

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Phạm Hoàng Nhi

**NGHIÊN CỨU DIDACTIC VỀ HÌNH VẼ Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG -
BƯỚC CHUYỂN TỪ HÌNH HỌC PHẪNG
SANG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN**

Chuyên ngành : Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán

Mã số : 60 14 10

LUẬN VĂN THẠC SĨ GIÁO DỤC HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. ĐOÀN HỮU HẢI**

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Đoàn Hữu Hải đã giúp đỡ tôi làm quen với công việc nghiên cứu khoa học và tận tình hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn PGS.TS. Lê Thị Hoài Châu, PGS. TS. Lê Văn Tiến, TS. Trần Lương Công Khanh, TS. Nguyễn Chí Thành, TS. Lê Thái Bảo Thiên Trung và các quý thầy cô đã tham gia giảng dạy lớp cao học chuyên ngành Didactic toán khóa 17. Xin chân thành cảm ơn PGS. Claude Comiti, PGS. Annie Bessot, TS. Vũ Như Thư Hương đã có những ý kiến đóng góp quý báu cho luận văn.

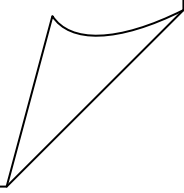
Xin chân thành cảm ơn:

- Ban lãnh đạo và chuyên viên phòng KHCN – SDH đã tạo thuận lợi cho chúng tôi trong suốt khóa học vừa qua*
- Ban giám hiệu, khoa Văn hóa Kỹ thuật cơ sở, khoa Sư phạm dạy nghề trường Cao đẳng nghề Thanh niên Dân tộc Tây Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này.*

Cảm ơn những người bạn thân yêu đã động viên và giúp đỡ, hỗ trợ cho chúng tôi thực nghiệm.

Cuối cùng, tôi muốn gửi lời cảm ơn tới bố mẹ và hai em tôi đã luôn động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua.

Phạm Hoàng Nhi



Danh mục chữ viết tắt

HH	: Hình học
HHP	: Hình học phẳng
HHKG	: Hình học không gian
GV	: Giáo viên
HS	: Học sinh
SBT	: Sách bài tập
SGK	: Sách giáo khoa
SGV	: Sách giáo viên
TH	: Tiểu học
THCS	: Trung học cơ sở
THPT	: Trung học phổ thông

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài và lợi ích luận văn

Ở trường phổ thông, việc HS phải nghiên cứu hình không gian qua hình biểu diễn phẳng khẳng định vai trò đặc biệt quan trọng của việc hình dung và biểu diễn đúng các hình không gian qua hình biểu diễn phẳng bởi vì các quan hệ không gian trên hình vẽ không còn phản ánh trực quan các tính chất, quan hệ của hình hình học cần nghiên cứu, có những yếu tố bất biến và có những yếu tố thay đổi khi vẽ hình biểu diễn. Để có sự liên tưởng đúng đắn giữa đối tượng không gian và hình biểu diễn của nó, ngoài các khái niệm và các biểu tượng của các đối tượng hình học, cần phải có công cụ là các quy tắc hình học họa hình, kết hợp tư duy logic và trí tưởng tượng không gian. Do đó, điều không thể tránh khỏi là những khó khăn trong việc nắm bắt đối tượng hình biểu diễn và những tác động của HHP khi chuyển từ hình học phẳng sang HHKG.

HHKG nghiên cứu tính chất không gian của các hình hình học, là các đối tượng trừu tượng được mô tả bằng các định nghĩa, định lý, tính chất,... Song khi minh họa hay thực hiện các chứng minh trong hình học thì buộc phải dựa vào các vật thể, hình ảnh hiện thực, đặc biệt quan trọng là các hình vẽ trực quan - hình biểu diễn. Đối với các hình biểu diễn, tuy phép chiếu song song là cơ sở của việc biểu diễn hình không gian trên mặt phẳng, nhưng để chứng minh các tính chất của phép chiếu song song cần phải dựa vào các kiến thức về quan hệ song song trong không gian. Mâu thuẫn này tác động quyết định đến việc lựa chọn cách thức, thời điểm giới thiệu các khái niệm, công cụ biểu diễn hình không gian. Trong chương trình phổ thông, theo truyền thống, trước khi học bài phép chiếu song song, HS đã được làm quen với biểu diễn hình và thực hành biểu diễn hình trong các bài giới thiệu các định nghĩa, định lý, tính chất của quan hệ song song trong không gian. Như vậy trước khi học lý thuyết về biểu diễn hình không gian - phép chiếu song song, HS đã phải được cung cấp những "công cụ" nhất định để vẽ hình biểu diễn.

Những ghi nhận trên dẫn chúng tôi đến một số câu hỏi ban đầu sau đây:

HS được cung cấp những công cụ và chỉ dẫn biểu diễn hình nào trước và sau khi học bài phép chiếu song song? Họ gặp những khó khăn gì khi đọc và vẽ hình biểu diễn của hình không gian? Nguồn gốc của những khó khăn đó? Những khó khăn nào là do những quy tắc, thói quen làm việc trong HHP, những khó khăn nào là do sự ràng buộc của hệ thống dạy học HHKG?

Trong giới hạn luận văn chúng tôi tập trung **tìm hiểu những ràng buộc thể thức và những qui tắc, thói quen của học sinh liên quan đến việc vẽ hình biểu diễn.**

Như đã trình bày ở trên, kỹ năng làm việc với hình vẽ có vai trò đặc biệt quan trọng trong nghiên cứu hình học không gian. Luận văn này tìm hiểu đặc trưng của hình vẽ, những khó khăn,

chướng ngại của HS khi làm việc với hình vẽ, đóng góp vào cơ sở lý luận cho việc xây dựng hệ thống bài tập, tình huống học tập để rèn luyện kỹ năng đọc và vẽ hình biểu diễn cho HS.

2. Mục đích nghiên cứu và phạm vi lí thuyết tham chiếu

Mục đích của luận văn là nghiên cứu những đặc trưng về đối tượng hình vẽ trong chương trình hình học ở trường phổ thông; tìm hiểu tác động của những kiến thức về hình vẽ trong HHP lên việc biểu diễn hình không gian. Từ đó, làm rõ những khó khăn của học sinh trong việc biểu diễn hình không gian.

Để thực hiện mục đích nêu trên chúng tôi đặt nghiên cứu của mình trong phạm vi didactic toán. Cụ thể, chúng tôi vận dụng các khái niệm công cụ của lí thuyết nhân chủng học (tổ chức toán học, quan hệ thể chế, quan hệ cá nhân), lí thuyết về việc xây dựng, mô hình hóa hệ thống kiến thức của học sinh (hệ sai lầm và chướng ngại; định lí, quy tắc hành động), lí thuyết tình huống (biến didactic, hợp đồng didactic).

Trong phạm vi lí thuyết đã chọn, chúng tôi trình bày các câu hỏi nghiên cứu như sau:

Q1: Đặc trưng mối quan hệ thể chế đối với hình vẽ trong HHP và HHKG là gì?

Q2: Những ràng buộc thể chế đối với đối tượng hình vẽ tác động như thế nào lên mối quan hệ cá nhân HS khi vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian?

Q3: Có những quy tắc hợp đồng nào? Những định lí, quy tắc hành động nào liên quan đến việc đọc và vẽ hình biểu diễn?

3. Phương pháp và tổ chức nghiên cứu

Phân tích, tổng hợp một số tài liệu để làm rõ các khái niệm cơ bản làm cơ sở tham chiếu cho những phân tích trong luận văn.

Phân tích chương trình và SGK hình học phổ thông để làm rõ mối quan hệ thể chế, mối quan hệ cá nhân với đối tượng nghiên cứu.

Căn cứ vào kết quả phân tích trên, đưa ra giả thuyết nghiên cứu và thiết kế thực nghiệm kiểm chứng giả thuyết.

Kết luận về giả thuyết nghiên cứu đã đưa ra ở trên.

4. Cấu trúc luận văn

Phân mở đầu

Chương 1

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm cơ bản làm cơ sở tham chiếu cho những phân tích sau này đồng thời giải thích rõ hơn nghĩa của những thuật ngữ quan trọng trong luận văn (hình vẽ, hình hình học, hình biểu diễn mẫu, đọc hình, vẽ hình,...)

Chương 2

Thông qua phân tích các ô chức toán học liên quan đến các kiểu nhiệm vụ đọc và vẽ hình biểu diễn ở trường phổ thông, đặc biệt ở các lớp 5, 6, 7, 8, 9, 11 chúng tôi làm rõ những đặc trưng của mối quan hệ thể chế với đối tượng hình vẽ trong hình học phẳng và hình học không gian. Đưa ra giả thuyết nghiên cứu.

Chương 3

- Trình bày các bài toán thực nghiệm lên đối tượng HS
 - Phân tích tiên nghiệm các tình huống.
 - Phân tích hậu nghiệm các dữ liệu thu thập được
- ⇒ Kết luận.

Chương 1

CÁC VẤN ĐỀ ĐẶT RA ĐỐI VỚI HÌNH VẼ

Trong chương này, chúng tôi tổng hợp các tác phẩm, công trình nghiên cứu có liên quan để thực hiện hai mục tiêu sau:

- Làm rõ một số khái niệm ở cấp độ tri thức khoa học, là cơ sở tham chiếu cho những phân tích thể chế và sự chuyển đổi didactic ở chương II.
- Trình bày một số kết quả nghiên cứu mà chúng tôi dùng làm cơ sở lý luận cho sự phân tích các chương sau.

Cụ thể chúng tôi sử dụng các tài liệu sau:

- Hình học không gian – thực trạng về việc đọc hình vẽ của học sinh cuối cấp trung học cơ sở, Hamid Chaachoua.
- Phương pháp dạy học môn toán, Nguyễn Bá Kim, NXB giáo dục.
- Hình học họa hình, Nguyễn Đình Điện, Đỗ Mạnh Môn, NXB giáo dục.
- Sử dụng tư duy thuật toán vào việc xác định hình để giải các bài toán hình học không gian ở trường THPT, Luận án phó tiến sĩ của Bùi Văn Nghị

1.1. Hình hình học

Là những đối tượng được mô tả qua những tiên đề, định nghĩa, tính chất [2, tr.188].

Các khái niệm hình học như điểm, đường thẳng là sản phẩm của sự trừu tượng hóa các đối tượng hiện thực. Các hình hình học chỉ có trong ý thức của con người [5].

1.2. Hình vẽ

Hình vẽ là hình biểu diễn phẳng của các hình hình học [2].

Hình vẽ hay còn gọi là hình biểu diễn của một hình không gian H lên một mặt phẳng (P) là hình chiếu song song của H lên (P) theo một phương nào đó [33].

Hình vẽ là mô hình của một đối tượng hình học. Hình vẽ không thể phản ánh đúng những tính chất hình học vốn có đối với bài toán. Có thể gắn vào mô hình này một **lĩnh vực hoạt động** (tập hợp các tính chất hình học được biểu diễn bởi một số tính chất không gian của hình vẽ) và một **lĩnh vực giải thích** (tập hợp các tính chất không gian của hình vẽ không thể được giải thích như được phản ánh vào các tính chất của đối tượng) [41].

Bản vẽ là văn kiện kỹ thuật cơ bản để chỉ đạo sản xuất. Bản vẽ được xây dựng nhờ những phương pháp biểu diễn và các hệ thống quy ước [24, tr.5].

1.3. Vấn đề đọc và vẽ hình biểu diễn

1.3.1. Tính chất hình học - Tính chất không gian

Theo [41]:

Những tính chất không gian từ hình vẽ (những đường nét thể hiện trên hình vẽ) không thể phản ánh đúng những tính chất hình học vốn có của bài toán (tức của hình hình học được cho bởi bài toán). Một số tính chất không gian phản ánh các tính chất hình học cũng có thể là không thích đáng vì rằng hình vẽ chỉ là một “vị trí xác định” của đối tượng hình học. Nói cách khác, hình vẽ chỉ cung cấp một “trường hợp đặc biệt của bài toán”.

1.3.2. Hình biểu diễn “mẫu” và các tình huống có sẵn hình vẽ minh họa

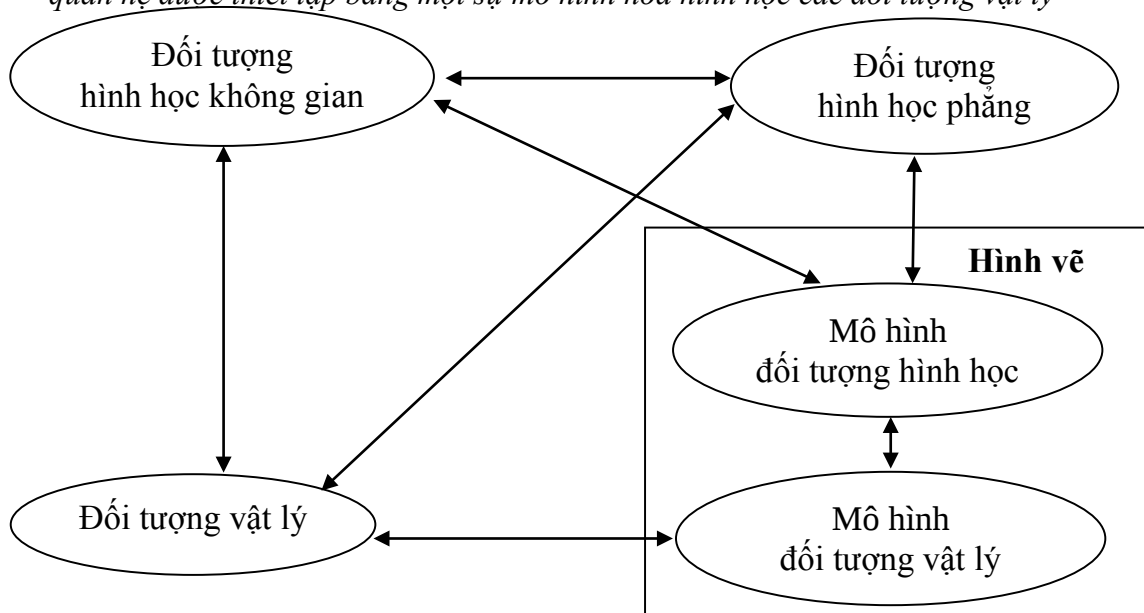
Theo [41], hình biểu diễn mẫu là hình vẽ mà đối tượng được minh họa là một hay nhiều quan hệ hình học giữa các đối tượng hình học không gian, nó được xem là hình biểu diễn tốt hơn những hình khác cùng biểu diễn một đối tượng không gian. Các hình biểu diễn mẫu được sử dụng trong tất cả các SGK để minh họa một cách ngầm ẩn, các tính chất của bài giảng. Chúng cho phép phiên dịch các tính chất hình học.

Bên cạnh đó, [1, tr.88] khẳng định: “các hình biểu diễn trong SGK và các hình vẽ của GV trên bảng trong các giờ lên lớp nhất thiết phải là ví dụ mẫu mực về cách biểu diễn các hình (bao gồm điểm, đường thẳng, mặt phẳng) trong không gian”. Từ quan điểm này, ngoài hình biểu diễn mẫu, chúng tôi xem xét các tình huống có sẵn hình vẽ minh họa trong SGK, chẳng hạn hình vẽ minh họa các hoạt động, bài giải của các ví dụ áp dụng, vì các hình vẽ “mẫu mực” này có vai trò như những gợi ý chỉ dẫn trong biểu diễn hình không gian.

1.3.3. Quan hệ giữa đối tượng hình học không gian và hình biểu diễn

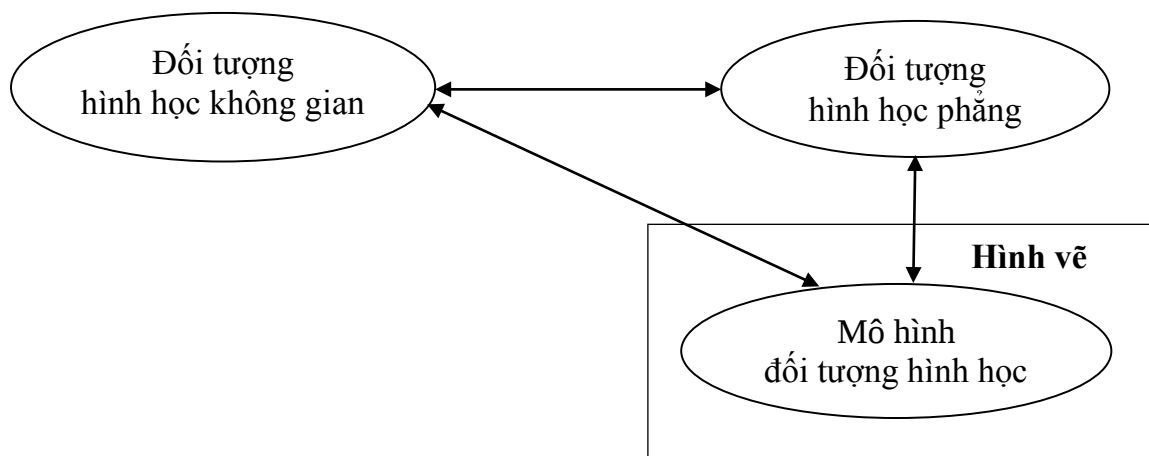
Theo [41]:

Trong việc hình thành quan hệ giữa một đối tượng hình học không gian và một hình vẽ biểu diễn nó, có một đối tượng khác tác động: đối tượng hình học phẳng, phép chiếu lên mặt phẳng một đối tượng hình học không gian. Về phương diện này A.Bessot (1993) đã trình bày một sơ đồ quan hệ được thiết lập bằng một sự mô hình hóa hình học các đối tượng vật lý



Các quan hệ giữa đối tượng vật lý, hình vẽ và các đối tượng hình học

Trong luận văn của mình, chúng tôi quan tâm đến bước chuyển giữa một đối tượng hình học không gian và một hình vẽ biểu diễn đối tượng này bằng phối cảnh song song, do đó chúng tôi xem xét sơ đồ con của sơ đồ trên trong đó hình vẽ là mô hình của một đối tượng hình học:



Các quan hệ giữa hình vẽ với đối tượng hình học

Cũng trong mục đích của luận văn, chúng tôi muốn tìm hiểu những tác động của đối tượng trung gian - đối tượng HHP, cụ thể tác động của kiến thức về hình vẽ trong HHP khi biểu diễn hình không gian.

1.3.4. Đọc hình

Theo [41]:

Đọc hình là thao tác tìm ra những tính chất hay những quan hệ hình học từ hình vẽ biểu diễn hình hình học. Từ tính chất của phép phối cảnh song song, chúng ta suy ra một số quy tắc khi đọc hình biểu diễn như sau:

- *Nếu 3 điểm biểu diễn 3 điểm A, B, C của không gian không thẳng hàng thì các điểm A, B, C không thẳng hàng.*
- *Nếu hình biểu diễn hai đường thẳng là cắt nhau thì hai đường thẳng đó không song song.*
- *Nếu điểm A' biểu diễn một điểm A không phải là trọng tâm của một hệ điểm (Ai') biểu diễn các điểm (Ai) của không gian thì A không phải là trọng tâm của hệ điểm Ai.*

Theo quan điểm trên, sử dụng luật phản đảo cho các qui tắc biểu diễn hình ta sẽ thu được các qui tắc đọc hình biểu diễn.

1.3.5. Vẽ hình

Theo [41]:

Việc vẽ hình biểu diễn của một đối tượng hình học được thực hiện thông qua sự phiên dịch một số tính chất hình học của đối tượng sang các quan hệ không gian thể hiện trên hình vẽ. Thật ra những quan hệ không gian này là những bản dịch từ các tính chất hình học của đối tượng phẳng được chiếu từ đối tượng không gian

Các tính chất hình học của hình hình học trong không gian

Phép chiếu

Các tính chất hình học của hình hình học trong mặt phẳng

Các tính chất không gian của hình vẽ

Các tính chất hình học được bảo toàn qua phép chiếu song song: tính song song, tính thẳng hàng, trọng tâm và tỷ lệ giữa các độ dài

<i>Các tính chất hình học của hình không gian</i>	<i>Các tính chất hình học của hình phẳng</i>	<i>Các tính chất không gian của hình vẽ</i>
<i>Các đường thẳng song song</i>	<i>Các đường thẳng song song</i>	<i>Các đoạn thẳng song song</i>
<i>Các đường thẳng cắt nhau</i>	<i>Các đường thẳng cắt nhau</i>	<i>Các đoạn thẳng cắt nhau</i>
<i>Các điểm thẳng hàng</i>	<i>Các điểm thẳng hàng</i>	<i>Các điểm thẳng hàng</i>
<i>Tỷ số giữa các độ dài</i>	<i>Tỷ số giữa các độ dài</i>	<i>Tỷ số giữa các độ dài</i>

Như vậy, nếu ta tự giới hạn ở những qui tắc của phép phối cảnh song song thì phạm vi hoạt động của hình vẽ sẽ bị thu hẹp đáng kể.

Ngoài những qui tắc này, những qui ước và những hình biểu diễn mẫu được sử dụng trong dạy học sẽ cho phép mở rộng phạm vi hoạt động của hình vẽ.

Kết quả trên góp phần định hướng cho chúng tôi trong việc phân tích thể chế đối với hình vẽ ở chương II. Vai trò, ảnh hưởng của hình biểu diễn mẫu và các hình vẽ minh họa cho các bài tập áp dụng khái niệm, định lý, tính chất lên quá trình biểu diễn hình chứng tỏ một điều cần thiết là tìm hiểu cách thức tiếp cận chúng mà thể chế đưa ra.

Giáo trình Hình học họa hình ([24]) định nghĩa phép chiếu song song là phép chiếu có tâm chiếu là một điểm vô tận. Khi đó phép chiếu song song có những tính chất gồm những tính chất của phép chiếu và những tính chất riêng:

- (1) Hình chiếu của một đường thẳng (không song song phương chiếu) là một đường thẳng*
- (2) Hai đường thẳng song song (không cùng nằm trong một mặt phẳng chiếu) chiếu thành hai đường thẳng song song*
- (3) Tỷ số đơn của ba điểm bằng tỷ số đơn của ba điểm hình chiếu của chúng*

Hệ quả của (3): Trong phép chiếu song song tỷ số của hai đoạn thẳng song song bằng tỷ số của hai đoạn thẳng hình chiếu của chúng

Từ nội dung trình bày về phép chiếu ở trên, trong quá trình chuyển đổi didactic, nhấn mạnh phương diện công cụ biểu diễn hình của phép chiếu song song trong trường phổ thông, tác giả Nguyễn Bá Kim, trong giáo trình Phương pháp dạy học môn toán, đưa ra ba quy tắc biểu diễn hình thông qua việc "phiên dịch" lại các tính chất của phép chiếu song song:

Muốn có hình vẽ đúng, ta cần chú ý các tính chất sau của phép chiếu song song:

- (1) Hình chiếu song song của một đường thẳng (không song song với phương chiếu) là một đường thẳng
- (2) Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song (không song song với phương chiếu) là hai đường thẳng song song hay trùng nhau
- (3) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hay trùng nhau

Chúng tôi sử dụng 3 tính chất trên làm căn cứ cho việc biểu diễn hình không gian, mà chúng tôi gọi chúng lần lượt là "quy tắc bảo toàn liên thuộc", "quy tắc bảo toàn song song", "quy tắc bất biến tỉ lệ", đồng thời dùng các ký hiệu tương ứng: QT1, QT2, QT3.

Không xét phương chiếu đặc biệt thì QT1 và QT2 hoàn toàn giống như vẽ hình trong HHP. QT3 đề cập đến mối tương quan về độ dài giữa hai đoạn thẳng khi biểu diễn hình, thể hiện vai trò quan trọng của việc phân biệt rõ những trường hợp cần hay không cần bảo toàn tỉ lệ của hai đoạn thẳng trong yêu cầu biểu diễn hình chính xác và trực quan. ***Vì sự khác biệt vừa chỉ ra đối với các quy tắc biểu diễn, trong luận văn chúng tôi đặc biệt quan tâm đến những ràng buộc thể chế đối với QT3 lên mối quan hệ cá nhân học sinh đối với quy tắc này.***

1.3.6. Hai định lý cơ bản để thành lập hình biểu diễn

[34], [43]:

Định lý 1: (Định lý L'Huilier) Một tam giác bất kỳ có thể dùng để làm hình biểu diễn cho một tam giác có dạng tùy ý

Định lý 2: (Định lý Pohlke – Swarchtz) Một tứ giác cùng với các đường chéo của nó có thể dùng làm hình biểu diễn cho một tứ diện có dạng tùy ý

Từ hai định lý trên suy ra cách biểu diễn hình trong không gian:

Biểu diễn đa giác phẳng: Chọn một tam giác biểu diễn cho một tam giác nào đó trong hình thực. Sau đó các điểm còn lại của hình thực được biểu diễn dựa vào tính chất của hình được bảo tồn qua phép chiếu song song.

Biểu diễn hình đa diện: Chọn một tứ giác cùng với các đường chéo của nó biểu diễn cho một tứ diện nào đó trong hình thực, sau đó biểu diễn các điểm còn lại dựa vào các tính chất của hình được bảo tồn qua phép chiếu song song.

Hai định lý này cung cấp một thuật toán tổng quát để biểu diễn một đa giác hay một đa diện bất kỳ trong không gian.

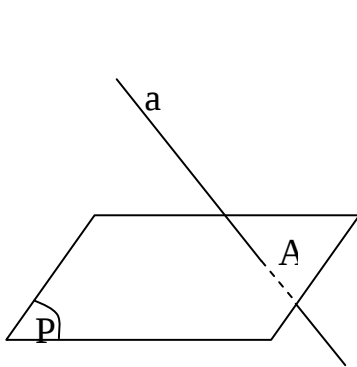
1.4. Hình biểu diễn đầy đủ

Theo [26, tr.76], cần phân biệt hai khía cạnh dựng hình (hình hình học) và biểu diễn hình (hình vẽ) trong bài toán vẽ hình biểu diễn.

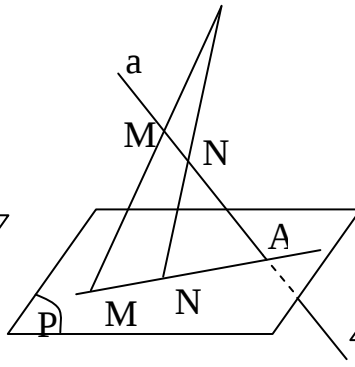
Theo quan điểm trên, [34] đưa ra khái niệm **“hình biểu diễn đầy đủ”** như sau:

“Một hình biểu diễn là đầy đủ nếu bất kỳ một quan hệ liên thuộc nào của các phần tử (điểm, đường thẳng, mặt phẳng) của hình gốc (hình được biểu diễn) đều được xác định một cách duy nhất trên hình biểu diễn”.

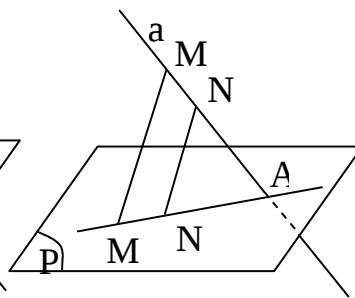
Cho một đường thẳng a và một mặt phẳng (P) cắt nhau. Dựng về phương diện dựng hình thì giao điểm A của a và (P) hoàn toàn được xác định vì a và (P) đã được xác định. Nhưng về phương diện biểu diễn hình thì A có thể lấy tùy ý trên a (hình 1). Hình biểu diễn này là hình biểu diễn chưa đầy đủ. Nếu cho biết thêm hình chiếu của hai điểm M, N phân biệt nào đó trên đường thẳng a lên mặt phẳng (P) thì khi đó điểm A hoàn toàn xác định trên hình biểu diễn. Hình biểu diễn này được gọi là hình biểu diễn đầy đủ (hình 2)



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Phép chiếu xuyên tâm trong hình 2 và phép chiếu song song trong hình 3 gọi là phép chiếu trong. Mặt phẳng (P) gọi là mặt phẳng cơ sở.

Hình biểu diễn song song của một điểm M được gọi là đầy đủ nếu cho biết thêm hình biểu diễn của M' là hình chiếu của M qua phép chiếu trong trên một phẳng cơ sở (P) đã chọn nào đó. Từ đó:

- Đường thẳng a được gọi là biểu diễn đầy đủ nếu ta biết hai điểm phân biệt của nó được biểu diễn đầy đủ.
- Mặt phẳng (P) được gọi là biểu diễn đầy đủ nếu biết 3 điểm không thẳng hàng của nó được biểu diễn đầy đủ.
- Một hình được gọi là biểu diễn đầy đủ nếu mọi điểm của nó được biểu diễn đầy đủ

Người ta chứng minh được rằng: Hình biểu diễn của một hình phẳng, của một hình chóp, của một hình lăng trụ khi phương chiếu không song song với cạnh nào, đoạn nối hai điểm nào của nó, bao giờ cũng đầy đủ. Các bài toán tương giao giữa hai hình H_1 và H_2 được hoàn toàn xác định nếu H_1 và H_2 là những hình biểu diễn đầy đủ.

Theo khái niệm hình biểu diễn đầy đủ vừa trình bày ở trên, với mục đích nghiên cứu liên quan đến quy tắc bất biến tỉ lệ, chúng tôi phân ra 3 trường hợp của một hình biểu diễn đầy đủ như sau:

TH1: Hình biểu diễn đầy đủ không liên quan đến quy tắc bất biến tỉ lệ

Ví dụ: Đường thẳng b qua điểm I và song song với đường thẳng a cho trước

TH2: Hình biểu diễn đầy đủ, có ràng buộc quy tắc bất biến tỉ lệ với các tỉ lệ được cho trước

Ví dụ: Cho hình thang $ABCD$, đáy lớn CD gấp hai lần đáy nhỏ AB

TH3: Hình biểu diễn đầy đủ, có ràng buộc quy tắc bất biến tỉ lệ với tỉ lệ không được cho tường minh.

Ví dụ: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thang cân $ABCD$ đường cao AH

(Trong ví dụ này, tỉ lệ chân đường cao H chia cạnh CD không được “thông báo” tường minh.

1.5. Kết luận

Qua chương 1 chúng tôi đã trình bày một số khái niệm và kết quả nghiên cứu liên quan đến hình vẽ là cơ sở tham chiếu cho những phân tích ở các chương sau.

"Quan hệ giữa đối tượng hình học không gian và hình biểu diễn" chỉ ra sự tác động của yếu tố trung gian (đối tượng phẳng được chiếu từ đối tượng không gian) trong bước chuyển giữa một đối tượng HHKG sang hình biểu diễn của nó.

"Hai định lý cơ bản để thành lập hình biểu diễn" chỉ ra thuật toán tổng quát để biểu diễn một đa giác hay đa diện bất kỳ, xuất phát từ phân tử ban đầu là tam giác đối với biểu diễn đa giác, là tứ giác cùng 2 đường chéo đối với biểu diễn đa diện, sau đó biểu diễn các đỉnh còn lại của đối tượng cần biểu diễn dựa trên phân tích và bảo toàn QT2 và QT3.

Các bài toán vẽ hình, xác định hình có tỉ lệ xác định (được cho tường minh hoặc không tường minh) có hình biểu diễn thuộc phạm trù khái niệm **"Hình biểu diễn đầy đủ"**. Khái niệm này cung cấp phương tiện để chúng tôi phân chia các kiểu nhiệm vụ và các đặc trưng của hình vẽ được rõ ràng mạch lạc, phục vụ cho nghiên cứu về biểu diễn hình liên quan đến quy tắc bất biến tỉ lệ.

Chương 2

MỐI QUAN HỆ THỂ CHẾ ĐỐI VỚI HÌNH VẼ

Thông qua phân tích chương trình, SGK phổ thông lớp 1 đến lớp 9 hiện hành, và lớp 10, 11 hiện hành ban cơ bản chúng tôi tìm hiểu đặc trưng của mối quan hệ thể chế đối với hình vẽ trong HHP và HHKG, đặc biệt đối với quy tắc bất biến tỉ lệ trong biểu diễn hình không gian.

2.1. Hình vẽ trong hình học phẳng

2.1.1. Tiểu học

Theo [22] và phân tích SGK, chúng tôi tóm tắt một số kết luận như sau:

Hình học ở bậc TH là hình học ghi nhận với các đặc trưng:

- Khái niệm (các hình hình học) không được định nghĩa ngay từ đầu mà được gán thẳng cái tên kèm theo hình vẽ, đặc điểm. Ở lớp 1 và 2, khái niệm chỉ được tiếp cận bằng biểu tượng tổng thể, từ lớp 3 đến lớp 5 các khái niệm được đưa ra kèm theo hình vẽ và mô tả một số đặc điểm quan trọng
- Khi hình thành biểu tượng giữa các khái niệm, “mối quan hệ” giữa các hình hình học không được hợp thức, mà chỉ lồng ghép vào các kiểu nhiệm vụ và dừng lại ở mức độ giới thiệu
- Hình là một chỉnh thể
- Liên quan đến hình vẽ có hai kiểu nhiệm vụ “Nhận dạng hình” (đọc hình) và “Tạo ra một hình hình học” (vẽ hình), các kỹ thuật giải quyết chủ yếu dựa trên quan sát các hoạt động thực nghiệm (đo đạc, tính toán, đếm, cắt, ghép hình, gấp giấy,...).

2.1.2. Trung học cơ sở

[5, tr.128], Từ **Lớp 6**: Mỗi hình được tạo thành từ một số “bộ phận” có liên hệ với nhau và ngay giữa các hình cũng có mối quan hệ nào đó... Hình được hiểu theo nghĩa khái quát và thống nhất: “Hình là một tập hợp điểm”, từ đó suy ra điểm là một hình và toàn bộ mặt phẳng cũng là một hình. Quan điểm “Hình là tập hợp điểm” được ngầm hình thành cho học sinh.

Đối với hai kiểu nhiệm vụ “Nhận dạng hình” và “Tạo ra một hình hình học” ở lớp 6 và 7, theo [22]:

- Kiểu nhiệm vụ nhận dạng hình xuất hiện ở lớp 7, các bước kỹ thuật dựa vào các tính chất, định lý đã học để tìm ra tính chất của hình, từ đó nhận dạng hình (chủ yếu nhận dạng các tam giác đặc biệt: vuông, cân, vuông cân, đều). Kỹ thuật quan sát và thực nghiệm (đo đạc, gấp giấy) không còn được sử dụng mà thay vào đó là phải suy luận từ những tính chất, định lý đã học. Hơn nữa học sinh **phải tự vẽ hình**, khác với bậc tiểu học là giải quyết trên những hình có sẵn.

- Kiểu nhiệm vụ “Tạo ra một hình hình học” xuất hiện ở cả lớp 6 và 7 **rất nhiều lần**. Các bước kỹ thuật cần vận dụng khái niệm, tính chất để vẽ hình, hoặc vận dụng khái niệm, tính chất đồng thời kết hợp với suy luận để vẽ.

Về quan niệm vẽ hình:

Học sinh được rèn luyện các kỹ năng về đo đạc, gấp hình, vẽ hình, tính toán; đặc biệt học sinh biết vẽ thành thạo hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song bằng eke và thước thẳng [9, tr.82].

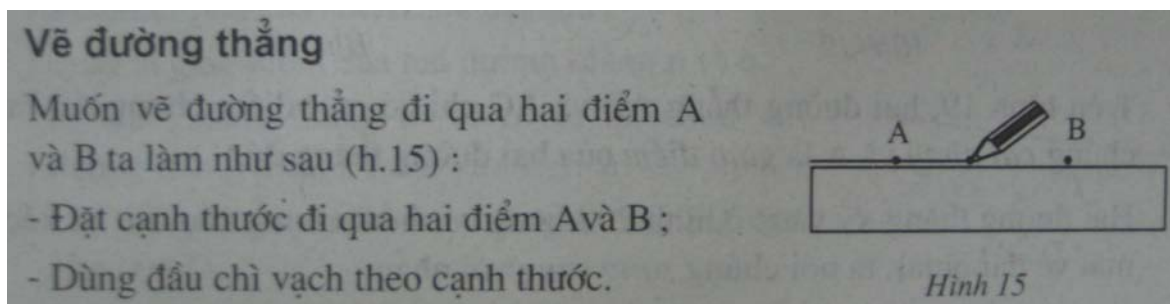
Quan niệm về vẽ hình:

- + Vẽ hình càng chính xác càng tốt
- + Hình được vẽ bằng công cụ nào cũng có giá trị ngang nhau
- + Cần tập cho học sinh vẽ hình bằng tay (không dùng dụng cụ), tự kiểm tra lại bằng dụng cụ, rút kinh nghiệm để lần sau vẽ lại bằng tay được chính xác hơn [9, tr.87].

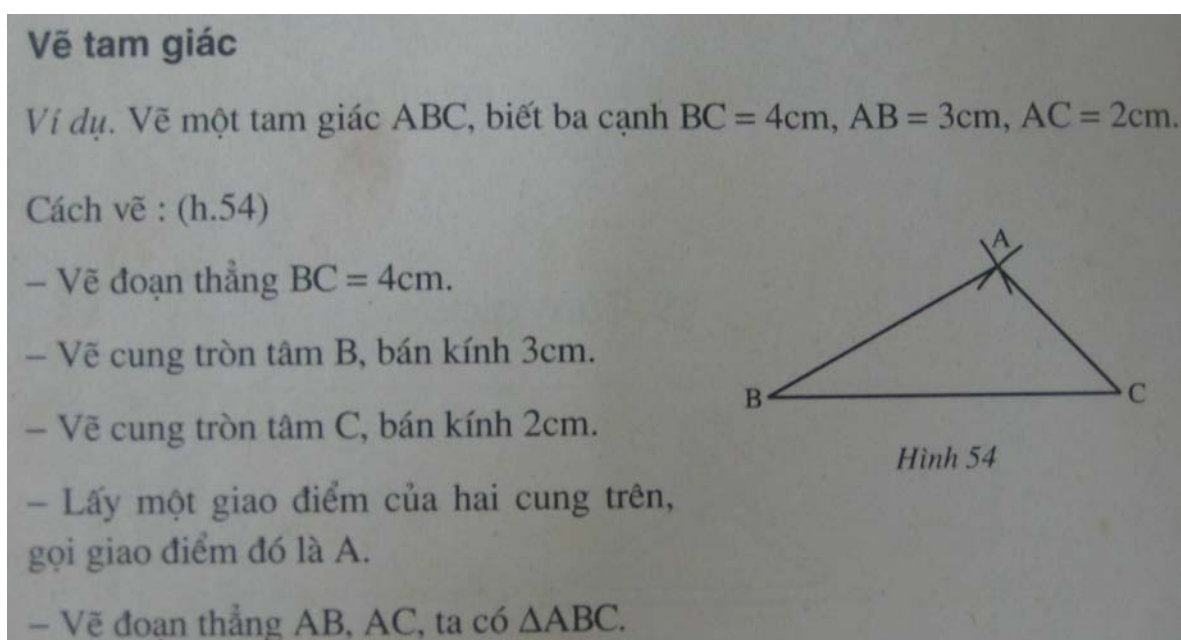
Giai đoạn lớp 6 lớp 7 là giai đoạn ngầm ẩn giới thiệu các bài toán dựng hình cho học sinh. Nếu nhìn theo khía cạnh vẽ hình thì giai đoạn này học sinh được **chỉ dẫn cụ thể cách vẽ** (các bước vẽ) các đối tượng và quan hệ hình học được nghiên cứu trong HHP: đường thẳng, đoạn thẳng, đường trung trực, đường phân giác, tam giác, ...

Ví dụ:

[3, tr.107]



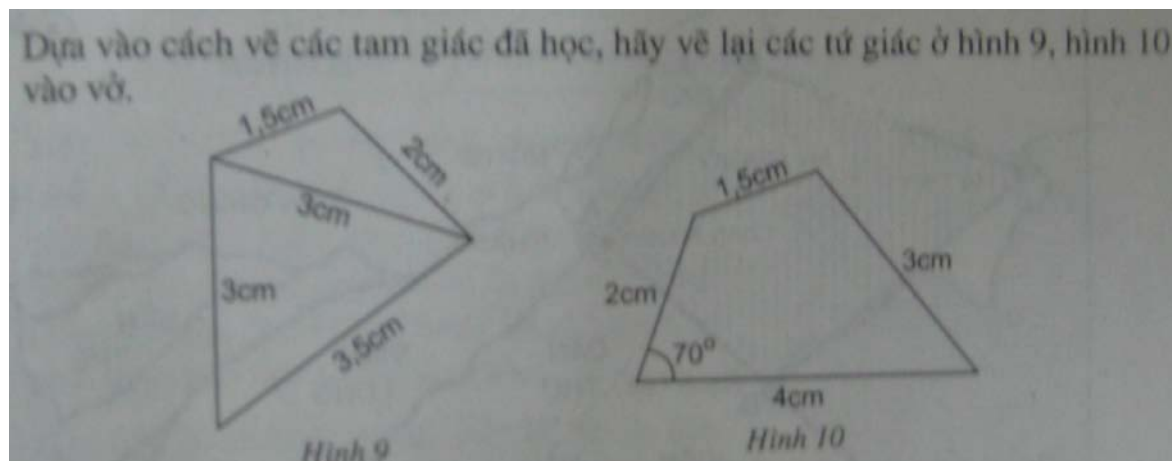
[7, tr.112] Cách vẽ tam giác khi biết 3 cạnh



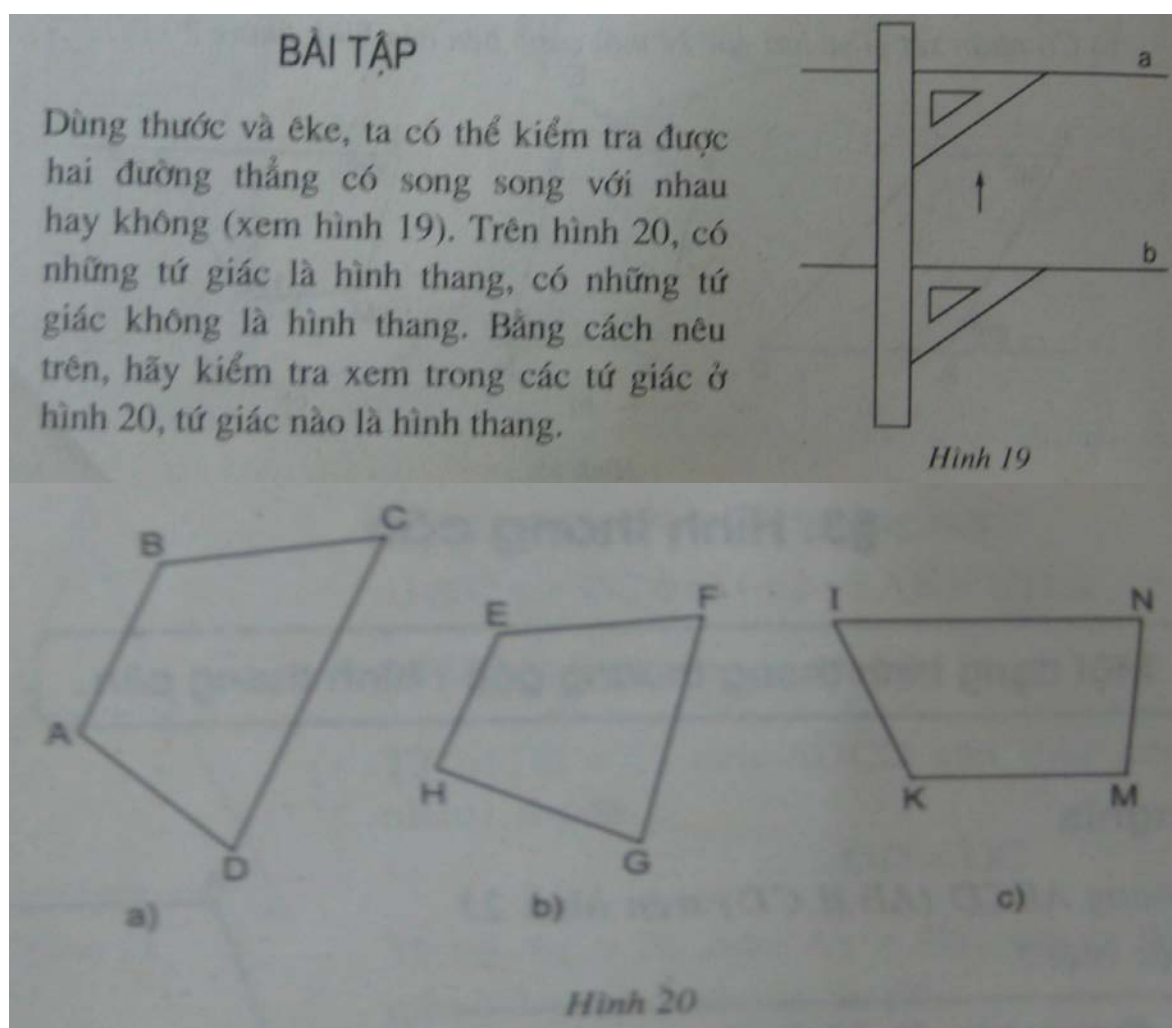
Lớp 8:

Theo [13, tr.93]: “Kĩ năng vẽ hình, tính toán đo đạc, gấp hình tiếp tục được rèn luyện trong chương. Kĩ năng lập luận và chứng minh hình học được coi trọng”.

[11, tr.67]



Các bài toán đọc hình, thông qua yêu cầu sử dụng dụng cụ kiểm tra hình vẽ, vừa góp phần củng cố tính chất của hình vừa rèn luyện vẽ hình cẩn thận chính xác: [11, tr.70]



Đặc biệt, ở lớp 8 bắt đầu giới thiệu chính thức bài toán dựng hình gồm 4 bước, sử dụng các bài toán dựng hình cơ bản đã được giới thiệu ở lớp 6 và lớp 7 (chỉ có bước dựng hình)

[11, tr.81]:

Ở hình học lớp 6 và hình học lớp 7, với thước và compa, ta đã biết cách giải các bài toán dựng hình sau:

- a) Dựng một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng cho trước
- b) Dựng một góc bằng một góc cho trước
- c) Dựng đường trung trực của một đoạn cho trước, dựng trung điểm của một đoạn cho trước
- d) Dựng tia phân giác của một góc cho trước
- e) Qua một điểm cho trước, dựng đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước
- g) Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng cho trước, dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước
- h) Dựng tam giác biết ba cạnh, hoặc biết hai cạnh và góc xen giữa, hoặc biết một cạnh và hai góc kề (dựa vào các bài toán a) và b)).

Ta được sử dụng các bài toán dựng hình trên để giải các bài toán dựng hình khác

Ví dụ:

[11, tr.83] Bài 31: Dựng hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), biết $AB = AD = 2\text{cm}$, $AC = DC = 4\text{cm}$

[11, tr.83] Bài 33: Dựng hình thang cân $ABCD$, biết đáy $CD = 3\text{ cm}$, đường chéo $AC = 4\text{cm}$, góc $D = 80^\circ$.

Như vậy xét phương diện vẽ hình thì các bài toán HHP trong chương trình THCS đều dựa trên những thao tác và những “bước” vẽ xác định đã được chỉ dẫn cụ thể. Đặc biệt, các bài toán dựng hình trong chương trình đóng vai trò quan trọng trong việc rèn luyện kỹ năng vẽ hình chính xác cho HS.

2.1.3. Trung học phổ thông

Hình học lớp 10 nghiên cứu về vector và phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, theo chúng tôi giai đoạn này không ảnh hưởng đến kỹ năng đọc và vẽ hình của học sinh, do đó chương trình hình học phẳng ở THPT chúng tôi chỉ tổng hợp kết quả về phép biến hình ở chương I lớp 11.

Lớp 11:

Ở lớp 8, phép dời hình được đưa vào thông qua các khái niệm “đối xứng trục”, “đối xứng tâm”, kỹ năng vẽ hình chính xác cũng được rèn luyện thêm cho HS qua yêu cầu vẽ trục đối xứng, tâm đối xứng, vẽ ảnh của hình qua một phép đối xứng.

HHP lớp 11 dành một chương để giới thiệu một cách hệ thống về phép dời hình với cả vai trò đối tượng và công cụ. Tính chất của các “kiểu dời hình” được trình bày tổng quát qua tính chất của phép dời hình, chẳng hạn:

[25, tr.21]:

Phép dời hình:

- 1) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm
- 2) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó
- 3) Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó
- 4) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính

Hay

Chú ý: Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm, trục tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm, trục tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác $A'B'C'$.

Như vậy phép dời hình và phép chiếu song song đều là các phép biến hình có tính chất "bảo toàn liên thuộc" và "bảo toàn tỉ lệ". Điều này đặt ra cho chúng tôi câu hỏi liệu những kiến thức về phép dời hình có tác động đến học sinh khi học lý thuyết biểu diễn hình hay không. Để trả lời câu hỏi, điều cần thiết là phải tìm hiểu các kiểu nhiệm vụ vẽ hình cụ thể.

Kiểu nhiệm vụ vẽ hình chủ yếu liên quan đến bài toán vẽ ảnh của một hình qua phép dời hình, hoặc tìm quỹ tích của điểm.

Theo [35], kiểu nhiệm vụ “vẽ ảnh của một hình qua phép dời hình” gồm các nhiệm vụ: vẽ ảnh của điểm, của đường tròn (I, R), của đường thẳng, của một tam giác qua phép dời hình F . Các nhiệm vụ này sử dụng các kỹ thuật chứa các bước:

- Dựng M' đối xứng với M qua O
- Dựng M' đối xứng với M qua đường thẳng d
- Dựng đường tròn tâm I bán kính R

Như vậy ở HHP lớp 11 nhiệm vụ vẽ hình được đưa vào thông qua các bài toán sử dụng thao tác, kỹ thuật đã học ở THCS, chỉ khác ở phương diện suy luận, chứng minh ở cấp độ cao hơn. Trong nhiệm vụ vẽ ảnh của một hình qua phép dời hình thì tạo ảnh là rõ ràng, trực quan bằng hình vẽ, thao tác tìm ảnh dựa trên các bước dựng hình đã học, ảnh là duy nhất. Do đó để thực hiện các nhiệm vụ vẽ hình HS không cần phải nhớ những tính chất của phép dời hình mà điều cần thiết là nhớ định nghĩa của các phép dời hình tương ứng. Ngược lại, đối với việc biểu diễn hình không gian, buộc HS phải tuân thủ các quy tắc biểu diễn chính là tính chất của phép chiếu song song để đảm bảo vẽ hình chính xác, hình vẽ ở đây chính là ảnh của một hình học trừu tượng qua một phép chiếu song song.

Những điều phân tích ở trên cho thấy, tuy được tiếp cận giống với khái niệm phép chiếu song song sẽ được phân tích kỹ ở phần sau, nhưng xét về phương diện vẽ hình thì phép dời hình trong mặt phẳng ở chương trình HH 11 không khác hơn những phần kiến thức dời hình đã học trước đó, và có vai trò tiếp tục rèn luyện kỹ năng vẽ hình chính xác cho HS.

2.1.4. Kết luận

HHP xuất hiện xuyên suốt chương trình phổ thông từ lớp 1 đến lớp 12 và được nghiên cứu tách rời với HHKG. Một tính chất đặc biệt quan trọng của hình vẽ trong HHP đó là tính chất “trực quan chính xác” của nó nghĩa là **“trong HHP, ta luôn có thể thực hiện một hình vẽ chính xác đúng với cái mà ta tưởng tượng: các quan hệ liên thuộc, song song, vuông góc và bằng nhau đều được thể hiện trung thành trên hình vẽ”** [2]. Tính chất này là điểm khác biệt rõ ràng nhất giữa hình vẽ trong HHP và trong HHKG.

Hình học lớp 6, 7, 8 là giai đoạn quan trọng trong việc hình thành các kỹ năng vẽ và dựng hình cho học sinh (các bài toán dựng hình cơ bản được đưa vào ở lớp 6, 7; đến lớp 8 thì chính thức giới thiệu khái niệm bài toán dựng hình). **Các bài toán dựng hình trong chương trình một mặt chỉ dẫn học sinh cách vẽ các đối tượng và quan hệ hình học một cách rèn luyện cho HS vẽ hình một cách chính xác.**

Ngoài ra các phép dời hình trong mặt phẳng được nghiên cứu ở lớp 8 và lớp 11 đóng vai trò tiếp tục rèn luyện kỹ năng vẽ hình chính xác trong HHP cho HS.

Chúng tôi nhận định, HHP tạo một chướng ngại lên HS là họ luôn có xu hướng thể hiện trực quan các tính chất hình học, làm sao để tính chất không gian trên hình vẽ trùng với tính chất hình học. Chúng tôi sẽ phân tích kỹ hơn và kiểm chứng nhận định này ở các phần sau.

2.2. Hình vẽ trong hình học không gian

2.2.1. Tiểu học

Ở lớp 5, thông qua việc quan sát “hình ảnh” các vật thật trong thực tế để hình thành khái niệm ban đầu của hình khối và yêu cầu học sinh đạt được các mục tiêu sau:

Đối với hình lập phương, hình hộp chữ nhật, theo [29, tr.184]:

- *Hình thành được biểu tượng về hình hộp chữ nhật và hình lập phương*
- *Nhận biết được các đồ vật trong thực tiễn có dạng hình hộp chữ nhật và hình lập phương, phân biệt được hình hộp chữ nhật và hình lập phương*
- *Chỉ ra được đặc điểm của các yếu tố của hình hộp chữ nhật và hình lập phương, vận dụng để giải các bài tập có liên quan.*

“Các bài tập có liên quan”: tính diện tích, thể tích của hình khối (lập phương, hộp chữ nhật)

Đối với hình trụ, hình cầu, theo [29, tr.203]:

- *Nhận dạng hình trụ, hình cầu*
- *Xác định đồ vật có dạng hình trụ hình cầu*

Chương trình không yêu cầu học sinh vẽ hình, mà trọng tâm là các hoạt động nhằm nhận dạng hình.

Kết luận:

HHKG lớp 5 là hình học ghi nhận, chủ yếu thông qua quan sát mô hình, “hình ảnh” của các vật trong thực tế và hình biểu diễn để hình thành biểu tượng của một số hình khối cơ bản đã giới thiệu ở trên, nhận dạng được hình khối và các yếu tố của nó (đỉnh, cạnh, mặt) trên hình biểu diễn, góp phần trang bị cho HS những kiến thức không gian cơ bản.

2.2.2. Làm quen với hình học không gian ở THCS

Ở bậc THCS, HS được làm quen với hình học không gian ở cuối lớp 8 và cuối lớp 9

Lớp 8, tập 2: Hình học không gian được giới thiệu ở chương cuối cùng, chương IV: Hình lăng trụ đứng. Hình chóp đều

SGV HH 8, tập 2 chỉ rõ:

Ở chương này, các tác giả chỉ giới thiệu một số vật thể trong không gian thông qua các mô hình. Trên cơ sở quan sát hình hộp chữ nhật, HS nhận biết được một số khái niệm cơ bản của hình học không gian:

- Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian
- Đoạn thẳng trong không gian, cạnh, đường chéo.
- Hai đường thẳng song song với nhau
- Đường thẳng song song với mặt phẳng, hai mặt phẳng song song
- Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc

Thông qua quan sát và thực hành học sinh nắm vững các công thức được thừa nhận về diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình lăng trụ đứng, hình chóp đều và sử dụng các công thức đó để tính toán

[14, tr109]: “Chương trình không yêu cầu học sinh **biểu diễn** hình không gian ~~nhưng~~ vì ệc quan sát mô hình, việc đọc hình là cần thiết ”

Lớp 9, tập 2: HHKG được giới thiệu ở chương cuối cùng, chương IV: Hình trụ - Hình nón - Hình cầu

SGV HH 9, tập 2:

Thông qua một số hoạt động: quan sát mô hình, quay hình, nhận xét mô hình học sinh nhận biết được:

- Cách tạo thành hình trụ, hình nón, hình nón cụt và hình cầu. Thông qua đó nắm được những yếu tố của những hình nói trên.

- Đáy của hình trụ, hình nón, hình nón cụt
- Đường sinh của hình trụ, hình nón
- Trục, chiều cao hình trụ, hình nón, hình cầu
- Mặt xung quanh của hình trụ, hình nón, hình cầu
- Tâm, bán kính, đường kính của hình cầu

Thông qua quan sát và thực hành học sinh nắm vững các công thức được thừa nhận về diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình lăng trụ đứng, hình chóp đều và sử dụng các công thức đó để tính toán

“Không yêu cầu HS biểu diễn hình nhưng việc vẽ, quan sát mô hình, “đọc” hình là cần thiết”.

Các bài tập cần hình vẽ đều có hình vẽ sẵn, do đó chúng tôi cho rằng “việc vẽ” ở đây chính là **vẽ lại** các hình mà SGK đã vẽ trước. Trong các mục sau đây chúng tôi sẽ phân tích để tìm hiểu ý đồ sư phạm của các tác giả về sự cần thiết của việc quan sát mô hình và “đọc” hình, đồng thời tìm hiểu đặc điểm của các hình vẽ sẵn trong mục tiêu nghiên cứu ràng buộc của thể chế đối với hình vẽ.

2.2.2.1. Tiếp cận khái niệm, định lý, tính chất

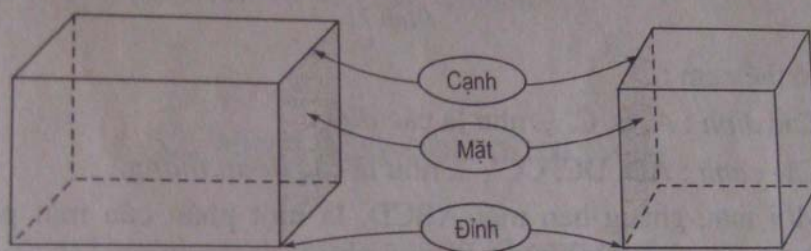
Không định nghĩa khái niệm mà mô tả thông qua hình vẽ kèm theo các đặc điểm của các yếu tố đỉnh, cạnh, góc, mặt.

Ví dụ:

- Khái niệm hình hộp chữ nhật:

1. Hình hộp chữ nhật

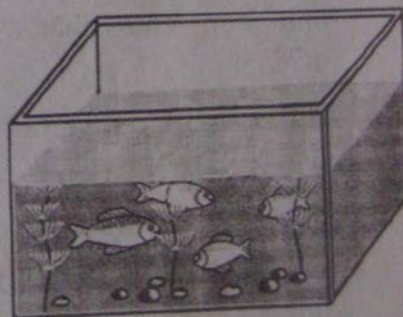
Hãy quan sát hình 69 :



Hình 69

- Hình 69 cho ta hình ảnh của hình *hộp chữ nhật*, nó có 6 *mặt* là những hình *chữ nhật*^(*).
- Hình hộp chữ nhật có : 6 mặt, 8 đỉnh và 12 cạnh.
- Hai mặt của hình hộp chữ nhật không có cạnh chung gọi là hai *mặt đối diện* và có thể xem chúng là hai *mặt đáy* của hình hộp chữ nhật, khi đó các mặt còn lại được xem là các *mặt bên*.
- Hình *lập phương* là hình hộp chữ nhật có 6 mặt là những hình vuông.

Ví dụ. Bể nuôi cá cảnh có dạng một hình hộp chữ nhật (h.70).



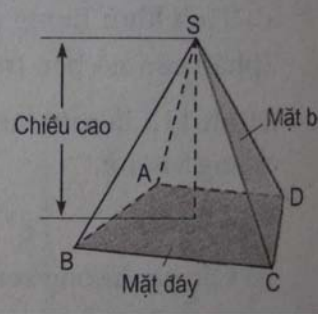
Hình 70

Dựa trên minh họa một “hình ảnh” của hình hộp chữ nhật, SGK giới thiệu các thành tố của hình. Điều này cho thấy các tác giả nhấn mạnh việc ghi nhớ biểu tượng hình biểu diễn của hình hộp chữ nhật, chưa xét đến các vấn đề liên quan đến việc biểu diễn hình không gian.

- Khái niệm hình chóp:

1. Hình chóp

- Hình 116 là một hình chóp. Nó có mặt đáy là một đa giác và các mặt bên là những tam giác^(*) có chung một đỉnh. Đỉnh chung này gọi là *đỉnh* của hình chóp.
- Đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy gọi là *đường cao* của hình chóp.



The diagram shows a pyramid with apex S. The base is a quadrilateral ABCD, labeled 'Mặt đáy'. The side faces are triangles SAB, SBC, SCD, and SDA, collectively labeled 'Mặt bên'. A dashed line from S perpendicular to the base is labeled 'Chiều cao' (height).

Vẫn thông qua hình biểu diễn của hình hộp chữ nhật, SGK giới thiệu các đối tượng cơ bản của HHKG:

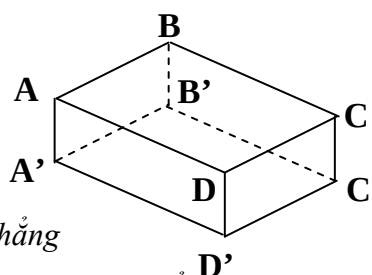
[12, tr96]:

2. Mặt phẳng và đường thẳng

Quan sát hình *hộp chữ nhật* $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy kể tên các mặt, các đỉnh và các cạnh của hình hộp:

Ta có thể xem:

- Các đỉnh $A, B, C, \dots$ như là các điểm
- Các cạnh: $AD, DC, CC', \dots$ như là các đoạn thẳng
- Mỗi mặt, chẳng hạn mặt $ABCD$, là một phần của mặt phẳng (ta hình dung mặt phẳng trải rộng về mọi phía)



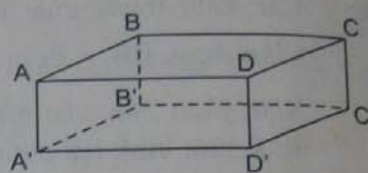
Đường thẳng qua hai điểm A, B của mặt phẳng $(ABCD)$ thì nằm trọn trong mặt phẳng đó (tức là mọi điểm của nó đều thuộc mặt phẳng)

Với cách mô tả như là sự đồng nhất giữa hình vẽ và hình hình học ở trên, cho ta thấy bóng dáng của các quy tắc và quy ước biểu diễn hình (điểm biểu diễn cho điểm, đoạn thẳng biểu diễn cho đoạn thẳng, hình bình hành thể hiện một phần của mặt phẳng). Khái niệm đường thẳng nằm trong mặt phẳng được giới thiệu đồng thời ký hiệu mặt phẳng được lồng ghép vào, thông qua một tính chất về quan hệ giữa đường thẳng và mặt phẳng, làm cơ sở cho việc giới thiệu vị trí tương đối của

hai đường thẳng, hai mặt phẳng và các tính chất của quan hệ song song, quan hệ vuông góc sau đó:[12, tr.98]:

?1 Quan sát hình hộp chữ nhật ở hình 75 :

- Hãy kể tên các mặt của hình hộp.
- BB' và AA' có cùng nằm trong một mặt phẳng hay không ?
- BB' và AA' có điểm chung hay không ?



Hình 75

- Trong không gian, hai đường thẳng a và b gọi là **song song** với nhau nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung. Chẳng hạn, các đường thẳng AA' , BB' song song với nhau (h.75).

Quan sát hình 76, ta có những nhận xét sau :

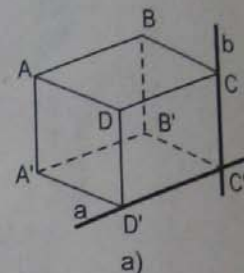
Với hai đường thẳng phân biệt a , b trong không gian, chúng có thể :

a) **Cắt nhau**. Chẳng hạn $D'C'$ và CC' cắt nhau ở C' , chúng cùng nằm trong mặt phẳng $(DCC'D')$ (h.76a).

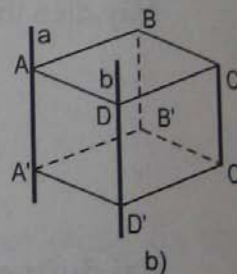
b) **Song song**. Chẳng hạn AA' song song với DD' , kí hiệu $AA' \parallel DD'$, chúng cùng nằm trong mặt phẳng $(AA'D'D)$ (h.76b).

c) **Không cùng nằm trong một mặt phẳng** nào, chẳng hạn các đường thẳng AD và $D'C'$ (h.76c).

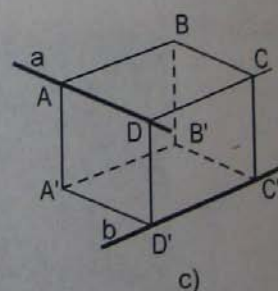
- Hai đường thẳng phân biệt, cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau. Chẳng hạn AB và $D'C'$ song song, vì chúng cùng song song với DC (h.76a).



a)



b)



c)

Hình 76

[12, tr.99]: quan hệ song song

72 Quan sát hình hộp chữ nhật ở hình 77 :

– AB có song song với $A'B'$ hay không ? Vì sao ?

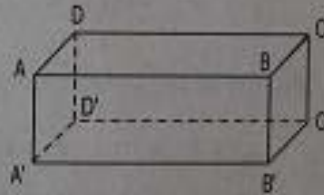
– AB có nằm trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ hay không ?

• Khi AB không nằm trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ mà AB song song với một đường thẳng của mặt phẳng này, chẳng hạn $AB \parallel A'B'$, thì người ta nói AB song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và kí hiệu : $AB \parallel mp(A'B'C'D')$.

73 Tìm trên hình 77 các đường thẳng song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Nhận xét. Trên hình hộp chữ nhật (h.77), xét hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$. Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau AB, AD và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ chứa hai đường thẳng cắt nhau $A'B', A'D'$, hơn nữa AB song song với $A'B'$ và AD song song với $A'D'$, khi đó người ta nói **mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$** và kí hiệu :

$$mp(ABCD) \parallel mp(A'B'C'D').$$



Hình 77

[12, tr.101]: quan hệ vuông góc

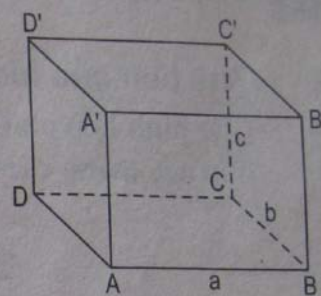
Quan sát hình hộp chữ nhật (h.84) :

– $A'A$ có vuông góc với AD hay không ? Vì sao ?

– $A'A$ có vuông góc với AB hay không ? Vì sao ?

• Khi đường thẳng $A'A$ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AD và AB của mặt phẳng $(ABCD)$ ta nói $A'A$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A và kí hiệu :

$$A'A \perp mp(ABCD).$$



Hình 84

Nhận xét. Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng tại điểm A thì nó vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng đó.

• Khi một trong hai mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại thì người ta nói hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau và kí hiệu (chẳng hạn với trường hợp vừa xét) :

$$mp(ADD'A') \perp mp(ABCD).$$

Như vậy, thông qua tiếp cận ban đầu các khái niệm không gian, HHKG ở THCS giúp HS hình thành biểu tượng về các hình khối cơ bản, đặc điểm các yếu tố và “quan hệ giữa các yếu tố” của nó. Các ký hiệu, quy ước vẽ hình không được giới thiệu tổng quát mà được lồng ghép vào trong mô tả các quan hệ, tính chất trên những hình khối cụ thể. Việc sử dụng nhiều lần hình biểu diễn hình hộp chữ nhật với các mặt chữ nhật được vẽ thành hình bình hành *lưu lại*

dấu ẩn là yếu tố góc có thể thay đổi, những thay đổi về tỉ lệ độ dài giữa các cặp đoạn thẳng trong biểu diễn chưa thể hiện trong chương trình.

2.2.2.2. Quy tắc biểu diễn hình

Đến bài 4: “Hình lăng trụ đứng”, xuất hiện chỉ dẫn về cách vẽ mối quan hệ song song, vuông góc trên mặt phẳng.

[12, tr.107]:

Chú ý:

- *BCFE là hình chữ nhật, khi vẽ nó trên mặt phẳng ta thường vẽ thành hình bình hành.*
- *Các cạnh song song vẽ thành các đoạn thẳng song song*
- *Các cạnh vuông góc có thể không vẽ thành các đoạn thẳng vuông góc (EB và EF chẳng hạn)*

Đây là lần đầu tiên và cũng là lần chỉ dẫn duy nhất về cách vẽ hình không gian trong phần HHKG lớp 8, 9. Đây cũng là lần gặp gỡ đầu tiên với quy tắc bảo toàn song song. Yếu tố góc không bất biến khi biểu diễn được chú ý song không lưu ý đến yếu tố độ dài. Quy tắc bất biến tỉ lệ không được đề cập tới.

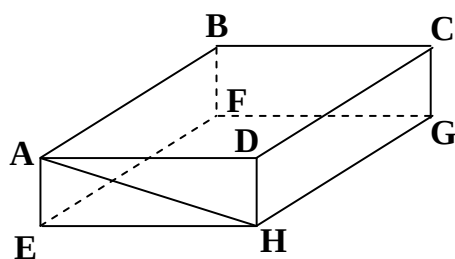
2.2.2.3. Các tổ chức toán học

Kiểu nhiệm vụ chủ yếu là đọc hình: hầu hết các bài tập đều cho hình vẽ trước

❖ Kiểu nhiệm vụ T1: Đọc hình

Đặc trưng của kiểu nhiệm vụ này là hình đã cho là các hình khối, HS cần quan sát, tưởng tượng, dựa vào các khái niệm, tính chất đã học để tìm ra đặc điểm, tính chất và mối quan hệ (liên thuộc, song song, vuông góc, bằng nhau) của các yếu tố trong hình. Ngoài bản thân hình khối với các cạnh, mặt, đỉnh thì các yếu tố khác hoặc là đường chéo của mặt hoặc là điểm thuộc cạnh hay thuộc đường chéo của mặt hình khối.

Ví dụ: [12, tr.100], bài 9:



Hình 83

Hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ (h.83) có cạnh AB song song với mặt phẳng $(EFGH)$.

- Hãy kể tên các cạnh khác song song với mặt phẳng $(EFGH)$.
- Cạnh CD song song với những mặt phẳng nào của hình hộp chữ nhật?

c) Đường thẳng AH không song song với mặt phẳng $(EFGH)$, hãy chỉ ra mặt phẳng song song với đường thẳng đó

Kỹ thuật:

τ_{11} : Quan sát, kết luận

τ_{12} : Dựa trên các khái niệm, tính chất để kết luận

Công nghệ:

θ_1 : Hình minh họa, khái niệm hình khối và đặc điểm các yếu tố của nó; Tính chất của quan hệ song song, vuông góc.

❖ **Kiểu nhiệm vụ T2: Gấp hình**

t_{21} : Gấp hình để được hình khối theo hình mẫu đã cho trước bằng hình vẽ

Kỹ thuật:

τ_{21} : Quan sát, tưởng tượng, thử các cách gấp để thu được kết quả

t_{22} : Lựa chọn hình khai triển thích hợp để có thể gấp được thành hình khối theo yêu cầu.

Kỹ thuật:

τ_{22} : Quan sát, tưởng tượng trong đầu việc gấp hình để kết luận

❖ **Kiểu nhiệm vụ T3: Vẽ hình**

Kiểu nhiệm vụ vẽ hình chỉ có 4 bài trong SGK, còn lại là hệ thống các bài tập trong phần gợi ý các hoạt động cho học sinh kèm theo đồ dùng dạy học của chương trình lớp 8 (phần phụ lục SGK lớp 8)

t_{31} : Vẽ hình khối theo mẫu

Kỹ thuật:

τ_{31} : Quan sát và vẽ lại

t_{32} : Vẽ thêm đường nét để có hình hoàn chỉnh như hình mẫu

Kỹ thuật:

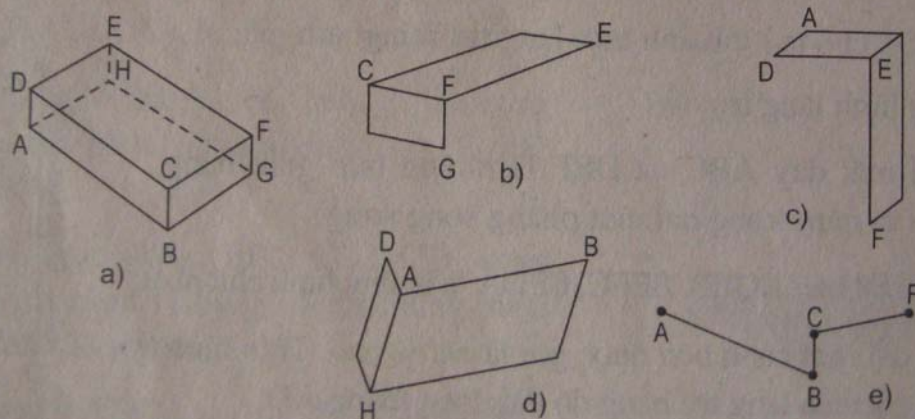
τ_{32} : Quan sát, tưởng tượng (hình dung hình) để vẽ thêm đường nét.

Công nghệ:

θ_3 : Khái niệm hình khối và đặc điểm các yếu tố của nó.

Ví dụ: Bài 20/108

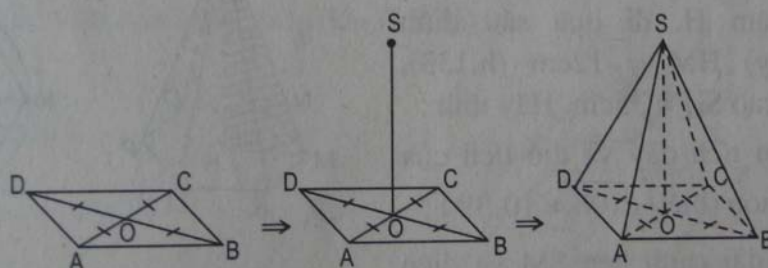
Vẽ lại các hình sau vào vở rồi vẽ thêm các cạnh vào các hình 97b, c, d, e để có một hình hộp hoàn chỉnh (như hình 97a).



Hình 97

Ví dụ: [12, tr.123]

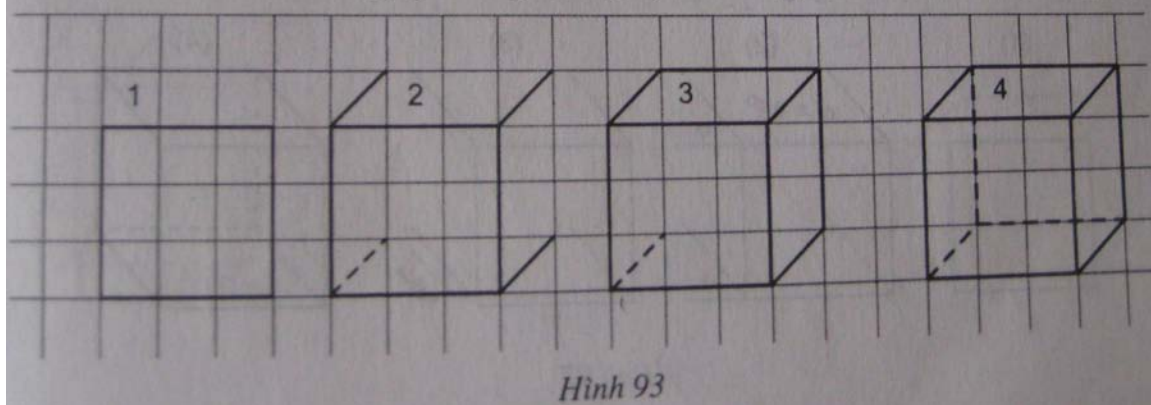
? Thực hiện các bước vẽ hình chóp đều theo chiều mũi tên đã chỉ ra trên hình 128.



Hình 128

Hoặc:

• Thực hành vẽ hình lập phương trên giấy ô vuông theo bốn bước (h.93).



Hình 93

Thống kê số lượng bài tập:

Kiểu nhiệm vụ, nhiệm vụ	Số lượng		Tổng	Tỉ lệ
	Lớp 8	Lớp 9		
Đọc hình	18	2	20	59%
Gấp hình	9	1	10	29%
Vẽ hình khối theo mẫu	1	0	1	3%
Vẽ thêm đường nét để có	3	0	3	9%

hình hoàn chỉnh				
Tổng	31	3	34	100%

Ngoài ra trong phần gợi ý các hoạt động cho HS ở SGK 8 có 10 bài thuộc nhiệm vụ vẽ hình khối theo mẫu (gồm vẽ hình chóp, hình chóp đều, hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương), 3 bài tập thuộc nhiệm vụ gấp hình.

Nhận xét:

Phần lớn bài tập thuộc các kiểu nhiệm vụ đọc hình, gấp hình nhằm rèn luyện trí tưởng tượng không gian, giúp HS củng cố các biểu tượng HH, một mặt tri giác tổng thể về các hình khối, mặt khác định vị được các quan hệ giữa các yếu tố của hình khối, bước đầu luyện tập sử dụng một số tính chất của quan hệ song song và quan hệ vuông góc để nhận dạng các quan hệ này.

Bài tập vẽ hình chủ yếu là quan sát hình vẽ sẵn và vẽ lại, HS được rèn luyện vẽ hình khối theo các bước trên giấy kẻ ô vuông. Với yêu cầu cao hơn một chút HS phải tưởng tượng không gian, nhớ lại các biểu tượng hình biểu diễn của hình khối từ đó vẽ thêm nét (liền hoạt đứt) để tạo thành hình hoàn chỉnh. Tuy nhiên kiểu nhiệm vụ vẽ thêm đường nét chỉ có 3 bài.

Trong kiểu nhiệm vụ đọc hình có 2 bài tập nhận dạng quan hệ bằng nhau về độ dài nhưng đều xét trên các cạnh của hình hộp chữ nhật với yêu cầu chỉ ra các cạnh bằng nhau của hình, hơn nữa kiểu nhiệm vụ vẽ hình phần lớn là quan sát để vẽ theo cho nên chúng tôi nhận định loại bài tập này có ý nghĩa củng cố đặc điểm các mặt, các cạnh của hình khối và biểu tượng hình biểu diễn của nó, không hình thành được ở HS ý thức về yêu cầu biểu diễn hình liên quan đến quy tắc bất biến tỉ lệ.

2.2.2.4. Kết luận

HHKG lớp 8, 9 giới thiệu lại các hình khối đã học ở lớp 5 và bổ sung thêm một số hình khối khác (chóp, chóp cụt, lăng trụ đứng, nón). Việc đọc hình, gấp hình, vẽ hình,... nhằm giúp học sinh khắc sâu hơn những biểu tượng hình học của các hình khối đã học và đặc điểm các yếu tố của nó. Giới thiệu và sau đó củng cố những quan hệ, tính chất hình học (chủ yếu là quan hệ song song) cũng chỉ trong vài trường hợp cụ thể dựa trên các yếu tố của những hình khối (các cạnh, đỉnh, mặt của hình khối), chưa yêu cầu nắm được các tính chất thông qua suy diễn. Bước đầu rèn cho học sinh vẽ các hình khối cơ bản, đặc biệt: hộp chữ nhật, lập phương, lăng trụ, chóp đều, chóp cụt đều song yêu cầu vẽ hình về cơ bản chỉ ở mức độ “vẽ lại” theo mẫu, không cần tự hình dung hình để vẽ do đó hầu như chỉ là vẽ bằng ghi nhớ mà không cần suy luận. Ở lớp 8 đã ngầm ẩn đưa vào quy tắc bảo toàn song song, tuy nhiên quy tắc bất biến tỉ lệ không xuất hiện ở cả lớp 8 và lớp 9.

Quy tắc bất biến tỉ lệ không được hình thành ở học sinh dù là ngầm ẩn hay tường minh.

2.2.3. Hình học không gian 11

Chương trình hình học 11 dành hai chương nghiên cứu HHKG, gồm:

Chương 2: Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song

Bài 1: Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

Bài 2: Hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song

Bài 3: Đường thẳng và mặt phẳng song song

Bài 4: Hai mặt phẳng song song

Bài 5: Phép chiếu song song. Hình biểu diễn của một hình trong không gian

Chương 3: Vectơ trong không gian. Quan hệ vuông góc trong không gian

Bài 1: Vectơ trong không gian

Bài 2: Hai đường thẳng vuông góc

Bài 3: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Bài 4: Hai mặt phẳng vuông góc

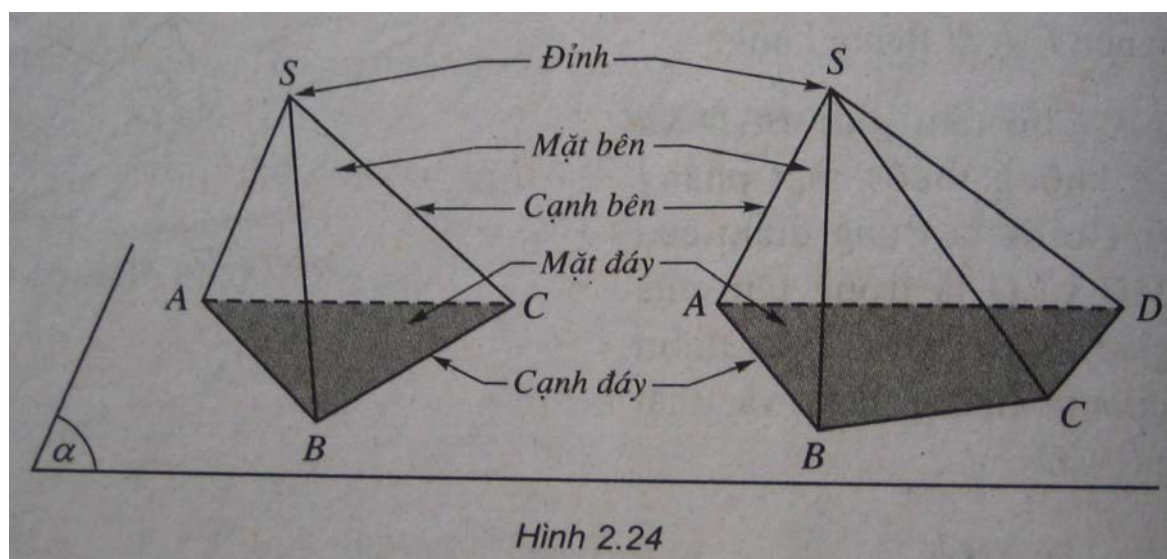
Bài 5: Khoảng cách

2.2.3.1. Tiếp cận Khái niệm, Định lý, Tính chất

Khái niệm mặt phẳng, đối tượng cơ bản thứ 3 (ngoài điểm và đường thẳng) trong không gian được mô tả thông qua hình ảnh thực tế (mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng) kèm theo quy ước biểu diễn và ký hiệu.

Định nghĩa hình khối bằng kiến thiết: Hình chóp, chóp cắt, hình lăng trụ.

Ví dụ: [25, tr.51] Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α) . Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$ gọi là hình chóp, ký hiệu là $S.A_1A_2...A_n$. Ta gọi S là đỉnh và đa giác $A_1A_2...A_n$ là mặt đáy. Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$ được gọi là các mặt bên; các đoạn $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ được gọi là các cạnh bên; các cạnh của đa giác đáy gọi là các cạnh đáy của hình chóp. Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... lần lượt là hình chóp tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... (h.2.24).



Hình 2.24

Cách định nghĩa này ngầm ẩn chỉ ra cách vẽ đối tượng được định nghĩa. Sau đó, các trường hợp đặc biệt của mỗi loại hình khối được định nghĩa theo “chủng, loại”, chẳng hạn: “Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là hình tứ diện đều” hay “Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp”,... Đến chương “quan hệ vuông góc” các hình khối đều được định nghĩa theo cách này, vì chúng chỉ là các trường hợp đặc biệt của các hình khối đã học ở chương “quan hệ song song”.

Định nghĩa quan hệ:

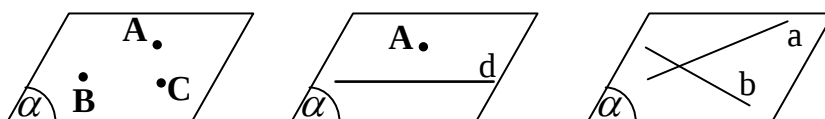
- Mô tả (kèm hình vẽ) và suy luận để rút ra đặc điểm thuộc tính của quan hệ (vị trí tương đối của hai đường thẳng, của đường thẳng và mặt phẳng), sau đó có những trường hợp cung cấp định nghĩa tổng quát (hai đường thẳng song song).

- Định nghĩa quan hệ kèm hình minh họa (hai mặt phẳng song song, đường thẳng vuông góc mặt phẳng,...)

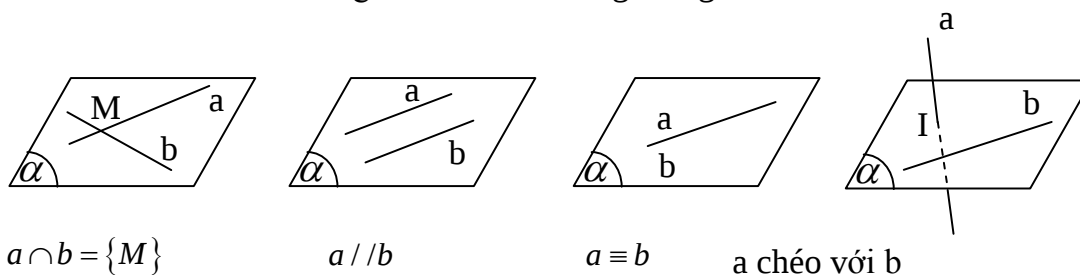
Các định lý, tính chất được phát biểu kèm theo hình vẽ minh họa, mà theo [41] gọi là các hình biểu diễn mẫu. Theo quan điểm “giảm tải”, mặc dù nhiều định lý, tính chất không được chứng minh nhưng đều kèm theo hình vẽ minh họa để giúp học sinh hiểu nghĩa của chúng. Sau đó giới thiệu các tình huống hoạt động hoặc ví dụ áp dụng mà các định lý tính chất này được sử dụng với vai trò công cụ. Cụ thể:

Các tiên đề, định lý, tính chất nói về mối tương quan giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong không gian được minh họa một cách tổng quát. Chẳng hạn:

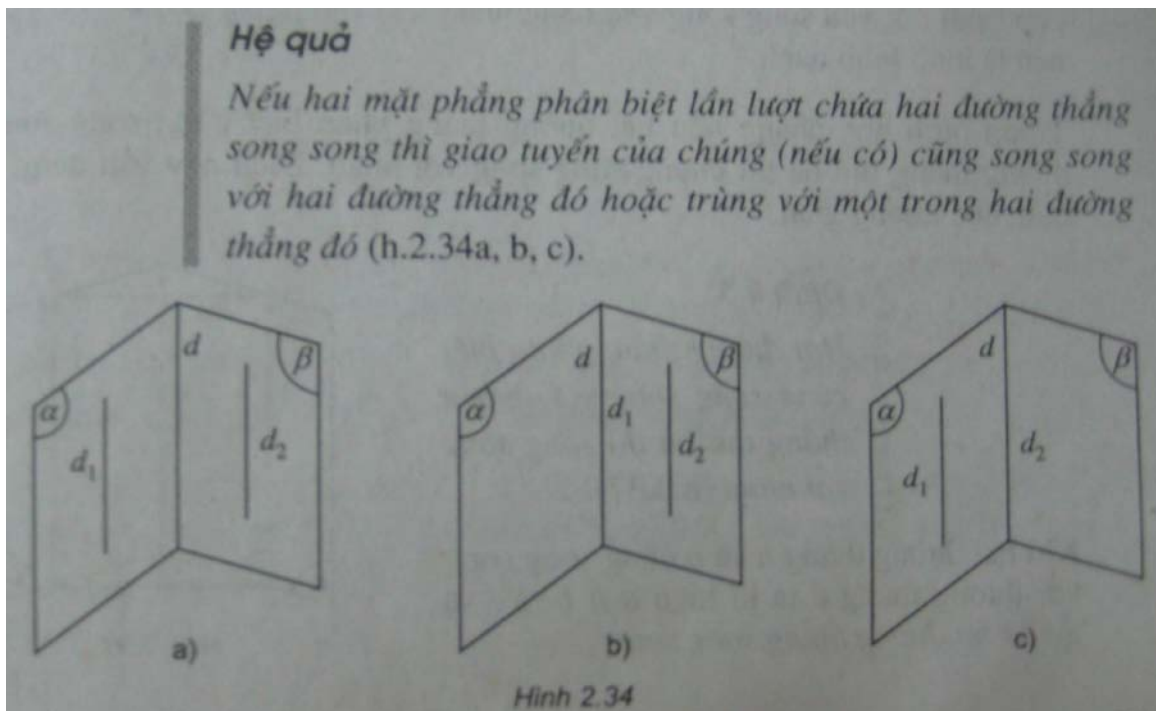
- Minh họa ba cách xác định mặt phẳng:



- Minh họa vị trí tương đối của hai đường thẳng



- Minh họa tính chất của quan hệ song song giữa đường thẳng và mặt phẳng:



Các ví dụ áp dụng phần lớn sử dụng hình khối nhằm “tạo tình huống cụ thể để vận dụng các lý thuyết đã học và là cơ hội để gắn toán học với hình ảnh của chúng trong thực tế” [26, tr.57].

[25, tr.58]: Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

Ở chương III – “Vector trong không gian. Quan hệ vuông góc trong không gian”, vẫn theo quan điểm trình bày ở chương II, SGK đưa ra những hình vẽ tổng quát minh họa cho các khái niệm, định lý, tính chất. Các hoạt động, ví dụ áp dụng sử dụng các hình khối đã được vẽ sẵn như là một gợi ý cho việc biểu diễn hình, song không trực tiếp yêu cầu vẽ hình biểu diễn.

Hoạt động trực tiếp yêu cầu đọc hình chỉ ở mức độ củng cố đặc điểm các yếu tố của một số hình khối đặc biệt chẳng hạn: hộp, lăng trụ, lập phương, hộp chữ nhật, chóp đều, gồm :

Bài 2: HD4 (Lập phương)

Bài 4: HD4 (hình lăng trụ, hình hộp), HD5 (hình hộp chữ nhật), HD6 (chóp đều)

Nhận xét:

Cách tiếp cận hình khối trong chương trình đồng thời chỉ ra cách vẽ các hình khối tương ứng. Đặc biệt, phần lớn các ví dụ đều sử dụng hình chóp.

HS phải biểu diễn hình bình hành (đáy hình khối) trước bài “phép chiếu song song” khi chưa được giới thiệu về quy tắc bất biến tỉ lệ, hơn nữa bảo toàn đúng quy tắc song song đối với hình bình hành thì hiển nhiên quy tắc bất biến tỉ lệ cũng được đảm bảo, do đó theo chúng tôi chỉ giúp gây dấu ấn đậm hơn ở HS quy tắc bảo toàn song song.

2.2.3.2. Khái niệm hình vẽ, phép chiếu song song, quy tắc bất biến tỉ lệ

Nếu như ở TH và THCS các khái niệm hình học không gian được xây dựng rời rạc thông qua các mô hình cụ thể, “trộn lẫn định nghĩa với tính chất”, thì chương trình THPT dành hơn nửa thời

lượng lớp 11 giới thiệu một cách hệ thống về HHKG bằng phương pháp tiên đề, thông qua phương tiện trực quan tượng trưng là hình vẽ - hình chiếu song song của các hình hình học lên mặt phẳng. Khái niệm này được định nghĩa thô sơ ngay từ bài đầu tiên: “Để nghiên cứu HHKG người ta thường vẽ các hình không gian lên bảng, lên giấy. Ta gọi hình vẽ đó là **hình biểu diễn của một hình không gian**” [7], đây cũng là lần xuất hiện đầu tiên một “định nghĩa” về hình vẽ”, với vai trò “nghiên cứu HHKG”:

Trong định nghĩa trên hàm chứa sự phân biệt giữa hình vẽ với hình hình học, hình vẽ là sự “thể hiện” hình hình học lên mặt phẳng.

Tiếp theo, SGK trình bày các yêu cầu khi vẽ hình biểu diễn:

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian người ta dựa vào những quy tắc sau đây.

- *Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng*
- *Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau*
- *Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ liên thuộc giữa điểm và đường thẳng*
- *Dùng nét liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất*

Các quy tắc khác sẽ được học ở phần sau.

Các quy tắc này như là sự phát biểu bằng lời cách thức luân chuyển tính chất hình học và tính chất không gian trên hình vẽ rất gần gũi tự nhiên đối với học sinh khi vẽ hình. **QT3 và những chú ý về những yếu tố có thể thay đổi khi biểu diễn không được đề cập đến.** Như vậy phần giới thiệu này không có thêm yếu tố mới so với những kiến thức biểu diễn hình đã học trước đó. Đối với quy ước về nét vẽ mà SGK đưa chung vào nhóm quy tắc, học sinh cũng được tiếp xúc từ lớp 5 và gặp lại ở HHKG lớp 8, 9, có khác là lần gặp gỡ này quy ước được phát biểu tường minh, nhấn mạnh về vai trò của nét vẽ (nét liền, nét đứt) trong sự tưởng tượng không gian, cần hình dung được hình thực để biết được cần phải dùng nét vẽ nào cho phù hợp.

Những quy tắc này là sự phát biểu tường minh những thao tác vẽ hình mà học sinh đã phải thực hiện, đồng thời cũng hợp thức hóa công cụ biểu diễn các đối tượng không gian khi nghiên cứu các khái niệm, định lý, tính chất ở các bài học tiếp theo, đòi hỏi minh họa các mối quan hệ định tính gồm quan hệ liên thuộc, song song, vuông góc giữa các đối tượng cơ bản như đã phân tích ở phần trước.

Như vậy, **QT3 không cần dùng đến khi minh họa cho phần lý thuyết chỉ có các mối quan hệ định tính, nhưng sự vắng mặt của quy tắc này đã lấy đi công cụ tường minh cho việc biểu diễn các tình huống hoạt động, ví dụ và các bài tập áp dụng mà ở đó liên quan thường xuyên đến cả mối quan hệ định lượng về độ dài đòi hỏi phải bảo toàn tỉ lệ.**

Ví dụ :

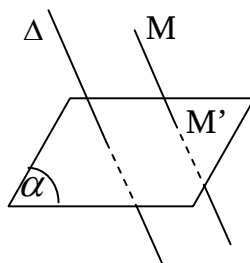
Ví dụ 1. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D . Trên hai đoạn AB và AC lấy hai điểm M và N sao cho $\frac{AM}{BM} = 1$ và $\frac{AN}{NC} = 2$. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng phẳng (DMN) với các mặt phẳng (ABD) , (ACD) , (ABC) , (BCD) .

Những yếu tố bất biến khi biểu diễn hình không gian có thể được xem như là sự di truyền từ HHP khi chúng được « thông báo trước », khi đó điều khác biệt trong biểu diễn hình ở HHKG so với HHP đó là cần sự tưởng tượng không gian, làm chủ các yếu tố thay đổi khi biểu diễn hình. Việc biểu diễn các yếu tố cần bảo toàn khi chúng được cho tường minh là điều gần gũi và đã luôn luôn được thực hiện trong HHP, song khi chúng không được cho tường minh thì cần phải suy luận để tuân thủ quy tắc biểu diễn, vì có thể khi biểu diễn các yếu tố không bất biến tùy ý sẽ dẫn đến việc vi phạm quy tắc đối với những yếu tố cần bảo toàn.

Cho đến trước bài 5 – phép chiếu song song, các yếu tố cần bảo toàn trong biểu diễn hình ở các hoạt động, bài tập áp dụng đều được cho tường minh. Không có chú ý cụ thể về những yếu tố có thể thay đổi khi biểu diễn.

Liệu có sự tiến triển gì trong chỉ dẫn biểu diễn hình và trong yêu cầu vẽ hình khi học sinh được học khái niệm phép chiếu song song và các tính chất của nó? Để trả lời câu hỏi này, tiếp theo chúng tôi phân tích, tìm hiểu cách thức giới thiệu về "lý thuyết biểu diễn hình" trong chương trình qua bài 5 - phép chiếu song song.

Phép chiếu song song được giới thiệu thông qua mô tả cách dựng hình chiếu song song M' của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ , và sau đó ngầm chỉ ra nó là một “ánh xạ” khi định nghĩa nó là “*phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ* ”.



Tính chất của phép chiếu song song được phát biểu dưới dạng định lý, kèm theo hình minh họa mà không chứng minh:

Định lý 1:

a. Phép chiếu song song biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

b. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

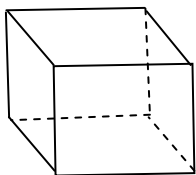
d. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

Đến đây quy tắc bất biến tỉ lệ lần đầu tiên được giới thiệu.

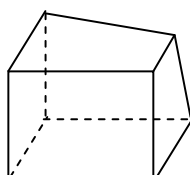
Trong quá trình chuyển đổi didactic, các tác giả SGK đã phân chia, chi tiết hóa các tính chất của phép chiếu song song, nhằm thể hiện một cách cụ thể các yêu cầu trong biểu diễn hình. Tuy nhiên hoạt động củng cố và vận dụng quy tắc bất biến tỉ lệ trong biểu diễn hình vẫn chỉ dừng lại ở mức “bảo toàn trung điểm” thông qua một tình huống hoạt động. SGK không có bài tập nào cho bài học lý thuyết về phép chiếu này.

Lần gặp gỡ thứ hai khái niệm hình vẽ được thực hiện thông qua sự hợp thức hóa bằng định nghĩa “Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng” sau khi học xong khái niệm và tính chất của phép chiếu song song: “Hình biểu diễn của hình H trong không gian là hình chiếu song song của hình H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó”.

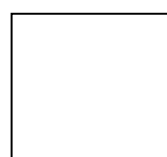
Không có hình minh họa thể hiện nghĩa của khái niệm, mà chỉ đưa ra hoạt động 3 “nhằm giới thiệu một số hình biểu diễn của hình lập phương, qua đó nhấn mạnh yêu cầu của hình biểu diễn phải trực quan, dễ tưởng tượng ra hình thực” [25, tr.76].



a)



b)



c)

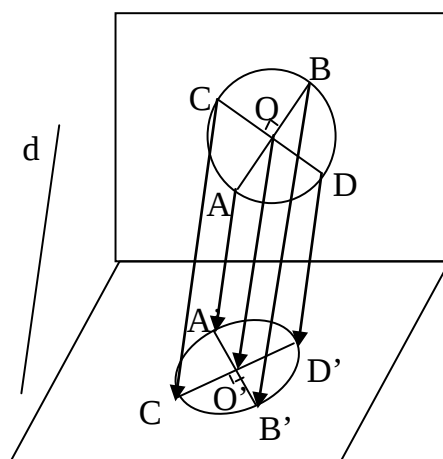
Hình b giúp học sinh củng cố “**qui tắc bảo toàn song song**” của hình biểu diễn. Hình a và c, theo chúng tôi nhấn mạnh phương chiếu và góc nhìn nhiều hơn. Hình a khá quen thuộc, dễ hình dung ra hình thực, hình c là trường hợp đặc biệt, **buộc phải liên hệ tới góc nhìn - phương chiếu** thì mới lí giải được.

Hình biểu diễn của “các hình thường gặp” được SGK giới thiệu gồm **những hình phẳng** quen thuộc:

- + Tam giác: đều, cân, vuông
- + Hình bình hành: bình hành, chữ nhật, thoi, vuông

+ Hình thang : có chú ý phải bảo toàn tỉ số độ dài hai đáy, song không có hình vẽ minh họa.

+ Hình tròn:



Ngoài những hình vẽ minh họa cho 4 tính chất của phép chiếu song song (chỉ gồm hình biểu diễn của điểm và đường thẳng trên mặt phẳng), đây là hình vẽ duy nhất minh họa phương chiếu và mặt phẳng chiếu của một hình không gian, thể hiện nghĩa của khái niệm “hình biểu diễn” được thực hiện qua một phép chiếu song song với một phương chiếu và mặt phẳng chiếu cụ thể. Tuy nhiên chúng tôi cho rằng minh họa này không gây được ấn tượng nơi học sinh vai trò công cụ biểu diễn của phép chiếu song song, vì minh họa bằng hình phẳng mà lại là hình tròn – hình chỉ xuất hiện một lần trong sách bài tập. Hơn nữa, tỉ lệ cần bảo toàn cũng chỉ thể hiện ở việc bảo toàn trung điểm.

Các yếu tố có thể thay đổi trong biểu diễn hình không được chú ý trực tiếp mà được lồng ghép vào trong hoạt động và trong giới thiệu hình biểu diễn của các hình phẳng vừa trình bày ở trên, hơn nữa cũng chỉ đề cập đến yếu tố "góc" chứ không thể hiện yếu tố "độ dài". Chẳng hạn, hoạt động 1: “*Hình chiếu song song của một hình vuông có thể là hình bình hành được không?*”.

Nếu như ở chương quan hệ song song chỉ trọng tâm các mối quan hệ định tính thì ở chương quan hệ vuông góc việc nghiên cứu các quan hệ định tính gắn liền với các tính toán định lượng. Xem xét về khía cạnh biểu diễn hình thì đến chương này tất cả các quy tắc biểu diễn hình đã được cung cấp đầy đủ và tường minh thông qua việc trình bày tính chất của phép chiếu song song trước đó.

Phép chiếu vuông góc được giới thiệu là phép chiếu song song theo phương chiếu là đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng chiếu, đồng thời nêu nhận xét **“*phép chiếu vuông góc là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song*”**

Việc đưa vào phép chiếu vuông góc nhằm cung cấp thêm khái niệm hình chiếu vuông góc để giới thiệu các khái niệm và các định lý, tính chất của quan hệ vuông góc trong không gian. Như vậy những tính chất của phép chiếu vuông góc không vận hành như công cụ biểu diễn hình.

Xuất hiện bài toán có hình biểu diễn đầy đủ và tỉ lệ không được cho tường minh nhưng việc biểu diễn sai tỉ lệ không ảnh hưởng đến kết quả giải toán.

[25, tr.103]:

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , có cạnh $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

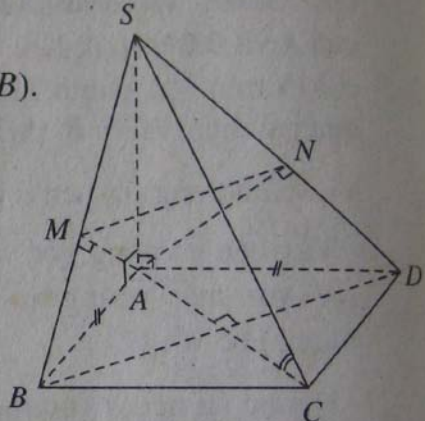
a) Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A lên các đường thẳng SB và SD . Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (AMN)

b) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$

Giải

a) Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp AS$, suy ra $BC \perp (ASB)$.
 Từ đó suy ra $BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$
 nên $AM \perp (SBC)$. Do đó $AM \perp SC$ (h.3.29).
 Tương tự ta chứng minh được $AN \perp SC$.
 Vậy $SC \perp (AMN)$.
 Do đó góc giữa SC và mặt phẳng (AMN) bằng 90° .

b) Ta có AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\widehat{SCA}$ là góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng $(ABCD)$. Tam giác vuông SAC cân tại A có $AS = AC = a\sqrt{2}$. Do đó $\widehat{SCA} = 45^\circ$.



Hình 3.29

Trong bài toán trên, hình chiếu của A lên SB , SD (M và N) là các hình biểu diễn đầy đủ, $BM/BS = 1/3$, $DN/DS = 1/3$. Vị trí của M trên cạnh SB và của N trên cạnh SD không ảnh hưởng đến kết quả tính toán trong bài toán. Lời giải của các tác giả SGK cho thấy những tỉ lệ không được cho trước và không ảnh hưởng đến kết quả bài toán thì không phải tính toán để biểu diễn tuân thủ quy tắc bất biến tỉ lệ.

Những phân tích ở trên chứng tỏ các hoạt động, tình huống áp dụng được đưa ra không có gì tiến triển về mức độ biểu diễn hình so với trước khi học phép chiếu song song, mặc dù đã được bổ sung quy tắc bất biến tỉ lệ.

Phân tích khái quát cấu trúc SBT HH 11:

SBT tóm tắt các khái niệm, định lý, tính chất trong SGK, sau đó đưa ra từng “vấn đề” cụ thể với phương pháp giải tương ứng cho mỗi vấn đề cùng ví dụ minh họa cho phương pháp giải. Tiếp đó là hệ thống bài tập củng cố rèn luyện.

Trong chương II bài 5 - “Phép chiếu song song. Hình biểu diễn của một hình trong không gian” đưa ra vấn đề “*vẽ hình biểu diễn của một hình H cho trước*”, với phương pháp giải được giới thiệu như sau:

- a/ *Xác định các yếu tố song song của hình H*
- b/ *Xác định tỉ số điểm M chia đoạn thẳng AB*
- c/ *Hình H' là hình biểu diễn của hình H phải có tính chất:*
 - + *Bảo đảm tính song song trên hình H*
 - + *Bảo đảm tỉ số của điểm M chia đoạn thẳng AB*

Trong phương pháp được chỉ ra ở trên rõ ràng chỉ dành cho trường hợp bảo toàn tỉ lệ của điểm chia đoạn thẳng, **trường hợp tỉ lệ của hai đoạn thẳng có giá song song không được đề cập tới.**

2.2.3.3. Các tổ chức toán học

Trong phần phân tích các tổ chức toán học sau đây, trọng tâm chúng tôi hướng đến việc phân chia các kiểu nhiệm vụ thuộc lĩnh vực vẽ và đọc hình nhằm thể hiện rõ mức độ ràng buộc của quy tắc bất biến tỉ lệ đối với từng nhiệm vụ cụ thể. Do đó chúng tôi không xét đến khía cạnh tương tượng không gian, mặt khác những kỹ thuật để thực hiện thao tác vẽ các đối tượng và quan hệ hình học nào mà thuộc HHP (chẳng hạn thao tác vẽ đường thẳng đi qua một điểm và song song với đường thẳng cho trước) chúng tôi chỉ ký hiệu chung là τ_p . **Công nghệ "các tính chất (quy tắc) của phép chiếu song song"** liên quan đến nhiều kiểu nhiệm vụ, chúng tôi ký hiệu là θ_k . Trong tất cả các nhiệm vụ vẽ hình đều có chú ý đối với đường thẳng: phần nhìn thấy vẽ nét liền và phần bị che khuất vẽ nét đứt, chúng tôi sẽ không ghi lại chú ý này ở trong các kỹ thuật vẽ.

❖ **T₁: Vẽ điểm trong không gian**

- **t_{11} : Vẽ điểm bất kỳ (trong không gian, điểm thuộc đường, thuộc mặt)**

Kỹ thuật:

τ_{v1} : Lấy điểm bất kỳ thuộc đường thẳng (điểm thuộc đường), điểm bất kỳ trong không gian (vẽ điểm trong không gian, điểm thuộc mặt phẳng) (đối với hình biểu diễn không đầy đủ)

Công nghệ: θ_1, θ_k

θ_1 : Các hình minh họa quan hệ liên thuộc giữa điểm và đường thẳng, mặt phẳng

- **t_{12} : Vẽ giao điểm của hai đường thẳng**

Kỹ thuật: τ_p

Công nghệ: θ_2, θ_k

θ_2 : Định lý về vị trí tương đối của hai đường thẳng

- **t_{13} : Vẽ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P)**

Kỹ thuật:

τ_{v2} : Lấy điểm thuộc đường thẳng và thuộc “miền trong” của hình biểu diễn mặt phẳng.

τ_{v3} : Tìm đường thẳng d' nằm trong mặt phẳng (P), và d' cắt d , vẽ giao điểm M của d và d' . M chính là giao điểm cần tìm (đối với hình biểu diễn đầy đủ).

Công nghệ:

θ_3 : Hình minh họa đường thẳng và mặt phẳng cắt nhau

θ_4 : Định lý, tính chất về quan hệ giữa đường thẳng và mặt phẳng

➤ **t_{14} : Vẽ điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k**

Nhiệm vụ này có đặc trưng là tỉ số k thuộc tập hữu tỉ trong đó tử số và mẫu số thuộc tập $\{-1, -2, -3, 1, 2, 3\}$.

Kỹ thuật: τ_p

Công nghệ: θ_5, θ_k

θ_5 : Khái niệm điểm chia đoạn thẳng theo tỉ lệ cho trước

❖ **T_2 : Vẽ đường thẳng (đoạn thẳng)**

➤ **t_{21} : Vẽ đường thẳng bất kỳ**

Kỹ thuật: τ_p

Công nghệ: θ_6, θ_k

θ_6 : Khái niệm đường thẳng, quy ước vẽ đường thẳng

➤ **t_{22} : Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm** (khi thông kê bài tập: chúng tôi chỉ xét trường hợp xác định giao tuyến mà dùng kỹ thuật này)

Kỹ thuật: τ_p

Công nghệ: $\theta_6, \theta_7, \theta_k$

θ_7 : Điều kiện xác định đường thẳng

➤ **t_{23} : Vẽ đường thẳng đi qua một điểm và song song với đường thẳng cho trước**

Kỹ thuật: τ_p

Công nghệ: $\theta_6, \theta_7, \theta_k$

➤ **t_{24} : Vẽ đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng cho trước**

Kỹ thuật:

τ_{v4} :

- Đối với hình biểu diễn không đầy đủ: dùng kỹ thuật của t_{24}

- Đối với hình biểu diễn đầy đủ: Xác định chân đường vuông góc, sau đó dùng kỹ thuật của

Công nghệ: $\theta_6, \theta_7, \theta_k$

➤ t_{25} : *Vẽ đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với mặt phẳng cho trước*

Kỹ thuật:

τ_{v5} :

- Đối với hình biểu diễn không đầy đủ: chọn chân đường vuông góc nằm trong miền góc hoặc miền đa giác biểu diễn cho mặt phẳng, sau đó dùng kỹ thuật của t_{22}

- Đối với hình biểu diễn đầy đủ: Xác định chân đường vuông góc, sau đó dùng kỹ thuật của t_{22} .

Công nghệ: $\theta_1, \theta_6, \theta_7, \theta_k$

❖ **T₃: Vẽ mặt phẳng**

➤ t_{31} : *Vẽ mặt phẳng bất kỳ*

➤ t_{32} : *Vẽ mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau*

➤ t_{33} : *Vẽ mặt phẳng đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng cắt nhau*

➤ t_{34} : *Vẽ mặt phẳng qua một điểm và song song với mặt phẳng cho trước*

➤ t_{35} : *Vẽ mặt phẳng qua một điểm và vuông góc với đường thẳng cho trước*

Kỹ thuật:

τ_{v6} : Vẽ hình bình hành hoặc vẽ một miền góc

τ_{v7} : Vẽ hình bình hành chứa hai đường thẳng cắt nhau

τ_{v8} : Tìm 3 điểm A, B, C không thẳng hàng thuộc mặt phẳng. Nối 3 điểm A, B, C. Mặt phẳng cần tìm là mp(ABC)

Công nghệ:

θ_8 : Quy ước vẽ mặt phẳng; định lý và hình minh họa các cách xác định mặt phẳng;

❖ **T₄: Vẽ đa giác**

Đặc trưng của T_4 là các loại tam giác (thường, cân, đều, vuông), tứ giác, bình hành, chữ nhật, thoi, vuông.

➤ t_{41} : *Vẽ tam giác*

Kỹ thuật:

τ_{v8} : Vẽ tam giác bất kỳ để biểu diễn cho một tam giác

Công nghệ:

θ_9 : [25, tr.74] (SGK HH 11):

Tam giác: Một tam giác bất kỳ bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, ...) (hình 2.69)

Hình 2.69

➤ **t_{42} : Vẽ tứ giác**

Kỹ thuật:

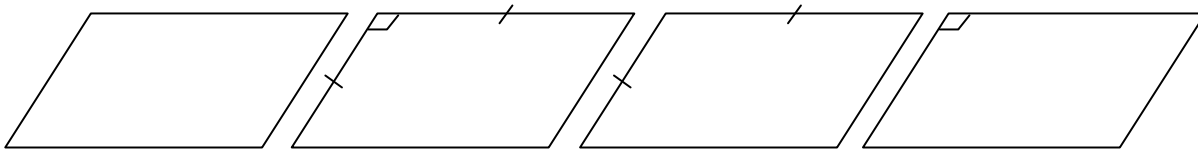
τ_{v9} : Vẽ hình bình hành để biểu diễn cho hình bình hành, chữ nhật, thoi và hình vuông. Vẽ hình thang có tỉ số độ dài hai đáy bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình cần biểu diễn để biểu diễn hình thang cho trước.

τ_{v10} : Vẽ tam giác bất kỳ để biểu diễn cho một tam giác nào đó trong hình thực, các điểm còn lại của hình thực dựa vào tính chất của hình bảo toàn qua phép chiếu song song

Công nghệ: θ_{10}, θ_k

θ_{10} : [25, tr.74] (SGK HH11):

Hình bình hành: Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật, ...) (hình 2.70)



Hình 2.70

Hình thang: Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

➤ **t_{43} : Vẽ lục giác đều**

Kỹ thuật:

τ_{v10} : Vẽ tam giác bất kỳ để biểu diễn cho một tam giác nào đó trong hình thực, các điểm còn lại của hình thực dựa vào tính chất của hình bảo toàn qua phép chiếu song song

τ_{v11} :

- Xác định các yếu tố song song của đa giác
- Xác định tỉ lệ cần bảo toàn của đa giác
- Biểu diễn hình sao cho bảo toàn được các yếu tố đã xác định ở hai bước trên

Công nghệ:

θ_9 : (Định lý L'Huilier)

θ_k : Các quy tắc của phép chiếu song song

Nhiệm vụ vẽ lục giác đều có 1 bài thuộc SBT. Trong lời giải của SBT trình bày hai cách làm đều bắt đầu từ hình bình hành (có đỉnh là đỉnh hoặc tâm của hình lục giác đều), các điểm còn lại có tính đối xứng với một trong các đỉnh của hình bình hành được vẽ trên cơ sở quy tắc bảo toàn tỉ lệ trường hợp điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số k.

➤ ***t₄₄: Xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với hình khối***

Kỹ thuật:

τ_{v12} :

- Xác định các giao điểm của (α) với các cạnh hình khối
- Nối các điểm đã xác định được ở bước trên

Công nghệ:

θ_{11} : Khái niệm thiết diện của mặt phẳng với hình khối

❖ **T₅: Vẽ hình khối (chóp, lăng trụ)**

➤ ***t₅₁: Vẽ hình chóp***

Kỹ thuật:

τ_{v13} : Vẽ đa giác đáy của hình khối (dùng kỹ thuật của kiểu nhiệm vụ T₄), vẽ điểm nằm ngoài mp chứa đa giác đáy, vẽ đường thẳng nối điểm với các đỉnh của đa giác.

τ_{v14} : Vẽ một tứ giác và hai đường chéo của nó biểu diễn cho một tứ diện nào đó trong hình thực; vẽ các điểm còn lại dựa vào tính chất của hình đã cho được bảo tồn qua phép chiếu song song.

Công nghệ:

θ_{12} : Định nghĩa hình khối và các hình minh họa tương ứng.

θ_{13} : Định lý Pohlke – Swarchtz

θ_k : Các tính chất (qui tắc) của phép chiếu song song

➤ ***t₅₂: Vẽ hình lăng trụ***

Kỹ thuật:

τ_{v15} : Vẽ một mặt đáy của lăng trụ, vẽ các đoạn thẳng là các cạnh bên của khối; nối các đầu mút đoạn thẳng để tạo thành đa giác đáy còn lại của hình khối

τ_{v16} : Vẽ hai đa giác đáy của hình khối (dùng kỹ thuật của kiểu nhiệm vụ T₄), vẽ đường thẳng nối các đỉnh tương ứng của của đa giác.

τ_{v14} (kỹ thuật vẽ mọi đa diện): Vẽ một tứ giác và hai đường chéo của nó biểu diễn cho một tứ diện nào đó trong hình thực; vẽ các điểm còn lại dựa vào tính chất của hình đã cho được bảo tồn qua phép chiếu song song.

Công nghệ: θ_{12} , θ_{13} , θ_k

(Chúng tôi xếp những hình khối có đáy là hình bình hành (bình hành, thoi, vuông, chữ nhật) vào loại "hình biểu diễn đầy đủ - cho trước tỉ lệ" vì đáy của chúng là các đa giác quen thuộc có các hình minh họa sẵn, hơn nữa biểu diễn chúng không cần dùng quy tắc bất biến tỉ lệ mà chỉ cần dùng quy tắc bảo toàn song song)

Nhận xét:

- Quy tắc bất biến tỉ lệ liên quan trực tiếp đến kiểu nhiệm vụ vẽ điểm (T_1) và vẽ đường thẳng (đoạn thẳng) (T_2)

- Các nhiệm vụ thuộc kiểu nhiệm vụ T_3 (vẽ mặt phẳng), T_5 (vẽ hình khối) có các bước kỹ thuật là các nhiệm vụ thuộc các kiểu nhiệm vụ T_1 (vẽ điểm), T_2 (vẽ đường thẳng), T_4 (vẽ đa giác).

- Trong vấn đề biểu diễn hình, chương trình cung cấp kỹ thuật không mang tính thuật toán. Như đã phân tích ở chương 1, định lý *Pohlke – Swarchtz* và định lý *L'Huilier* cung cấp thuật toán chung cho việc biểu diễn đa giác và hình khối. Trong thể chế được nghiên cứu, thiếu vắng kỹ thuật τ_{10} khi biểu diễn tứ giác (t_{42}), lục giác đều (t_{43}) cho thấy định lý *L'Huilier* chỉ được vận hành trong vai trò vẽ tam giác, θ_{13} (định lý *Pohlke – Swarchtz*) cũng vắng mặt giải thích lý do kỹ thuật τ_{v14} không được vận hành trong chương trình khi biểu diễn đa diện.

❖ T_6 : Đọc hình

Trong bộ môn hình học, việc vẽ và đọc hình liên quan mật thiết với nhau, có tương tượng đúng các hình không gian thì mới vẽ đúng vẽ tốt hình biểu diễn của chúng lên mặt phẳng và ngược lại có vẽ đúng vẽ tốt các hình không gian trên mặt phẳng thì mới tương tượng đúng, đọc đúng các quan hệ của chúng trên hình thực. Do đó việc nghiên cứu kiểu nhiệm vụ đọc hình vẽ là cần thiết.

Với mục đích tìm hiểu những khó khăn, chướng ngại của học sinh trong **vẽ hình** liên quan đến quy tắc bất biến tỉ lệ, chúng tôi nghiên cứu các kiểu nhiệm vụ vẽ hình trên hai phương diện yêu cầu trực tiếp và gián tiếp. Với kiểu nhiệm vụ đọc hình, chúng tôi chỉ **liệt kê các nhiệm vụ yêu cầu đọc hình trực tiếp** (có hình vẽ sẵn, học sinh cần tìm hiểu các tính chất hình học của hình gốc từ tính chất không gian thể hiện trên hình vẽ đã được cho trước) xem việc rèn quy tắc bất biến tỉ lệ thông qua đọc hình ở mức độ nào, vì **yêu cầu đọc hình gián tiếp đã ngầm ẩn thể hiện trong kiểu nhiệm vụ vẽ hình**.

T_6 gồm có các nhiệm vụ yêu cầu đọc hình trực tiếp sau:

➤ t_{61} : "Nhận dạng quan hệ liên thuộc"

Yêu cầu của nhiệm vụ này là xét xem một điểm hay một đường thẳng có nằm trong một mặt phẳng hay không.

Kỹ thuật:

τ_{d1} : Chỉ ra đường thẳng chứa điểm và nằm trong mặt phẳng đã cho

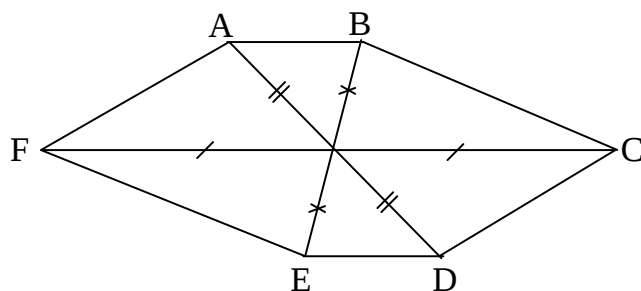
τ_{d2} : Chỉ ra 2 điểm nằm trên đường thẳng thuộc mặt phẳng đã cho

➤ t_{62} : *Xét xem một hình vẽ có hoặc không là hình biểu diễn của một hình nào đó hay không*

Ví dụ:

Chương 2, bài 5, HD1(không có hình vẽ sẵn): Hình chiếu song song của một hình vuông có thể là hình bình hành được không?

Chương 2, bài 5, HD 2: Hình bên có thể là hình chiếu song song của hình lục giác đều được không? Tại sao?



Kỹ thuật:

τ_{d3}

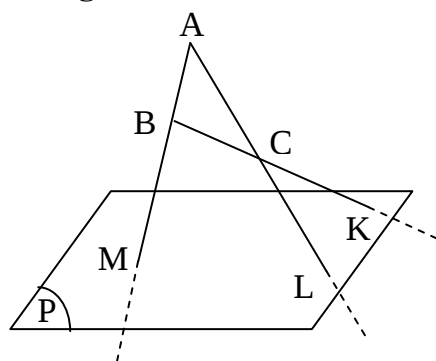
- Tìm các tỉ lệ cần bảo toàn và các cạnh song song trên hình gốc
- Kiểm tra xem các tỉ lệ và các cạnh song song đó có được bảo toàn trên hình biểu diễn hay không

Công nghệ:

θ_k : Tính chất (quy tắc) của phép chiếu song song

➤ t_{63} : *Xét xem hình bi ểu diễn đúng hay sai*(chỉ có ở hai hoạt động trong SGK)

Ví dụ: **Chương 2, bài 1, HD5**: Hình 2.16 đúng hay sai? Tại sao?



Hình 2.16

Giải bài tập này, đòi hỏi học sinh phải *dựa vào hình vẽ và vận dụng suy luận logic để giải thích hình vẽ*, khi lý giải được hình đã cho là sai, học sinh sẽ nhận ra được phải biểu diễn thế nào

mới đúng. Do đó loại bài tập này ***cũng giúp rèn học sinh vẽ hình biểu diễn đúng. Tuy nhiên số lượng bài tập quá ít***, chỉ có 2 bài đều không có tính chất “khô” và cũng không liên quan đến QT3.

Kỹ thuật:

τ_{d4} : Tìm mối liên hệ (quan hệ liên thuộc) giữa các đối tượng, suy luận để tìm ra quan hệ nào không được biểu diễn đúng.

Công nghệ:

θ_{d2} : Các khái niệm, định lý, tính chất về quan hệ tương giao giữa các đối tượng cơ bản

Thống kê số lượng bài tập thuộc các kiểu nhiệm vụ:

Kiểu nhiệm vụ	Nhiệm vụ		Hình biểu diễn không đầy đủ; hình biểu diễn đầy đủ không liên quan QT3		Hình biểu diễn đầy đủ, cần áp dụng QT3			
					Tỉ lệ được cho trước		Tỉ lệ không được cho trước	
	Kí hiệu	Tên	Số lượng	Tỉ lệ	Số lượng	Tỉ lệ	Số lượng	Tỉ lệ
T1: Vẽ điểm	t ₁₁	Vẽ điểm bất kỳ	23	8.1%				
	t ₁₂	Vẽ giao điểm của 2 đường thẳng	8	2.8%				
	t ₁₃	Vẽ giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng	18	6.3%				
	t ₁₄	Vẽ điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k			42	14.7%	2	0.7%
T2: Vẽ đường thẳng	t ₂₁	Vẽ đường thẳng bất kỳ	2	0.7%				
	t ₂₂	Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm (trường hợp xác định giao tuyến)	9	3.2%				
	t ₂₃	Vẽ đường thẳng đi qua một điểm và song song với đường thẳng cho trước	8	2.8%				
	t ₂₄	Vẽ đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng cho trước	7	2.5%			4	1.4%
	t ₂₅	Vẽ đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với mặt phẳng cho trước	13	4.6%	2	0.7%		
T3: Vẽ mặt phẳng	t ₃₁	Vẽ mặt phẳng bất kỳ (mp bất kỳ, mp qua đường thẳng cho trước, mp qua điểm cho trước, mp vuông góc hoặc song song với mp cho trước)	18	6.3%				
	t ₃₂	Vẽ mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau	1	0.4%				
	t ₃₃	Vẽ mặt phẳng đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng cắt nhau	3	1.1%				
	t ₃₄	Vẽ mặt phẳng qua một điểm và song song với mặt phẳng cho trước	2	0.7%				
	t ₃₅	Vẽ mặt phẳng qua một	1	0.4%				

		điểm và vuông góc với đường thẳng cho trước						
T4: Vẽ đa giác	t ₄₁	Vẽ tam giác	6	2.1%				
	t ₄₂	Vẽ tứ giác	1	0.4%	9	3.2%		
	t ₄₃	Vẽ lục giác đều	0	0.0%	1	0.4%		
	t ₄₄	Xác định thiết diện của mặt phẳng với hình khối	12	4.2%				
T5: Vẽ đa diện	t ₅₁	Vẽ hình chóp	50	17.6%	16	5.6%		
	t ₅₂	Vẽ hình lăng trụ	4	1.4%	15	5.3%		
T6: Đọc hình	t ₆₁	Chỉ ra quan hệ liên thuộc	2	0.7%				
	t ₆₂	Xét xem một hình vẽ có phải là hbd của một hình nào đó hay không	4	1.4%	1	0.4%		
	t ₆₃	Xét xem hình biểu diễn đúng hay sai	1	0.4%				
Tổng		285 bài	193	67.7%	86	30.2%	6	2.1%

Nhận xét:

Hầu hết các bài tập HS phải tự vẽ hình. Trong các bài tập làm việc với hình khối thì 66/85 số bài (77,6%) là hình chóp.

Số lượng bài cho trước tỉ lệ chiếm 30.2%, trong đó 14,7% thuộc nhiệm vụ t₁₄ (vẽ điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k). Đặc biệt trong số 42 bài thuộc t₁₄, có 37 bài (88,1%) tỉ số k = -1 (điểm cần vẽ là trung điểm của đoạn thẳng). Như đã phân tích, HS phải làm các bài tập “vẽ điểm” đã cho trước tỉ lệ, chẳng hạn “cho I là trung điểm AB”, hay “G là trọng tâm tam giác ABC”,... trước khi được cung cấp QT3, nhưng nhiệm vụ này rất quen thuộc và được thực hành nhiều trong HHP; 14.5% thuộc nhiệm vụ vẽ đa giác và vẽ hình khối có đặc trưng: đa giác hoặc đáy hình khối là các hình bình hành gồm hình bình hành, thoi, vuông, chữ nhật, đó là các tứ giác đặc biệt quen thuộc trong HHP, được chỉ dẫn cách biểu diễn trong HHKG (“*một hình bình hành bất kỳ bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành cho trước*” [25, tr.74]), tức là chỉ cần bảo toàn quan hệ song song giữa các cặp cạnh đối), do đó sản xuất biểu diễn sai của học sinh là rất thấp. ***Có duy nhất một bài thuộc nhiệm vụ vẽ hình khối có đáy là hình thang đã cho sẵn tỉ lệ 2 đáy, song việc biểu diễn sai hai đáy không ảnh hưởng đến việc giải đáp các yêu cầu của bài toán.***

Chỉ có 2.1% bài (6 bài) cần bảo toàn qui tắc bất biến tỉ lệ mà tỉ lệ không cho trước, học sinh phải đọc hình chính xác và sử dụng qui tắc bất biến tỉ lệ để biểu diễn cho đúng. Nhưng trong đó chỉ có một bài nếu biểu diễn sai (xác định sai chân đường cao của hình chóp) sẽ gây hậu quả là không giải được bài toán, 5 bài còn lại (chân đường cao trong tam giác là hoàn toàn xác định) việc biểu diễn sai không ảnh hưởng đến kết quả tính toán. Năm bài tập này rơi vào trường hợp tương tự như đã phân tích phần lý thuyết SGK: thể chế không “quan tâm” bảo toàn tỉ lệ khi tỉ lệ không cho trước và không ảnh hưởng đến kết quả bài toán.

2.2.3.4. Kết luận

Các hình biểu diễn mẫu đều không thể hiện QT3.

Tiếp cận các hình khối cơ bản (chóp, lăng trụ) thông qua định nghĩa kiến thiết, ban đầu giới thiệu một mặt phẳng chứa đáy hình khối, sau đó chỉ ra cách vẽ các cạnh bên. Phần lớn ví dụ áp dụng, bài tập làm việc với hình chóp.

Kiểu nhiệm vụ đọc hình trực tiếp (có hình vẽ sẵn) rất ít, đều không có tính chất khối, hơn nữa chỉ dừng ở mức độ rèn QT3 ở trường hợp bảo toàn trung điểm.

Đa số các tình huống, ví dụ áp dụng, bài tập liên quan đến QT3 đều là các tỉ lệ được cho trước, trong đó liên quan đến nhiệm vụ “vẽ điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số k ” thì đa số bài (88,1%) có $k = -1$ (vẽ trung điểm đoạn thẳng). Có 2 ví dụ tỉ lệ không được cho tường minh thì lại không ảnh hưởng đến kết quả bài toán, và thể chế cũng không quan tâm đến việc bảo toàn tỉ lệ thuộc trường hợp này. Đặc biệt, thiếu vắng nhiệm vụ rèn luyện việc bảo toàn tỉ lệ của hai đoạn thẳng có giá song song.

Hình biểu diễn của các tứ giác đặc biệt liên quan đến QT3 (các hình bình hành, hình thang) được giới thiệu tường minh, biện minh cho các kỹ thuật vẽ các tứ giác này. Định lý L'Huilier chỉ vận hành trong biểu diễn tam giác. Vắng mặt định lý Pohlke – Swarchtz. Kỹ thuật biểu diễn đa diện trong chương trình được biện minh bằng định nghĩa hình khối, trong đó đáy hình khối được biểu diễn trước sau đó là các đỉnh còn lại và cạnh bên.

Trước khi học lý thuyết biểu diễn hình – phép chiếu song song, chương trình đã giới thiệu một số quy tắc biểu diễn, nhưng vắng mặt QT3. Đến bài phép chiếu song song giới thiệu đầy đủ các quy tắc biểu diễn thông qua tính chất của phép chiếu song song nhưng những ràng buộc thể chế như đã phân tích cho thấy hệ thống bài tập không có gì tiến triển về yêu cầu biểu diễn hình liên quan đến QT3.

2.3. Kết luận

❖ Tính chất và đặc trưng ràng buộc thể chế đối với hình vẽ trong HHP và HHKG

	HHP	HHKG
Khái niệm hình vẽ	- Không được giới thiệu mà mặc nhiên được sử dụng trong vai trò phương tiện nghiên cứu hình học	- Khái niệm hình vẽ được giới thiệu ngay khi bước vào nghiên cứu một cách hệ thống HHKG ở lớp 11, là sự “biểu diễn” đối tượng không gian lên mặt phẳng, với ý nghĩa để nghiên cứu HHKG, sau đó hình vẽ được thể chế hóa qua việc định nghĩa chính xác dựa trên cơ sở phép chiếu song song
Vẽ hình	- Được thường xuyên rèn luyện kỹ năng và thao tác vẽ hình chính xác thông	- Không được rèn luyện vẽ hình. Thông qua các hình mẫu, các hình minh họa sẵn, tự rút kinh nghiệm trong quá trình giải

	qua các bài toán vẽ hình và dựng hình - Mọi yếu tố đều bất biến, Hình vẽ trực quan như ta tưởng tượng	bài tập - Có các yếu tố bất biến và yếu tố không bất biến, cần phân biệt rõ. - Các hình biểu diễn đầy đủ không đồng dạng với nhau (do góc nhìn khác nhau)
Cơ sở vẽ hình	- Các khái niệm, định lý, tính chất, chỉ dẫn cách vẽ	- Các khái niệm, định lý, tính chất, quy tắc biểu diễn
Đọc hình	Dựa vào các khái niệm, định lý, tính chất, dụng cụ (thước, eke, compa, ...)	Dựa vào các khái niệm, định lý, tính chất, hình biểu diễn mẫu, quy tắc biểu diễn hình (lý thuyết phép chiếu song song)

❖ **Sự tiến triển trong nghiên cứu các hình hình học và hình vẽ trong chương trình HHKG ở trường PT**

TH, THCS: HHKG ở tiểu học và THCS được trình bày một cách rời rạc, thông qua mô hình (mô hình vật chất, hình minh họa) giúp học sinh hình thành biểu tượng về một số khái niệm của HHKG. Cụ thể: Hình vẽ là các hình khối, hình là một chỉnh thể. Bài tập chủ yếu là quan sát, nhận dạng hình khối và các đặc điểm các yếu tố của nó. Định lý, tính chất (ở THCS) được minh họa bằng mối quan hệ giữa các yếu tố của hình khối (đỉnh, cạnh, mặt).

THPT: Ngoài khái niệm của các hình khối, các khái niệm, định lý, tính chất về mối tương quan giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng được minh họa tổng quát thông qua mối quan hệ không gian trên hình vẽ của các đối tượng cơ bản đó, song các hình biểu diễn mẫu này chỉ minh họa về mặt nghĩa của khái niệm, chưa thể hiện rõ vai trò công cụ biểu diễn của các quy tắc.

Các ví dụ áp dụng đòi hỏi phải kết hợp suy luận, tưởng tượng không gian để nghiên cứu tính chất, các mối quan hệ không gian thông qua hình biểu diễn của các hình khối trong mối quan hệ với các đối tượng cơ bản. Các hình vẽ minh họa cho các tình huống bài tập áp dụng đã thể hiện vai trò công cụ biểu diễn của các quy tắc biểu diễn hình tuy nhiên mới chỉ dừng lại ở việc xem xét hình biểu diễn có hợp lệ hay không mà không có trường hợp nào cho thấy hậu quả của việc biểu diễn không đúng quy tắc.

❖ **Phép chiếu song song, quy tắc bất biến tỉ lệ**

Hệ thống bài tập không đủ để rèn luyện việc sử dụng quy tắc bất biến tỉ lệ như là công cụ biểu diễn hình

Sau thời điểm học phép chiếu song song, mặc dù thể chế đã cung cấp công cụ biểu diễn còn lại là quy tắc bất biến tỉ lệ nhưng không có sự tiến triển trong yêu cầu biểu diễn hình so với thời điểm trước khi học bài lý thuyết về phép chiếu này.

Phép chiếu song song - lý thuyết biểu diễn hình không gian trên mặt phẳng được đưa vào với vai trò hợp thức hóa khái niệm hình biểu diễn, những quy tắc đã được giới thiệu trước đó và quy tắc bất biến tỉ lệ. Mỗi quan hệ giữa phép chiếu song song và các tính chất của phép chiếu song song không được xây dựng, sự nối khớp giữa việc biểu diễn hình với phép chiếu song song - cơ sở tạo nên hình biểu diễn rất mỏng manh.

Từ kết quả phân tích ở trên dẫn chúng tôi đến giả thuyết nghiên cứu:

Qui tắc bảo toàn tỉ lệ không được vận hành như là yếu tố công nghệ trong quá trình biểu diễn hình không gian.

Chương 3

THỰC NGHIỆM DÀNH CHO HỌC SINH

Thực nghiệm nhằm nghiên cứu những ảnh hưởng của quan hệ thể chế đối với quy tắc bất biến tỉ lệ lên mỗi quan hệ cá nhân của học sinh với đối tượng tri thức này. Cụ thể nhằm kiểm chứng giả thuyết:

Qui tắc bảo toàn tỉ lệ không được vận hành như là yếu tố công nghệ trong quá trình biểu diễn hình không gian.

Chúng tôi tiến hành thực nghiệm trên 426 HS tại 7 lớp 11 và 5 lớp 12 ở 7 trường sau:

Lớp 11:

3 lớp Trường THPT Buôn Ma Thuột, TP Buôn Ma Thuột, Daklak

2 lớp Trường THPT thực hành Cao Nguyên, TP Buôn Ma Thuột, Daklak

1 lớp Trường THPT Tư thục Nguyễn Khuyến, TP Hồ Chí Minh

Lớp 12:

1 lớp Trường THPT Việt Đức, huyện Krông Ana, Daklak

2 lớp Trường PT dân tộc nội trú N' Trang Lơn, huyện Cưjut, Daklak

1 lớp Trường THPT tư thục Hồng Đức, TP Hồ Chí Minh

1 lớp Trường THPT Nam Kỳ Khởi Nghĩa, TP Hồ Chí Minh

Bài số 1 thực nghiệm khi học sinh vừa học xong chương trình HH 11, thời gian cuối tháng 4, đang bước vào thi học kỳ. Bài số 2 thực nghiệm cuối tháng 10 đối với HS các lớp 12.

3.1. Mục đích và nội dung các bài toán thực nghiệm

3.1.1. Mục đích các bài toán thực nghiệm

Chúng tôi xây dựng hai bài toán thực nghiệm thông qua việc biểu diễn hình chóp có đáy là hình thang cân và những câu hỏi liên quan nhằm tìm hiểu rõ mức độ nhận thức về qui tắc bất biến tỉ lệ của học sinh trong biểu diễn hình ở cả hai trường hợp cần bảo toàn (bảo toàn tỉ lệ giữa hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song và tỉ lệ giữa hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng) và không cần bảo toàn. Bài thực nghiệm 1 được thiết kế với mục đích tạo môi trường tương tác, phản hồi lên HS trong việc biểu diễn hình nhằm tìm hiểu những ứng xử của họ đối với những biểu diễn sai lầm.

Ở bài thực nghiệm số 2, cũng trên cơ sở yêu cầu HS biểu diễn hình tương tự hình của bài 1, chúng tôi đặt câu hỏi nhằm tìm hiểu quan điểm của HS về các trường hợp của các cặp đoạn thẳng cần và không cần bảo toàn tỉ lệ, kết hợp với kết quả phân tích những ứng xử của HS trong biểu diễn hình ở bài thực nghiệm 1 để làm rõ những tác động của ràng buộc thể chế đối với quy tắc bất biến tỉ lệ lên HS.

3.1.2. Nội dung các bài toán thực nghiệm

❖ Bài thực nghiệm 1 (35 phút)

Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang cân có đáy nhỏ $AB = a$, đáy lớn $CD = 3a$, đường cao AH; tam giác SAD vuông cân tại S, có $SA = SD = a$, đường cao SI.

a/ Tính AH

b/ Tính HI

c/ Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua H và song song với mặt phẳng (SAD).

❖ Bài thực nghiệm 2 (20 phút)

Em hãy đọc các yêu cầu ở ô bên trái và trả lời vào ô bên phải tương ứng:

Yêu cầu	Trả lời
Yêu cầu 1: Vẽ hình biểu diễn của hình chóp S.ABCD có đặc điểm: mặt đáy ABCD là hình thang cân có đáy nhỏ $AB = a$, đáy lớn $CD = 3a$, đường cao AH; M là trung điểm của cạnh CD; tam giác SAD cân tại S, đường cao SI.	
Yêu cầu 2: Xét các cặp đoạn thẳng sau của hình chóp S.ABCD đã cho trong yêu cầu 1: AD và BC AB và CD DM và MC SA và SD AI và ID DH và DC Em hãy cho biết: a/ Tỷ lệ của các cặp đoạn thẳng trên b/ Khi biểu diễn hình chóp S.ABCD, cặp đoạn thẳng nào cần vẽ đúng tỷ lệ của chúng, cặp đoạn thẳng nào không cần vẽ đúng tỷ lệ của chúng? Vì sao? (Chú ý: giải thích lý do vì sao cần vẽ đúng tỷ lệ và vì sao không cần vẽ đúng tỷ lệ đối với mỗi cặp đoạn thẳng) Hãy vẽ lại hình biểu diễn cho yêu cầu 1 nếu em thấy cần điều chỉnh hình đã vẽ.	

	
--	---

3.2. Phân tích apriori

3.2.1. Biến tình huống và biến didactic

3.2.1.1. Biến tình huống

❖ Giới thiệu các biến tình huống

Với mục đích tìm hiểu tác động của ràng buộc thể chế trong việc việc biểu diễn hình của HS liên quan đến QT3, chúng tôi xây dựng hai bài toán thực nghiệm trên cơ sở các biến tình huống sau:

➤ **V₁**: *Hình thức yêu cầu biểu diễn hình*

Có thể tìm hiểu việc biểu diễn hình bằng cách yêu cầu trực tiếp HS biểu diễn một hình hình học cụ thể hoặc thông qua một bài toán hình học, họ phải biểu diễn hình để giải quyết bài toán. V₁ có hai giá trị:

V₁₁: Yêu cầu trực tiếp

V₁₂: Yêu cầu gián tiếp

➤ **V₂**: *"Loại hình"*

Trong thể chế dạy học HHKG 11, HS được làm việc phần lớn trên các hình chóp, do đó ngoài việc biểu diễn các hình không có tính chất khối, đối với hình khối chúng tôi phân ra hai loại, hình chóp và các hình khối không phải hình chóp. Do đó V₂ có ba giá trị:

V₂₁: Hình chóp

V₂₂: Các hình không có tính chất khối

V₂₃: Hình khối không phải hình chóp

Riêng bài thực nghiệm 2, với yêu cầu giải thích các cặp đoạn thẳng cần hay không cần bảo toàn tỉ lệ, có thêm biến sau:

➤ **V₃**: *Có xét hay không các cặp đoạn thẳng không thuộc mặt phẳng đáy hình chóp*

Tính chất hình thang cân và đường cao của nó đã bao gồm đủ các trường hợp của quy tắc bất biến tỉ lệ: không cần bảo toàn (2 cạnh bên hình thang), bảo toàn tỉ lệ hai đoạn thẳng nằm trên một đường thẳng (DH và DC), bảo toàn tỉ lệ của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (AB và CD). Tuy nhiên có thể xét thêm các cặp đoạn thẳng khác không thuộc mặt đáy hình chóp. V_3 có hai giá trị lựa chọn:

V_{31} : Xét cặp đoạn thẳng không thuộc mặt phẳng đáy hình chóp

V_{32} : Không xét cặp đoạn thẳng không thuộc mặt phẳng đáy hình chóp

❖ Sự lựa chọn giá trị của biến:

➤ Bài thực nghiệm 1

Với mục đích đã đề ra trong bài thực nghiệm 1 chúng tôi chọn yêu cầu gián tiếp biểu diễn hình (V_{12}) thông qua bài toán hình học không gian nhằm tạo môi trường cho HS phân tích, xử lý các tính chất hình học để đảm bảo việc học sinh nhận biết rõ các tính chất, quan hệ hình học của bài toán từ đó thể hiện chúng trên hình vẽ.

Như đã phân tích trong chương II, số lượng bài tập biểu diễn hình phẳng trong không gian rất ít, hơn nữa nếu biểu diễn các hình phẳng trong không gian thì sẽ khó kiểm tra được giả thuyết trong trường hợp học sinh vẽ như là vẽ trong HHP. Ngoài ra phần lớn bài tập HS phải làm việc với hình chóp. Do đó chúng tôi chọn V_{21} (hình chóp) để đặt học sinh trong môi trường biểu diễn quen thuộc của chương trình HHKG. Trong bài này chúng tôi chọn đáy hình chóp là hình thang cân ABCD đường cao AH, là trường hợp không gần gũi với học sinh trong thể chế HHKG ở trường phổ thông nhưng lại là một đa giác đặc biệt quen thuộc và được nghiên cứu kỹ trong hình học phẳng, nhằm tạo thuận lợi trong việc tìm hiểu những tác động của "đối tượng HHP" trong biểu diễn hình, đặc biệt những ảnh hưởng đến quy tắc bất biến tỉ lệ.

➤ Bài thực nghiệm 2

Mục đích bài thực nghiệm là tìm hiểu quan điểm của HS đối với quy tắc bất biến tỉ lệ trong biểu diễn hình không gian. Do đó chúng tôi chọn V_{11} - yêu cầu trực tiếp biểu diễn hình chóp để tạo sự thuận lợi và hợp lý cho việc đặt ra câu hỏi ở yêu cầu số 2- giải thích căn cứ khi biểu diễn hình liên quan đến quy tắc bất biến tỉ lệ.

Trong phần phân tích thể chế ở chương 2, với việc định nghĩa kiến thiết hình chóp có mặt đáy nằm trong một mặt phẳng cho trước, một mặt vừa chỉ ra kỹ thuật vẽ hình chóp, nhưng mặt khác, theo chúng tôi nhận định, HS sẽ chịu tác động của HHP đối với mặt đặc biệt này, do đó chúng tôi chọn V_{31} (có xét cả cặp đoạn thẳng không thuộc mặt đáy hình chóp, cụ thể 2 cạnh SA và SD của tam giác cân SAD) để thấy rõ hơn sự tác động khi HS vừa phải làm việc với các yếu tố trong mặt đáy vừa với các yếu tố khác của hình chóp. Cùng mục đích vừa chỉ ra, ngoài việc cho trực tiếp M là

trung điểm của DC, chúng tôi còn cho "gián tiếp" trung điểm I của AD (qua việc cho SI là đường cao của tam giác SAD).

3.2.1.2. Biến didactic

❖ Bài thực nghiệm 1

➤ V_4 : Có yêu cầu tính diện tích thiết diện hay không

Việc đưa vào hai câu a, b một mặt để tạo tình huống biểu diễn hình liên quan đến QT3 với các đối tượng không chỉ thuộc mặt đáy hình chóp (hai cạnh bên tam giác cân SAD, đường cao SI), mặt khác thông qua việc tính toán độ dài các đoạn thẳng để đảm bảo HS nhận biết rõ hơn các tính chất HH sau khi biểu diễn hình. Yêu cầu xác định thiết diện ở câu c là tình huống ngắt quãng hợp đồng “biểu diễn sai không ảnh hưởng đến kết quả bài toán” đối với HS ở trường hợp vẽ hình sai quy tắc bất biến tỉ lệ, chỉ bảo toàn quy tắc song song sẽ dẫn đến hậu quả thiết diện không đúng (thiết diện là tứ giác thay vì tam giác). Yêu cầu tính diện tích thiết diện sẽ tạo môi trường tương tác mạnh hơn khi họ phải làm việc nhiều hơn với yếu tố định lượng (độ dài)

Chúng tôi muốn tìm hiểu ứng xử của HS khi họ nhận được những thông tin phản hồi. V_4 có hai giá trị sau thể hiện các mức độ tương tác với môi trường:

V_{41} : Yêu cầu tính diện tích thiết diện

V_{42} : Không yêu cầu tính diện tích thiết diện

➤ V_5 : Tỉ lệ giữa đáy lớn và đáy nhỏ của hình thang cân

Trong ràng buộc thể chế, những tỉ lệ cần bảo toàn thuộc tập số hữu tỉ. Ở bài thực nghiệm này chúng tôi xét tỉ lệ giữa đáy lớn và đáy nhỏ thuộc tập số nguyên để tránh gây khó khăn và mất thời gian của HS khi bảo toàn tỉ lệ phân số. Ngoài ra tỉ lệ lớn sẽ là tình huống phá vỡ hợp đồng vì HS thường quen vẽ đa giác với sự chênh lệch các cạnh ở mức “cân đối”. V_4 có hai giá trị để lựa chọn:

V_{51} : Tỉ lệ bằng 2

V_{52} : Tỉ lệ bằng 3

➤ V_6 : Giấy làm bài

Quy tắc bất biến tỉ lệ quy định về việc bảo toàn tỉ lệ giữa độ dài giữa các cặp đoạn thẳng khi vẽ hình, việc thể hiện “thước đo độ dài” của các đường kẻ ô trên giấy làm bài sẽ ảnh hưởng lên việc biểu diễn hình của HS liên quan đến quy tắc này. Thông thường HS được học và làm kiểm tra trên hai loại giấy kẻ ô vuông hoặc giấy kẻ ngang, do đó, V_5 có hai giá trị như sau:

V_{61} : Giấy kẻ ô vuông

V_{62} : Giấy kẻ ngang

❖ Bài thực nghiệm 2

Ở yêu cầu 1, HS phải biểu diễn hình chóp tương tự như hình chóp trong bài thực nghiệm 1, do đó chúng tôi sẽ không phân tích lại. Câu a của yêu cầu 2 là những tính toán đơn giản nhằm chú ý và bảo đảm HS phải tính các tỉ lệ của các cặp đoạn thẳng, tránh trường hợp HS không chú ý đến những tỉ lệ mà không được cho tường minh. Như vậy với mục đích đã trình bày trong phần “mục đích các bài toán thực nghiệm”, trọng tâm phân tích bài thực nghiệm 2 là câu b của yêu cầu 2, HS cần nêu quan điểm của mình về việc cần bảo toàn hay không tỉ lệ của các cặp đoạn thẳng được chỉ ra. Sau đó chúng tôi có thể căn cứ vào hình biểu diễn lại của HS (cuối yêu cầu 2) để làm sáng tỏ hơn những điều chúng tôi phân tích.

➤ **V₇: Có yêu cầu tính tỉ lệ các cặp đoạn thẳng hay không**

V₇₁: Yêu cầu tính tỉ lệ các cặp đoạn thẳng

V₇₂: Không yêu cầu tính tỉ lệ các cặp đoạn thẳng

➤ **V₈: Thứ tự các yêu cầu**

V₈₁: Biểu diễn hình; tính tỉ lệ; giải thích tỉ lệ cần hoặc không cần bảo toàn.

V₈₂: Tính tỉ lệ; biểu diễn hình; giải thích tỉ lệ cần hoặc không cần bảo toàn.

V₈₃: Tính tỉ lệ; giải thích tỉ lệ cần hoặc không cần bảo toàn; biểu diễn hình.

3.2.2. Chiến lược và lời giải có thể quan sát

3.2.2.1. Bài thực nghiệm 1

Trong bài toán này, quy tắc bất biến tỉ lệ được thể hiện ở trung điểm I của cạnh DA trong tam giác cân SAD; tỉ lệ hai đáy và tỉ lệ chân đường cao H chia cạnh CD của hình thang ABCD. Trong HHP khi biểu diễn đường cao hoặc đường trung tuyến của tam giác cân thì tính chất “đường cao cũng là đường trung tuyến” được thể hiện trực quan trên hình vẽ, còn trong HHKG, do sự thiếu trực quan của tam giác cân và góc vuông nên ngoài việc căn cứ vào quan điểm của HS trong biểu diễn hình liên quan đến quy tắc bất biến tỉ lệ còn cần phải kết hợp với việc xét xem lúc vẽ hình họ có ý thức được tính chất “đường cao cũng là đường trung tuyến” hay không. Do đó, trường hợp biểu diễn điểm I chúng tôi sẽ thống kê riêng và kết hợp với bài thực nghiệm 2 để phân tích. Hướng đến mục đích thực nghiệm, chúng tôi phân chia chiến lược giải và thống kê bài làm của HS tương ứng với các chiến lược căn cứ vào việc có mặt hay không QT3 trong lời giải của HS. Ngoài ra, việc xác định và tính thiết diện thể hiện mức độ “ngầm” qui tắc bất biến tỉ lệ, nên “hình dáng” của thiết diện cũng cần được xem xét.

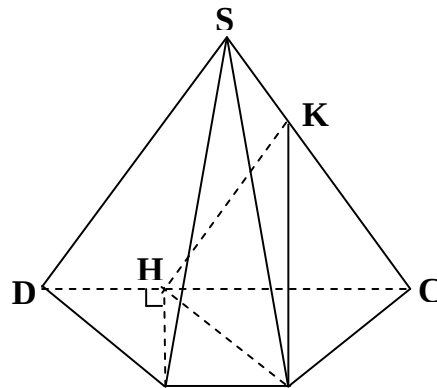
➤ **Chiến lược S₁: “Sử dụng” QT3**

Chiến lược này gồm các trường hợp sử dụng ngầm ẩn hoặc tường minh QT3; tuân thủ đúng QT3 hoặc chỉ tuân thủ đúng 1 trường hợp nào đó của QT3.

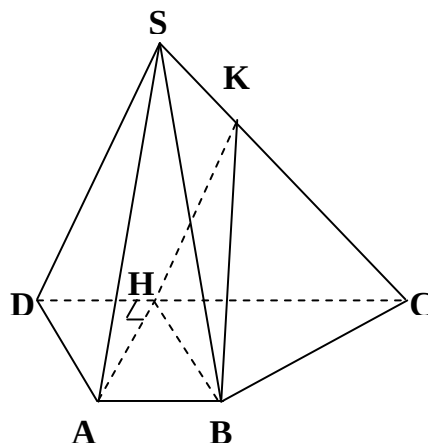
Các lời giải có thể quan sát được:

- S_{11} (Kí hiệu: $\mathcal{D}_P$): Biểu diễn trực quan hình thang cân và góc vuông như trong HHP, bảo toàn đúng tỉ lệ hai đáy và chân đường cao H chia CD, thiết diện tam giác.

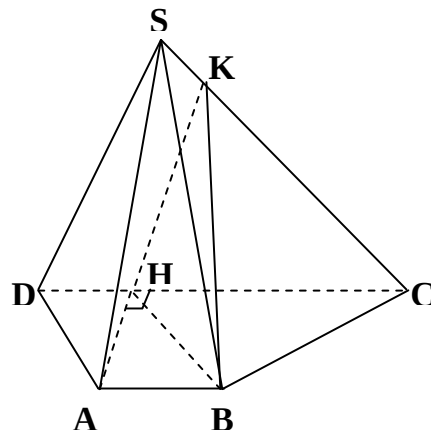
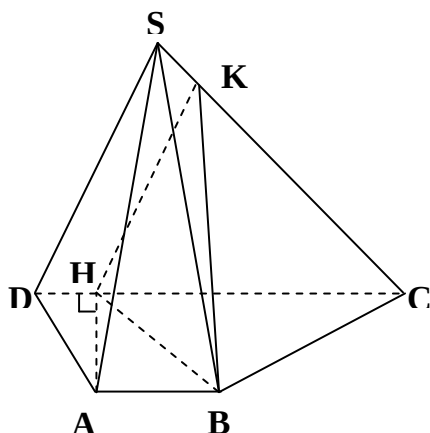
Ở trường hợp này, khi biểu diễn đúng tỉ lệ hai đáy và biểu diễn trực quan hình thang cân và đường cao của nó như trong HHP thì hiển nhiên tỉ lệ điểm H chia CD cũng được bảo toàn.

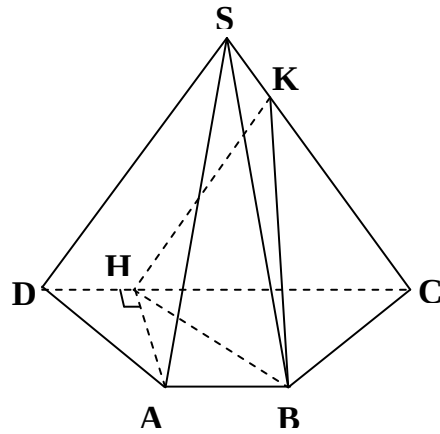


- S_{12} (lời giải mong đợi, kí hiệu $\mathcal{D}_{KG}$): Bảo toàn tỉ lệ 2 đáy và chân đường cao, thiết diện tam giác. Vẽ đáy hình thang cân dưới “góc nhìn không gian” (phân biệt với S_{11} , HS vẽ hình thang cân như trong HHP).

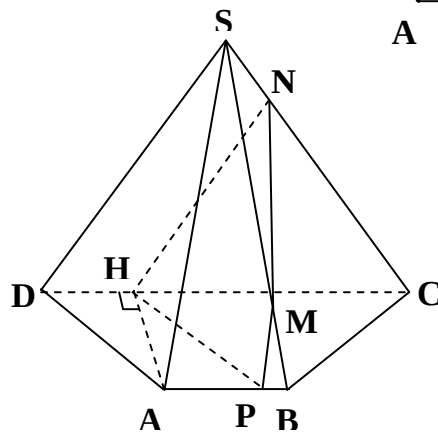
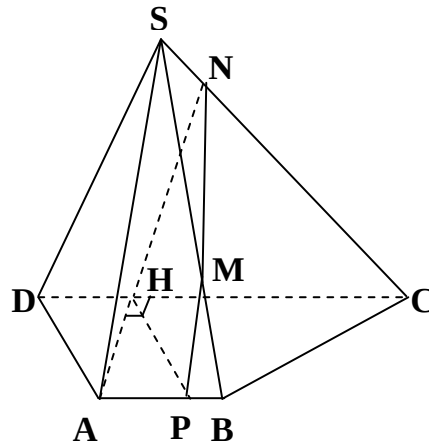
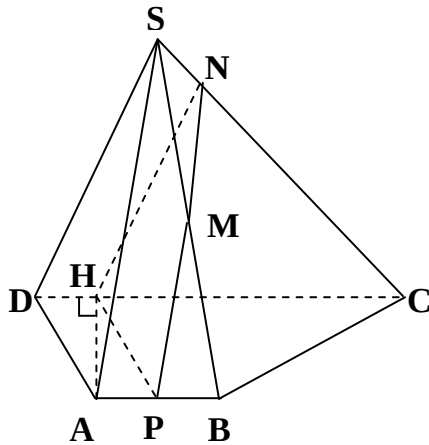


- S_{13} (Kí hiệu $\mathcal{DS}_{TaG}$): Bảo toàn đúng tỉ lệ hai đáy, sai chân đường cao H, thiết diện tam giác.





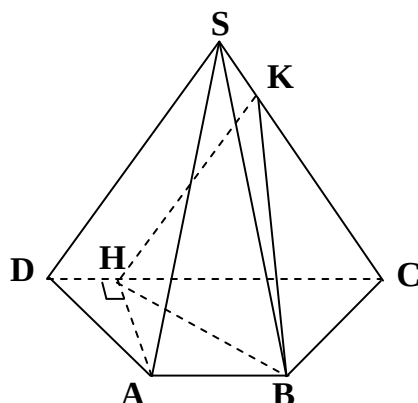
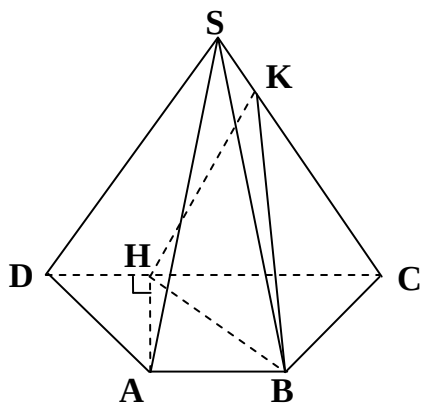
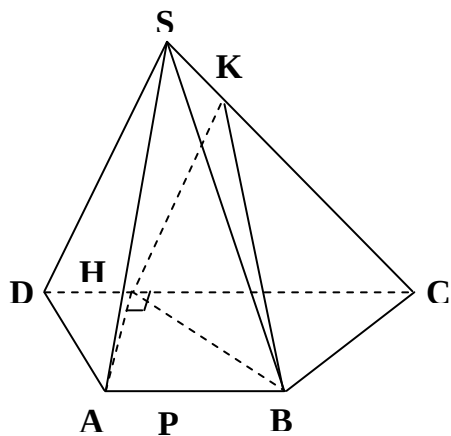
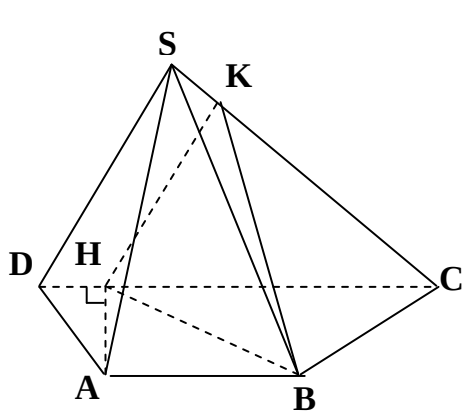
• S_{14} (Kí hiệu $\overline{DS_TuG}$): Bảo toàn đúng tỉ lệ hai đáy, sai chân đường cao H, thiết diện tứ giác.



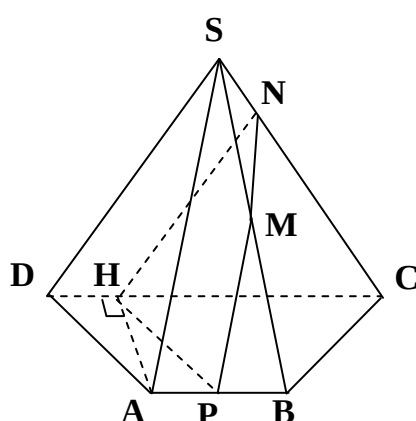
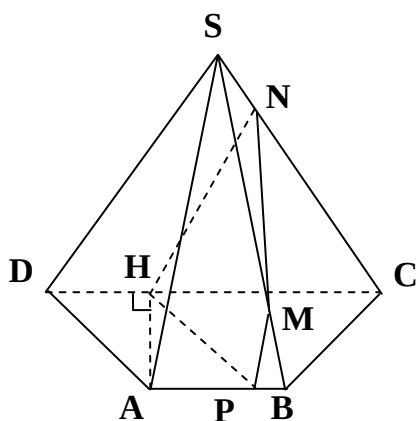
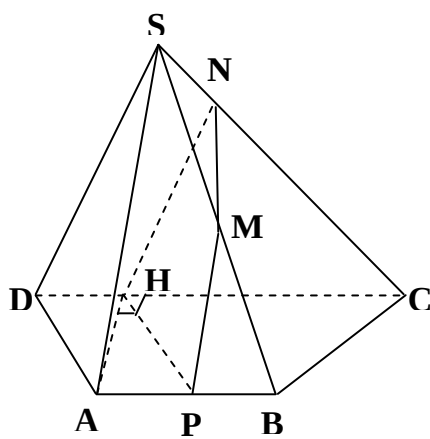
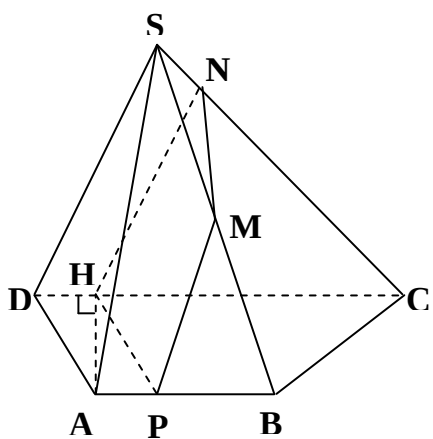
➤ **Chiến lược S_2 : Không sử dụng QT3**

Các lời giải có thể quan sát được:

• S_{21} (Kí hiệu $\overline{SS_TaG}$): Biểu diễn sai tỉ lệ hai đáy, sai chân đường cao H, thiết diện tam giác.



• S_{22} (Kí hiệu: SS_TuG): Biểu diễn sai tỉ lệ hai đáy, sai chân đường cao H, thiết diện tứ giác.



3.2.2.2. Bài thực nghiệm 2

➤ **Chiến lược S_1 :** HS giải thích trên cơ sở phân biệt phần "mặt phẳng" và phần "không gian". Mặt đáy thuộc lĩnh vực HHP (chúng tôi tạm gọi là "mặt HHP"), nên cần vẽ chính xác tỉ lệ các cặp đoạn thẳng, các đối tượng còn lại (không nằm trong mặt đáy hoặc thuộc mặt đáy nhưng có "liên hệ" với các đối tượng bên ngoài) thuộc HHKG, không cần vẽ đúng tỉ lệ.

➤ **Chiến lược S_2 :** Cần bảo toàn trung điểm.

Theo phân tích chương 2, trong 42 bài biểu diễn điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số k cần áp dụng QT3 với tỉ lệ được cho tường minh thì có 37 bài (88.1%) điểm cần vẽ là trung điểm của đoạn thẳng. Chúng tôi nhận định có không ít HS sử dụng chiến lược này.

➤ **Chiến lược S_3 :** Vẽ đúng các tỉ lệ cần thiết để hình vẽ trực quan, dễ tính toán

Giải theo chiến lược này, HS đã thoát khỏi tác động của "mặt hình học phẳng" trong S_1 , cũng vượt qua được quan điểm cần và chỉ cần bảo toàn trung điểm ở S_2 , song họ không biểu diễn đúng theo quy tắc bất biến tỉ lệ, thể hiện ở việc không cần bảo toàn tỉ lệ điểm H chia CD hoặc tỉ lệ hai cạnh đáy hình thang. Lý do cần bảo toàn tỉ lệ là để hình vẽ trực quan và dễ tính toán.

➤ **Chiến lược S_4 :** "Quy tắc bất biến tỉ lệ"

Ở chiến lược này HS giải thích dựa trên lý thuyết biểu diễn hình. Bảo toàn các cặp đoạn thẳng theo đúng các quy tắc biểu diễn hình.

➤ **Chiến lược S_5 :** Không cần vẽ đúng tỉ lệ, vẽ theo đúng tỉ lệ chỉ để hình vẽ trực quan. HS vẽ đúng tỉ lệ ở một số cặp đoạn thẳng nào đó để "trực quan", song ở chiến lược này HS khẳng định trong HHKG không cần vẽ đúng tỉ lệ. Sự giải thích này là kết quả của việc hoàn toàn "thoát ly" khỏi quy tắc bất biến tỉ lệ. Có thể thấy được ở chiến lược này các lời giải thích với nghĩa: "không cần vẽ đúng tỉ lệ vì trong không gian nhìn ở các hướng khác nhau sẽ cho tỉ lệ khác nhau".

3.2.3. Sự lựa chọn giá trị của biến và ảnh hưởng lên các chiến lược

❖ Bài thực nghiệm 1

Ngoài những phản hồi có được thông qua tính toán hai câu a, b và xác định thiết diện của mặt phẳng đối với hình chóp ở câu c, chúng tôi cho thêm yêu cầu tính diện tích của thiết diện (V_{41}). Với tính chất của hình và yêu cầu đề bài thì việc xác định thiết diện gồm các thao tác vẽ các cạnh song song với đường thẳng cho trước (bảo toàn song song) vì vậy nếu không có tính toán các cạnh để tìm diện tích thì khả năng xác định sai thiết diện và kết luận thiết diện là tứ giác rất cao do HS không nhận thức được mình đã xác định sai. Việc yêu cầu tính diện tích thiết diện ở câu c nhằm tạo môi trường phản hồi, buộc HS phải điều chỉnh tính chất hình học cho đúng để tính toán, qua đó chúng tôi xem xét việc điều chỉnh (sửa hoặc vẽ lại hình) các tính chất không gian trên hình vẽ.

Tỉ lệ hai đáy bằng 2 sẽ dễ bảo toàn hơn so với tỉ lệ bằng 3, hơn nữa khi học sinh vẽ đáy nhỏ của hình thang “hơi dài” thì với tỉ lệ là 3 sẽ làm cho hình biểu diễn “cồng kềnh”, tuy nhiên nếu chú ý đến yêu cầu bảo toàn tỉ lệ kết hợp với việc điều chỉnh hai đáy sẽ trở về tình huống thông thường, không ngắt quãng hợp đồng về hình dáng của hình khối. Xét mặt tính toán và việc vẽ đường cao AH thì tỉ lệ hai đáy bằng 3 sẽ thuận lợi hơn so với tỉ lệ bằng 2. Từ những phân tích vừa chỉ ra, với mục đích tìm hiểu mức độ nhận thức việc tuân thủ quy tắc bất biến tỉ lệ của HS, chúng tôi chọn biến V_{51} (tỉ lệ giữa đáy lớn và đáy nhỏ của hình thang cân bằng 3).

Học sinh học và làm bài trên giấy kẻ ô vuông trong vở, song yếu tố trực quan trong quan hệ độ dài của ô li vở sẽ làm giảm đi sự thể hiện việc dùng phép chiếu song song như là một công cụ hay không đối với bài toán chúng tôi thực nghiệm (chẳng hạn, dễ dàng dựa vào ô li vở để biểu diễn đáy lớn gấp 3 lần đáy bé), vì thế chúng tôi chọn V_{61} (giấy kẻ ngang), loại giấy quen thuộc với học sinh trong thi cử.

❖ Bài thực nghiệm 2

Trong yêu cầu 2, chúng tôi chọn biến V_{71} (yêu cầu tính tỉ lệ của các cặp đoạn thẳng) để đảm bảo HS thấy được những tỉ lệ không được cho tường minh nhằm tạo môi trường thuận lợi để liên tưởng đến quy tắc bất biến tỉ lệ, hạn chế chiến lược sai lầm. Nếu không có tỉ lệ chính xác thì HS chỉ cần vẽ hình thỏa tính chất định tính mà thôi.

Về thứ tự các yêu cầu của bài thực nghiệm, chúng tôi chọn V_{81} - biểu diễn hình, sau đó tính tỉ lệ rồi mới yêu cầu giải thích về việc bảo toàn hay không các tỉ lệ. Nếu yêu cầu tính tỉ lệ trước, việc biết rõ tỉ lệ của các cặp đoạn thẳng rồi mới biểu diễn hình có thể sẽ làm tăng chiến lược S_3 , điều này làm mất đi sự rõ ràng trong việc kiểm chứng sự tác động của quy tắc bất biến tỉ lệ, hơn nữa khi yêu cầu tính tỉ lệ trước chúng tôi sẽ không xác định được liệu khi biểu diễn hình HS có thói quen tính tỉ lệ để đảm bảo biểu diễn hình đúng quy tắc hay không

3.3. Phân tích *apospriori*

3.3.1. Bài thực nghiệm 1

❖ Thống kê bài làm của HS tương ứng với các chiến lược

Chúng tôi tiến hành bài thực nghiệm 1 trên 294 HS, nhưng do trong phần dự kiến các chiến lược ở phân tích tiên nghiệm, chúng tôi xét cả yếu tố hình dáng thiết diện nên trong bảng thống kê chiến lược chúng tôi xét 236 HS đã làm câu c, còn 58 HS còn lại chúng tôi sẽ tổng hợp và phân tích riêng.

Với mục đích tìm hiểu những ứng xử của HS khi vẽ hình trong quá trình tương tác và nhận thông tin phản hồi từ môi trường, việc tìm hiểu dấu vết sửa chữa hoặc những hình vẽ trước khi được điều chỉnh là cần thiết, do đó chúng tôi thống kê hai cả hai trường hợp trước và sau khi HS điều chỉnh hình vẽ.

Bảng 1: Trước khi điều chỉnh hình vẽ

Chiến lược	Lời giải có thể quan sát	Số lượng	Tỉ lệ		
S ₁	S ₁₁ : Đ_P	51	21.6%	23.7%	32.2%
	S ₁₂ : Đ_KG	5	2.1%		
	S ₁₃ : ĐS_TaG	12	5.1%	8.5%	
	S ₁₄ : ĐS_TuG	8	3.4%		
S ₂	S ₂₁ : SS_TaG	45	19.1%	67.8%	67.8%
	S ₂₂ : SS_TuG	115	48.7%		
TỔNG		236	100%	100%	100%

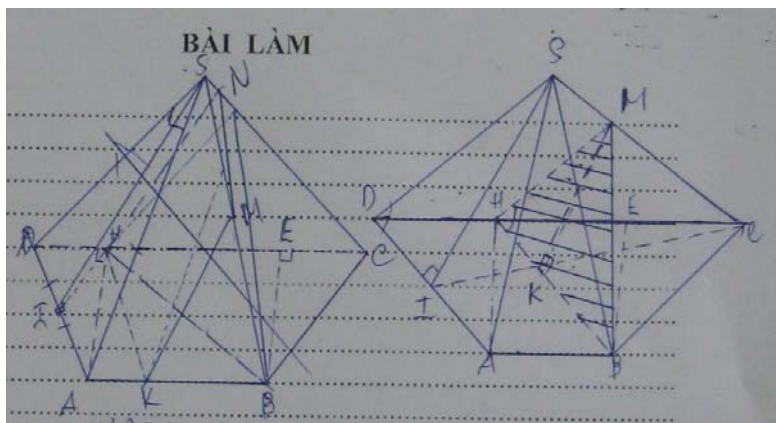
Bảng 2: Sau khi điều chỉnh hình vẽ

Trong bảng thống sau đây, ở mỗi chiến lược chúng tôi chỉ rõ số lượng HS đã điều chỉnh lại hình và điều chỉnh từ chiến lược nào (thể hiện ở cột “vẽ lại” của bảng).

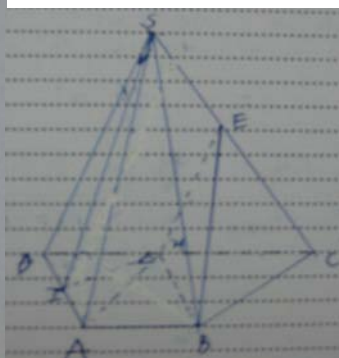
Chiến lược	Lời giải có thể quan sát	Số lượng	Tỉ lệ			Vẽ lại
S ₁	S ₁₁ : Đ_P	78	33.1%		33.1%	27 (S ₃ : 2; S ₅ : 25)
	S ₁₂ : Đ_KG	8	3.4%		3.4%	3 (S ₃)
	S ₁₃ : ĐS_TaG	13	5.5%	6.3%	63.5%	1 (S ₃)
	S ₁₄ : ĐS_TuG	2	0.8%			0
S ₂	S ₂₁ : SS_TaG	82	34.7%	57.2%		38 (S ₅ : 37, S ₄ : 1)
	S ₂₂ : SS_TuG	53	22.5%			
TỔNG		236	100%		100%	69

❖ **Phân tích hình vẽ và dấu vết tẩy xóa của học sinh lưu lại khi vẽ hình:**

Bài làm có vẽ lại hoặc sửa lại hình rơi vào trường hợp HS vẽ thiết diện là tứ giác (S₁₄ hoặc S₂₂), sau đó đổi lại thành tam giác. Có HS ban đầu làm theo S₂₁ (thiết diện tam giác) sau đó điều chỉnh H để bảo toàn quan hệ song song giữa HB và AD.

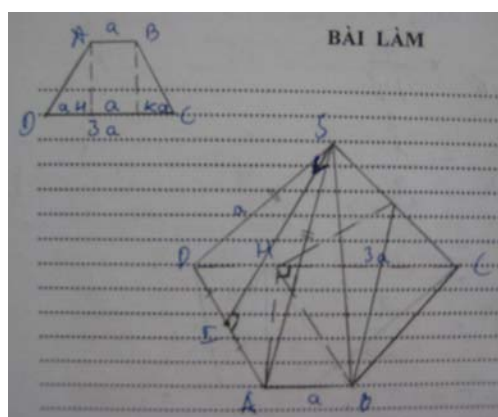


HS NK43



HS CN46

Trường hợp vẽ lại S_{14} thành S_{12} : học sinh vẽ đúng tỉ lệ hai đáy, ban đầu biểu diễn chân đường cao sai, sau đó sửa lại. Chẳng hạn học sinh N28 sau đây:



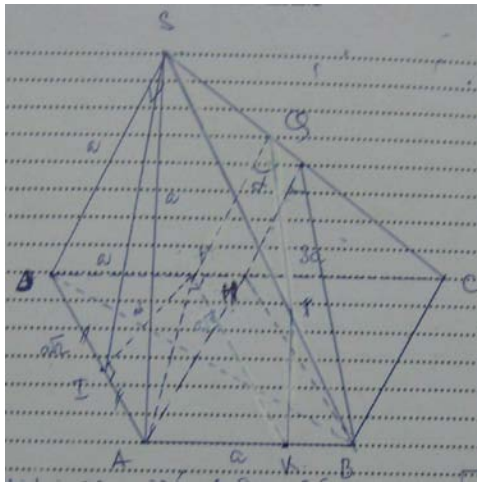
HS N28

Mặc dù hình vẽ riêng mặt đáy thang cân ghi rõ độ dài các đoạn thẳng $AB = DH = HK = KC = a$, $DC = 3a$, nhưng, từ dấu vết để lại cho thấy, khi biểu diễn hình khối thì vẽ "đúng" quan hệ vuông góc mà sai tỉ lệ điểm H. **Điều này chứng tỏ việc vẽ lại AH sau đó là do tác động của việc bảo toàn quan hệ song song ($HB // DA$).**

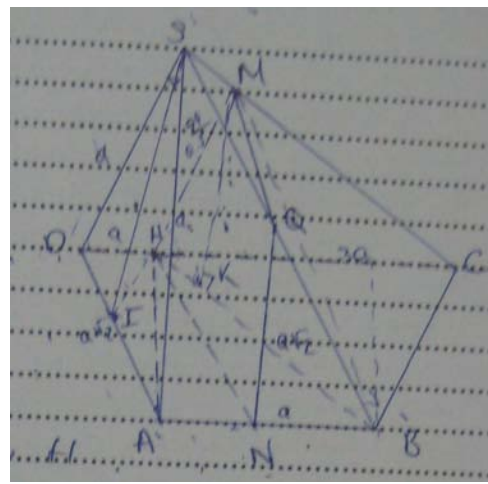
160/236 HS (67,8%) biểu diễn sai tỉ lệ hai đáy hình thang (chiến lược S4, S5).

123/236 HS (52.1% HS) biểu diễn thiết diện tứ giác, tức là bảo toàn quan hệ song song giữa DA và Hx (Hx qua H và song song với DA). Trong đó, 69 HS phát hiện và sử dụng đúng **tính chất hình học** $DH = AB = a$ (nối HB), đã sửa lại thiết diện tam giác gồm các trường hợp:

- 38 HS chỉ sửa giao tuyến của (α) với mặt đáy hình chóp cho đúng dạng thiết diện tam giác mà **không quan tâm đến tỉ lệ hai đáy và tỉ lệ H chia CD**. Trường hợp này có 4 HS điều chỉnh điểm H để bảo toàn quan hệ song song ($HB // AD$). 34 HS còn lại "hy sinh" quan hệ song song, chỉ nối HB để thể hiện tính chất HB là giao tuyến của (α) và mặt đáy hình chóp



HS CN25

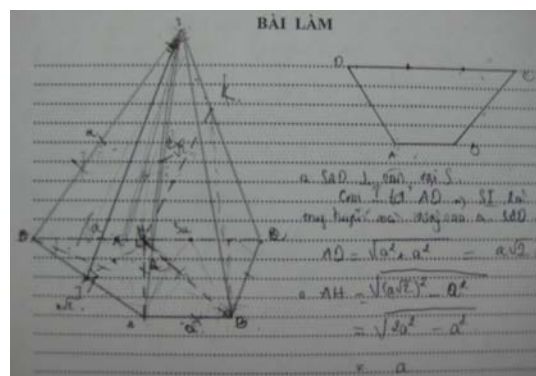


HS NK36

- 1 HS sửa 2 đáy đúng nhưng điểm H sai, dẫn đến vi phạm QT2
- 25 HS ~~đi~~ chỉnh đúng nhưng biểu diễn mặt đáy thang cân như trong HHP (S_{11})
- Chỉ có 3 HS điều chỉnh lại đúng theo lời giải mong đợi S_{12} .

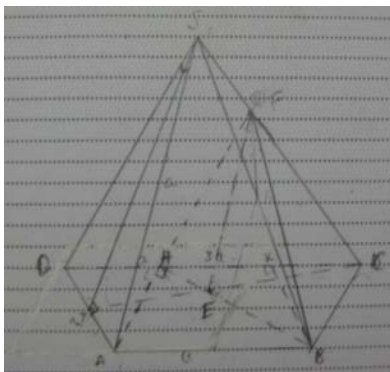
Những HS làm theo S_{13} hoặc S_{21} , tuy vẽ thiết diện tam giác nhưng đều vi phạm qui tắc bất biến tỉ lệ, do đó khi bảo toàn tính chất HB là giao tuyến của (α) và mặt đáy hình chóp thì họ vi phạm quy tắc bảo toàn song song (HB và AD), trừ một vài HS ngẫu nhiên vẽ mặt đáy thỏa $AD=DH$.

15 HS (6,3%) biểu diễn hai đáy đúng, chân đường cao sai. Trong đó 13 em coi trọng việc bảo toàn đúng góc vuông tại H hơn là tỉ lệ H chia CD, 2 em còn lại vẽ đáy thang cân như trong HHP (bảo toàn 2 cạnh bên) nhưng lại không "bảo toàn đường cao" nên 15 học sinh này đều vẽ sai chân đường cao H.



HS N17

Có trường hợp HS vi phạm quy tắc bảo toàn song song ngay khi biểu diễn đường cao hình thang cân (HS CN47)



HS CN47

Việc HS biểu diễn tỉ lệ 2 đáy sai cho thấy những dẫn đo của học sinh khi biểu diễn đường cao như trường hợp ở trên ($DH = KC$) chỉ là sự cố gắng phiên dịch một cách trực quan từ hình thang cân được vẽ trong HHP sang HHKG, mà không chịu tác động của các qui tắc biểu diễn hình (kể cả quy tắc bảo toàn song song).

Nhận xét:

Xem xét hình biểu diễn khi chưa điều chỉnh hình vẽ, có 67,8 % HS làm theo chiến lược S_2 (không sử dụng QT3). Trong số 76 HS (32,2%) làm theo S_1 , chỉ có 5 HS (2,1%) làm theo lời giải mong đợi S_{12} , 20 HS (8,5%) chỉ bảo toàn đúng tỉ lệ 2 đáy, 51 HS (21,6%) còn lại bảo toàn đúng QT3 nhưng biểu diễn mặt đáy hình chóp như biểu diễn trong HHP. Đối với những HS điều chỉnh lại hình vẽ thì phần lớn vẫn không sử dụng QT3, những HS chỉnh lại hình vẽ đúng QT3 thì quay về S_{11} (biểu diễn mặt đáy như trong HHP), chỉ có 3 HS điều chỉnh thành S_{12} (lời giải mong đợi). Cụ thể:

160 HS (67,8 %) biểu diễn sai tỉ lệ hai đáy (khi điều chỉnh lại vẫn còn 57,2 % sai), không quan tâm đến tỉ lệ của hai đoạn thẳng có giá song song, họ chỉ ký hiệu độ dài đoạn thẳng. 180 HS (76,3 %) biểu diễn sai chân đường cao H (khi điều chỉnh lại vẫn còn 63,5% sai). Trong số 86 HS biểu diễn đúng thì có tới 78 HS vẽ đáy thang cân như trong HHP.

Khi gặp sự cố ở câu c, HS thể hiện sự lúng túng trong việc điều chỉnh hình vẽ, cụ thể, xem xét 4 trường hợp trong 69 HS điều chỉnh lại hình:

- TH1: 38 HS vẽ hai đáy vẫn không đúng QT3
- TH2: 5 HS sửa đường cao AH để bảo toàn đúng quan hệ song song giữa HB và AD
- TH3: 35 HS đánh đổi việc bảo toàn song song, nối HB nhằm thể hiện đúng tính chất giao tuyến của (α) với mặt đáy hình chóp là HB, thiết diện tam giác.
- TH4: 27 HS vẽ lại đáy hình thang cân như vẽ trong HHP.

Các HS thuộc ba trường hợp đầu (TH1, TH2, TH3) khi điều chỉnh lại hình vẽ đều vẫn vi phạm QT3. Để thể hiện HB là giao tuyến của (α) với mặt đáy hình chóp, chỉ có 5 HS sửa điểm H để bảo toàn song song, 35 HS đã hy sinh việc bảo toàn song song chỉ thể hiện tính chất hình học. Nguyên nhân của “sự cố” ở câu c là do ngay từ đầu họ đã biểu diễn sai tỉ lệ hai đáy và tỉ lệ điểm H chia CD

nhưng những kết quả chỉ ra ở trên chứng tỏ hai điều, thứ nhất họ **không nhận thức được nguyên nhân này, thứ hai là họ chỉ quan tâm đến các tính chất hình học và những kết quả tính toán, xem nhẹ tính chất không gian thể hiện trên hình vẽ**.

Trường hợp thứ 4 (TH4) cho thấy HS lúng túng trong việc điều chỉnh hình vẽ để biểu diễn “đúng qui tắc” trong không gian, họ quay về vẽ hình thang cân như vẽ trong mặt phẳng để bảo toàn được các tính chất hình học của bài toán cũng như quan hệ không gian trên hình vẽ.

Số lượng lớn HS vẽ chính xác góc vuông ở đường cao AH (86%) và chính xác hình thang cân (32%) cho thấy tác động của HHP lên HS khi biểu diễn hình không gian. Chúng tôi sẽ phân tích chi tiết hơn tác động này ở bài thực nghiệm 2. (*Tác động HHP gây khó khăn trong việc phân biệt và làm chủ các yếu tố bất biến và không bất biến khi biểu diễn hình không gian*).

Thống kê thêm trường hợp biểu diễn sai đường cao SI của tam giác SAD (I không là trung điểm trên hình vẽ) có 20,3% HS, các HS này cũng không sửa lại hình, một số chỉ dùng kí hiệu bằng nhau, củng cố thêm nhận định ở trên của chúng tôi: HS xem nhẹ việc biểu diễn đúng theo quy tắc bất biến tỉ lệ, chỉ cần làm sao “thấy” được tính chất hình học của bài toán.

3.3.2. Bài thực nghiệm 2

❖ Thống kê bài làm của HS tương ứng với các chiến lược

Chiến lược	Số lượng	Tỉ lệ
S ₁ : "Phân biệt phần HHP và phần HHKG"	33	25%
S ₂ : "Bảo toàn trung điểm"	37	28%
S ₃ : "Đảm bảo trực quan, dễ tính toán"	22	16.7%
S ₄ : "Quy tắc bất biến tỉ lệ"	6	4.5%
S ₅ : "Không cần vẽ đúng tỉ lệ"	8	6.1%
Khác	23	17.4%
Không trả lời	3	2.3%
TỔNG	132	100%

❖ Phân tích lời giải thích của HS:

Chúng tôi bắt đầu từ 23 cách giải thích khác các chiến lược được đưa ra trong phân tích tiên nghiệm. Không tính đến 3 HS vẽ hình và trả lời khá "lộn xộn" thì có

- 4 HS cho rằng cần bảo toàn tỉ lệ 1 : 1. Với các lời giải thích “*nên vẽ cặp SA và SD; AI và ID đúng vì chúng có tỉ lệ 1:1, AB và CD không cần vẽ đúng vì chúng có tỉ lệ 1:3*” (HS NL11), “*cặp đoạn thẳng cần vẽ đúng: AD và BC; AI và ID; DM và MC vì các cặp trên có tỉ lệ 1:1 nên khi vẽ phải vẽ chính xác trong mặt phẳng. Cặp không cần vẽ đúng là AB và CD; DH và CD vì trong không gian chúng ta không xác định được đúng chính xác tỉ lệ và kích thước*” (HS VD32), hay “*...vì các cặp này tỉ lệ 1:1 biểu diễn theo mặt phẳng nên cần đúng tỉ lệ. Các cặp AB và CD; DH và*

DC không cần vẽ đúng vì vẽ theo HHKG" (HS VD33), có nghĩa những đoạn thẳng bằng nhau thì phải bảo toàn chính xác như trong HHP

- 4 HS bảo toàn tỉ lệ mà đề bài cho tường minh (AB và DC; trung điểm M) vì "để đáp ứng yêu cầu đề bài, các cặp còn lại không cần đúng vì đây là HKG..." (HS NL 19), "đó là yêu cầu, giả thiết của bài toán" (HS HD16)

- 12 HS còn lại giải thích theo hướng nhìn, cảm tính riêng, chúng tôi tạm gọi là chiến lược "trực quan, cảm tính". Họ vẽ hình và từ hình đã vẽ để kết luận những cặp đoạn thẳng nào cần bảo toàn và không cần bảo toàn, chẳng hạn cần vẽ đúng vì "các cặp đoạn thẳng ở mặt phẳng bên ngoài" (HS NL15), "nhìn trực diện" (HS NL45), "khi nhìn vào hướng cách của chúng tới mắt bằng nhau" (HS VD12), "khi nhìn vào hình chóp thì thấy được tỉ lệ của đoạn DC rõ ràng nhất" (HS HD1),... và không cần vẽ đúng tỉ lệ vì "mặt phẳng nằm nghiêng" (HS HD1), "AI nằm trước ID" (HS VD12), ...

Rõ ràng 23 HS trên không chịu tác động của quy tắc bất biến tỉ lệ, họ chịu tác động của đối tượng HHP – phép chiếu lên mặt phẳng của một đối tượng không gian. Họ đã sử dụng các tính chất hình học của hình hình học trong mặt phẳng để giải thích, điều này thể hiện rõ ở chiến lược mà chúng tôi gọi là "trực quan, cảm tính. Việc những HS bảo toàn tỉ lệ của đề bài cũng là do thói quen giải toán phải thể hiện các giả thiết của bài toán lên hình vẽ. Trường hợp bảo toàn tỉ lệ 1:1 cũng là minh chứng rõ nét cho việc tác động của đặc trưng hình vẽ và kiến thức vẽ hình trong HHP.

Về yêu cầu biểu diễn hình, cùng một kết quả với bài thực nghiệm 1, phần lớn HS biểu diễn hình chóp đều vẽ đáy hình thang cân như vẽ trong HHP, tính chất không gian trên hình vẽ trùng với tính chất hình học ở trường hợp hai cạnh bên bằng nhau và đường cao AH, chỉ có hai đáy là $\tilde{e}$ không đúng tỉ lệ. Điều này, như đã phân tích, do HS chú ý đến con số độ dài và ký hiệu để chỉ rõ độ dài của các cạnh mà không quan tâm đến tỉ lệ của chúng.

Kết quả 33 HS (25%) sử dụng chiến lược S_1 chứng tỏ một con số khá lớn HS chịu tác động rất mạnh của HHP khi nghiên cứu HHKG. Làm theo chiến lược này có 4 quan niệm như sau:

- 11 HS cho rằng 4 cạnh của hình thang cân là thuộc lĩnh vực HHP, vì "vẽ đúng tỉ lệ của chúng ta mới có đáy hình thang và vì là trong HHP" (HS VD27). Với quan niệm này, lời giải tương ứng là cần bảo toàn AD và BC; AB và CD.

- 14 HS cho rằng các đối tượng thuộc mặt phẳng đáy hình chóp và không có mối liên hệ với phần không gian bên ngoài thì thuộc HHP, với quan niệm này thì điểm I là chân đường cao SI nên thuộc lĩnh vực không gian, còn lại các cạnh hình thang, trung điểm M và chân đường cao H thuộc HHP nên cần bảo toàn tỉ lệ. Cũng có HS cho rằng điểm H thuộc không gian, có lẽ do thao tác hạ vuông góc. Ví dụ lời giải của HS VD22: "Cần vẽ đúng tỉ lệ AD và BC, AB và CD, DM và MC vì

chúng nằm trên hình thang cân $ABCD$ (hình học phẳng). SA và SD , AI và ID , DH và DC không cần đúng tỉ lệ vì trong không gian". **HS NL44**: "Cặp đoạn thẳng cần đúng tỉ lệ là AB/CD , AD/BC , DM/MC , DH/DC vì đây là những tỉ lệ cơ bản dựa trên cơ sở HHP để tạo hình hợp lí, dễ nhìn và dễ chứng minh tính toán. Các đoạn SA/SD , AI/ID không cần vẽ đúng tỉ lệ vì những đoạn này thì tỉ lệ trừu tượng trên không gian không nhất thiết phải đúng tỉ lệ".

- 3 HS cho rằng các đối tượng nằm trong mặt phẳng đáy hình chóp thì thuộc HHP. Như vậy chỉ có cặp SA và SD là không cần bảo toàn tỉ lệ.

- 5 HS còn lại kết luận không cần bảo toàn SA và SD , DH và DC . Với quan niệm này việc vẽ trung điểm của đoạn thẳng là thao tác trong mặt phẳng, còn thao tác hạ vuông góc là thuộc lĩnh vực không gian.

Như chúng tôi đã nhận định dựa trên kết quả phân tích các tổ chức toán học ở chương 2, không ít HS (28%) sử dụng **chiến lược S_2 - bảo toàn trung điểm**, với các lời giải thích: "vì để thể hiện tính trực quan của hình vẽ" (**HS NL31**); "vì trung điểm của một đoạn thẳng cần xác định đúng để khi giải toán sẽ dễ nhìn" (**HS NL21**); "vì trong không gian bắt buộc phải vẽ đúng tỉ lệ trung điểm" (**HS HD24**); ... HS giải thích các cặp đoạn thẳng "không có trung điểm" không cần vẽ đúng tỉ lệ vì "đây là HHKG...chỉ cần vẽ tượng trưng" (**HS HD24**), "trong không gian có thể nhìn từ nhiều phía" (**HS NL49**), "vì các cặp đoạn thẳng này trong không gian không thể thấy được độ dài của chúng nên chỉ cần vẽ tượng trưng" (**HS HD25**), ... Trong 37 HS làm theo chiến lược này có 10 HS không bảo toàn tỉ lệ hai cạnh bên hình thang và họ không vẽ lại hình; 12 HS khác ban đầu biểu diễn hình thang cân như trong HHP, nhưng sau khi tính tỉ lệ và trả lời yêu cầu 2b, họ vẽ lại hình chóp nhằm sửa lại hai cạnh bên của hình thang để thể hiện rõ ý trong HHKG không cần bảo toàn tỉ lệ của hai cạnh này. Như vậy ở S_2 này HS thoát khỏi quan niệm mặt đáy là "mặt HHP" **song việc bảo toàn trung điểm với các giải thích kiểu "hiển nhiên" như dẫn chứng ở trên, hơn nữa lại không bảo toàn các tỉ lệ cần thiết khác là minh chứng rõ ràng cho sự tác động của ràng buộc thể chế lên HS như đã phân tích trong tiền nghiệm.**

Ở **chiến lược S_3** , HS ý thức được các cặp đoạn thẳng không nằm trên một đường thẳng hoặc không nằm trên hai đường thẳng song song thì không cần bảo toàn tỉ lệ.

Chỉ có 6 HS (4.5%) chịu tác động bởi quy tắc bất biến tỉ lệ. Trong **chiến lược S_4** này chỉ có 2 HS trực tiếp dùng quy tắc biểu diễn hình để giải thích, chẳng hạn (**HS NL28**): "các cặp đoạn thẳng cùng nằm trên 1 đường thẳng hoặc song song nhau cần bảo toàn đúng tỉ lệ là: AB và CD ; DM và MC ; AI và ID ; DH và HC ; còn lại không cần phải đúng tỉ lệ là AD và BC ; SA và SD ", 4 HS còn lại chúng tôi xếp vào trường hợp chịu tác động ngầm ẩn của quy tắc này, họ biểu diễn và chỉ ra đúng và đủ các cặp đoạn thẳng cần và không cần bảo toàn tỉ lệ nhưng với lý giải là để hình vẽ trực quan.

S₅ có 8 HS (6.1%), họ cho rằng trong HHKG không cần phải vẽ đúng tỉ lệ, thể hiện đúng tỉ lệ chỉ để trực quan, dễ tính toán. Một số lời giải thích: “*Tất cả các đoạn thẳng đều không cần vẽ đúng tỉ lệ vì trong không gian các đoạn thẳng được chiếu lên bởi hướng chiếu khác nhau. Các đoạn bằng nhau thì ta chỉ cần kí hiệu nó bằng nhau là được*” (HS NL13), “*không có cặp nào cần vẽ đúng tỉ lệ vì là HHKG*” (HS VD25),...

3.3.3. Kết luận

Trong bài thực nghiệm 1, qua phân tích hình vẽ và dấu vết điều chỉnh hình vẽ của HS chúng tôi thu được kết quả:

Nhiều HS vi phạm quy tắc bất biến tỉ lệ: Sau đi đã điều chỉnh hình vẽ, 57,2% HS không bảo toàn đúng tỉ lệ hai đáy hình thang, 63.5% HS biểu diễn sai tỉ lệ chân đường cao H chia CD. 20,3% HS biểu diễn sai trung điểm I của cạnh AD. Trong số 36.5% HS bảo toàn đúng các tỉ lệ thì có 33.1% HS vẽ đáy hình thang như vẽ trong HHP.

Việc xử lý các tình huống trong bài toán giúp HS nhận biết được các tính chất hình học của bài toán, khi biểu diễn hình vi phạm các quy tắc sẽ dẫn đến hậu quả là xác định sai tính chất hình học, thông qua tính toán HS nhận được thông tin phản hồi này vì thế nhiều HS điều chỉnh (sửa hoặc vẽ lại) hình vẽ, nhưng họ chỉ điều chỉnh hình để thể hiện đúng tính chất hình học và đáp ứng yêu cầu tính toán trong bài, xem nhẹ tính chất không gian trên hình vẽ. Họ lúng túng trong việc điều chỉnh hình vẽ cho chính xác.

Ở bài thực nghiệm 2:

- Phần lớn HS không chịu tác động của quy tắc bất biến tỉ lệ, gồm các trường hợp:

+ Trực quan, cảm tính: Việc bảo toàn hay không tỉ lệ của các cặp đoạn thẳng tùy thuộc vào “hướng nhìn”.

+ Đồng nhất mặt phẳng đáy của hình chóp với HHP nên xử lý các đối tượng của mặt đáy như trong HHP: HS bảo toàn tính chất HH của các đối tượng thuộc “mặt HHP” đó, các đối tượng khác trong không gian không thuộc mặt đáy hoặc các đối tượng thuộc mặt đáy nhưng có “liên hệ” với các yếu tố không thuộc mặt này thì không cần bảo toàn.

+ Thoát khỏi “mặt HHP”, trong không gian cần và chỉ cần bảo toàn trung điểm. Việc HS phải thường xuyên vẽ trung điểm và bảo toàn đúng tỉ lệ trung điểm khi chưa được giới thiệu QT3 cho thấy trong trường hợp này bên cạnh sự ràng buộc thể chế HHKG có sự tác động của HHP ở kiến thức về trung điểm, vẽ trung điểm.

+ Thoát khỏi “mặt HHP”, ý thức được các cặp đoạn thẳng không nằm trên một đường thẳng hoặc không nằm trên hai đường thẳng song song thì không cần bảo toàn tỉ lệ của chúng, song không tuân thủ qui tắc bất biến tỉ lệ nếu chúng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

- Tỷ lệ rất nhỏ HS tuân thủ quy tắc bất biến tỉ lệ khi biểu diễn hình.

KẾT LUẬN

1. Trong chương I chúng tôi đã phân tích, tổng hợp một số công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan nhằm làm sáng tỏ một số khái niệm cơ bản liên quan đến hình vẽ, đồng thời cung cấp cơ sở lý luận cho những phân tích ở chương II và chương III.

2. Trong chương II, thông qua phân tích mối quan hệ thể chế với hình vẽ trong HHP và HHKG ở trường phổ thông, chúng tôi đã làm rõ những tính chất, đặc trưng của hình vẽ trong từng môi trường nghiên cứu, những đặc trưng ràng buộc thể chế đối với quy tắc bất biến tỉ lệ.

- Hình vẽ trong HHP: trực quan, nói chung tính chất không gian trên hình vẽ “trùng” với tính chất hình học. Khái niệm hình vẽ không được định nghĩa, được mặc nhiên sử dụng trong vai trò nghiên cứu HH. HS được chỉ dẫn và thực hành rèn luyện cách vẽ các đối tượng và các quan hệ HH giữa các đối tượng qua các bài toán vẽ hình và dựng hình.

- Hình vẽ trong HHKG: Khái niệm hình vẽ được giới thiệu và định nghĩa với nghĩa là sự “thể hiện” (biểu diễn) đối tượng không gian lên mặt phẳng. Các ví dụ, bài tập phần lớn dựa trên hình chóp để nghiên cứu các tính chất của hình không gian. Hình chóp được định nghĩa bằng kiến thiết bởi một mặt phẳng chứa mặt đáy, các đỉnh của mặt đáy được nối với một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa mặt đáy.

- Quy tắc bất biến tỉ lệ (QT3):

+ Trước bài phép chiếu song song QT3 chưa được giới thiệu, nhưng đã có những bài tập buộc phải sử dụng quy tắc này, chủ yếu là dạng bài phải bảo toàn tỉ lệ điểm chia đoạn thẳng, trong đó phần lớn yêu cầu vẽ trung điểm của đoạn thẳng.

+ Trước và sau khi giới thiệu QT3, các hoạt động, tình huống, bài tập áp dụng không có sự tiến triển về yêu cầu biểu diễn hình liên quan đến quy tắc này.

+ Đặc trưng các bài tập liên quan đến QT3: vẽ hình vi phạm QT3 không ảnh hưởng đến kết quả tính toán.

Kết quả phân tích mối quan hệ thể chế dẫn chúng tôi đến giả thuyết nghiên cứu:

Quy tắc bảo toàn tỉ lệ không được vận hành như là yếu tố công nghệ trong quá trình biểu diễn hình không gian.

3. Kết luận thu được qua nghiên cứu thực nghiệm ở chương III với hình thức làm bài kiểm tra cá nhân nhằm tìm hiểu rõ ảnh hưởng của quan hệ thể chế đối với quy tắc bất biến tỉ lệ lên mối quan hệ cá nhân HS với quy tắc này, đồng thời cũng vạch ra một số tác động của HHP khi biểu diễn hình không gian.

Bài thực nghiệm 1: HS lúng túng trong việc "phiên dịch" những yếu tố bất biến và không bất biến lên hình vẽ (tỉ lệ các cặp đoạn thẳng, các cạnh bằng nhau, góc vuông). Phần lớn HS vi phạm quy tắc bất biến tỉ lệ trong biểu diễn hình, họ không nhận thức được hậu quả của việc vi phạm quy tắc này, khi gặp mâu thuẫn giữa tính chất hình học và tính chất không gian trên hình vẽ họ chú trọng việc thể hiện tính chất hình học (điều chỉnh hình hoặc thêm ký hiệu), hy sinh các quy tắc biểu diễn kể cả quy tắc bảo toàn song song.

Bài thực nghiệm 2: Qua bài thực nghiệm này chúng tôi đã làm rõ những cấp độ tác động của mối quan hệ thể chế đối với hình vẽ và quy tắc bất biến tỉ lệ lên mối quan hệ cá nhân của HS đối với quy tắc này, trong các trường hợp đó tác động của HHP đan xen với những ràng buộc của thể chế HHKG.

Kết quả trên giúp chúng tôi trả lời một phần các câu hỏi ban đầu và kiểm chứng tính thỏa đáng của giả thuyết đã được đặt ra ở chương II.

4. Hướng nghiên cứu mở ra từ luận văn

Xây dựng những tình huống học tập nhằm giúp HS nhận thức được vai trò của lý thuyết biểu diễn hình như là công cụ quan trọng bắt buộc trong biểu diễn hình không gian đồng thời giúp họ vượt qua được các chướng ngại của HHP trong quá trình biểu diễn hình không gian.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Bộ Giáo dục và Đào tạo – Vụ Giáo dục trung học (2007), *tài liệu bồi dưỡng GV thực hiện chương trình, SGK 11*, NXB giáo dục.
2. Lê Thị Hoài Châu (2004), *Phương pháp dạy học hình học ở trường THPT*, NXB ĐHQG Tp.HCM.
3. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2002), *Hình học 6, tập 1*, NXB giáo dục
4. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2002), *Hình học 6, tập 2*, NXB giáo dục
5. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2002), *SGV Hình học 6, tập 1*, NXB giáo dục
6. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2002), *SGV Hình học 6, tập 2*, NXB giáo dục
7. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2003), *Hình học 7, tập 1*, NXB giáo dục
8. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2003), *Hình học 7, tập 2*, NXB giáo dục
9. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2003), *SGV Hình học 7, tập 1*, NXB giáo dục
10. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2003), *SGV Hình học 7, tập 2*, NXB giáo dục
11. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2004), *Hình học 8, tập 1*, NXB giáo dục
12. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2004), *Hình học 8, tập 2*, NXB giáo dục
13. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2004), *SGV Hình học 8, tập 1*, NXB giáo dục
14. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2004), *SGV Hình học 8, tập 2*, NXB giáo dục
15. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2005), *Hình học 9, tập 1*, NXB giáo dục
16. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2002), *Hình học 9, tập 2*, NXB giáo dục
17. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2005), *SGV Hình học 9, tập 1*, NXB giáo dục
18. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2005), *SGV Hình học 9, tập 2*, NXB giáo dục
19. Hoàng Chúng (2001), *Phương pháp dạy học hình học ở trường THCS*, NXB giáo dục.
20. Hoàng Chúng (2000), *Phương pháp dạy học toán học ở trường PTTHCS*, NXB giáo dục
21. Trần Thị Kim Cương (2008), *Tìm tòi lời giải hình học 5*, NXB giáo dục
22. Trần Thị Ngọc Diệp (2009), *Dạy học mở đầu về chứng minh trong hình học ở trường trung học cơ sở - Một tiểu đồ án didactic về đào tạo giáo viên*, Luận văn thạc sĩ.
23. Nguyễn Thị Tuyết Dung (2002), *Nghiên cứu didactic, bước chuyển từ hình học “quan sát – thực nghiệm” sang hình học “suy diễn”*, Luận văn Thạc sĩ.
24. Nguyễn Đình Điện, Đỗ Mạnh Môn (2007), *“Hình học họa hình”*, NXB giáo dục.
25. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên) (2007), *Hình học 11*, NXB giáo dục.

26. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên), Nguyễn Mộng Hy (chủ biên) (2007), *SGV Hình học 11, cơ bản*, NXB giáo dục.
27. Đỗ Đình Hoan, (Chủ biên) (2002), *Toán 1, 2, 3, 4*, NXB giáo dục
28. Đỗ Đình Hoan, (Chủ biên) (2006), *Toán 5*, NXB giáo dục
29. Đỗ Đình Hoan, (Chủ biên) (2006), *SGV Toán 5*, NXB giáo dục
30. Nguyễn Mộng Hy (chủ biên) (2007), *Bài tập hình học 11*, NXB giáo dục.
31. Nguyễn Mộng Hy (2002), “*Xây dựng hình học bằng phương pháp tiên đề*”, NXB giáo dục.
32. Nguyễn Bá Kim (2001), *Phương pháp dạy học môn toán*, NXB giáo dục.
33. Nguyễn Bá Kim (chủ biên) (1994), *Phương pháp dạy học môn toán*, NXB giáo dục.
34. Bùi Văn Nghị, *Sử dụng tư duy thuật toán vào việc xác định hình để giải các bài toán hình học không gian ở trường THPT*, Luận án Phó tiến sĩ.
35. Nguyễn Thị Thu Phương (2009), *Nghiên cứu didactic phép dời hình ở bậc trung học cơ sở và trung học phổ thông*, Luận văn thạc sĩ.
36. Bùi Gia Quang, “*Sử dụng các tổ hợp đồ dùng dạy học để dạy phần hình học không gian (ở lớp cuối cấp PTTH) trong cải cách giáo dục*”, Luận án Phó tiến sĩ KHGD.
37. Đào Tam (2007), “*Phương pháp dạy học hình học ở trường trung học phổ thông*”, NXB Đại học sư phạm.
38. Nguyễn Cảnh Toàn (1966), “*Phân loại các tính chất hình học*”, NXB giáo dục
39. Phạm Đình Thực (2006), “*Giảng dạy hình học ở tiểu học*”, NXB giáo dục
40. Phạm Đình Thực (2008), *200 câu hỏi đáp về dạy toán ở tiểu học*, NXB giáo dục

Tiếng Pháp

41. Hamid Chaachoua, Người dịch: Đoàn Hữu Hải, “*Hình học không gian. Thực trạng về việc đọc hình vẽ của học sinh cuối cấp trung học cơ sở*”.
42. Đoàn Hữu Hải (2001), “*L’enseignement de la géométrie dans l’espace au desbut du dycée dans des liens avec la géométrie plane. Une estude camparative entre deux istitutions: la classe de Seconde en France et la classe 11 au Vêt Nam*”, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble, France.

Tiếng Anh

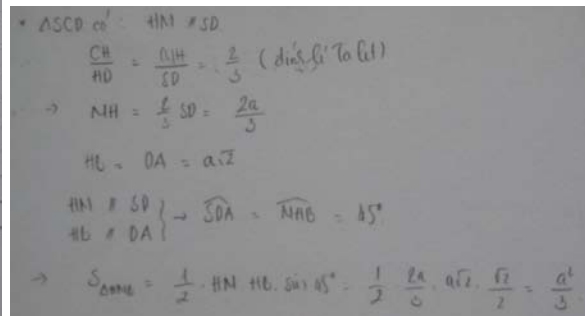
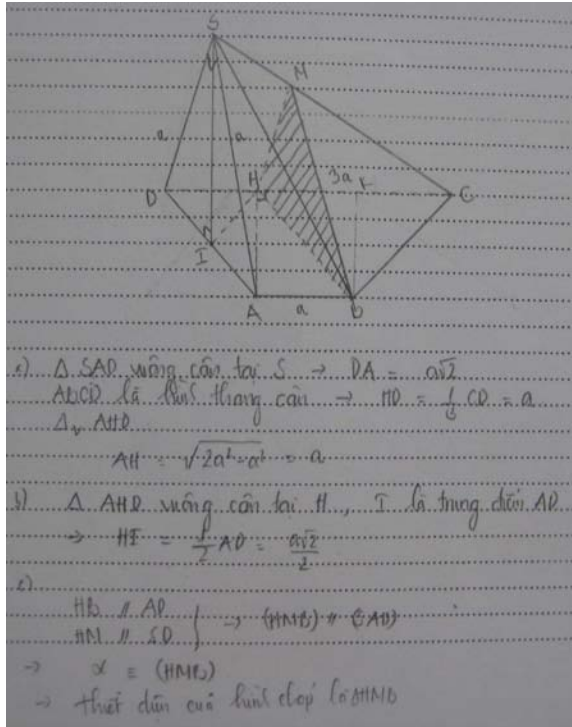
43. *The Pohlke-Schwarz Theorem and its Relevancy in the Didactics of Mathematics*, http://math.unipa.it/~grim/quad17_sklenarikova-pemova_07.pdf

BÀI 1

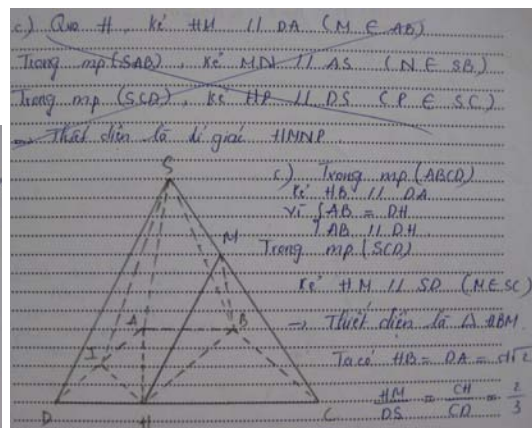
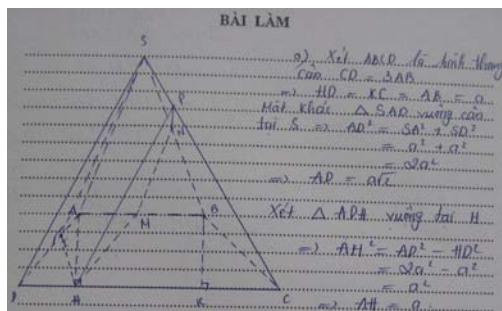
❖ Chiến lược S1

➤ **S₁₁ (D_P)**

Học sinh NK35



Học sinh CN 23 (vẽ lại)



Học sinh NK39 (vẽ lại)

BÀI LÀM

a) ABCD là hình vuông

$\Rightarrow HE = DH = BK = a$

$AD = a\sqrt{2}$ ($\Delta SDA \perp$ mặt đáy S)

$$AH^2 = AD^2 - DH^2$$

$$= 2a^2 - a^2 = a^2$$

$$AH = a$$

b) Xét ΔAHP

$\Delta AHP \perp$ tại H

I là trung điểm AD

$$\Rightarrow HI = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Từ H kẻ $HM \parallel AD$ cắt AB tại M

Từ H kẻ $HI \parallel SD$ cắt SC tại P

Từ M kẻ $MN \parallel SA$ cắt SB tại N

thiết diện là ΔHNP

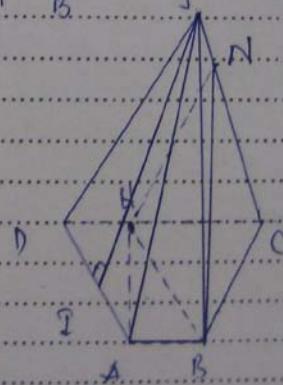
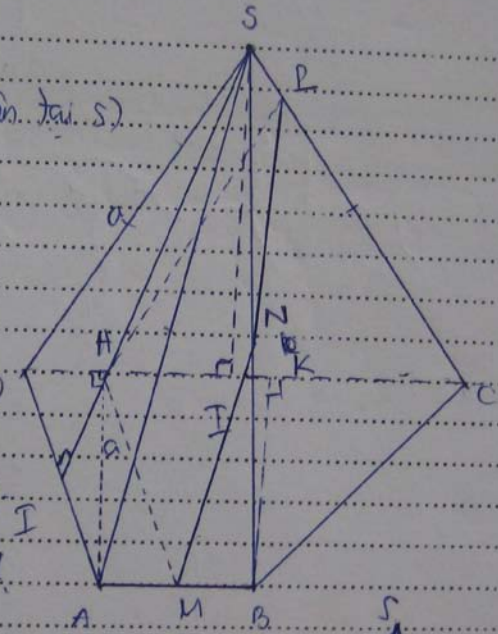
$DH \parallel AB$

$DH = AB \Rightarrow \Delta DHA$ là hình

$\Rightarrow DA \parallel HB$

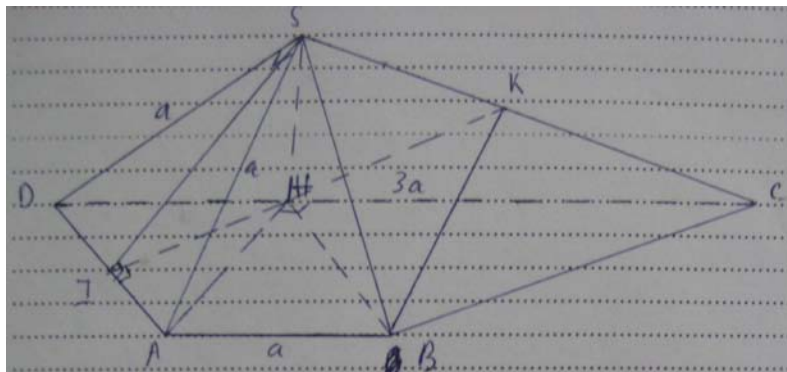
Từ H kẻ $HN \parallel SD$ cắt SC tại N

thiết diện là ΔHNB



➤ $S_{12} (D_{KG})$:

Học sinh NK3

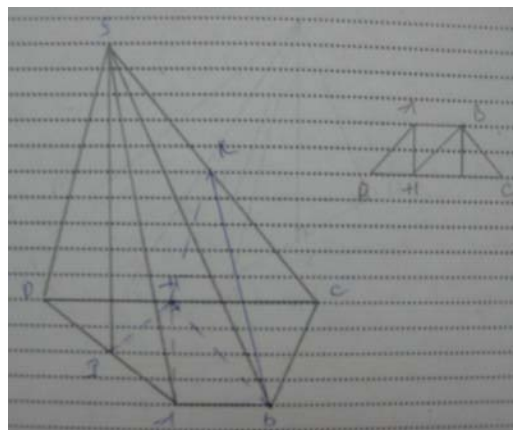
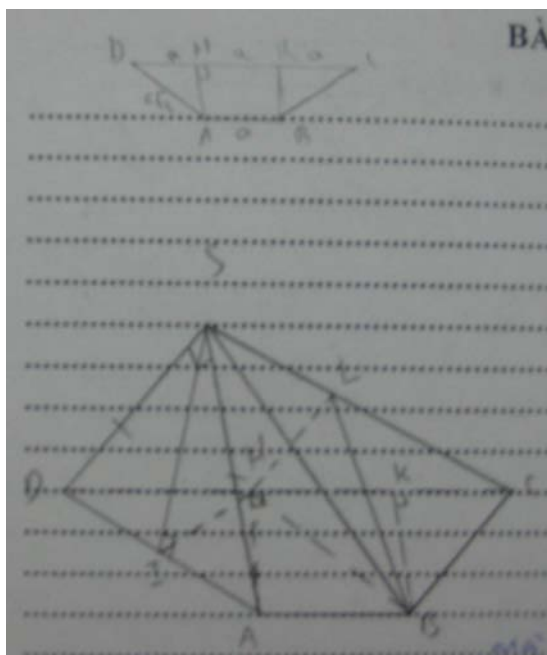


Học sinh NK38

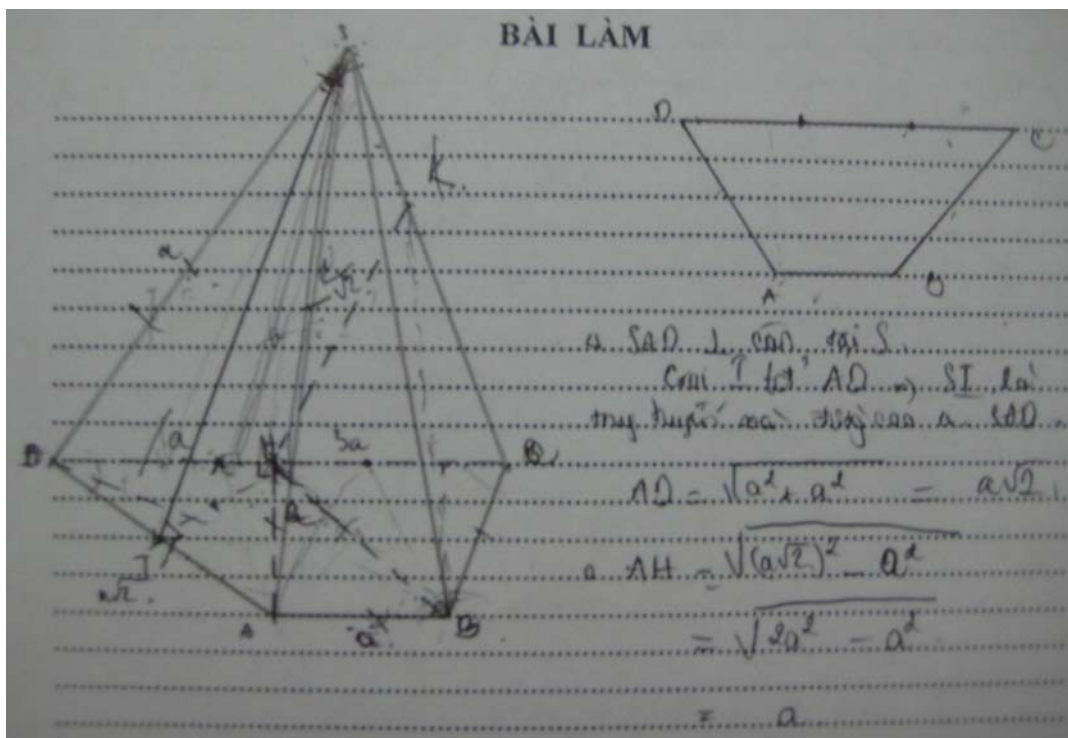
➤ S_{13} (ĐS_TaG)

Học sinh CN12

Học sinh NK73



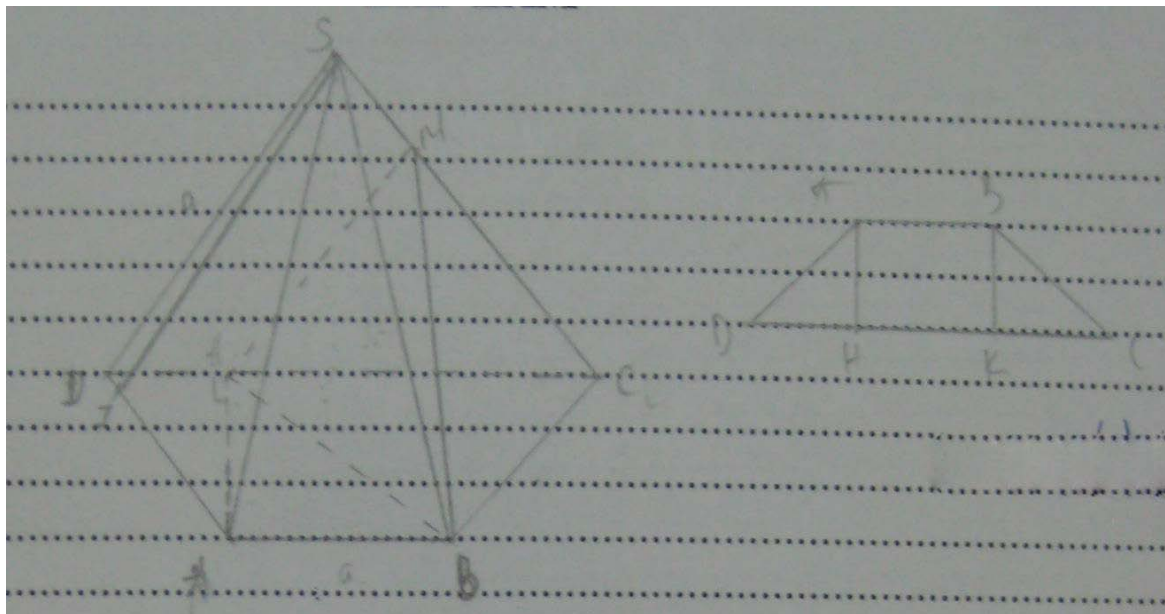
Học sinh N17



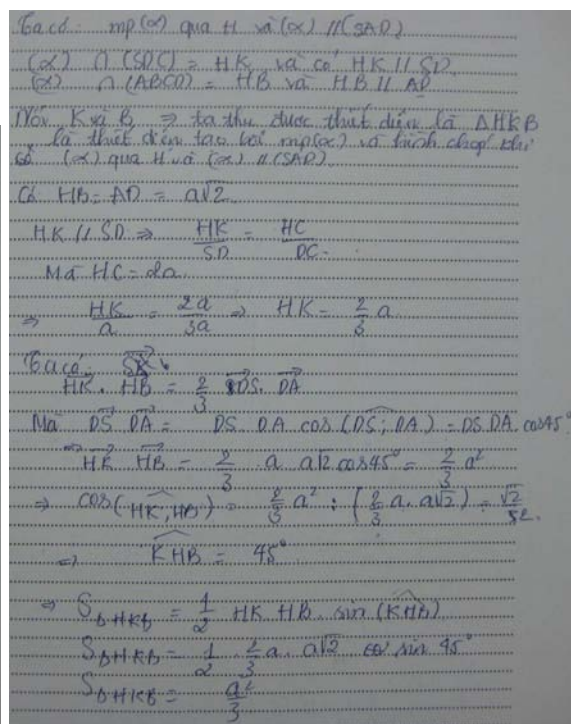
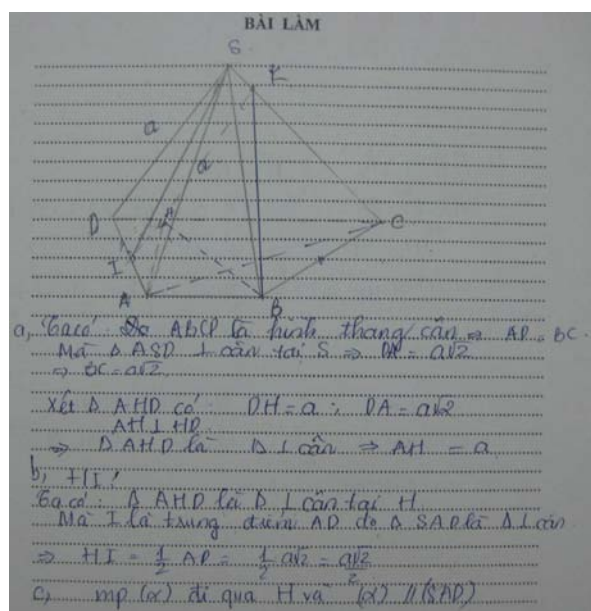
❖ Chiến lược S2

➤ S_{21} (SS_TaG):

Học sinh BMT 95



Học sinh CN 58



➤ S₂₂ (SS_TuG)

Học sinh BMT103

Học sinh NK77

