng tôi không trình bày chi tiết về sự cố định của hai đầu đường gấp khúc mới. Điều này có thể sẽ tạo vị thế cân bằng hình thức cho các hướng dẫn giải.

Hướng dẫn giải 3 tạo sự ngắt quãng hợp đồng đối với phép đối xứng trục và phép tịnh tiến.

#### **-Cái cần quan sát**

Hướng dẫn giải 1: đường gấp khúc mới không tương đương đường gấp khúc cũ vì AB thay đổi, hướng dẫn giải 2 sử dụng phép tịnh tiến chưa đúng, hướng dẫn giải 3 có hai đầu đường gấp khúc mới đều cố định.

#### **-Dự đoán câu trả lời có thể**

+Hướng dẫn giải 1 hoặc 2: phần lớn học sinh sẽ chọn vì hướng dẫn giải 1 có hai đầu của đường gấp khúc mới cố định, hướng dẫn giải 2 có chiều dài của đường gấp khúc cũ và mới bằng nhau hoặc học sinh thấy quen thuộc với phép đối xứng trục và phép tịnh tiến.

+Hướng dẫn giải 3: chỉ một số ít học sinh chọn vì trong sách giáo khoa và sách bài tập không có bài toán tối ưu giải bằng phép quay.

Việc dấu đi chiến lược vẽ thêm sẽ làm cho tỉ lệ chọn câu đúng và câu sai có một khoảng cách.

### **3.6.Phân tích hậu nghiệm**

Thực nghiệm A được tiến hành vào thời điểm đầu tháng 4, tại ba trường Trung học phổ thông thuộc thành phố Biên Hòa, Đồng Nai: Ngô Quyền, Trần Biên, Nguyễn Trãi với 133 học sinh, vắng 1.

Sản phẩm thu được: 133 bài làm các bài toán a, b, c của học sinh.

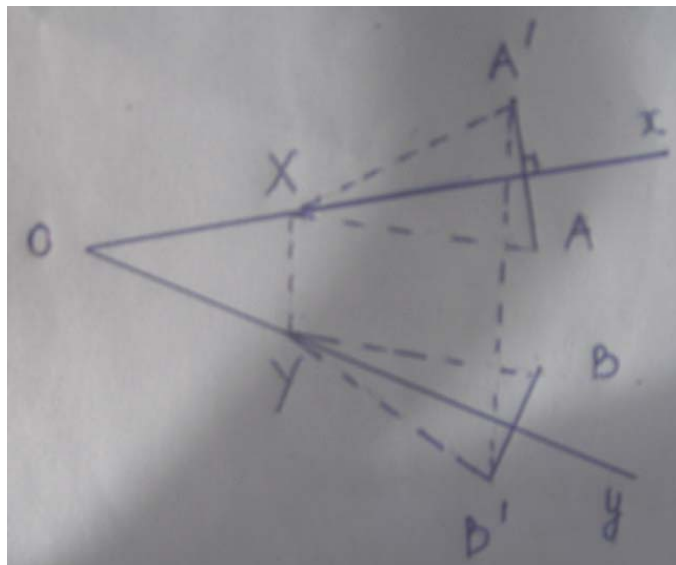
#### **3.6.1.Bài toán a**

##### **Bảng 3.1.Thống kê kết quả thực nghiệm**

| Số học sinh | Đối xứng trục |     | Kỹ thuật khác: Sai | Bỏ trống |
|-------------|---------------|-----|--------------------|----------|
|             | Đúng          | Sai |                    |          |
| 133         | 110           | 15  | 5                  | 3        |

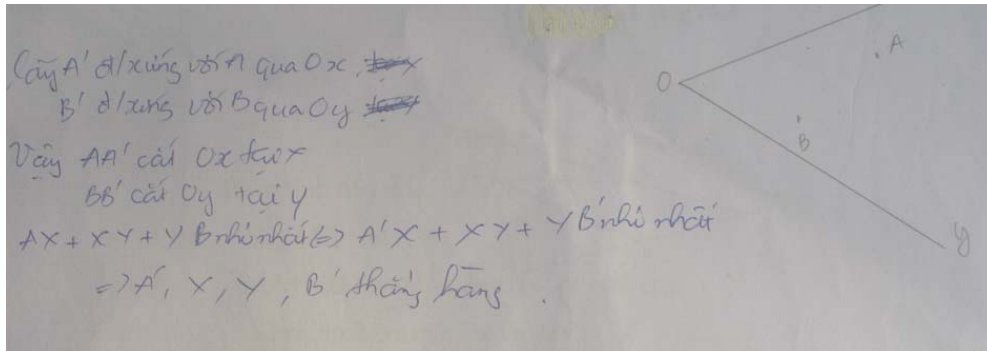
Qua bảng thống kê, tỉ lệ học sinh sử dụng phép đối xứng trục là 125/ 133 (93,98%); các bài làm cụ thể như sau:

HT10:



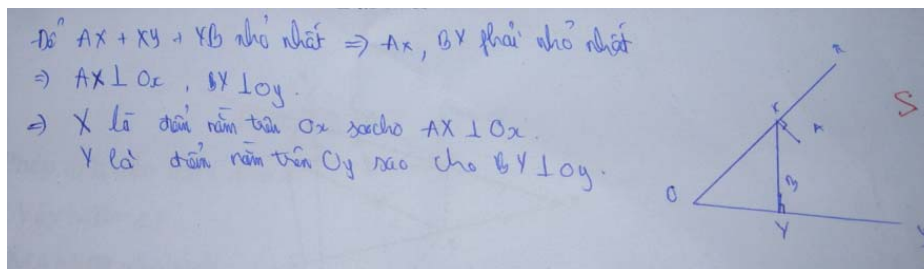
Ta có :  $\text{Đon}(A) = A'$   
 $\text{Đoy}(B) = B'$   
 Để  $AX + XY + YB$  nhỏ nhất  
 $\Rightarrow A'X + XY + YB'$  nhỏ nhất  
 $\Rightarrow A', X, Y, B'$  thẳng hàng.  
 $X$  là giao điểm của  $Ox$  và  $AA'$   
 $Y$  là giao điểm của  $Oy$  và  $BB'$

HT25



Có 5 bài giải theo kỹ thuật khác nhưng không đạt; chẳng hạn:

HT28:



Những bài bỏ trống có thể do các em quên kiến thức đã học từ đầu năm học.

So với phân tích tiên nghiệm kết quả này phù hợp.

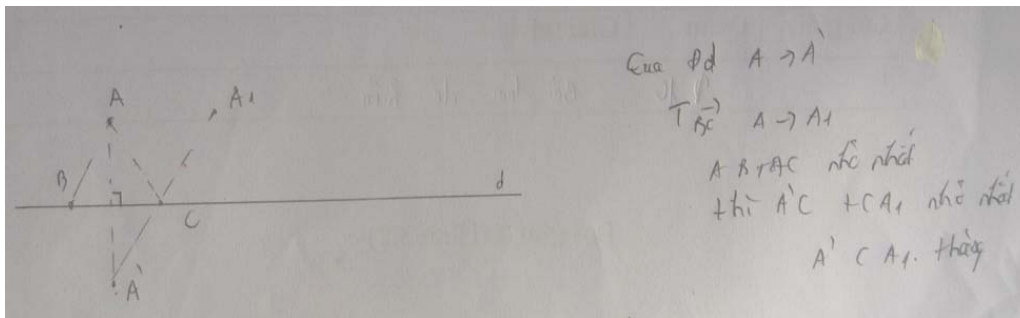
### 3.6.2. Bài toán b

**Bảng 3.2. Thống kê kết quả thực nghiệm**

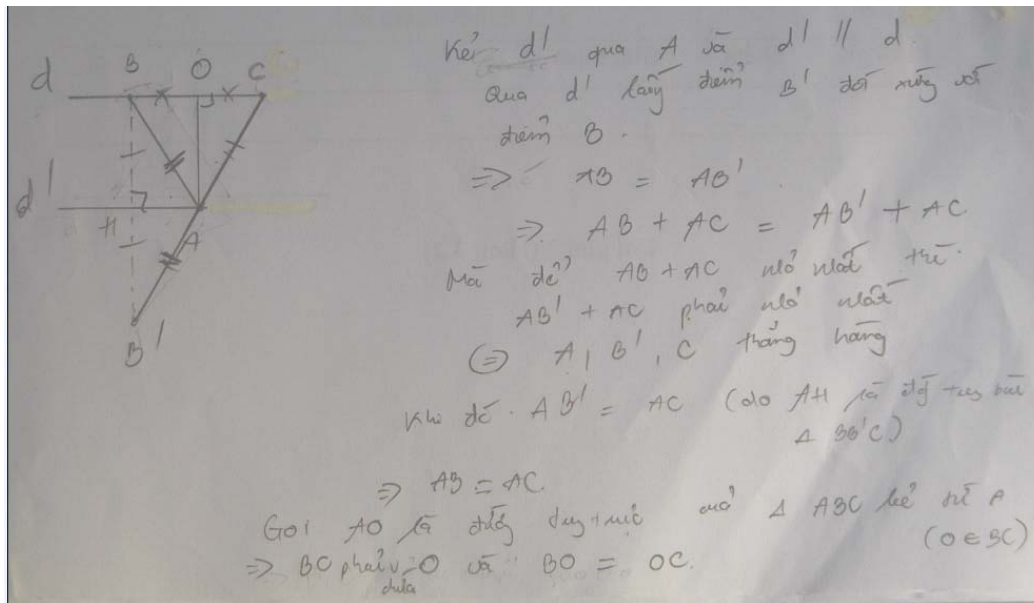
| Số học sinh | Tỉnh tiến & đối xứng trực: đúng | Đối xứng trực |     | Tỉnh tiến sai | Kỹ thuật khác |     | Bỏ trống |
|-------------|---------------------------------|---------------|-----|---------------|---------------|-----|----------|
|             |                                 | Đúng          | Sai |               | Đúng          | Sai |          |
| 133         | 4                               | 2             | 64  | 4             | 11            | 27  | 21       |

Qua bảng thống kê, tỉ lệ học sinh dùng phép đối xứng trực hoặc tỉnh tiến là 74/(133-21) (66,07%); những bài làm thực tế của học sinh như sau:

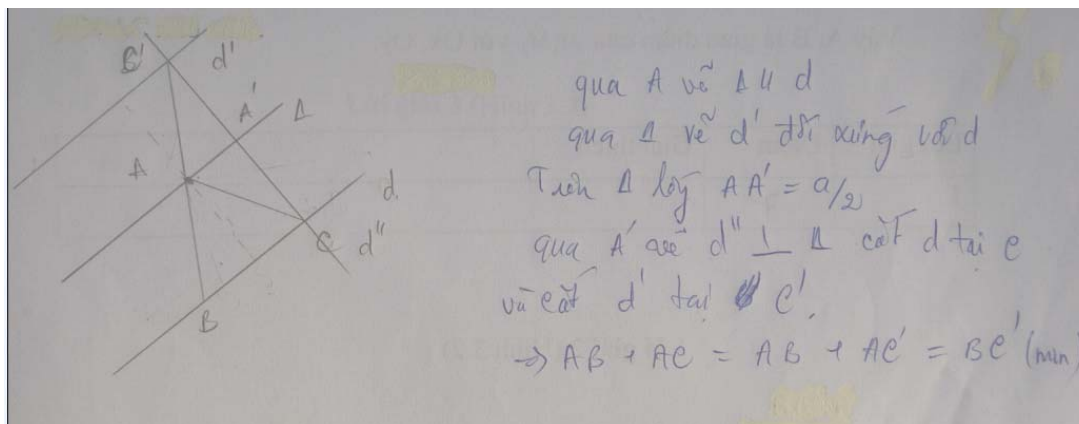
HT19:



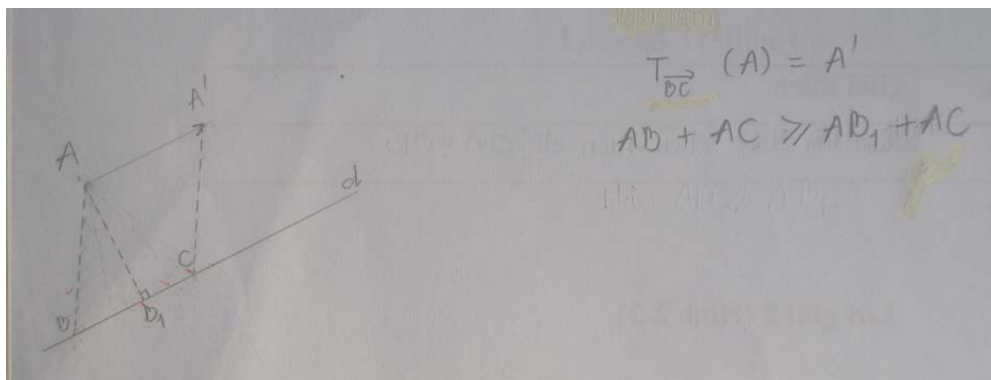
HN14:



HN15:

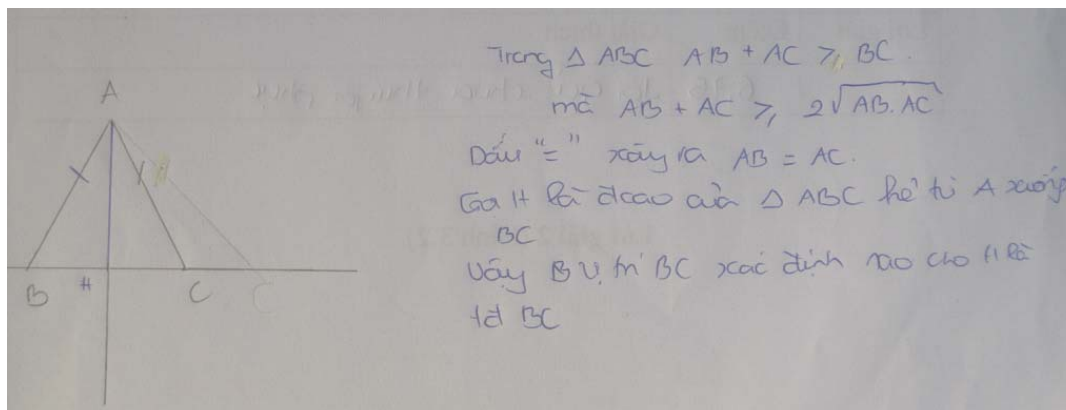


HQ33:

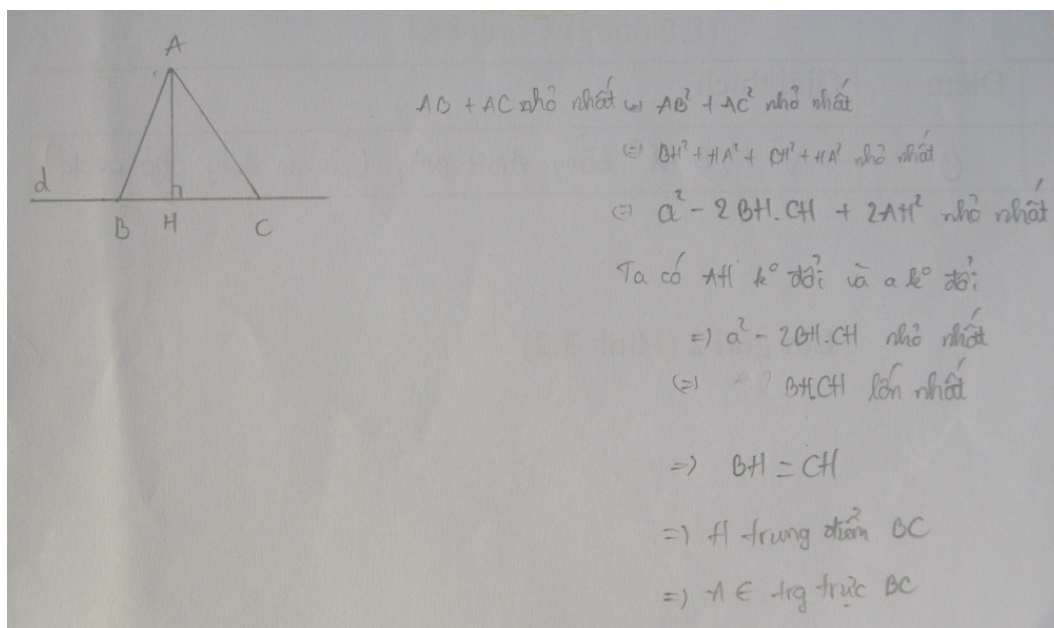


Các em còn dùng kỹ thuật khác; trong những bài sai các em đã sử dụng các kiến thức: phép quay, lượng giác, vec tơ, định lý Pythagore, đối xứng tâm, bất đẳng thức hình học và trình bày chưa đúng. Bài làm cụ thể:

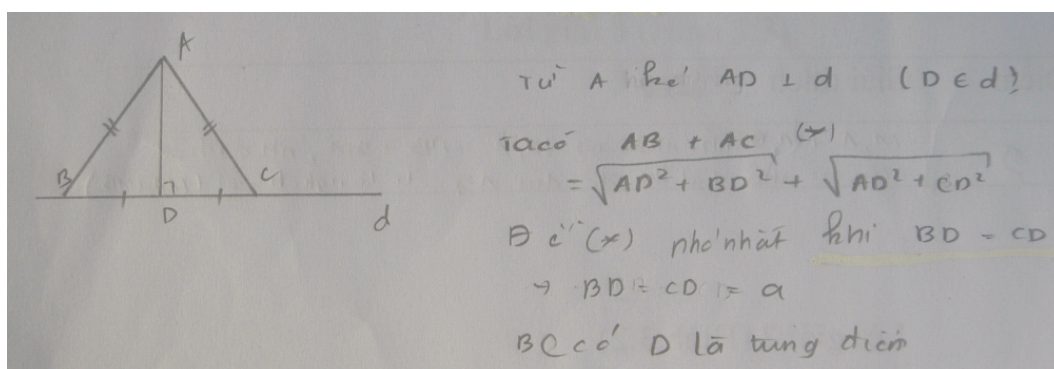
HN12:



HN29:



HN31:



Có 21 bài bỏ trống; có thể do bài toán b này khó với các em.

So với phân tích tiên nghiệm chiến lược tổng bình phương thực chất là dạng khác của bất đẳng thức Cô-si.

### 3.6.3. Bài toán c

**Bảng 3.3. Thống kê kết quả thực nghiệm**

| Số học sinh | Có ảnh hưởng của phép đối | Có ảnh hưởng của phép đối | Không ảnh hưởng của phép đối | Không ảnh hưởng của phép đối | Bỏ trống |
|-------------|---------------------------|---------------------------|------------------------------|------------------------------|----------|
|             |                           |                           |                              |                              |          |

|     |                                                    |                                                          |                                                    |                                                          |   |
|-----|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---|
|     | xúng trục<br>hoặc tịnh tiến<br>+ Hiểu phép<br>quay | xúng trục<br>hoặc tịnh tiến<br>+ Không hiểu<br>phép quay | xúng trục<br>hoặc tịnh tiến<br>+ Hiểu phép<br>quay | xúng trục<br>hoặc tịnh tiến<br>+ Không hiểu<br>phép quay |   |
| 133 | 68                                                 | 26                                                       | 17                                                 | 16                                                       | 6 |

( Trong 68 bài, số bài có điểm của hướng dẫn giải 1 hoặc 2 lớn hơn hay bằng điểm của hướng dẫn giải 3 là 45)

Qua bảng thống kê, tỉ lệ học sinh có ảnh hưởng của phép đối xứng trục hay tịnh tiến là 94/133 (70,67%); bài làm thực tế của học sinh như sau:

**Bảng 3.4. Bài làm có ảnh hưởng của phép đối xứng trục hay tịnh tiến**

| Mã số | Hướng dẫn giải | Điểm | Giải thích |
|-------|----------------|------|------------|
| HQ11  | 1              | 10   |            |
|       | 2              | 2    |            |
|       | 3              | 9    |            |
| HQ12  | 1              | 9    |            |
|       | 2              | 10   |            |
|       | 3              | 10   |            |
| HQ15  | 1              | 6    |            |
|       | 2              | 9    |            |
|       | 3              | 10   |            |

Tỉ lệ học sinh có thể chưa hiểu phép quay là:  $26 + 16 + 45 + 6 / 133$  (69,92%); chẳng hạn:

**Bảng 3.5. Bài làm không hiểu phép quay**

| Mã số | Hướng dẫn giải | Điểm | Giải thích |
|-------|----------------|------|------------|
| HQ23  | 1              | 6    |            |
|       | 2              | 7    |            |

|      |   |   |                              |
|------|---|---|------------------------------|
|      | 3 | 7 | A chưa cố định               |
| HQ40 | 1 | 5 | Tại sao + AB                 |
|      | 2 | 4 |                              |
|      | 3 | 8 | $MB + MB^*$ tại sao nhỏ nhất |

Chúng tôi tính cả 45 vì số này gồm các bài có điểm của hướng dẫn giải 1 hoặc 2 lớn hơn hoặc bằng điểm của hướng dẫn giải 3. Nếu phải chọn một trong ba hướng dẫn giải học sinh có thể chọn hướng dẫn giải 1 hoặc 2.

17 là số các em có khả năng thực hiện được thực nghiệm B; các em không chịu ảnh hưởng của phép đối xứng trục hay phép tịnh tiến nhưng có thể hiểu phép quay. Chẳng hạn bài làm sau:

**Bảng 3.6. Bài làm hiểu phép quay**

| Mã số | Hướng dẫn giải | Điểm | Giải thích |
|-------|----------------|------|------------|
| HQ32  | 1              | 4,5  |            |
|       | 2              | 0    |            |
|       | 3              | 9,5  |            |

Còn 6 bài bỏ trống; có thể các em không quen thuộc với phép quay trong loại toán này, có sự cân nhắc khó khăn giữa ba hướng dẫn giải.

So với phân tích tiên nghiệm kết quả này phù hợp.

### 3.7. Kết luận

Thực nghiệm A đã chứng tỏ sự hợp thức của H2 và H3.

Vì vậy thực nghiệm A là cơ sở để tiến hành thực nghiệm B.

## THỰC NGHIỆM B

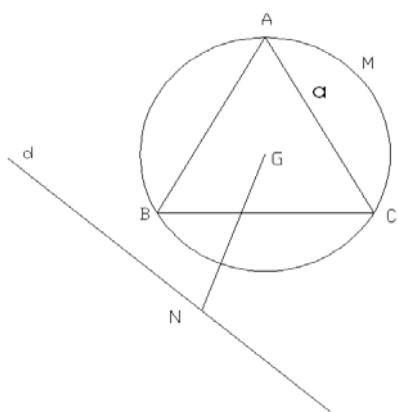
### 3.8. Mục đích

Thực nghiệm A chứng tỏ sự hợp thức của H2 và H3. Vì vậy chúng tôi tiến hành thực nghiệm B nhằm thiết lập một tình huống cho phép học sinh tiếp cận phép quay trong việc giải bài toán tối ưu.

### 3.9. Bài toán cơ sở: [13, tr100, bài 3]

Cho tam giác đều ABC cạnh a.

- a) Cho M là một điểm trên đường ngoại tiếp tam giác ABC. Tính  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  theo a;
- b) Cho đường thẳng d tùy ý, tìm điểm N trên đường thẳng d sao cho  $NA^2 + NB^2 + NC^2$  nhỏ nhất.



Hình 3.12

**Kỹ thuật:** [ 15, tr127, bài 3] (Hình 3.12)

a) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC:

$$MA^2 = \overline{MA}^2 = (\overline{MG} + \overline{GA})^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GA}$$

Ta có biểu thức tương tự của  $MB^2, MC^2$ .

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overline{MG} \cdot (\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 2a^2 \end{aligned}$$

b)  $NA^2 + NB^2 + NC^2 = 3NG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$$NA^2 + NB^2 + NC^2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow NG^2 \text{ nhỏ nhất}$$

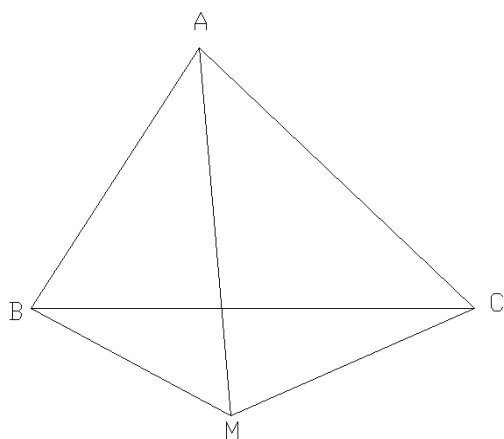
$\Leftrightarrow N$  là hình chiếu vuông góc của G lên d.

**Mục đích của bài toán cơ sở:** từ bài toán này chúng ta có thể phát triển nó để được bài toán thực nghiệm: N không trên d,  $NA^2 + NB^2 + NC^2$  thành  $NA + NB + NC$ .

**3.10. Bài toán thực nghiệm** ( Tham khảo: [6, tr33,66], [1, tr38], [24, tr206], [26, tr66] )

**Thông báo bài toán:**

Cho tam giác ABC có các góc nhọn. Bằng phép biến hình trong mặt phẳng, hãy tìm điểm M sao cho  $MA + MB + MC$  nhỏ nhất, bằng cách thực hiện lần lượt các nhiệm vụ được ghi trên ba phiếu, các em sẽ được phát.



Hình 3.13

**Phiếu 1:** Chúng ta sử dụng phép biến hình nào để giải bài toán? Vì sao?

**Phiếu 2:** Chúng ta dùng phép quay nào để có tổng mới bằng tổng cũ, là một đường gấp khúc liền nét với hai đầu cố định? (Có thể chọn phép biến hình khác).

**Phiếu 3:** M thuộc hai đường liền nét nào? Vì sao?

### 3.11. Dàn dựng kịch bản

Thực nghiệm được tiến hành cũng với những học sinh lớp 11 đã tham dự trong thực nghiệm A; vẫn có sự tham gia của giáo viên thực nghiệm và giáo viên của lớp.

Thời gian thực nghiệm: 90 phút được chia làm 5 pha sau:

**Pha 1:** làm việc tập thể ( 10 phút ). Giáo viên thực nghiệm phát Thông báo bài toán và Phiếu 1, điều khiển cả lớp trả lời, hợp thức Phiếu 1.

**Pha 2:** làm việc theo nhóm ( 40 phút ). Các nhóm được phát Phiếu 2, các tờ giấy lớn, bút, thước, compa để làm bài.

**Pha 3:** thảo luận lớp ( 10 phút ). Giáo viên thực nghiệm hướng dẫn các nhóm treo sản phẩm lên bảng và học sinh sẽ cho ý kiến đánh giá các sản phẩm của pha 2. Sơ kết điểm thi đua của các nhóm.

**Pha 4:** làm việc nhóm ( 20 phút ). Giáo viên thực nghiệm phát Phiếu 3. Các nhóm thảo luận và tiếp tục ghi lời giải chung vào tờ giấy lớn đã được sử dụng ở pha 2.

**Pha 5:** Tổng kết ( 10 phút ). Giáo viên điều khiển cả lớp đánh giá kết quả của pha 4, tổng kết bài toán, tính điểm và chọn nhóm thắng cuộc.

### 3.12. Phân tích tiên nghiệm

#### +Biến tình huống

V1: tam giác có ba góc nhỏ hơn  $120^\circ$ , tam giác có một góc lớn hơn hay bằng  $120^\circ$ .

V2: phương thức làm việc của học sinh.

+**Biến didactic**

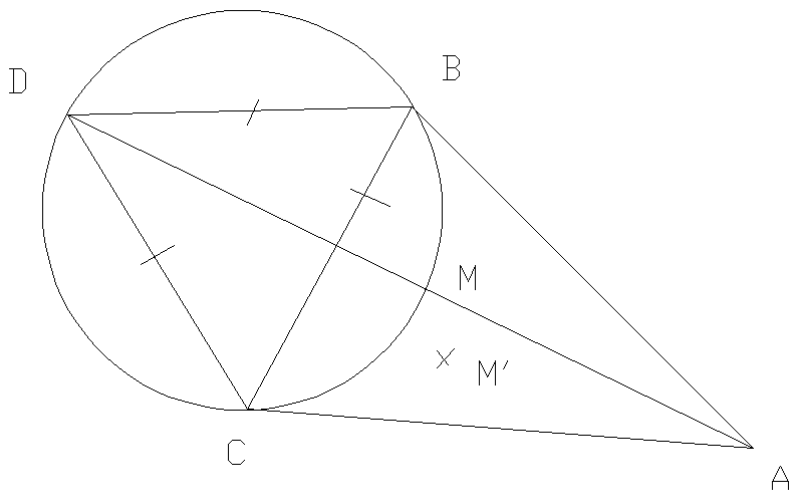
V3: Khối lớp

V4: Yêu cầu của câu hỏi

+**Chiến lược**

.**Vẽ thêm các đường phụ:**

**\* Bất đẳng thức về cạnh tam giác liên quan đến một bất đẳng thức khác ( Hình 3.14 ) [ 6, tr33, 103, bài 3.1.10]**

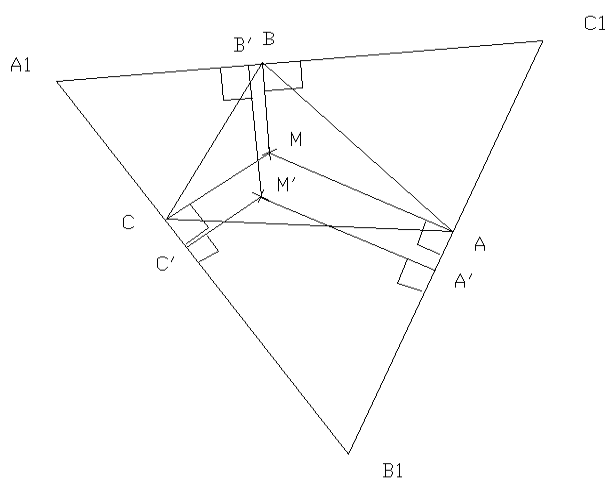


Hình 3.14

Cần chứng minh với một điểm  $M'$  tùy ý ở trong tam giác  $ABC$  khác  $M$  thì  $M'A + M'B + M'C \geq MA + MB + MC$  bằng cách sử dụng bất đẳng thức  $M'B + M'C \geq M'D$  [ 6, tr33, 103, bài 3.1.9]

**\* Bất đẳng thức về cạnh tam giác liên quan đến diện tích ( Hình 3.15 )**

[ 6, tr 66, 165, bài 6.7.8]



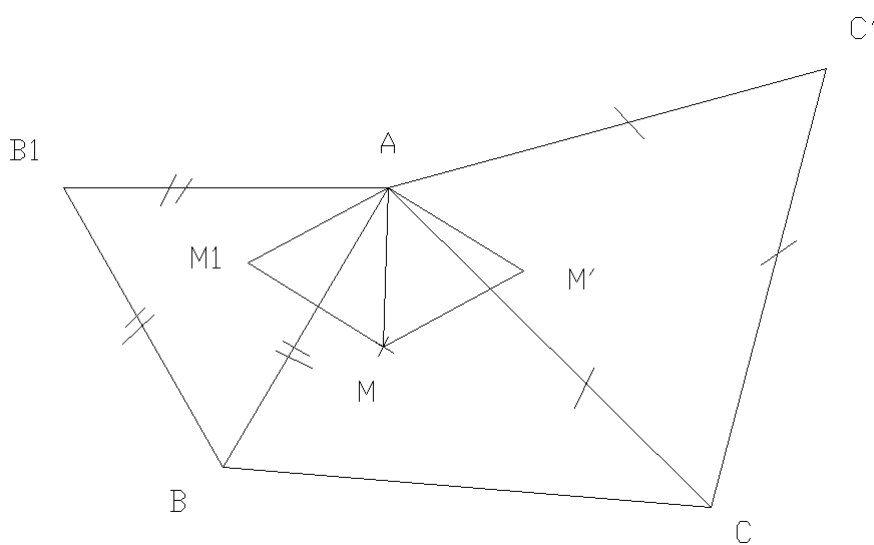
Hình 3.15

Bên trong tam giác  $ABC$  tồn tại một điểm  $M$  nhìn các cạnh dưới một góc  $120^\circ$ . Vẽ tam giác đều  $A_1B_1C_1$ .

$M'$  là điểm bất kỳ nằm trong tam giác  $ABC$ , khác  $M$

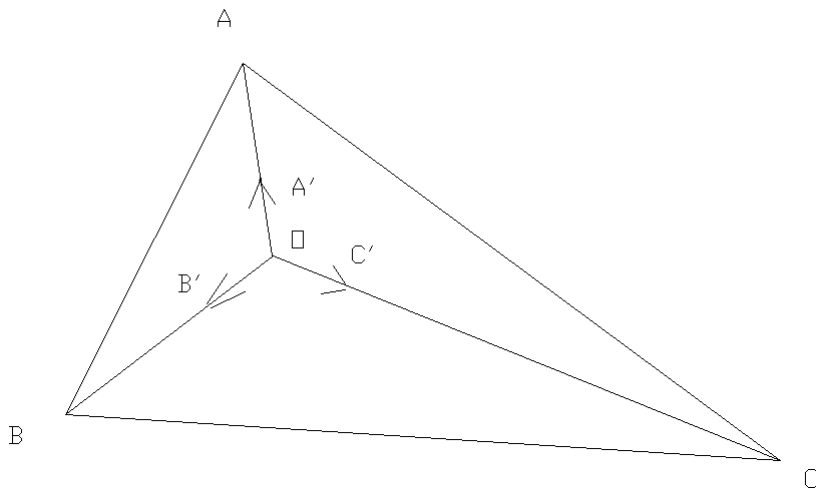
Ta chứng minh  $M'A + M'B + M'C > MA + MB + MC$  bằng sử dụng diện tích.

**\* vẽ các tam giác đều ( Hình 3.16 ) [ 1, tr 38, 84, bài 10]**



Hình 3.16

**.Vec tơ ( Hình 3.17 ) [ 24, tr 206, bài 18, tr 198, bài 9]**



Hình 3.17

Tồn tại một điểm O trong tam giác ABC nhìn các cạnh dưới một góc  $120^\circ$

Trên 3 tia OA, OB, OC vẽ 3 véc tơ đơn vị  $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}$

Suy ra tam giác A'B'C' đều và

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{OA}}{OA} + \frac{\overrightarrow{OB}}{OB} + \frac{\overrightarrow{OC}}{OC} = \vec{0}$$

$$MA + MB + MC$$

$$= \frac{MA \cdot OA}{OA} + \frac{MB \cdot OB}{OB} + \frac{MC \cdot OC}{OC}$$

$$\geq \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{OA}}{OA} + \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{OB}}{OB} + \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{OC}}{OC}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OA}}{OA} + \frac{(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OB}}{OB} + \frac{(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OC}}{OC}$$

$$= OA + OB + OC$$

## .Phép biến hình

**\*Đối xứng trục:** hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là một phép quay. Mỗi phép quay đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau. [3, tr10, bài tập 32 a, b]

**\*Phép tịnh tiến:** cho phép đối xứng trục  $D_a$  qua đường thẳng a và phép tịnh tiến T theo véc tơ  $\vec{v}$  vuông góc với a. Hợp thành của  $D_a$  và T hay T và  $D_a$  đều là phép đối xứng trục. [3, tr8, bài tập 20 e]

**\*Phép quay** ( Hình 3.18 ) [ 26, tr 66, ví dụ 12]



Mục đích pha 1 là tạo tình huống cho học sinh nhận thức rằng trong trường hợp này cả ba phép biến hình: phép đối xứng trục, phép tịnh tiến, phép quay đều có thể sử dụng được. Tuy nhiên có phải phép quay là thuận lợi hơn cả hay không. Chúng tôi nghĩ điều đó sẽ đạt được. Qua bài toán c của thực nghiệm A hay bài tập về nhà một ít học sinh có thể nhận ra hiệu quả của phép quay.

**+Pha 2:**

Các nhóm học sinh chọn một phép biến hình và tiến hành giải bài toán trên các tờ giấy lớn được phát.

Các nhóm bảo đảm phép biến hình được chọn thỏa các yêu cầu của bài toán. Trong lúc này giáo viên có thể giúp các nhóm hiểu kỹ yêu cầu bài toán.

**+Pha 3:**

Các nhóm đánh giá kết quả của pha 2 và hợp thức hóa. Nhóm có bài giải tốt được tính tối đa 10 điểm.

**+Pha 4:**

Các nhóm tìm vị trí của M bằng cách thực hiện Phiếu 3.

Ở pha này chương ngại của pha thứ hai đã được giải quyết; vì vậy các nhóm có thuận lợi để tiếp tục vượt qua chương ngại sau cùng này.

Hai đường liên nét cùng chứa M có thể là hai đoạn thẳng cố định hoặc một đoạn thẳng cố định và một cung tròn hoặc hai cung tròn.

**+Pha 5:**

Học sinh đánh giá kết quả của pha 4 và hợp thức hóa.

Giáo viên thực nghiệm tổng kết bài toán và chọn nhóm thắng cuộc. Buổi thực nghiệm kết thúc.

### **3.14. Phân tích hậu nghiệm**

Thực nghiệm B được thực hiện sau thực nghiệm A một tuần với 44 học sinh của lớp 11A2 trường Trung học phổ thông Ngô Quyền, những học sinh này đã tham gia thực nghiệm A.

Sản phẩm thu được: 6 tờ giấy lớn bài làm của 6 nhóm học sinh lớp 11A2.

#### **3.14.1. Ghi nhận tổng quát**

##### **Bảng 3.7. Tổng hợp kết quả chung**

| Kết quả/ Nhóm           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------------------------|---|---|---|---|---|---|
| Tìm được phép biến hình |   | X | X | X |   |   |
| Tìm được điểm M         | X | X |   | X | X | X |

**Pha 1:** (Làm việc tập thể lớp 10 phút)

Học sinh trả lời phiếu 1 với ba ý kiến khác nhau: có thể giải bài toán bằng: phép đối xứng trục hoặc tịnh tiến hoặc phép quay với các lý do vẫn tất, chưa cụ thể. Giáo viên thực nghiệm thể hiện vai trò trọng tài của mình.

Tuy nhiên với bài tập về nhà, học sinh sẽ nhận ra sự vận dụng kiến thức sau: ( Bài tập Hình học 11 nâng cao, trang 8, 10, bài tập 20e, 32 a,b)

+Hợp của hai phép đối xứng trục với các trục cắt nhau là phép quay; mỗi phép quay đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau.

+Hợp thành của phép đối xứng trục với phép tịnh tiến theo véc tơ vuông góc với trục ( Hay theo thứ tự ngược lại) là phép đối xứng trục.

Như vậy cả ba ý kiến trả lời của học sinh đều có thể vận dụng để giải bài toán.

**Pha 2:** (Làm việc nhóm 40 phút)

Các nhóm làm việc khá tốt: có thành viên đảm đương chung, cùng nhau trao đổi ý kiến giải quyết trong không khí hợp tác.

Có 3/6 nhóm đã tìm được một phép biến hình bảo đảm được yêu cầu của bài toán: một đối xứng trục, hai phép quay.

**Pha 3:** (Làm việc tập thể lớp 10 phút)

Các nhóm tìm được kết quả trình bày sản phẩm của mình trên bảng đen lớp, trao đổi ý kiến chung. Kết quả của pha 2 đã được hợp thức.

**Pha 4:** (Làm việc theo nhóm 20 phút)

Các nhóm đạt được kết quả tiếp tục tìm vị trí của điểm M.

Các nhóm khác sửa bài và cùng thực hiện yêu cầu của pha này. Các nhóm đã cơ bản hoàn thành sau 20 phút.

**Pha 5:** (Tổng kết tập thể lớp 10 phút)

Các nhóm trình bày kết quả và hợp thức đáp số tìm được.

**3.14.2. Phân tích chi tiết**

## Sự xuất hiện phép quay

+Với bài tập về nhà học sinh nhận thức được để tạo thành một đường gấp khúc chỉ cần dời một đoạn thẳng trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC.

+Trong việc thực hiện pha 2, nhóm 4 tập trung sử dụng phép đối xứng trục, nhóm 5, 6 quan tâm đến phép tịnh tiến, ba nhóm còn lại đều tìm cách vận dụng phép quay.

+Các thành viên giải nháp, cùng trao đổi cách giải, khó khăn gặp phải.

Nhóm 2 đã phát hiện đầu tiên: phép quay, góc  $60^\circ$  thỏa yêu cầu bài toán.

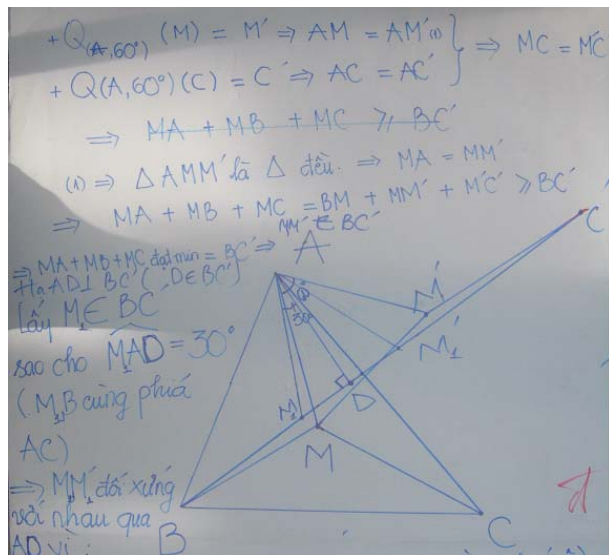
Nhóm 4 giải bằng phép đối xứng trục; trong quá trình giải có trục trặc nhỏ: lúc đầu các em cho hai trục vuông góc nhau; nhóm đã đổi mặt tờ giấy để làm bài và các em cũng thành công bằng phép đối xứng trục. Nhóm này có tinh thần đoàn kết, hăng hái làm bài.

Nhóm 3 cũng tìm được kết quả; bài giải có một lỗi nhỏ: dấu giá trị của góc quay. Tuy nhiên các em đã cơ bản vận dụng được phép quay vào bài làm.

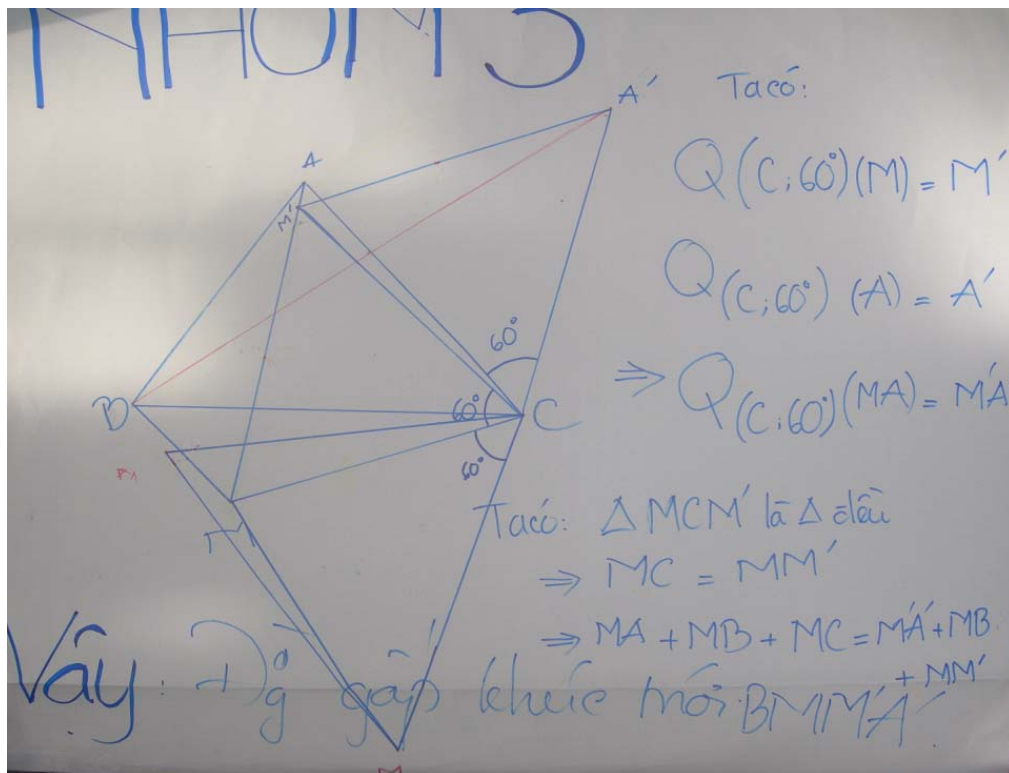
Các nhóm còn lại không tìm được đáp số trong thời gian cho phép. Nhóm 1 loay hoay với phép quay trong giấy nháp, nhóm 5 và 6 tìm cách áp dụng phép tịnh tiến.

+Bài giải của các nhóm trong pha 2 như sau:

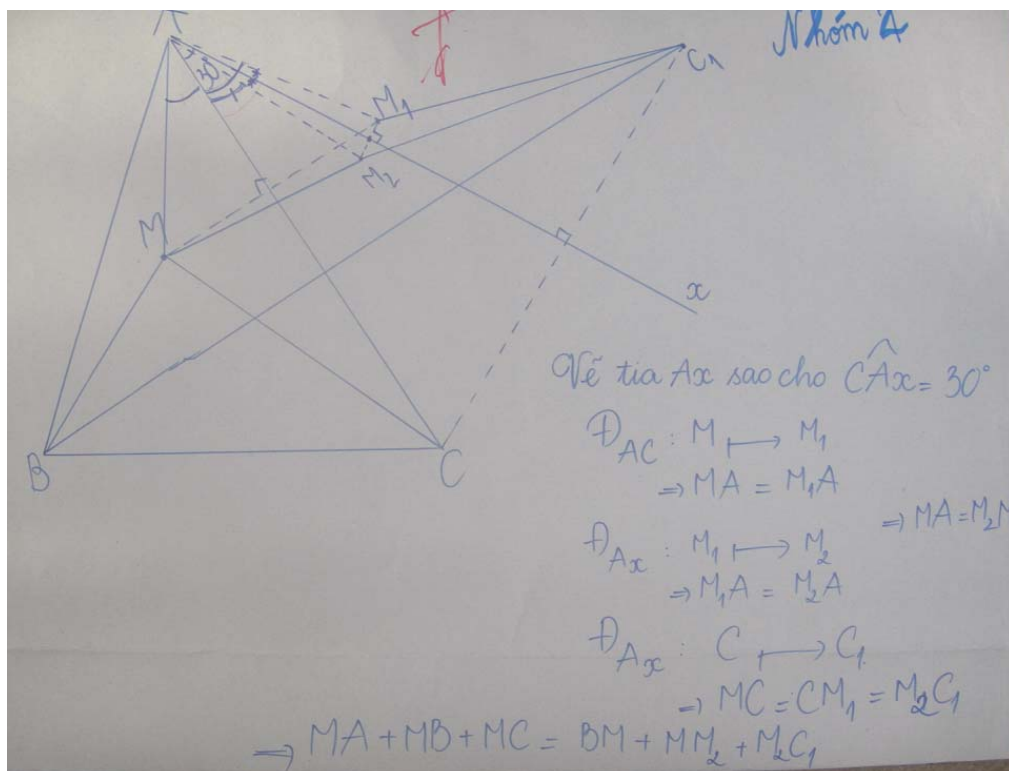
Nhóm 2:



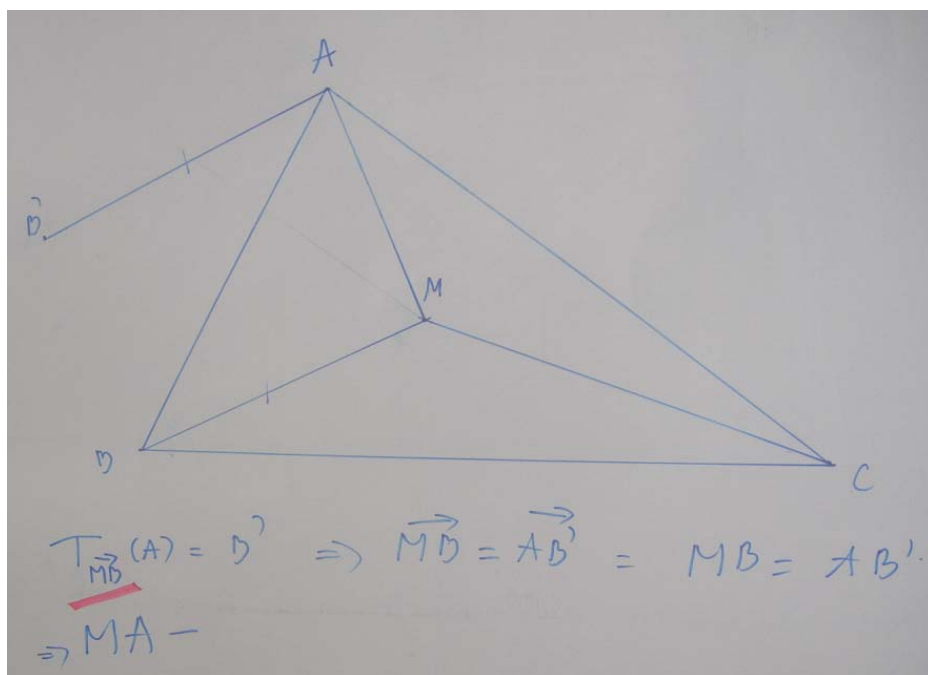
Nhóm 3:



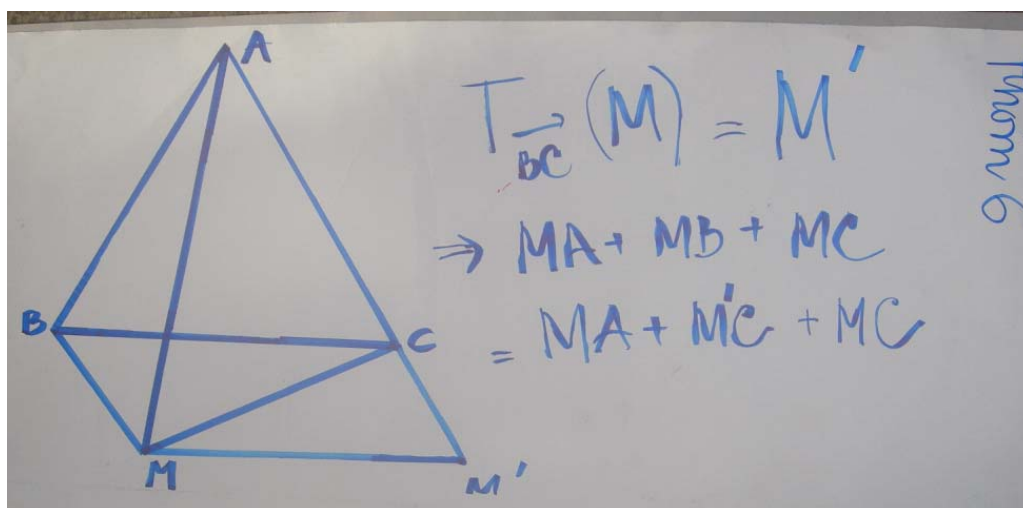
Nhóm 4:



Nhóm 5:



Nhóm 6:



+So với phân tích tiên nghiệm, những chiến lược giải của các nhóm như đã dự đoán.

Trong các chiến lược có thể, điều chúng tôi mong đợi là có nhóm giải bài toán bằng phép quay để đạt mục đích thực nghiệm: triển khai tiểu đề án dạy học giải bài toán tối ưu bằng phép quay.

Qua thực nghiệm chúng ta nhận thấy trong ba nhóm thành công có hai nhóm sử dụng phép quay và một nhóm vận dụng phép đối xứng trục. Điều này đã được chúng tôi dự kiến trong phân tích tiên nghiệm: phép quay là thuận lợi hơn.

+Chúng tôi nghĩ nhóm 4 dùng phép đối xứng trục hay nhóm 5, 6 dùng phép tịnh tiến là do có sự ảnh hưởng mạnh của giả thuyết H2.

## Vị trí của M

+Nhóm 2 đã phát hiện đầu tiên: M là giao điểm của đoạn thẳng cố định nối hai đầu đường gấp khúc và tia hợp với tia vuông góc với đoạn thẳng cố định một góc  $+30^\circ$ .

Kể đến nhóm 4: M là giao điểm của hai đoạn thẳng cố định; đoạn thẳng thứ hai được vẽ tương tự đoạn thẳng thứ nhất.

Nhóm 1 tương tự nhóm 4.

Nhóm 5: M là giao điểm của đoạn thẳng và một cung.

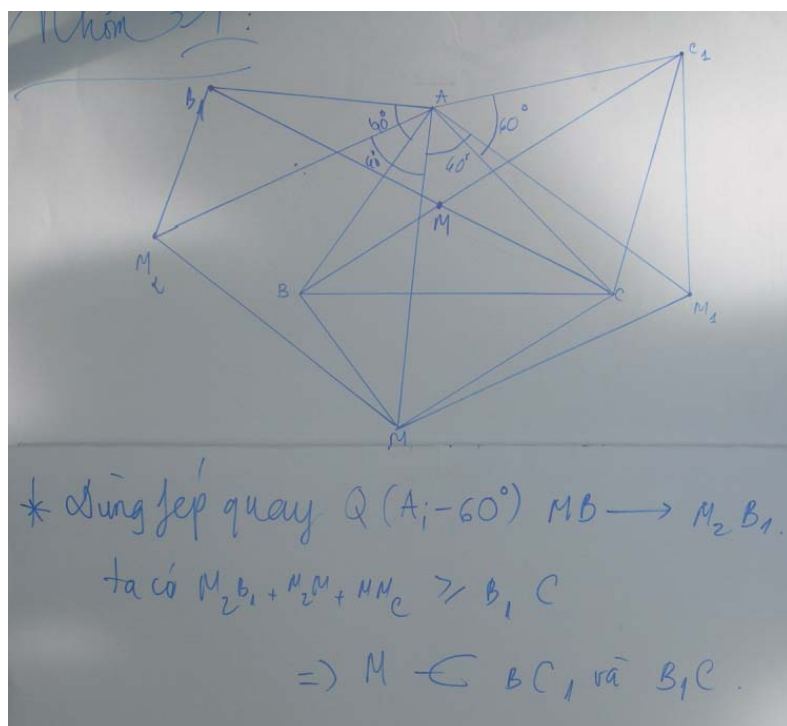
Nhóm 3 sai do lời giải đã dời hai lần cùng một đoạn thẳng với cùng một tâm quay có góc quay hai lần đối nhau; vì vậy hai đoạn thẳng cố định cùng xuất phát từ một đỉnh của tam giác và không cắt nhau.

Nhóm 6 tìm được kết quả như nhóm 4 nhưng các em nộp bài trễ.

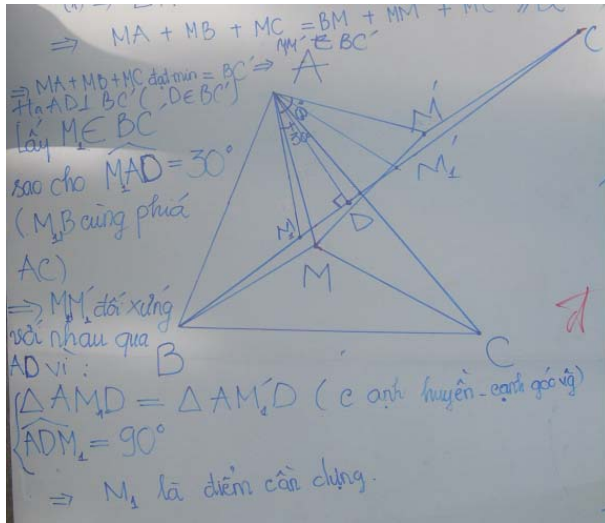
+Các nhóm trình bày kết quả và hợp thức vị trí của điểm M.

+Bài làm của các nhóm cụ thể như sau:

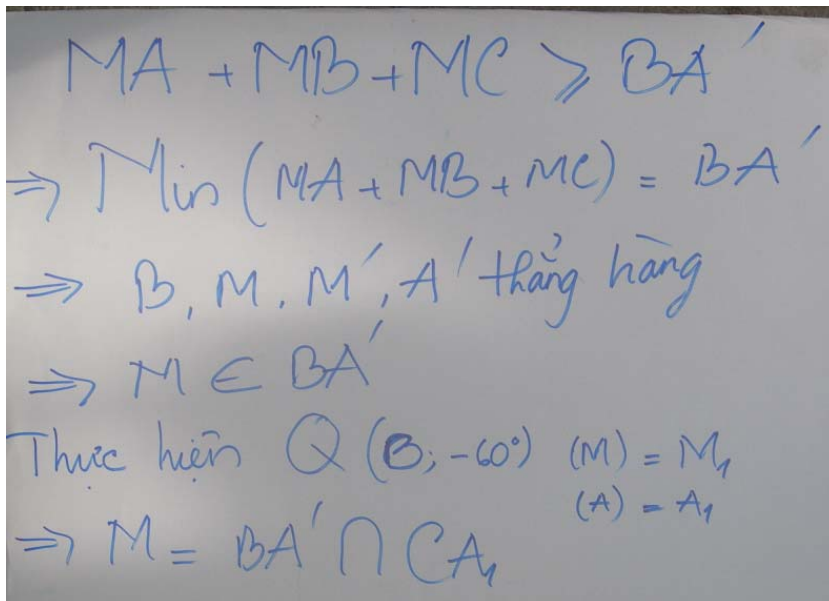
Nhóm 1:



## Nhóm 2:



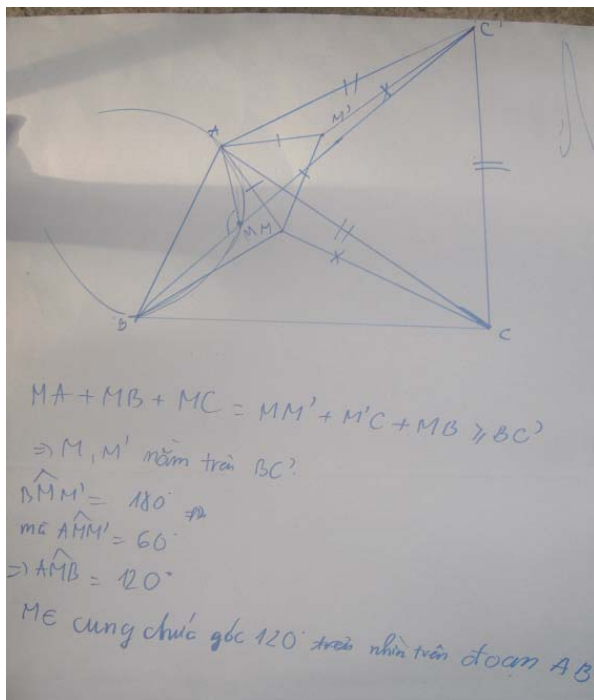
## Nhóm 3:



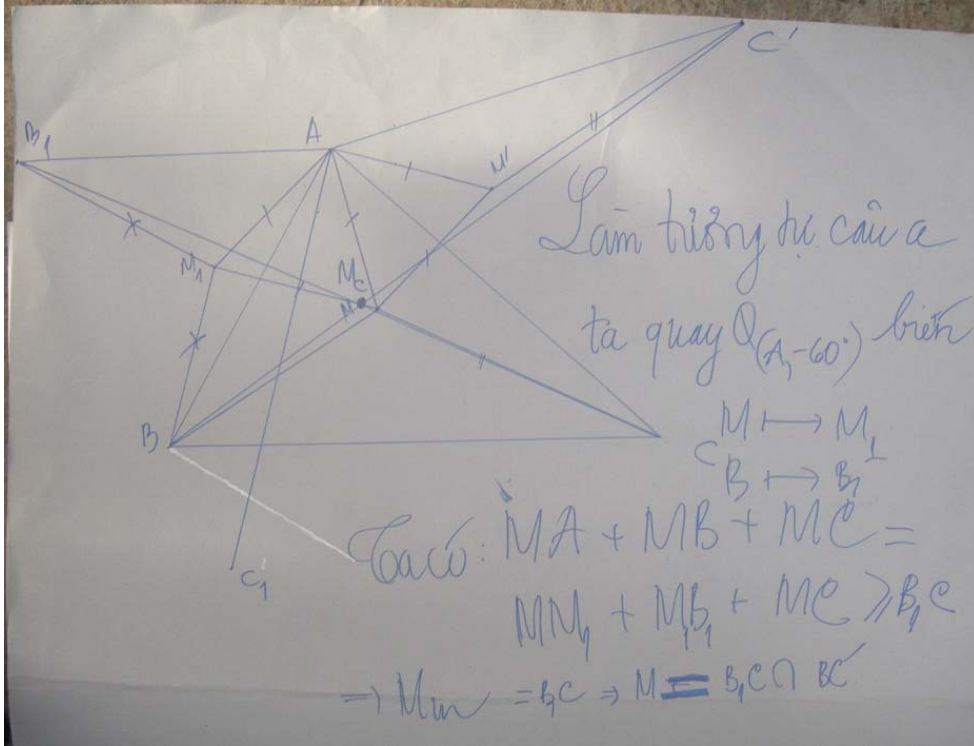
Nhóm 4:

Vậy  $MA + MB + MC \min \Leftrightarrow B, M, M_2, C_1$  thẳng hàng  
 $\Rightarrow M \in BC_1$   
 Lấy từ câu trên, dựng vẽ bên trái  $\triangle ABC$   
 Ta được đ thẳng  $CB_1 \Rightarrow M \in CB_1$   
 Vậy  $M = BC_1 \cap CB_1$

Nhóm 5:



### Nhóm 6:



+So với phân tích tiên nghiệm chúng tôi bổ sung chiến lược tìm điểm M của nhóm 2.

### 3.15.Kết luận

Đã có 2/6 nhóm vận dụng thành công phép quay để giải bài toán của thực nghiệm B. Điều này đã tạo một cơ hội đủ để học sinh được tiếp cận với phép quay trong việc giải bài toán tối ưu.

Thực nghiệm cũng tiếp tục khẳng định H2 vì đã có 3/6 nhóm sử dụng phép đối xứng trục hoặc phép tịnh tiến để giải bài toán.

## KẾT LUẬN

Với kết quả của ba chương 1, 2, 3 chúng tôi đã trả lời được những câu hỏi đã đặt ra; khẳng định các giả thuyết và có một tiểu đồ án dạy học đã được xây dựng và triển khai. Chúng tôi sẽ nêu lại những kết quả cơ bản đã đạt được trong từng chương cụ thể.

Chương 1, qua tìm hiểu vài nét lịch sử, phân tích giáo trình Toán đại học chúng tôi đã làm rõ đặc trưng của quan hệ thể chế ở Đại học với bài toán:

- Kiểu của bài toán tối ưu là bài toán thực tế tìm điều kiện cho một đối tượng để một đại lượng cực trị.

- Bài toán thuộc các phạm vi: Cơ học, Trắc địa, Hình học.

- Các tình huống của bài toán: sức căng, thời gian, chiều dài, diện tích, thể tích.

- Cách giải bài toán: lập hàm số và tính đạo hàm.

- Dự đoán: sinh viên có thể gặp khó khăn trong việc xử lý điểm tới hạn để tìm cực trị của hàm số.

Kết quả của chương 1 sẽ là tham chiếu cho việc nghiên cứu chương 2.

Chương 2, chúng tôi đã làm rõ đặc trưng và ràng buộc của thể chế dạy học ở trường phổ thông với bài toán:

- Bài toán tối ưu được nghiên cứu trong chương trình, sách giáo khoa Toán phổ thông của các lớp 7, 10, 11, 12.

- Phạm vi tác động của bài toán: Đại số, Hình học, Hình học giải tích, Giải tích.

- Các tình huống của bài toán: tiền lãi, tổng bình phương hình học, chiều dài, diện tích, thể tích, tích số học, vận tốc.

- Kỹ thuật giải bài toán: bất đẳng thức, đại số, hình học, tọa độ, giải tích.

- Hiệu quả của kỹ thuật giải tích đối với bài toán T4 đã được giải bằng các kỹ thuật khác:

Trong phạm vi chương trình Trung học phổ thông, kỹ thuật giải tích có thể giải được một số các bài toán T4 đã được giải bằng kỹ thuật khác.

Tuy nhiên cũng có những bài toán trong chương trình mà kỹ thuật giải tích có thể có khó khăn hơn so với các kỹ thuật khác hay không thể can thiệp; bản thân những bài toán này là những hàm số nhiều biến số.

Kết quả của việc phân tích mối quan hệ thể chế dẫn đến việc dự đoán các giả thuyết nghiên cứu:

**H1:** Kỹ thuật giải tích chưa đủ hiệu quả để giải được tất cả các bài toán tối ưu ở phổ thông.

**H2:** Học sinh có khuynh hướng sử dụng phép đối xứng trục hoặc phép tịnh tiến để giải bài toán tối ưu ở phổ thông.

**H3:** Phép quay chưa được học sinh sử dụng để giải bài toán tối ưu ở phổ thông.

**H4:** Học sinh có khó khăn trong việc lập hàm số hay xử lý điểm tới hạn trong việc tìm cực trị để giải bài toán tối ưu bằng kỹ thuật giải tích.

Chương 3 dành cho hai nghiên cứu thực nghiệm:

-Thực nghiệm A trên học sinh lớp 11 đã làm rõ quan hệ cá nhân của học sinh với bài toán tối ưu. Kết quả đã chứng tỏ sự tồn tại của H2 và H3. H3 là cơ sở cho thực nghiệm B.

-Thực nghiệm B: xây dựng và triển khai một tiểu đồ án dạy học cho phép học sinh tiếp cận với phép quay để giải bài toán tối ưu. Kết quả thu được tiếp tục khẳng định H2 và trong tình huống này phép quay là thuận lợi hơn cả so với phép đối xứng trục hoặc phép tịnh tiến.

Có những nội dung liên quan đến luận văn nhưng chúng tôi chưa có điều kiện nghiên cứu:

-Bài toán tối ưu với tình huống cơ sở là diện tích hình học.

-Câu hỏi: có tình huống nào mà việc giải bài toán tối ưu bằng bất đẳng thức hình học hay bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki là thuận lợi hơn cả?

-Việc kiểm chứng:

**H1:** Kỹ thuật giải tích chưa đủ hiệu quả để giải được tất cả các bài toán tối ưu ở phổ thông.

**H4:** Học sinh có khó khăn trong việc lập hàm số hay xử lý điểm tới hạn trong việc tìm cực trị để giải bài toán tối ưu bằng kỹ thuật giải tích.

Tồn tại này có thể sẽ là một nghiên cứu tiếp theo, được mở ra từ luận văn này./.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tiếng Việt

- 1.Vũ Hữu Bình (Chủ biên, 2007), *Các bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong Hình học phẳng ở Trung học cơ sở*, Nhà xuất bản giáo dục (NXBGD), Hà Nội.
- 2.Văn Như Cương (Chủ biên,2007), *Hình học 11 nâng cao*, NXBGD, Đồng Tháp.
- 3.Văn Như Cương (Chủ biên,2008), *Bài tập Hình học 11 nâng cao*, NXBGD, thành phố Hồ Chí Minh (tp HCM).
- 4.Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên, 2006), *Đại số 10 nâng cao*, NXBGD, tp HCM.
- 5.Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên, 2006), *Bài tập Đại số 10 nâng cao*, NXBGD, tp HCM.
- 6.Vũ Đình Hòa (2008), *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học phổ thông (THPT) Bất đẳng thức hình học*, NXBGD, tp HCM.
- 7.Đỗ Đình Hoan (Chủ biên,2008), *Toán 1*, NXBGD, Đà Nẵng.
8. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên,2008), *Toán 2*, NXBGD, Quảng Bình.
9. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên,2008), *Toán 3*, NXBGD, tp HCM.
10. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên,2008), *Bài tập Toán 4*, NXBGD, Cà Mau.
11. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên,2008), *Bài tập Toán 5*, NXBGD, Bạc Liêu.
- 12.Vũ Như Thư Hương (2005), *Khái niệm Xác suất trong dạy học Toán ở THPT*, Luận văn Thạc sĩ khoa học, Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh.
- 13.Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên, 2006), *Hình học 10*, NXBGD, tp HCM.
14. Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên, 2006), *Bài tập Hình học 10*, NXBGD, tp HCM.
- 15.Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên, 2006), *Hình học 10 Sách giáo viên*, NXBGD, tp HCM
- 16.Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên, 2007), *Hình học 11*, NXBGD, Buôn Ma Thuột.
- 17.Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên, 2007), *Bài tập Hình học 11*, NXBGD, Buôn Ma Thuột.
- 18.Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên, 2007), *Hình học 11 Sách giáo viên*, NXBGD, tp HCM.

19. Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên, 2008), *Hình học 12*, NXBGD, Kiên Giang.
20. Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên, 2008), *Bài tập Hình học 12*, NXBGD, Cà Mau.
21. Dương Đức Kim-Đỗ Duy Đồng (2008), *Giải bài tập Hình học 12 chương trình cơ bản*, Nhà xuất bản Thanh Hóa.
22. Dương Đức Kim-Đỗ Duy Đồng (2008), *Giải bài tập Giải tích 12 chương trình cơ bản*, Nhà xuất bản Thanh Hóa.
23. Nguyễn Thành Long (2004), *Nghiên cứu didactic về khái niệm Giới hạn trong dạy học Toán ở trường THPT*, Luận văn Thạc sĩ khoa học, Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh.
24. Nguyễn Văn Lộc (2007), *Phương pháp véc tơ trong giải toán Hình học phẳng*, NXBGD, Hải Dương.
25. Nguyễn Thị Nga (2007), *Nghiên cứu một đồ án didactic dạy học khái niệm Hàm số tuần hoàn*, Luận văn Thạc sĩ giáo dục học, Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh.
26. Đỗ Thanh Sơn (2008), *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THPT Phép biến hình trong mặt phẳng*, NXBGD tp HCM.
27. Tôn Thân (Chủ biên, 2008), *Toán 6*, NXBGD, tp HCM.
28. Tôn Thân (Chủ biên, 2006), *Toán 7*, NXBGD, Bình Dương.
29. Tôn Thân (Chủ biên, 2004), *Toán 8*, NXBGD, Đồng Tháp.
30. Tôn Thân (Chủ biên, 2006), *Toán 9*, NXBGD, Buôn Ma Thuột.
31. Tôn Thân (Chủ biên, 2008), *Bài tập Toán 6*, NXBGD, tp HCM.
32. Tôn Thân (Chủ biên, 2007), *Bài tập Toán 7*, NXBGD, Quận 8.
33. Tôn Thân (Chủ biên, 2005), *Bài tập Toán 8*, NXBGD, Nha Trang.
34. Tôn Thân (Chủ biên, 2005), *Bài tập Toán 9*, NXBGD, tp HCM.
35. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên, 2007), *Toán học cao cấp tập ba Phép tính giải tích nhiều biến số*, NXBGD, Phúc Yên.
36. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên, 2007), *Bài tập Toán cao cấp tập ba Phép tính giải tích nhiều biến số*, NXBGD, Hà Nội.
37. Vũ Tuấn (Chủ biên, 2006), *Đại số 10*, NXBGD, Buôn Ma Thuột.
38. Vũ Tuấn (Chủ biên, 2006), *Bài tập Đại số 10*, NXBGD, tp HCM.

39. Vũ Tuấn (Chủ biên, 2006), *Đại số 10 Sách giáo viên*, NXBGD, tp HCM.
40. Vũ Tuấn (Chủ biên, 2007), *Đại số và Giải tích 11*, NXBGD, Bình Thuận.
41. Vũ Tuấn (Chủ biên, 2007), *Bài tập Đại số và Giải tích 11*, NXBGD, tp HCM.
42. Vũ Tuấn (Chủ biên, 2008), *Giải tích 12*, NXBGD, Nha Trang.
43. Vũ Tuấn (Chủ biên, 2008), *Bài tập Giải tích 12*, NXBGD, Cà Mau.

### **Tiếng Pháp**

44. <http://www.chronomath.com/>, *l'histoire du probleme optimal.*

## **PHỤ LỤC**

Phụ lục A: Ba bài toán thực nghiệm A, bài tập về nhà.

Phụ lục B: Bài toán thực nghiệm B, bài làm của các nhóm trong pha 2, pha 4.

## PHỤ LỤC A

Họ và tên: **PHIẾU THỰC NGHIỆM** (Hình học phẳng)

Lớp: Biên Hòa, ngày tháng 4 năm 2009

Trường THPT .....

( Thời gian làm bài: 35 phút )

a) Cho góc nhọn  $xOy$  và  $A, B$  ở trong góc nhọn. Tìm  $X, Y$  trên  $Ox, Oy$  sao cho  $AX + XY + YB$  nhỏ nhất.

Bài làm

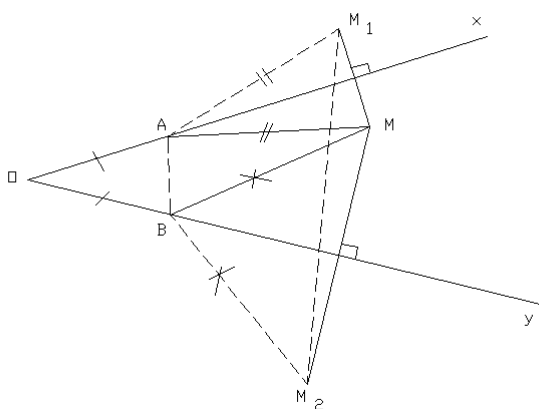
b) Cho trước điểm  $A$ , một đường thẳng  $d$  không qua  $A$ . Trên  $d$  ta đặt một đoạn thẳng  $BC = a$  (  $a$  là độ dài cho trước). Tìm vị trí của đoạn  $BC$  để  $AB+AC$  nhỏ nhất.

Bài làm

c) Cho điểm ba hướng dẫn giải của bài toán sau ( Tối đa là 10 điểm cho một hướng dẫn giải ) và cho biết lý do hướng dẫn giải đạt điểm đó; có thể đề nghị một hướng dẫn giải khác.

Cho góc  $xOy$  và điểm  $M$  nằm trong góc này. Tìm trên  $Ox$ ,  $Oy$  hai điểm  $A$ ,  $B$  sao cho  $OA=OB$  và  $MA+MB$  nhỏ nhất.

### Hướng dẫn giải 1 (Hình 3.1)



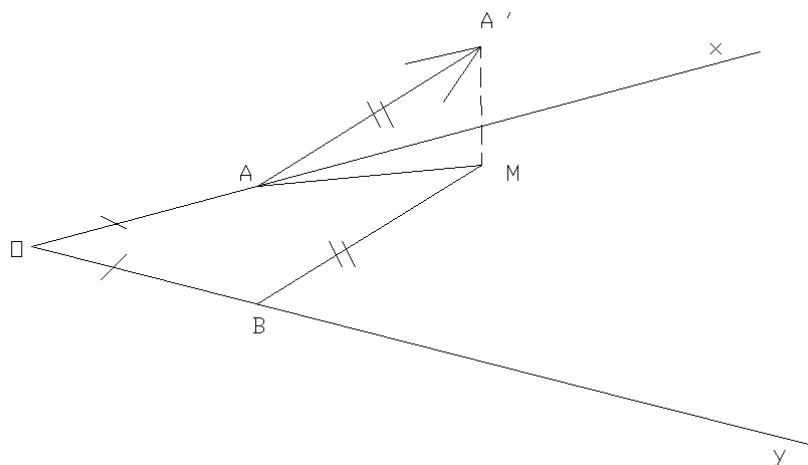
Hình 3.1

$MA+MB$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow M_1A+M_2B$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow M_1A+AB+BM_2$  nhỏ nhất

Vậy  $A$ ,  $B$  là giao điểm của  $M_1M_2$  với  $Ox$ ,  $Oy$ .

| Hướng dẫn giải | Điểm | Giải thích |
|----------------|------|------------|
| 1              |      |            |

### Hướng dẫn giải 2 (Hình 3.2)



Hình 3.2

Phép tịnh tiến  $\overline{BM} : A \rightarrow A'$

Vậy  $MB = AA'$

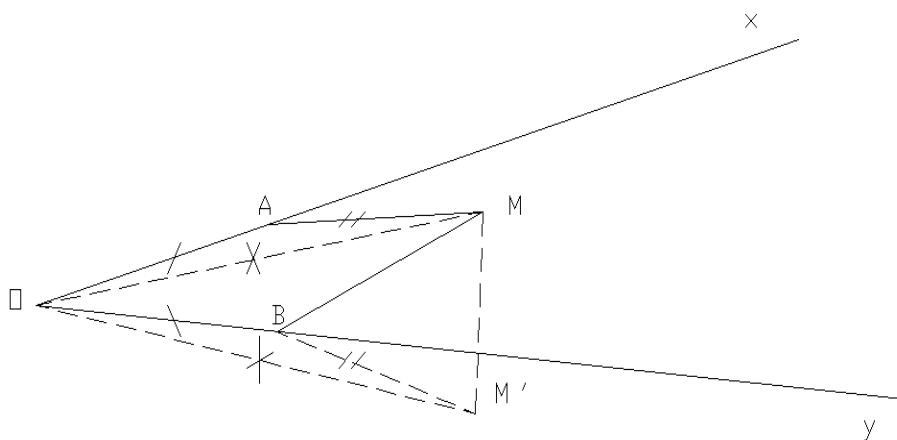
$MA + MB$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow MA + AA'$  nhỏ nhất

A là giao điểm của Ox và  $MA'$

B thuộc Oy và  $OB = OA$

| Hướng dẫn giải | Điểm | Giải thích |
|----------------|------|------------|
| 2              |      |            |

**Hướng dẫn giải 3 (Hình 3.3)**



Hình 3.3

Gọi số đo hình học của góc đã cho là  $\alpha$ .

Phép quay tâm O, góc  $-\alpha$ :  $A \rightarrow B$

$$M \rightarrow M'$$

Vậy  $AM = BM'$

$MA + MB$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow MB + BM'$  nhỏ nhất

Vậy B là giao điểm của  $MM'$  và Oy

| Hướng dẫn giải | Điểm | Giải thích |
|----------------|------|------------|
| 3              |      |            |

**Hướng dẫn giải đề nghị** ( Nếu có )

Họ và tên:

**BÀI TẬP VỀ NHÀ** (Hình học phẳng)

Lớp:

Biên Hòa, ngày      tháng 4 năm 2009

Trường THPT .....

( Thời gian làm bài: 20 phút )

Cho tam giác ABC với các góc nhọn và một điểm M tùy ý.

- a) Có thể viết  $MA+MB+MC$  thành một tổng mới bằng tổng cũ, có dạng một đường gấp khúc liền nét với hai đầu cố định bằng cách sử dụng phép đối xứng trục ?

Bài làm

- b) Có thể viết  $MA+MB+MC$  thành một tổng mới bằng tổng cũ, có dạng một đường gấp khúc liền nét với hai đầu cố định bằng cách sử dụng phép tịnh tiến ?

Bài làm

|                                                  |
|--------------------------------------------------|
| Các em mang theo kết quả này để học buổi thứ hai |
|--------------------------------------------------|

## PHỤ LỤC B

Học sinh:

### BÀI THỰC NGHIỆM

Lớp:

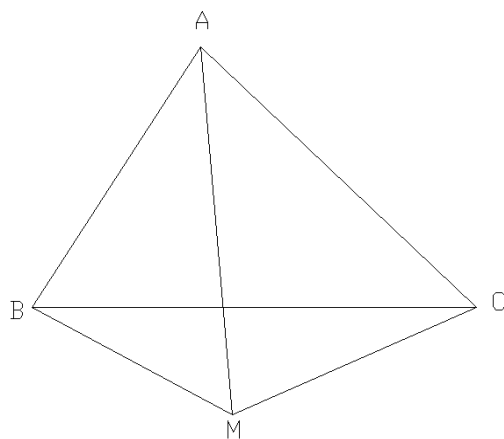
Biên Hòa, ngày      tháng 4 năm 2009

Trường THPT.....

### THÔNG BÁO BÀI TOÁN

(Hình học phẳng)

Cho tam giác ABC có các góc nhọn. Bằng phép biến hình, hãy tìm điểm M sao cho:  $MA + MB + MC$  nhỏ nhất, bằng cách thực hiện lần lượt các nhiệm vụ được ghi trên ba phiếu, các em sẽ được phát.



Hình 3.13

Họ và tên:

## **BÀI THỰC NGHIỆM**

Lớp:

Biên Hòa, ngày      tháng 4 năm 2009

Trường THPT.....

### **PHIẾU 1**

( Thời gian làm bài: 10 phút )

Chúng ta sử dụng phép biến hình nào để giải bài toán ? Vì sao ?

( Bài làm: tập thể lớp, giáo viên thực nghiệm điều khiển)

Nhóm:

## **BÀI THỰC NGHIỆM**

Lớp:

Biên Hòa, ngày      tháng 4 năm 2009

Trường THPT.....

### **PHIẾU 2**

( Thời gian làm bài: 40 phút )

Chúng ta chọn phép quay nào để có tổng mới bằng tổng cũ, là một đường gấp khúc liền nét với hai đầu cố định ? ( Có thể chọn một phép biến hình khác thuận lợi hơn)

( Bài giải của nhóm: viết trên giấy khổ lớn)

Nhóm:

## **BÀI THỰC NGHIỆM**

Lớp:

Biên Hòa, ngày      tháng 4 năm 2009

Trường THPT.....

### **PHIẾU 3**

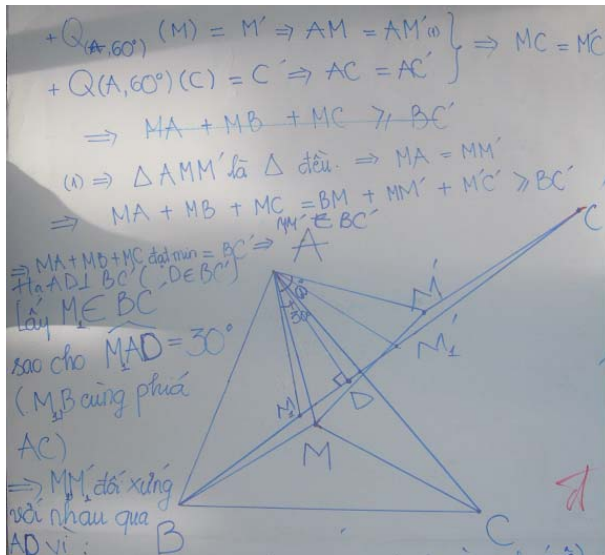
( Thời gian làm bài: 20 phút )

Điểm M cùng thuộc hai đường liền nét nào ? Vì sao ?

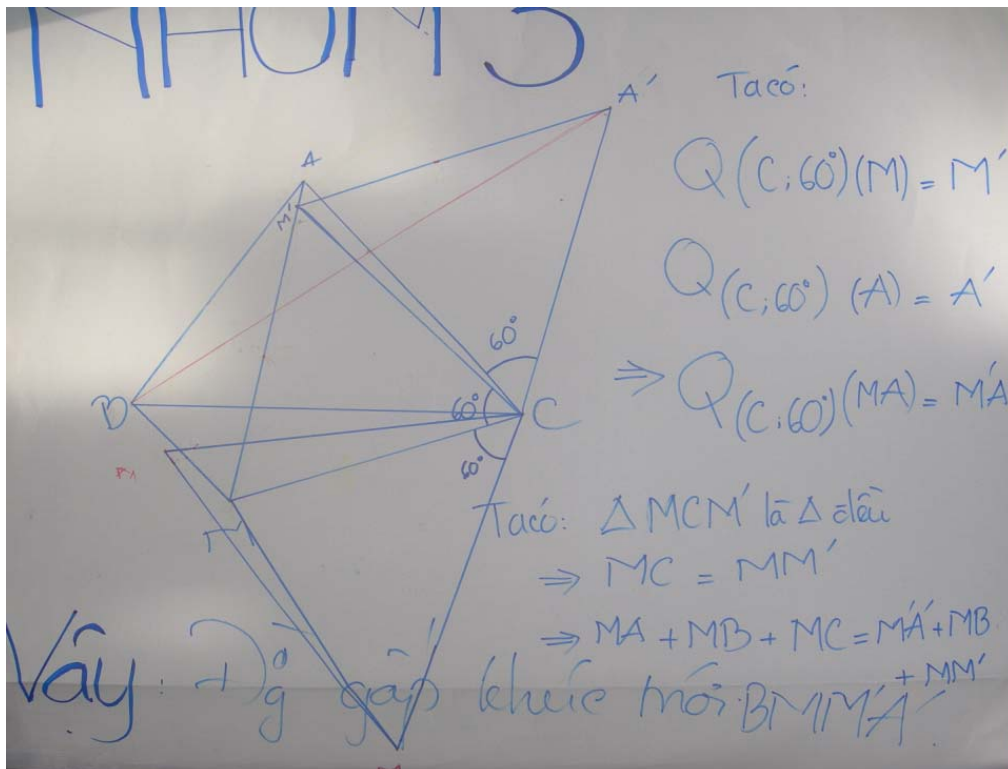
( Bài giải của nhóm: viết tiếp trên giấy khổ lớn )

## BÀI LÀM CỦA CÁC NHÓM PHA 2

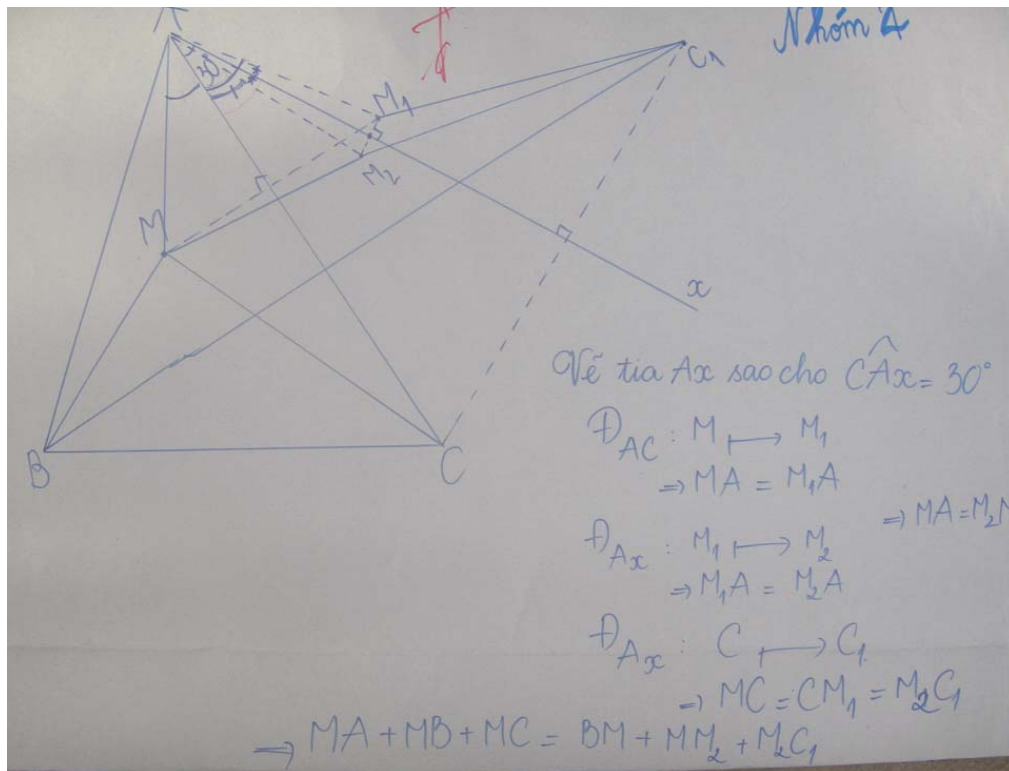
Nhóm 2:



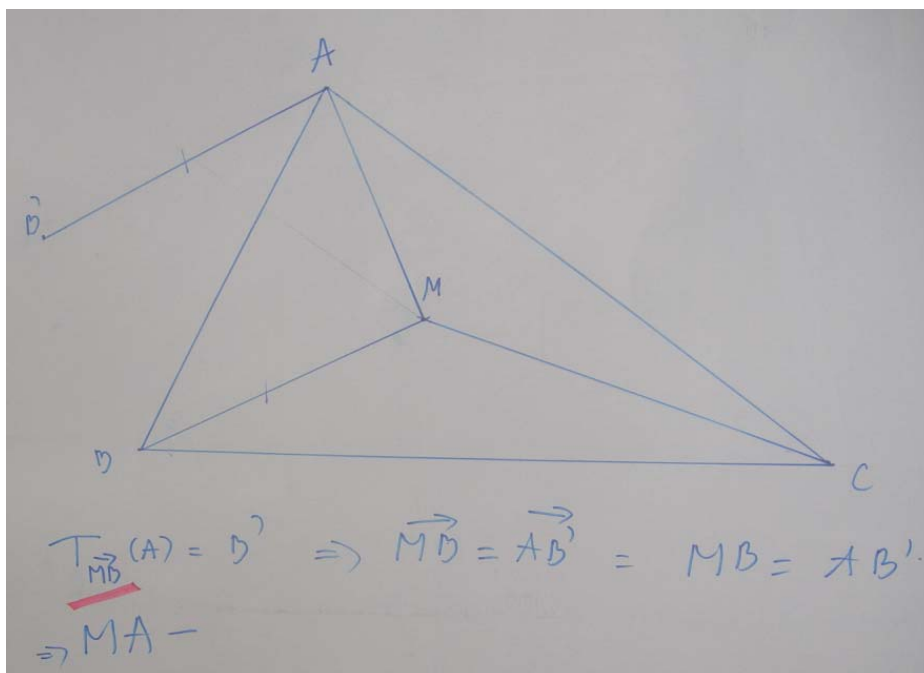
Nhóm 3:



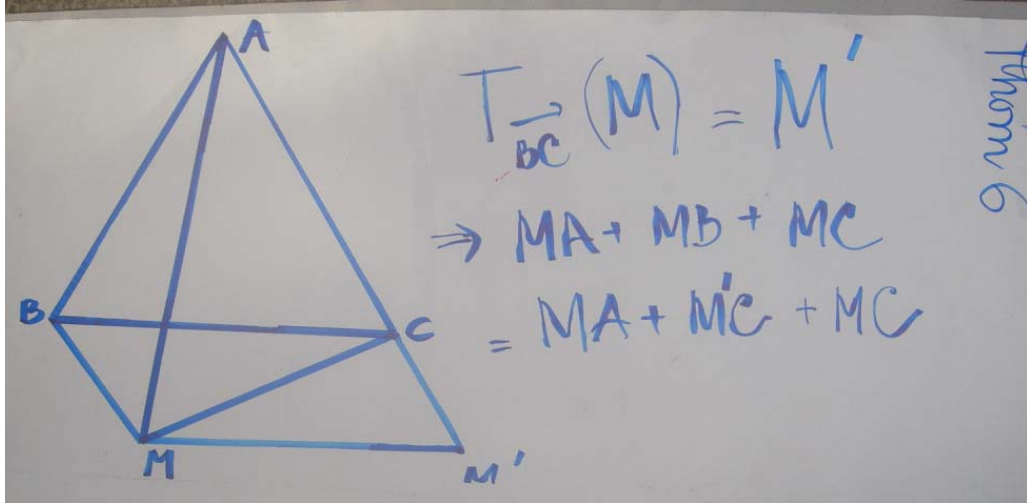
Nhóm 4:



Nhóm 5:

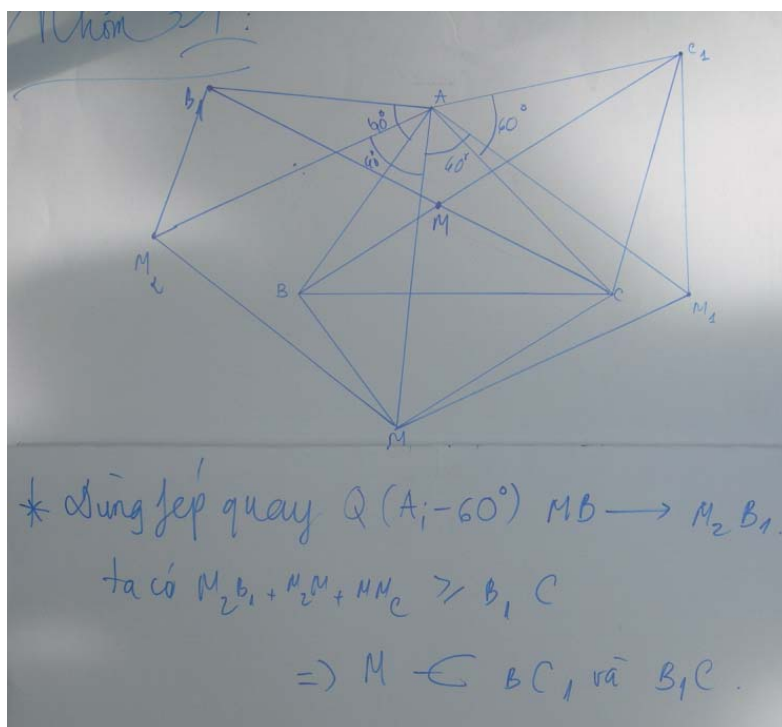


Nhóm 6:

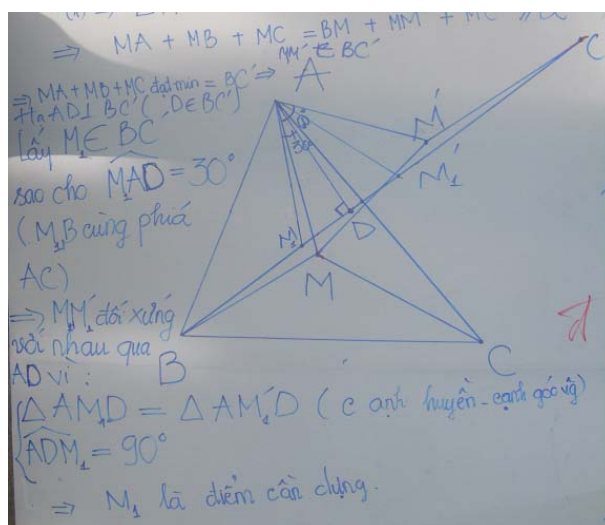


## BÀI LÀM CỦA CÁC NHÓM PHA 4

Nhóm 1:



Nhóm 2:



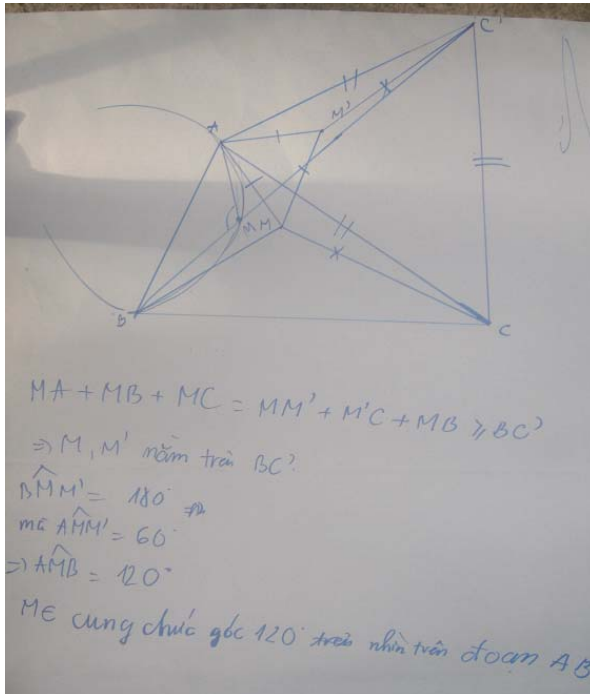
Nhóm 3:

$$\begin{aligned} MA + MB + MC &\geq BA' \\ \Rightarrow \min(MA + MB + MC) &= BA' \\ \Rightarrow B, M, M', A' &\text{ thẳng hàng} \\ \Rightarrow M &\in BA' \\ \text{Thực hiện } Q(B; -60^\circ) \quad (M) &= M_1 \\ &\quad (A) = A_1 \\ \Rightarrow M &= BA' \cap CA_1 \end{aligned}$$

Nhóm 4:

$$\begin{aligned} \text{Vậy } MA + MB + MC \min &\Leftrightarrow B, M, M_2, C_1 \text{ thẳng hàng} \\ \Rightarrow M &\in BC_1 \\ \text{Lần nữa câu trên, dựng vẽ bên trái } \triangle ABC \\ \text{Ta được đ thẳng } CB_1 &\Rightarrow M \in CB_1 \\ \text{Vậy } M &= BC_1 \cap CB_1 \end{aligned}$$

Nhóm 5:



Nhóm 6:

