

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Nguyễn Thị Cẩm Trinh

NGHIÊN CỨU DIDACTIC VỀ Δx
TRONG TOÁN HỌC VÀ TRONG VẬT LÝ

Chuyên ngành : Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán

Mã số : 60 14 10

LUẬN VĂN THẠC SĨ GIÁO DỤC HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. TRẦN LƯƠNG CÔNG KHANH

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Trần Lương Công Khanh, mặc dù bận bịu với công việc nhưng thầy luôn tận tình hướng dẫn và động viên tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn: PGS.TS. Lê Thị Hoài Châu, PGS.TS. Lê Văn Tiến, TS. Đoàn Hữu Hải, TS. Trần Lương Công Khanh, TS. Nguyễn Ái Quốc, TS. Lê Thái Bảo Thiên Trung, TS. Vũ Như Thư Hương, TS. Nguyễn Chí Thành, PGS.TS. Claude Comiti, PGS.TS. Annie Bessot, TS. Alain Birebent đã truyền cho chúng tôi những kiến thức Didactic quý báu.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn:

- Ban lãnh đạo và chuyên viên Phòng KHCN – SDH trường ĐHSP TP.HCM đã tạo điều kiện thuận lợi cho chúng tôi khi được học tập tại trường.

- Ban Giám hiệu trường THPT Long Trường nơi tôi công tác đã tạo mọi thuận lợi cho tôi trong lúc học tập tại trường ĐH SPTP.HCM.

- Ban Giám hiệu và các giáo viên của THPT Giồng Ông Tố, THPT Nguyễn Hữu Huân đã nhiệt tình giúp đỡ và sắp xếp cho tôi thực nghiệm tại Quý trường.

Xin gửi những lời cảm ơn chân thành đến các bạn trong lớp Didactic khóa 18 đã cùng tôi học tập, trải qua những ngày vui buồn và những khó khăn trong khóa học.

Sau cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thành viên trong gia đình tôi, luôn động viên và giúp đỡ tôi về mọi mặt.

Nguyễn Thị Cẩm Trinh

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài và câu hỏi xuất phát

Khái niệm vi phân là một khái niệm cơ bản của giải tích. Sự ra đời của phép tính vi phân đã đưa toán học sang một giai đoạn mới, chuyển từ nghiên cứu phạm vi bất biến, hữu hạn sang lĩnh vực vận động, vô hạn, liên tục và có nhiều ứng dụng quan trọng trong vật lý. Vi phân được định nghĩa trong chương trình toán phổ thông thông qua khái niệm số gia và được kí hiệu Δx , kí hiệu này cũng được sử dụng trong vật lý. Như vậy trong vật lý và trong toán học, Δx xuất hiện như thế nào, có ý nghĩa và chức năng giống hay khác nhau? Mặc dù vi phân có ý nghĩa quan trọng trong toán học và trong vật lý nhưng trong chương trình trung học phổ thông, khái niệm này đã thực sự được chú trọng? Hơn nữa ở Việt Nam chúng tôi cũng chưa biết một công trình didactic nào nghiên cứu về số gia Δx . Đó là những câu hỏi mà chúng tôi đặt ra và cũng là lý do mà chúng tôi chọn đề tài “**Nghiên cứu didactic về Δx trong toán học và trong vật lý**” để trả lời các câu hỏi trên.

2. Mục đích nghiên cứu của luận văn

Qua một số ghi nhận được trình bày như trên, chúng tôi dẫn đến các câu hỏi dưới đây mà việc tìm kiếm câu trả lời là mục đích của luận văn.

- Δx xuất hiện như thế nào trong toán học và trong vật lý, Δx được đưa vào nhằm mục đích gì?
- Trong chương trình phổ thông, Δx được trình bày trong lĩnh vực nào trước, toán học hay vật lý? Có sự khác biệt nào không? Điều đó tạo thuận lợi hay gây khó khăn gì cho học sinh khi tiếp thu cùng một khái niệm trong hai môn học khác nhau?
- Những hợp đồng didactic liên quan đến Δx trong vật lý và trong toán học?
- Khái niệm vô cùng bé xuất hiện như thế nào, tiến triển ra sao? Học sinh có đồng nhất Δx và khái niệm vô cùng bé với nhau không?
- Nghĩa của vô cùng bé trong toán học và trong vật lý khác nhau như thế nào?

3. Khung lý thuyết tham chiếu

Để tìm kiếm câu trả lời cho các câu hỏi trên, đặt trong khuôn khổ didactic toán, luận văn này chủ yếu dựa vào lý thuyết chuyển đổi didactic, khái niệm hợp đồng didactic và một số khái niệm của lý thuyết nhân chủng như mối quan hệ thể chế, mối quan hệ cá nhân. Sự lựa chọn này xuất phát từ những lý do sau:

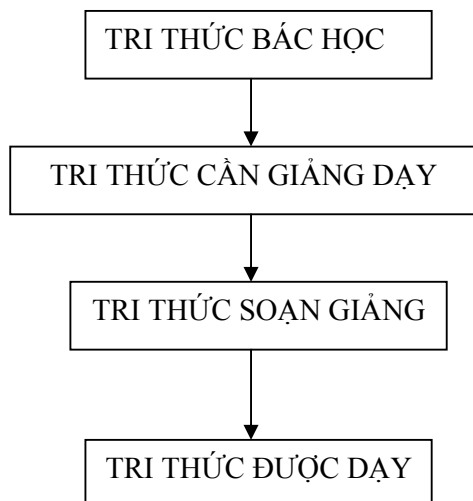
Dựa vào lý thuyết chuyển đổi didactic sẽ giúp chúng tôi hiểu lịch sử xuất hiện của Δx và đối chiếu với sự xuất hiện của nó trong chương trình phổ thông để làm rõ vai trò và yêu cầu về mức độ sử dụng của tri thức.

Khái niệm hợp đồng didactic cho phép ta giải mã các ứng xử của giáo viên và học sinh, tìm ra ý nghĩa những hoạt động mà họ tiến hành, từ đó có thể giải thích rõ ràng và chính xác những sự kiện quan sát được trong lớp học. Việc so sánh hợp đồng didactic liên quan đến Δx trong toán học và trong vật lý giúp ta hiểu được yêu cầu và đặc trưng của môn học đối với cùng một tri thức, từ đó có cách giảng dạy, truyền đạt để các môn học có sự tương quan có thể hỗ trợ lẫn nhau, giúp học sinh đạt được kết quả học tập tốt hơn.

Dựa vào lý thuyết nhân chủng học cho phép chúng tôi làm rõ mối quan hệ thể chế với tri thức và giữa tri thức với cá nhân nào đó. Từ đó cho chúng tôi biết tri thức xuất hiện ở đâu, có vai trò mục đích gì trong thể chế và việc học tập của cá nhân về tri thức bị ảnh hưởng bởi những ràng buộc nào trong mối quan hệ với thể chế.

3.1 Chuyển đổi didactic

Trong nhà trường phổ thông, đối với một môn học, người ta không thể dạy cho học sinh toàn bộ tri thức có liên quan mà nhân loại đã tích lũy trong suốt thời gian tồn tại trên địa cầu. Hơn nữa, để tri thức bộ môn trở nên có thể dạy được, cần phải lựa chọn, sắp xếp và tái cấu trúc lại nó theo một kiểu liên kết logic, phục vụ cho mục tiêu dạy học xác định. Từ tri thức bác học đến tri thức toán học mà học sinh được học thật sự có sự chuyển đổi didactic. Sự chuyển đổi này không chỉ bao gồm bước chuyển đổi từ tri thức bác học thành tri thức cần giảng dạy mà còn liên quan đến bước chuyển từ giáo án của giáo viên (tri thức soạn giảng) đến tri thức thực dạy (hay tri thức được dạy).



3.2 Hợp đồng didactic

Hợp đồng didactic là một sự mô hình hoá các quyền lợi và nghĩa vụ ngầm ẩn của giáo viên và học sinh đối với các đối tượng tri thức toán học đem giảng dạy. Nó là tập hợp những quy tắc phân chia và hạn chế trách nhiệm của mỗi bên, học sinh và giáo viên, đối với một tri thức toán được giảng dạy. Hợp đồng chi phối quan hệ giữa thầy và trò về các kế hoạch, các mục tiêu, các quyết định, các hoạt động và đánh giá sự phạm. Chính hợp đồng chi ra ở từng lúc vị trí tương hỗ của các đối tác đối với nhiệm vụ phải hoàn thành và chỉ rõ ý nghĩa sâu sắc của hoạt động đang được tiến hành, của các phát biểu hoặc những lời giải thích. Nó là quy tắc giải mã cho hoạt động sự phạm mà mọi sự học tập trong nhà trường phải trải qua. Ta chỉ có thể nắm được ý nghĩa của những lời chỉ đạo cách ứng xử của giáo viên và học sinh, rất cần cho phân tích didactic, nếu biết gắn những sự kiện được quan sát vào trong khuôn khổ hợp đồng didactic để giải thích.

Để thấy được hiệu lực của hợp đồng ta có thể theo một trong những cách tiến hành như sau :

D1: tạo một sự biến loạn trong hệ thống giảng dạy, sao cho có thể đặt những thành viên chủ chốt (giáo viên, học sinh) trong một tình huống khác lạ (ta sẽ gọi tình huống đó là tình huống phá vỡ hợp đồng) bằng cách:

- Thay đổi những điều kiện sử dụng tri thức.
- Lợi dụng khi học sinh chưa biết cách vận dụng một số tri thức nào đó.
- Tự đặt mình ra ngoài lĩnh vực tri thức đang xét hoặc sử dụng những tình huống mà các tri thức đang xét không giải quyết được.
- Làm cho giáo viên đối mặt với những ứng xử không phù hợp với điều kiện mà họ mong đợi ở học sinh.

D2: phân tích các thành phần của hệ thống giảng dạy trong thực tế.

- Nghiên cứu câu trả lời của học sinh trong khi học.
- Phân tích các đánh giá toán học của học sinh trong việc sử dụng tri thức.
- Phân tích những bài tập được giải hoặc được ưu tiên hơn trong sách giáo khoa.

Đặc biệt, ta cũng có thể nhận ra một số yếu tố của hợp đồng didactic đặc thù cho tri thức bằng cách nghiên cứu những tiêu chí hợp thức hóa việc sử dụng tri thức vì việc sử dụng tri thức đó không chỉ được quy định bởi các văn bản hay bởi định nghĩa của tri thức mà còn phụ thuộc vào tình huống vận dụng tri thức, vào những ước định được hình thành (trên cơ sở mục tiêu didactic) trong quá trình giảng dạy. Những tiêu chí xác định tính hợp thức của tri

thức trong tình huống này không còn phụ thuộc vào bản thân tri thức nữa mà phụ thuộc vào các ràng buộc của hệ thống didactic.

Bất kỳ việc dạy một đối tượng tri thức mới nào cũng tạo ra những phá vỡ hợp đồng so với đối tượng tri thức cũ và đòi hỏi thương lượng lại những hợp đồng mới: học tập là quá trình học sinh làm quen với giá trị của những sự phá vỡ này thông qua thương lượng với giáo viên. Theo Brousseau, sự thương lượng này tạo ra một loại trò chơi có luật chơi ổn định tạm thời, cho phép các thành viên chính, nhất là học sinh, đưa ra các quyết định trong một chừng mực an toàn nào đó, cần thiết để bảo đảm cho họ sự độc lập đặc trưng của quá trình lĩnh hội.

Việc nghiên cứu quy tắc của hợp đồng didactic là cần thiết vì để chuẩn bị cho tương lai, giáo viên phải xem xét đến quá khứ mà hợp đồng hiện hành là dạng thể hiện thực tế của nó. Hợp đồng mà giáo viên tác động tiến triển không liên tục, mà được tạo thành từ một chuỗi biến cố rất nhỏ nối tiếp nhau, tương ứng với những sự phá vỡ hợp đồng. Phá vỡ hợp đồng là nguyên tắc chủ đạo để có sự tiến triển mong đợi.

3.3 Quan hệ thể chế

Khái niệm quan hệ thể chế được Chevallard đưa vào từ việc thừa nhận rằng: “Một tri thức không tồn tại trong một xã hội rỗng, mọi tri thức đều xuất hiện ở một thời điểm xác định, trong một xã hội nhất định và được cắm sâu vào một hoặc nhiều thể chế. Cụ thể hơn, mọi tri thức đều là tri thức của một thể chế và một tri thức có thể sống trong nhiều thể chế khác nhau.”

Một đối tượng O được coi là tồn tại đối với một thể chế I nếu có một mối quan hệ $R(I, O)$ của I đối với O . Quan hệ này cho biết O xuất hiện như thế nào và ở đâu trong I , O giữ vai trò gì trong I và mối quan hệ giữa O với các đối tượng khác của I ra sao.

Cũng tương tự như vậy, một đối tượng tri thức O tồn tại đối với một cá nhân X nếu có mối quan hệ $R(X, O)$ của X đối với O . Quan hệ này bao gồm tất cả các tác động qua lại của X đối với O như X có thể sử dụng O như thế nào, hiểu về O ra sao...

4. Trình bày lại câu hỏi nghiên cứu

Với khung lý thuyết tham chiếu, chúng tôi trình bày lại dưới đây những câu hỏi mà việc tìm hiểu câu trả lời chính là mục đích nghiên cứu của luận văn.

- Đặc trưng khoa học luận của Δx ?
- Mối quan hệ thể chế với đối tượng tri thức Δx trong thể chế dạy học Toán học và trong thể chế dạy học Vật lý?
- Mối quan hệ giữa Δx và khái niệm vô cùng bé.

- Khái niệm vô cùng bé trong toán học và trong vật lý. Sự khác nhau giữa chúng.
- Các quy tắc của hợp đồng didactic được hình thành giữa giáo viên và học sinh khi tiếp cận khái niệm Δx trong toán học và trong vật lý? Sự giống và khác nhau giữa chúng? Những khó khăn và thuận lợi của học sinh khi tiếp thu khái niệm này trong hai môn học khác nhau.

5. Phương pháp nghiên cứu

Trong phạm vi lý thuyết đã trình bày, để tìm cách trả lời các câu hỏi trên, chúng tôi sẽ thực hiện nghiên cứu sau đây:

- Sơ lược quá trình hình thành và phát triển của Δx cùng các khái niệm liên quan.
- Phân tích Δx và những khái niệm có liên quan trong một số giáo trình giảng dạy ở đại học và một số tài liệu về lịch sử toán.
- Nghiên cứu tài liệu hướng dẫn giáo viên, bộ sách giáo khoa giải tích 11, 12 (cơ bản và nâng cao), bộ sách vật lý 10, 11, 12 (cơ bản và nâng cao) để làm rõ mối quan hệ thể chế với đối tượng Δx từ đó đề ra giả thuyết nghiên cứu.
- Xây dựng các tình huống thực nghiệm để kiểm tra giả thuyết đã đặt ra.

6. Cấu trúc của luận văn

- **Mở đầu**
- **Chương 1: Nghiên cứu về Δx trong vật lý**
 1. Điều tra khoa học luận về Δx
 2. Phân tích mối quan hệ thể chế với đối tượng tri thức Δx
 3. Kết luận chương 1
- **Chương 2: Nghiên cứu về Δx trong toán học**
 1. Phân tích mối quan hệ thể chế với đối tượng tri thức Δx
 2. Kết luận chương 2
- **Chương 3. Thực nghiệm**
 1. Tóm tắt kết quả 2 chương đầu
 2. Phát biểu giả thuyết nghiên cứu
 3. Thực nghiệm
- **Kết luận chung**

CHƯƠNG I.

NGHIÊN CỨU VỀ Δx TRONG VẬT LÝ

1. Điều tra khoa học luận về Δx

Mầm mống của phép tính vi tích phân đã phát sinh từ thời thượng cổ trong các phép tính diện tích, thể tích, tìm trọng tâm của các hình. Một trong những nhà toán học kiệt xuất của Hi Lạp, Archimedes (287-212 TCN) đã có những khái niệm ban đầu về phép tính vi tích phân. Ông đã lập các hình phẳng từ những đường và lập các vật thể từ những mặt phẳng, tính diện tích (hoặc thể tích) của một hình (vật thể) bằng cách phân chia thành vô số hình (phần tử) nhỏ hơn. Đến thế kỷ thứ 17 chủ nghĩa tư bản bắt đầu hưng thịnh, nhu cầu thực tế của cuộc sống đã thúc đẩy các khoa học chính xác phát triển nhanh chóng, trong đó có các ngành thiên văn học, quang học, cơ học. Sự phát triển đó đòi hỏi sự cải tiến có tính chất quyết định của toán học. Các đại lượng biến thiên, lượng vô cùng bé (phân chia vô hạn) bắt đầu xuất hiện, cần có những phương pháp chung để giải các bài toán cùng loại, thiết lập mối quan hệ giữa những bài toán thuộc loại khác nhau. Từ những ý tưởng ban đầu của Archimedes, một số nhà khoa học của thế kỷ thứ 17 như Fermat, Roberval, Descartes, Cavalieri, ... tiếp tục phát triển, nghiên cứu và đã đạt được một số kết quả liên quan đến tính diện tích, tính thể tích, độ dài cung, xác định trọng tâm, tính được một số tích phân đơn giản nhất, tìm được những hệ thức khác nhau để biến đổi tích phân này thành tích phân khác. Tuy nhiên, các kết quả này chỉ giải quyết cho những bài toán riêng lẻ, chưa thiết lập dưới dạng tổng quát các khái niệm cơ bản của phép tính toán mới và sự tương quan của chúng. Và vấn đề đã được giải quyết khi phép tính vi tích phân được hai nhà khoa học Newton và Leibniz tìm ra.

Sự ra đời của phép tính vi tích phân cũng đã giải quyết được bốn bài toán lớn của khoa học thế kỷ 17 đặt ra:

1. Tìm tiếp tuyến của một đường cong. Bài toán này thuộc về hình học, nhưng nó có những ứng dụng quan trọng trong khoa học. Nghề hàng hải phát triển ở thế kỷ thứ 17 khiến nhiều nhà khoa học quan tâm đến quang học, thiết kế các thấu kính. Để nghiên cứu đường đi của ánh sáng qua thấu kính, người ta phải biết góc mà ở đó tia sáng đập vào thấu kính để áp dụng định luật khúc xạ. Góc cần chú ý là góc giữa tia sáng và pháp tuyến của đường cong, pháp tuyến thì vuông góc với tiếp tuyến. Để xác định pháp tuyến, người ta phải xác định tiếp tuyến. Một vấn đề có tính khoa học khác nữa liên quan đến tiếp tuyến của một đường cong là nghiên cứu chuyển động. Hướng chuyển động của vật thể chuyển động ở bất kỳ điểm nào của quỹ đạo chính là hướng của tiếp tuyến quỹ đạo.

2. Tìm độ dài của một đường cong. Chẳng hạn như khoảng cách đi được của một hành tinh trong một thời gian nào đó; diện tích của hình giới hạn bởi các đường cong; thể tích của những khối giới hạn bởi những mặt. Các nhà toán học cổ Hy Lạp đã dùng phương pháp vét cạn một cách rất khéo léo, các nhà toán học thế kỷ XVII đã cải tiến dần, và họ nhanh chóng phát minh ra phép tính vi tích phân.

3. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một đại lượng. Nghiên cứu đường đi của viên đạn để phục vụ cho nhu cầu quân sự. Khi đạn bắn từ súng thần công, khoảng cách đi được sẽ phụ thuộc vào góc của súng tạo với mặt đất. Vấn đề đặt ra là tìm góc sao cho viên đạn đi xa nhất. Nghiên cứu sự chuyển động của hành tinh liên quan đến các bài toán cực trị, ví dụ tìm khoảng cách ngắn nhất và dài nhất của một hành tinh và mặt trời.

4. Tìm vận tốc và gia tốc của một vật thể tại một thời điểm bất kỳ khi biết vật thể chuyển động có phương trình là một hàm số theo thời gian. Và ngược lại, cho gia tốc của vật thể là một hàm số theo thời gian, tìm vận tốc và quãng đường đi được.

Sự ra đời của phép tính vi tích phân đánh dấu một bước ngoặt quan trọng trong toán học, thúc đẩy khoa học phát triển nhanh chóng, các kí hiệu và khái niệm Δx , dx , “vô cùng bé” đã xuất hiện như thế nào trong quá trình xây dựng phép tính vi tích phân? Chúng tôi tìm câu trả lời này thông qua việc nghiên cứu các công trình của Isaac Newton (1642-1727) và Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716).

Năm 1669, Newton giải bài toán tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số không âm $y = f(x)$, các trục tọa độ và đường thẳng $x = x_0$ ($x_0 > 0$). Ông gọi các số gia vô cùng bé là mômăng. Ông xét mômăng diện tích oS khi x_0 tăng thêm một lượng vô cùng bé ký hiệu o . Ông tính tỷ số biến thiên tức thời của diện tích oS/o tại điểm có hoành độ x_0 và nhận thấy tỷ số này bằng $f(x_0)$. Kết quả này được phát biểu bằng ký hiệu hiện đại là $S'(x_0) = f(x_0)$.

Leibniz tìm ra phép tính vi tích phân năm 1685, phát triển nó một cách độc lập với Newton. Ông đã dùng tích phân để tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường khác bằng cách chia diện tích đó ra thành những hình chữ nhật vô cùng bé có chiều rộng dx và có chiều dài $f(x)$, sau đó cộng tất cả các diện tích hình chữ nhật nhỏ đó lại với nhau ta được diện tích của hình cần tính.

Như vậy dù không được định nghĩa tường minh nhưng trong quá trình xây dựng phép tính vi tích phân, các khái niệm mômãng, số gia vô cùng bé cũng đã xuất hiện. Kí hiệu dx chỉ lượng vô cùng bé của x cũng được Leibniz sử dụng trong quá trình xây dựng phép cầu phương. Đối với Leibniz dx là thừa số chỉ một kích thước của hình chữ nhật vô cùng bé, trong phép biến đổi hình dx chỉ sự tương đương giữa các hình tương tự với việc chỉ biến số lấy tích phân ngày nay, nó không phải là thừa số vi phân. Còn kí hiệu Δx chỉ số gia của những đại lượng biến thiên do nhà toán học Leonhard Euler (1707-1783) sáng tạo ra vào năm 1775.

Trong chương trình trung học phổ thông phép tính vi tích phân được trình bày có thể hiện được vai trò to lớn của nó trong toán học và trong vật lý không? Các kí hiệu Δx , dx có ý nghĩa giống và khác như thế nào so với lịch sử của nó? Chúng tôi sẽ tiến hành phân tích mối quan hệ thể chế với đối tượng Δx để làm rõ các vấn đề nêu trên.

2. Phân tích mối quan hệ thể chế với đối tượng tri thức Δx

Các môn học không phát triển một cách độc lập mà thường có mối quan hệ tác động qua lại hỗ trợ lẫn nhau. Trong đó có thể nói toán học và vật lý là hai môn học có nhiều ảnh hưởng đến nhau. Nhiều khái niệm trong toán học được định nghĩa, nghiên cứu và phát triển từ những quan sát hay hiện tượng xảy ra trong vật lý. Ngược lại, trong vật lý cũng sử dụng nhiều khái niệm, công thức, kí hiệu trong toán học vì nó đã được định nghĩa sẵn, dễ hiểu và ngắn gọn. Δx , dx cùng các khái niệm đạo hàm, vi phân xuất hiện trong cả toán học lẫn vật lý. Trong chương trình phổ thông, mặc dù các kí hiệu và khái niệm trên được xây dựng và định nghĩa chính thức trong toán học nhưng chúng lại xuất hiện trong vật lý sớm hơn. Vậy trong chương này chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ thể chế của Δx trong chương trình vật lý phổ thông xem trong vật lý Δx cùng các khái niệm liên quan được xây dựng và định nghĩa như thế nào? Bộ sách mà chúng tôi chọn để nghiên cứu trong chương này là bộ sách giáo khoa vật lý hiện hành ban cơ bản và ban nâng cao. Sau đó trong chương sau chúng tôi sẽ tiến hành nghiên cứu mối quan hệ thể chế của Δx trong chương trình toán học và so sánh chúng với nhau. Việc tìm hiểu và so sánh Δx trong toán và trong vật lý nói riêng hay các khái niệm kí hiệu được sử dụng trong nhiều bộ môn nói chung giúp cho giáo viên bộ môn toán trong khi giảng dạy các kiến thức đó có thể lưu ý, nhấn mạnh, mở rộng kiến thức, không chỉ đáp ứng

nhu cầu của bộ môn mà còn hỗ trợ cho các môn học khác, tăng cường tính liên môn giữa các môn học.

2.1. Δx trong bộ sách giáo khoa vật lý THPT chuẩn [C]

Trong chương trình vật lý lớp 10 ban cơ bản, những đại lượng có dạng Δx như Δs , Δt , Δv , ... được đưa vào khi học bài ***Chuyển động thẳng biến đổi đều*** cụ thể khi xét vận tốc tức thời.

Để có thể định nghĩa chính xác các đại lượng tức thời như vận tốc tức thời, gia tốc tức thời, ...ta phải dùng kiến thức giới hạn trong toán học. Nhưng vấn đề đặt ra là giới hạn được học trong toán học ở chương trình lớp 11 trong khi đó vận tốc tức thời, gia tốc tức thời, ...lại được học trong vật lý ngay từ đầu lớp 10. Như vậy ta xem [C] làm sao có thể đưa vào các đại lượng này mà không sử dụng đến kiến thức giới hạn.

Trong bài ***Chuyển động thẳng đều***, sách giáo khoa quan tâm đến thời gian chuyển động $t = t_2 - t_1$ và quãng đường đi được $s = x_2 - x_1$ trong khoảng thời gian t đó. Đến bài ***Chuyển động thẳng biến đổi đều***, sách giáo khoa viết: “[...] *Ta phải tìm xem trong khoảng thời gian rất ngắn Δt , xe dời được một đoạn đường rất ngắn Δs bằng bao nhiêu*”. Như vậy, sách giáo khoa cũng xem xét thời gian chuyển động và quãng đường đi được nhưng khi giá trị của chúng rất bé thì kí hiệu được sách giáo khoa thay đổi từ s , t thành $\Delta s = s - s_0$, $\Delta t = t - t_0$. Đến khi nói về gia tốc thì sách giáo khoa chỉ xét gia tốc của chuyển động thẳng biến đổi đều là đại lượng không thay đổi và $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, lúc này không nói rõ giá trị Δv , Δt như thế nào.

Chúng tôi giả định rằng trong trường hợp này, sách giáo khoa vẫn ngầm xem Δv , Δt là những đại lượng có giá trị rất bé mặc dù Δv , Δt có thể nhận giá trị tùy ý về mặt toán học.

Giả định của chúng tôi được khẳng định trong bài ***Chuyển động tròn đều***. Khi đề cập đến tốc độ dài và tốc độ góc, gia tốc hướng tâm Δs , Δv và Δt được xem xét cũng mang giá trị rất bé:

“*Gọi Δs là độ dài của cung tròn mà vật đi được từ điểm M đến điểm M' trong khoảng thời gian rất ngắn Δt . Khoảng thời gian này ngắn đến mức có thể coi cung tròn như một đoạn thẳng*”.

Như vậy trong sách vật lý 10 ban cơ bản, khái niệm *số gia* thông qua các ký hiệu hình thức Δs , Δt , Δv với giá trị rất bé, cho phép định nghĩa tạm thời các khái niệm *vận tốc tức*

thời, gia tốc mà không cần đến khái niệm giới hạn nhưng vẫn đảm bảo, trong một chừng mực nhất định, độ phù hợp với thực tế.

Bây giờ ta xem xét quan điểm Δx có giá trị rất bé này có được thống nhất trong toàn bộ sách của [C] hay không. Trong bài **Suất điện động cảm ứng** sách giáo khoa Vật lý 11 trong phần trình bày về định luật Fa-ra-đây

“Giả sử trong mạch kín (C) đặt trong một từ trường, từ thông qua mạch biến thiên một lượng $\Delta\Phi$ trong một khoảng thời gian Δt . Giả sử sự biến thiên từ thông này được thực hiện qua một dịch chuyển nào đó của mạch. Trong dịch chuyển này, lực từ tác dụng lên mạch (C) đã sinh ra một công ΔA . Người ta chứng minh được rằng

$$\Delta A = i\Delta\Phi$$

với i là cường độ dòng điện cảm ứng. Theo định luật Len-xơ, lực từ tác dụng lên mạch (C) luôn cản trở chuyển động tạo ra biến thiên từ thông. Do đó ΔA là một công cản. Vậy để thực hiện sự dịch chuyển của (C) (nhằm tạo ra sự biến thiên của Φ) phải có ngoại lực tác dụng lên (C) và trong chuyển dời nói trên, ngoại lực

$$\Delta A' = -\Delta A = -i\Delta\Phi$$

$$[...] \Delta A' = e_c i \Delta t$$

So sánh hai công thức của $\Delta A'$ ta suy ra công thức của suất điện động cảm ứng

$$e_c = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (24.3)''$$

ΔA , $\Delta\Phi$ lúc này tuy không được định nghĩa cụ thể nhưng nó dùng để chỉ lượng công và từ thông sinh ra trong khoảng thời gian Δt nên ta cũng ngầm hiểu nó là hiệu của hai đại lượng $\Delta A = A_1 - A_2$, $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$. Rõ ràng trong phần này các đại lượng chỉ số gia ΔA , $\Delta\Phi$, Δt không hàm ý là rất bé nữa mà có giá trị tùy ý. Như vậy quan điểm Δx có giá trị rất bé không được thống nhất trong toàn bộ sách [C]. Lúc đầu Δx được đưa vào như một giải pháp để giải quyết các vấn đề tức thời khi mà giới hạn chưa được giới thiệu do đó nó có giá trị rất bé. Sau đó khi không gặp các vấn đề tức thời nữa và công cụ giới hạn đã được giới thiệu thì Δx lại có giá trị tùy ý.

Trong bài **Phóng xạ** sách giáo khoa vật lý lớp 12 cụ thể trong phần định luật phóng xạ trang 190

“Ta xét một mẫu phóng xạ có N hạt nhân tại thời điểm t . Tại thời điểm $t + dt$, số hạt nhân đó giảm đi và trở thành $N + dN$ với $dN < 0$.

Số hạt nhân đã phân hủy trong khoảng thời gian dt là $-dN$; số này tỉ lệ với khoảng thời gian dt và cũng tỉ lệ với số hạt nhân N có trong mẫu phóng xạ:

$$dN = \lambda N dt$$

$$\dots \text{Vậy ta có } \frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Gọi N_0 là số hạt nhân của mẫu phóng xạ tồn tại vào lúc $t = 0$, muốn tìm số hạt nhân N vào lúc $t > 0$ ta phải tích phân phương trình trên (tích phân theo t từ 0 đến t):

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\int_0^t \lambda dt "$$

Thông thường sách giáo khoa dùng Δt để chỉ khoảng thời gian và ΔN để chỉ số hạt nhân phân rã trong khoảng thời gian Δt nhưng trong phần trình bày trên sách giáo khoa dùng kí hiệu dt để chỉ khoảng thời gian và $-dN$ để chỉ số hạt nhân phân rã trong khoảng thời gian đó. Bài **Phóng xạ** xuất hiện trong chương trình lớp 12 lúc này kí hiệu dx đã được giới thiệu trong toán học ở bài **Vi phân** lớp 11. Trong toán học thì $\Delta x = dx$ còn trong vật lý ta xem thử Δx và dx có mối quan hệ như thế nào? Khoảng thời gian trong phần trình bày trên không yêu cầu rất bé mà có thể nhận giá trị tùy ý. Tại sao sách giáo khoa không sử dụng các kí hiệu Δt , ΔN phải chăng ở đây đã có sự đồng nhất dt với Δt , dN với ΔN . Mặt khác việc sử dụng kí hiệu dt , dN thay cho Δt , ΔN và dùng tích phân để tính số hạt nhân cũng đã chuyển phạm vi nghiên cứu từ hữu hạn rời rạc sang liên tục.

Ta cũng bắt gặp kí hiệu dx trong chương III : **Dòng điện xoay chiều** sách giáo khoa vật lý lớp 12 cụ thể kí hiệu dx xuất hiện trong bài Đại cương về dòng điện xoay chiều trang 63 “Lúc $t > 0$, từ thông qua cuộn dây cho bởi $\Phi = NBS \cos \alpha = NBS \cos \omega t$ với N là số vòng dây và S là diện tích mỗi vòng Vì từ thông Φ qua cuộn dây biến thiên theo t nên trong cuộn dây xuất hiện suất điện động cảm ứng được tính theo định luật Fa-ra-đây

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin \omega t \quad (12.2) "$$

Φ là từ thông qua cuộn dây tại thời điểm t , tương ứng e là suất điện động cảm ứng tại thời điểm t . Đúng ra suất điện động cảm ứng trong công thức 12.2 phải được trình bày rõ ra là $e = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}) = -\Phi'(t) = NBS \sin \omega t$. Như vậy kí hiệu $\frac{d\Phi}{dt}$ trong công thức 12.2 dùng để chỉ đạo hàm của Φ theo biến t . Với cách trình bày đó, so sánh công thức (24.3) và (12.2) cùng là

định luật Fa-ra-đây về suất điện động cảm ứng suy ra $-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt}$ (khi khoảng thời gian Δt rất bé)ta thấy ở đây sách giáo khoa đã đồng nhất $\Delta\Phi$ với $d\Phi$, Δt với dt khi Δt rất bé.

Về giá trị dương âm của các đại lượng có dạng Δx thì có những đại lượng luôn mang giá trị dương như khoảng thời gian Δt , quãng đường đi được Δs , còn $\Delta v > 0$ nếu vật chuyển động nhanh dần đều và $\Delta v < 0$ nếu vật chuyển động chậm dần đều hay trong định luật phóng xạ nêu trên $\Delta N = dN < 0$. Như vậy Δx có giá trị dương âm tùy ý.

2.2. Δx trong bộ sách giáo khoa vật lý THPT nâng cao [N]

Trong chương trình vật lý lớp 10 ban nâng cao, Δx được đưa vào ngay khi học bài ***Vận tốc trong chuyển động thẳng, chuyển động thẳng đều*** và được “định nghĩa” là $\Delta x = x_2 - x_1$: giá trị đại số của vector độ dời, $\Delta t = t_2 - t_1$ là thời gian thực hiện độ dời. Mặc dù $\Delta x = x_2 - x_1$: giá trị đại số của vector độ dời nên có thể mang giá trị dương hoặc âm nhưng ví dụ minh họa $\Delta x = x_2 - x_1 = 6cm$ mang giá trị dương và bài tập 4 trang 17 sau bài học yêu cầu tính vận tốc tính vận tốc trung bình cho từng đoạn đường 10m đã cho bảng giá trị như sau:

$\Delta x(m)$	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
$\Delta t(s)$	8	8	10	10	12	12	12	14	14	14

Δx , Δt cho trong bảng là các số dương và không phải là giá trị bé (theo nghĩa thông thường). Tương tự, khi định nghĩa vận tốc trung bình $v_{tb} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ thì Δx , Δt cũng mang giá trị tùy ý.

Trong thực tế, phụ thuộc vào nhiều điều kiện khác nhau, chất điểm không bao giờ chuyển động thẳng đều và ta lại muốn biết độ nhanh chậm của chuyển động tại một thời điểm cụ thể. Khi đó ta xét vận tốc trung bình của chất điểm chuyển động thẳng trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ với Δt rất nhỏ, “nhỏ đến mức gần bằng 0”. Lúc này vận tốc trung bình đó đặc trưng cho độ nhanh chậm và chiều của chuyển động và được gọi tên là vận tốc tức thời tại thời điểm t : $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (khi Δt rất nhỏ, “nhỏ đến mức gần bằng 0”). “Vận tốc tức thời v tại thời điểm t đặc trưng cho chiều và độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm đó”. Đến bài “Chuyển động thẳng biến đổi đều” khi xét gia tốc của chuyển động thì gia tốc trung

bình $a_{tb} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, Δv , Δt cũng không yêu cầu phải rất bé. Nếu Δt trong công thức trên rất nhỏ thì ta được gia tốc tức thời.

Ta cũng nhận thấy rằng thực ra vận tốc tức thời của một chuyển động tại một điểm trên quỹ đạo phải là giới hạn của tỉ số $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ khi Δt tiến đến không, tức là đạo hàm của s theo t tại thời điểm mà ta đang xét. Tuy nhiên, khái niệm giới hạn và đạo hàm chưa được học trong chương trình toán ở lớp 10. Do đó sách giáo khoa chọn cách trình bày xem vận tốc tức thời là thương số của quãng đường rất ngắn đi qua điểm mà ta xét và khoảng thời gian rất ngắn để đi quãng đường đó.

Nếu trong toán học thường yêu cầu tính toán và cho ra kết quả đúng thì trong vật lý thường chấp nhận các tính toán với kết quả gần đúng. Do đó với cách trình bày này học sinh có thể nắm được ý nghĩa của các đại lượng mà vẫn tránh được các khái niệm giới hạn, đạo hàm chưa được giới thiệu. Đến chương trình lớp 12, ta lại bắt gặp kí hiệu Δx trong bài ***Chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định***. Lúc này, Δx không được định nghĩa là $x_2 - x_1$ như trên mà được giới thiệu như một đại lượng tùy ý, không phụ thuộc vào biến số.

“Ở thời điểm t , tọa độ góc của vật là φ . Ở thời điểm $t + \Delta t$ tọa độ góc của vật là $\varphi + \Delta\varphi$. Như vậy, trong khoảng thời gian Δt , góc quay của vật là $\Delta\varphi$

Tốc độ góc trung bình của vật rắn trong khoảng thời gian Δt : $\omega_{tb} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Tốc độ góc tức thời ở một thời điểm t được xác định bằng giới hạn của tỉ số $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ khi Δt tiến dần đến 0. Như vậy:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \text{ hay } \omega = \varphi'(t) \text{ ”}$$

Ở thời điểm này các khái niệm giới hạn, đạo hàm học sinh đã được học trong toán, do đó nó cũng được ứng dụng trong vật lý để có các khái niệm chính xác hơn về mặt khoa học.

Toán học chương trình trung học phổ thông 11 đạo hàm của hàm số $\varphi(t)$ kí hiệu là $\varphi'(t)$, kí hiệu đạo hàm $\frac{d\varphi}{dt}$ chỉ đạo hàm của hàm số φ theo biến t không được đưa vào. Do đó với cách trình bày $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$ hay $\omega = \varphi'(t)$ ta ngầm hiểu $d\varphi = \Delta\varphi$, $dt = \Delta t$ khi mà Δt

có giá trị rất bé. Khi đó $\frac{d\varphi}{dt}$ không hoàn toàn là kí hiệu mà còn có thể hiểu là một thương số.

Điều này được thể hiện trong bài **Momen động lượng - Định luật bảo toàn momen động lượng**

$$M = I \frac{d\omega}{dt}$$

Trong trường hợp momen quán tính I không đổi, ta có thể viết

$$M = \frac{d(I\omega)}{dt} \text{ „}$$

$$\text{Hay } F = ma = m \frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt} \text{ „}$$

Trong bài **Phóng xạ** trang 271:

$$\text{Số hạt nhân tại thời điểm } t: N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Độ phóng xạ đặc trưng cho tốc độ phóng xạ, được xác định bằng số hạt nhân phân rã trong một giây.

$$\text{Độ phóng xạ của một lượng chất phóng xạ: } H = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \text{ „}$$

Δt trong phần trình bày trên không hàm ý có giá trị vô cùng bé. Tuy nhiên $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ trong biểu thức trên lại là đạo hàm của $N(t)$. Như vậy sách giáo khoa đã viết $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ thay cho cách viết $\frac{dN}{dt}$ suy ra sách giáo khoa đã đồng nhất ΔN , Δt với dN , dt

3. Kết luận chương 1

Trong vật lý, Δx được đưa vào khi học cơ học nghiên cứu các chuyển động của chất điểm, Δx được dùng để chỉ số gia của một đại lượng nào đó và có thể được định nghĩa $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta x = x - x_0$

Trong vật lý Δx là một đại lượng có đơn vị.

Các môn học có mối tương quan hỗ trợ lẫn nhau, trong chương trình trung học phổ thông, một số đại lượng vật lý như vận tốc tức thời, gia tốc tức thời, ... để được định nghĩa chính xác cần sử dụng các khái niệm về giới hạn, đạo hàm trong toán học. Các khái niệm về giới hạn, đạo hàm các em học sinh được học trong chương trình lớp 11, trong khi đó các đại lượng vận tốc tức thời và gia tốc tức thời các em được học đầu năm lớp 10. Để giải quyết vấn đề này, cả hai bộ sách giáo khoa đều xét các tỉ số $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ khi mà giá trị của Δt vô cùng

bé. Như vậy ở đây ta thấy xuất hiện khái niệm “vô cùng bé”, “vô cùng bé” trong vật lý được hiểu theo nghĩa thông thường tức là giá trị đó rất bé, bé không đáng kể, bé đến mức gần bằng 0, cách hiểu này khác với “vô cùng bé” được định nghĩa chính xác trong toán học mà chúng tôi đã từng đề cập.

Mặc dù cả hai bộ sách đều xem xét các tỉ số $\frac{\Delta s}{\Delta t}, \frac{\Delta v}{\Delta t}$ khi mà giá trị của Δt vô cùng bé nhưng ta nhận thấy có sự khác nhau giữa hai bộ sách: trong [C] các kí hiệu $\Delta s, \Delta v, \Delta t$ được đưa vào để phục vụ cho các vấn đề tức thời như vận tốc tức thời, gia tốc tức thời... do đó ngay từ đầu các đại lượng đã được hiểu là có giá trị vô cùng bé. Tuy nhiên, về sau thì các đại lượng này lại mang giá trị tùy ý. Trong khi đó trong [N] các đại lượng $\Delta s, \Delta v, \Delta t$ từ đầu đã có giá trị tùy ý và nó chỉ có giá trị vô cùng bé khi được chỉ rõ mà thôi.

Trong vật lý thường dùng các kí $\frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{ds}{dt}$ để chỉ đạo hàm thay vì sử dụng các kí hiệu $x'(t), v'(t), s'(t)$. Theo chúng tôi là do các đại lượng vật lý có đơn vị, cách biểu diễn này giúp ta thấy được đơn vị của chúng, hơn nữa với cách ghi $\frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{ds}{dt}$ chúng cũng có thể được xử lý như thương số.

Chưa có sự thống nhất trong mối quan hệ giữa dx và Δx : đôi khi được xem là Δx nhưng cũng có lúc dx chỉ đồng nhất với Δx khi Δx có giá trị rất bé.

CHƯƠNG II.

NGHIÊN CỨU VỀ Δx TRONG TOÁN HỌC

1. Phân tích mối quan hệ thể chế với đối tượng tri thức Δx

Trong chương này chúng tôi sẽ xem xét trong toán học Δx được đưa vào như thế nào, phục vụ cho những tri thức nào và một số khái niệm có liên quan đến Δx . Bộ sách mà chúng tôi chọn nghiên cứu trong chương này là Đại số và Giải tích 11 ban cơ bản và ban nâng cao, Giải tích 12 ban cơ bản và ban nâng cao của chương trình hiện hành.

1.1. Δx trong chương trình trung học phổ thông

1.1.1. Phần lý thuyết

Trước hết chúng tôi xem xét trong chương trình toán ở trường trung học và nhận thấy Δx bắt đầu xuất hiện khi học sinh được học khái niệm đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Để đưa vào định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm, cả hai bộ sách giáo khoa Đại số và Giải tích 11 cơ bản và nâng cao đều giới thiệu bài toán vật lý liên quan đến chuyển động của một vật, trong đó quan tâm đến vận tốc trung bình của vật: “*Hoạt động 1: Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường s (m) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (phút). Ở những phút đầu tiên, hàm số đó là $s = t^2$. Hãy tính vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng $[t_0; t]$ với $t_0 = 3$, $t = 2$; $t = 2,5$; $t = 2,9$; $t = 2,99$. Nêu những nhận xét về kết quả thu được khi t càng gần $t_0 = 3$* ” (SGK 11 CB). Vấn đề đặt ra vật chỉ chuyển động thẳng đều trong những điều kiện lý tưởng của thí nghiệm, trong thực tế vật thường không chuyển động thẳng đều, mà ta lại quan tâm đến vận tốc của vật tại một thời điểm t_0 nào đó, vậy làm sao để tính được vận tốc của vật tại thời điểm t_0 cần khảo sát. Qua hoạt động 1 được nêu ra đầu bài, học sinh sẽ nhận thấy vận tốc trung bình của đoàn tàu $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ càng gần với vận tốc của đoàn tàu ở thời điểm t_0 nếu khoảng thời gian

xem xét càng nhỏ. Như vậy, dẫn đến nhu cầu tính $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$. Trong nhiều bài toán vật lý

và hóa học khác cũng dẫn đến việc phải tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ từ đó đưa ra khái niệm đạo hàm.

Định nghĩa đạo hàm:

“Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in$ khoảng $(a;b)$.

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của

hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (1) ”

Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của đối số tại điểm x_0

Đại lượng $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia của hàm số ứng với số gia Δx tại điểm x_0 . Như vậy :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2)$$

Nêu quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa theo công thức (2)

Điểm khác biệt giữa hai bộ sách CB và NC trong phần này là bộ sách nâng cao có thêm phần chú ý về Δx :

“Số Δx không nhất thiết chỉ mang dấu dương

Δx và Δy là những kí hiệu không nên nhầm lẫn rằng : Δx là tích của Δ với x , Δy là tích của Δ với y ”

Trong định nghĩa hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$ như vậy x là một đại lượng bất kì nằm trong khoảng $(a; b)$. Từ đó khi đặt $\Delta x = x - x_0$ thì Δx phải là một đại lượng có giá trị tùy ý miễn sao cho $x_0 + \Delta x$ thuộc vào khoảng $(a; b)$ đang xét. Theo định nghĩa được đưa ra như trên, để tính đạo hàm ta có thể sử dụng một trong hai công thức (1) hoặc (2).

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2$ tại $x_0 = 2$.

$f(2) = 4$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$ Vậy $f'(2) = 4$.	Đặt $f(x) = x^2$ $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ $= (2 + \Delta x)^2 - 2^2 = \Delta x(4 + \Delta x)$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4$ Vậy $f'(2) = 4$.
--	---

Với công thức $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ việc tính đạo hàm được đưa về việc tính giới hạn

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, đây là bài toán giới hạn quen thuộc đã được học sinh tiếp xúc và tính toán

thường xuyên trong bài **Giới hạn hàm số** đã được học trước đó. Còn việc tính đạo hàm bằng

cách sử dụng công thức $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ là một công việc không đơn giản đối với học sinh. Vì

các kí hiệu Δx , Δy là các kí hiệu tương đối lạ đối với học sinh, sử dụng công thức này để tính đạo hàm học sinh khó hình dung ra sự di chuyển của x đến x_0 khi $\Delta x \rightarrow 0$. Hơn nữa, tính đạo hàm bằng định nghĩa chỉ được áp dụng trong bài đầu tiên của chương Đạo hàm, sau đó các em chủ yếu vận dụng các công thức và qui tắc để tính đạo hàm. Do đó trong chương trình phổ thông khi dạy cách tính đạo hàm bằng định nghĩa nhiều giáo viên hướng dẫn học sinh tính theo công thức $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ bỏ qua việc giới thiệu các kí hiệu Δx , Δy . Như

vậy thì tại sao cả hai bộ sách cơ bản và nâng cao đều nêu qui tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa thông qua công thức có chứa Δx , Δy ? Theo chúng tôi một phần là do khái niệm đạo hàm được xây dựng trong chương trình phổ thông xuất phát từ bài toán vật lý là tìm vận tốc tức thời của chuyển động hay tìm cường độ dòng điện tức thời. Bài toán này học sinh đã gặp trong chương trình vật lý năm lớp 10 như ta đã phân tích trong chương 1. Khi đó kí hiệu Δx cũng đã được giới thiệu như một giải pháp thay thế cho kiến thức giới hạn học sinh chưa được học. Các môn học có sự tương tác qua lại, do đó khi gặp lại vấn đề này trong toán học, sách giáo khoa sử dụng lại kí hiệu Δx đã được giới thiệu trước đó trong vật lý. Các kí hiệu Δx , Δy , các khái niệm số gia của biến số, số gia của hàm số đến thời điểm này mới được định nghĩa chính thức. Như vậy việc đưa vào các kí hiệu Δx , Δy giúp thu gọn cách viết, các kí hiệu này được gọi tên là số gia của biến số tại điểm x_0 , số gia của hàm số ứng với số gia Δx tại điểm x_0 và được “định nghĩa” bằng cách qui ước:

$$\Delta x = x - x_0; \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Cách định nghĩa Δx này cũng thống nhất với Δx đã được giới thiệu trước đó trong vật lý.

Như đã phân tích ở trên, việc đưa vào các kí hiệu Δx , Δy ít nhiều gây khó khăn cho học sinh và hoàn toàn có thể tính đạo hàm bằng định nghĩa mà không phải sử dụng các kí hiệu này. Vậy ngoài việc thu gọn cách viết, Δx được đưa vào còn nhằm vào mục đích nào khác nữa không? Sau khi học xong đạo hàm, học sinh được học khái niệm vi phân là một khái niệm quan trọng trong toán học. Định nghĩa vi phân có sử dụng kí hiệu số gia Δx , do đó việc giới thiệu Δx trước đó là cần thiết. Hơn nữa, ví dụ mở đầu được giới thiệu trước khi học khái niệm đạo hàm cho thấy ta quan tâm đến vận tốc của vật tại một thời điểm x_0 cụ thể. Bài

Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm cũng đặt ra và yêu cầu tính toán tại một điểm x_0 cụ thể. Do đó, khi đặt $\Delta x = x - x_0$ suy ra $x = x_0 + \Delta x$ hay $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ta dễ dàng biểu diễn các đại lượng khác qua đại lượng x_0 cần quan tâm. Từ đó khi chuyển đổi tượng cần quan tâm là một đại lượng x_0 cụ thể sang một x tùy ý thì $x - x_0, f(x) - f(x_0)$ tương ứng sẽ chuyển thành $(x + \Delta x) - x$ và $f(x + \Delta x) - f(x)$ mà không cần đặt thêm đại lượng mới học sinh vẫn có thể tiếp nhận được một cách dễ dàng. Hơn nữa, từ những bài toán thực tế và vật lý dẫn đến khái niệm đạo hàm của hàm số tại một điểm x_0 ta thường quan tâm đến những giá trị x mà $|x - x_0|$ rất nhỏ nên việc sử dụng kí hiệu Δx với $|\Delta x|$ rất bé cho phép ta biểu diễn $x_0 + \Delta x$ là đại lượng rất gần với x_0 , nằm trong lân cận của điểm x_0 hay mở rộng ra $x + \Delta x$ là đại lượng rất gần với x . Với cách định nghĩa $\Delta x = x - x_0$ như sách giáo khoa đưa vào cùng với ý nghĩa của bài toán đặt ra nhằm giới thiệu khái niệm đạo hàm, học sinh có thể tiếp nhận khái niệm một cách tự nhiên, dễ hiểu. Nhưng cách định nghĩa đó dễ làm cho học sinh nhầm lẫn Δx là một đại lượng phụ thuộc lệ thuộc vào x và x_0 .

Ở trang 189 (SGK 11 NC), khi tính đạo hàm của hàm số $y = x^3$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, sách giáo khoa đã sử dụng một cách viết Δy hoàn toàn khác với “định nghĩa qui ước” đã nêu. Thay vì viết $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3$ (với x_0 là một số thực tùy ý), sau đó áp dụng qui tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 tùy ý từ đó suy ra đạo hàm của hàm số $y = x^3$, sách giáo khoa viết $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3$. Và ta cũng nhận thấy, từ lúc này trở đi, sách giáo khoa luôn theo cách viết này để xây dựng công thức tính đạo hàm của một số hàm số thường gặp. Về mặt bản chất, Δy trong cách viết sau chính là số gia của hàm số tại điểm x ứng với số gia Δx ; x đã thay thế vai trò của x_0 và do đó Δx không còn là $x - x_0$ nữa. Ở đây đã có một bước chuyển trong yêu cầu nhận thức, từ Δx là số gia của biến số tại một điểm x_0 cụ thể sang Δx là số gia của biến số tại một điểm x tùy ý. Khi đó Δx được hiểu là $x' - x$ và tương ứng Δy sẽ là $f(x') - f(x)$, tức là khi biến số x biến thiên một lượng $x' - x$ thì ta sẽ xem xét hàm số $y = f(x)$ sẽ biến thiên một lượng $f(x') - f(x)$ như thế nào so với lượng biến thiên của x . Như vậy việc sử dụng kí hiệu Δx giúp cho việc chuyển từ tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 đã biết giá trị sang xây dựng công thức tính đạo hàm của hàm số tại một điểm x tùy ý dễ hiểu và gọn gàng. Thật vậy, sau bài khái niệm đạo hàm, học sinh học các qui tắc tính đạo hàm, công thức tính đạo hàm của một số hàm số. Chúng tôi nhận thấy tất cả các công

thức và quy tắc tính đạo hàm được xây dựng và chứng minh trong sách giáo khoa đều sử dụng công thức $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ chứ không sử dụng công thức $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Trong chương 1 ngoài kí hiệu Δx dùng để chỉ số gia của một đại lượng biến thiên nào đó, đôi khi dx cũng được sử dụng thay thế cho Δx . Không như Δx được sử dụng trước trong vật lý rồi mới được giới thiệu chính thức trong toán học, dx sử dụng trong vật lý trên cơ sở đã được giới thiệu trong toán học ở bài Vi phân. Do đó bây giờ ta xem xét khái niệm vi phân được xây dựng trong toán học như thế nào, mối liên hệ giữa Δx và dx được thiết lập chính thức ra sao?

Sách giáo khoa 11 cơ bản nêu hoạt động 1 “ Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$ và $\Delta x = 0,01$. Tính $f'(x_0)\Delta x$ ”. Sau hoạt động 1 sách giáo khoa nêu định nghĩa vi phân của hàm số “ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a;b)$. Giả sử Δx là số gia của x . Ta gọi tích $f'(x) \Delta x$ là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx , kí hiệu là $df(x)$ hoặc dy

$$dy = df(x) = f'(x) \Delta x$$

Áp dụng định nghĩa trên vào hàm số $y = x$, ta có

$$dx = (x')\Delta x = \Delta x$$

Do đó $dy = df(x) = f'(x) dx$ ”

Sau đó là ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Với $|\Delta x|$ đủ nhỏ thì $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x_0)$ hay $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$

Từ đó suy ra $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ hay $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Sách giáo khoa 11 nâng cao đưa vào khái niệm vi phân theo trình tự như sau:

Nêu bài toán dẫn dắt: Với $|\Delta x|$ đủ nhỏ thì $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x_0)$ hay $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$

Định nghĩa vi phân của hàm số tại một điểm: $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$

Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng

Định nghĩa vi phân của hàm số

Qua cách trình bày của hai bộ sách chúng tôi rút ra một số nhận xét như sau:

- Sách giáo khoa 11 chuẩn đưa vào khái niệm vi phân tương đối nhẹ nhàng. Học sinh chưa thấy được mối liên hệ giữa phép tính gần đúng và vi phân.

- Sách giáo khoa 11 nâng cao cố gắng giúp các em thấy được cơ sở của việc đưa vào khái niệm vi phân. Phép tính gần đúng là dựa vào vi phân của hàm số tại một điểm x_0 , do đó sách giáo khoa định nghĩa vi phân của hàm số tại một điểm sau đó mới định nghĩa vi phân của hàm số.

- Vi phân của hàm số tại một điểm là đại lượng phụ thuộc tuyến tính vào Δx , vi phân của hàm số f là đại lượng phụ thuộc vào cả x lẫn Δx , nhưng kí hiệu $df(x_0)$, $df(x)$ không thể hiện được đặc điểm này.

- Kí hiệu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trước đó được kí hiệu là $f'(x)$. Trong vật lý thường hay sử dụng kí hiệu $\frac{df}{dx}$ để chỉ đạo hàm của hàm f theo biến x nhưng sau khi học bài vi phân, cả hai quyển sách cơ bản và nâng cao đều không giới thiệu kí hiệu này. Như vậy việc sách giáo khoa vật lý sử dụng kí hiệu $\frac{df}{dx}$ để chỉ đạo hàm càng khẳng định rằng sách giáo khoa đã xem $\frac{df}{dx}$ như một thương số được suy ra từ công thức vi phân $dy = df(x) = f'(x) dx$

Sau định nghĩa vi phân sách giáo khoa quan tâm đến việc ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng. Trước đây, người ta dùng công thức tính gần đúng $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ (*) như một công cụ để lập các bảng tính gần đúng. Ngày nay, với công cụ máy tính bỏ túi đã phổ biến đối với học sinh, việc sử dụng máy tính để tính gần đúng sẽ hiệu quả hơn rất nhiều. Ví dụ : Tìm giá trị gần đúng của $\sqrt{0,996}$. Với công cụ máy tính bỏ túi, học sinh dễ dàng có được kết quả $\sqrt{0,996} \approx 0,998$. Nếu sử dụng công thức tính gần đúng (*) học sinh sẽ làm như sau:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ đặt } x_0 = 1 \text{ và } \Delta x = -0,004$$

$$\sqrt{0,996} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot (-0,004) \approx 1 - \frac{0,004}{2} = 0,998 \text{ Các bước tính toán dài hơn, trong quá trình}$$

trên học sinh vẫn dùng máy tính để thực hiện các phép cộng, trừ, nhân, chia (trên nguyên tắc vẫn tính được nếu không sử dụng máy tính). Hơn nữa, sau khi đưa vào định nghĩa vi phân và ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng, ví dụ 2: Tính giá trị gần đúng của $\sin 30^\circ 30'$ được đưa ra áp dụng kết quả của phép tính gần đúng nhờ vi phân cùng với nhận xét “ Nếu dùng máy tính bỏ túi, ta tính được $\sin 30^\circ 30' \approx 0,5075$. So sánh với kết quả trên, ta thấy việc áp

dụng công thức (*) cho kết quả khá chính xác”. Nhận xét được đưa ra nhằm để khẳng định độ tin cậy của công thức (*), tuy nhiên học sinh cũng nhận thấy để tính giá trị gần đúng các em có thể sử dụng máy tính bỏ túi, kết quả vừa chính xác vừa nhanh chóng hơn. Do đó các em chỉ dùng công thức trên để tính gần đúng khi có yêu cầu của đề bài chứ không phải do yêu cầu của nội tại bài toán. Việc giới thiệu công thức (*) nhằm cho học sinh thấy, trước khi có công cụ máy tính, người ta vẫn tính được cách giá trị gần đúng của một hàm số tại một điểm, cho học sinh hiểu thêm về lịch sử toán cũng như quá trình tìm tòi, sáng tạo ra các công thức, công cụ hiện đại để ngày nay các em sử dụng một cách thuận tiện là một quá trình lâu dài và đầy gian khó. Vì vậy, ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng chỉ được giới thiệu qua và giáo viên cho học sinh áp dụng vào một đến hai ví dụ để học sinh hiểu công thức chứ nó không được chú trọng. Thật vậy, khái niệm vi phân định nghĩa dựa vào khái niệm đạo hàm : $df(x) = f'(x)dx$ hay $dy = y'dx$ nên sau khi học sinh được học về định nghĩa đạo hàm và cách tính đạo hàm của một số hàm sơ cấp thì việc đưa vào khái niệm vi phân là hợp lý. Tuy nhiên, vi phân chỉ được giới thiệu qua để học sinh nắm được khái niệm và kí hiệu chứ chưa ứng dụng nhiều vào trong bài tập. Sang đến học kì hai năm lớp 12, học sinh mới gặp lại khái niệm này khi học chương NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG. Lúc này, vi phân chỉ xuất hiện như một kí hiệu và học sinh chủ yếu làm việc với các phương pháp tính tích phân. Do đó có thể nói, vi phân được đưa vào “chủ yếu để có kí hiệu sử dụng sau này” (sách hướng dẫn giáo viên), chứ học sinh chưa thấy được vai trò, ý nghĩa thực sự của vi phân. Bốn bài toán dẫn đến sự ra đời của phép tính vi tích phân cũng được khai thác như tìm vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chuyển động trong vật lý lớp 10, tiếp tuyến của đường cong, độ dài đường cong, diện tích hình phẳng, ... hay tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một hàm số được trình bày trong phần Ứng dụng đạo hàm trong chương trình toán lớp 12. Tuy nhiên những phần này học sinh thiên về vận dụng các công thức, qui tắc đã được nêu thành phương pháp chứ không quan tâm đến ý nghĩa của nó, do đó Δx cũng không xuất hiện.

1.1.2. Phần bài tập

Các tổ chức toán học liên quan đến Δx trong SGK11, SGKNC11

- **Kiểu nhiệm vụ T₁:** “Tìm số gia của hàm số khi biết số gia của đối số”

Kĩ thuật τ_1 :

- Cho x_0 và Δx là số gia của đối số tại x_0 , tính $f(x_0 + \Delta x), f(x_0)$
- Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Công nghệ Θ_1 : công thức tính số gia của hàm số ứng với số gia Δx tại điểm x_0 : $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Lý thuyết Θ_1 : giới hạn hàm số

Bài tập 1[SGKC11 trang 156]

Tìm số gia của hàm số $f(x) = x^3$, biết rằng:

- a) $x_0 = 1$; $\Delta x = 1$
- b) $x_0 = 1$; $\Delta x = -0,1$

Bài tập 1[SGKNC11 trang 192]

Tìm số gia của hàm số $y = x^2 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ ứng với số gia Δx , biết

- a) $\Delta x = 1$
- b) $\Delta x = -0,1$

Nhận xét:

Với hàm số $f(x)$ đã biết, x_0 và Δx đã được cho trước việc tìm số gia của hàm số là bài toán khá đơn giản. Sách giáo khoa 11 cơ bản còn có bài tập yêu cầu tính $\Delta y, \frac{\Delta y}{\Delta x}$ theo x và Δx biết phương trình của hàm số $f(x)$. Đây là các bài toán dẫn dắt để học sinh có thể tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 bằng định nghĩa bằng cách sử dụng công thức $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kiểu nhiệm vụ con của T_1 :

➤ **Kiểu nhiệm vụ con T_{1a} :** “Tìm vận tốc trung bình của chuyển động có phương trình $s = s(t)$ trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ ”

Bài tập 7 [SGK C11 trang 157]

Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường

Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5\text{s}$) đến $t + \Delta t$, trong các trường hợp $\Delta t = 0,1\text{s}$; $\Delta t = 0,05\text{s}$; $\Delta t = 0,001\text{s}$

• **Kiểu nhiệm vụ T_2 :** “Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa”

Kĩ thuật τ_2 :

- Cho x_0 , giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0 , tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

- Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Tìm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Khi đó $y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Kĩ thuật τ'_2 :

- Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ là một hằng số thì hằng số đó là đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 .

Nếu giới hạn trên không tồn tại thì hàm số không có đạo hàm tại điểm x_0 .

Công nghệ θ_2 : định nghĩa đạo hàm

“Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in$ khoảng $(a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ , , (1)}$$

Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của đối số tại điểm x_0

Đại lượng $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia của hàm số ứng với số gia Δx tại điểm x_0 . Như vậy :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ . (2)}$$

Lý thuyết Θ_2 : giới hạn hàm số

Ví dụ 1[SGKC11, trang 149]

Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ tại điểm $x_0 = 2$

Lời giải của SGK:

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 2$. Ta có:

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = -\frac{\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2(2 + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{1}{2(2 + \Delta x)} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } f'(2) = -\frac{1}{4}$$

Nhận xét:

Ví dụ trên được đưa ra ngay sau khi nêu qui tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa. Trong ví dụ này SGK đã tính đạo hàm của hàm số đã cho dựa vào giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Mặc dù kiểu nhiệm vụ T_2 có thể giải quyết bằng kỹ thuật τ'_2 nhưng các ví dụ và bài tập tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 trong cả hai bộ sách cơ bản và nâng cao đều sử dụng kỹ thuật τ_2 .

Tuy nhiên theo chúng tôi học sinh có thể không sử dụng công thức $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ mà sử dụng công thức $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ để tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa nếu giáo viên không áp đặt mà hướng dẫn các em sử dụng cả hai công thức trên vì sử dụng công thức $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ việc tính đạo hàm sẽ quen thuộc hơn với các em.

Các kiểu nhiệm vụ con của T_2 :

➤ **Kiểu nhiệm vụ con T_{2a} :** “Chứng minh hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 ”

Bài tập 4 [SGKC11 trang 156] :

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2; & x \geq 0 \\ -x^2; & x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

Lời giải SGK trang 160:

Ta có:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x=2$ và $f'(2) = 2$

➤ **Kiểu nhiệm vụ con T_{2b} :** “Tìm vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chuyển động có phương trình $s = s(t)$ tại thời điểm $t = t_0$ ”

Bài 8. [SGKC11, tr.177]

Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t$

(t được tính bằng giây, s được tính bằng mét).

a) Tính vận tốc của chuyển động tại $t = 2s$

b) Tính gia tốc của chuyển động tại $t = 3s$

➤ **Kiểu nhiệm vụ T_{3a}** : “ Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong có phương trình $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x_o ”

Kĩ thuật τ_{3a} :

- Tính $f'(x_o)$.
- Tính $f(x_o)$.
- Phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

➤ **Kiểu nhiệm vụ T_{3b}** : “ Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong có phương trình $y = f(x)$ biết hệ số góc k của tiếp tuyến”

Kĩ thuật τ_{3b} :

- Tính $f'(x_o)$ theo x_o .
- Giải $f'(x_o) = k$ tìm x_o .
- Tính $f(x_o)$.
- Phương trình tiếp tuyến: $y = k(x - x_o) + f(x_o)$

➤ **Kiểu nhiệm vụ T_{3c}** : “ Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong có phương trình $y = f(x)$ biết tung độ y_o của tiếp điểm”

Kĩ thuật τ_{3b} :

- Giải $f(x_o) = y_o$ tìm x_o .
- Tính $f'(x_o)$.
- Phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_o)(x - x_o) + y_o$

Công nghệ θ_3 : định lý 2, 3 về ý nghĩa hình học của đạo hàm

Lý thuyết Θ_3 : giới hạn hàm số

Bài tập 5 [SGKNC11 trang 192]

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ biết:

- Tiếp điểm có hoành độ bằng -1.
- Tiếp điểm có tung độ bằng 8.
- Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3

Nhận xét:

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số được giới thiệu trong phần ý nghĩa hình học của đạo hàm. Lúc này học sinh chưa được học các công thức và qui tắc tính đạo hàm, do đó để tính đạo hàm của hàm số tại một điểm học sinh phải dùng công thức định nghĩa.

• **Kiểu nhiệm vụ T_{4a}** : “Tính vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ứng với Δx đã biết”

Kĩ thuật τ_{4a} :

- Dùng các công thức tính đạo hàm để tính đạo hàm $y' = f'(x)$
- Sử dụng công thức $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$

Công nghệ θ_{4a} : định nghĩa vi phân của hàm số tại một điểm

Lý thuyết Θ_{4a} : giới hạn hàm số

H1 [SGKNC11 trang 214]

Tính vi phân của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với Δx lần lượt bằng 0,2 và 0,02 (làm tròn kết quả đến hàng 10^{-3})

Hướng dẫn giải trong SGK:

$$df(2) = -\frac{\Delta x}{18\sqrt{2}}$$

Nếu lấy $\Delta x = 0,2$ thì $df(2) = -\frac{0,1}{9\sqrt{2}} \approx -0,00786$ (chính xác đến 10^{-5})

Nếu lấy $\Delta x = 0,02$ thì $df(2) = -\frac{0,01}{9\sqrt{2}} \approx -0,00079$ (chính xác đến 10^{-5})

Nhận xét:

Kiểu nhiệm vụ này nhằm lưu ý học sinh rằng vi phân của hàm số tại một điểm là đại lượng phụ thuộc vào Δx

• **Kiểu nhiệm vụ T_{4b}** : “Tìm vi phân của hàm số $y = f(x)$ ”

Kĩ thuật τ_{4b} :

- Dùng các công thức tính đạo hàm để tính đạo hàm $y' = f'(x)$
- Sử dụng công thức $df(x) = f'(x) dx$

Công nghệ θ_{4b} : định nghĩa vi phân

Lý thuyết Θ_{4b} : giới hạn hàm số

Ví dụ 1: [SGKC11 trang 170]

Tìm vi phân của hàm số

a) $y = x^3 - 5x + 1$

b) $y = \sin^3 x$

Lời giải của SGK:

a) $y = x^3 - 5x + 1, y' = 3x^2 - 5$

Vậy $dy = d(x^3 - 5x + 1) = y' dx = (3x^2 - 5) dx$

b) $y = \sin^3 x, y' = 3\sin^2 x \cos x$

Vậy $dy = d(\sin^3 x) = y' dx = 3\sin^2 x \cos x dx$

- **Kiểu nhiệm vụ T₅:** “Tính gần đúng một giá trị”

Kĩ thuật τ_5 :

- Chọn $f(x), x_0, \Delta x$ phù hợp.
- Sử dụng công thức tính gần đúng $f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ (*)

Công nghệ θ_5 : định nghĩa vi phân

Lý thuyết Θ_5 : giới hạn hàm số

Ví dụ 2: [SGKC11 trang 171]

Tính giá trị gần đúng của $\sqrt{3,99}$

Lời giải của SGK:

Đặt $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Theo công thức tính gần đúng, với $C = 4, \Delta x = -0,01$ ta có

$$f(3,99) = f(4 - 0,01) \approx f(4) + f'(4)(-0,01)$$

$$\text{Tức là } \sqrt{3,99} = \sqrt{4 - 0,01} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (-0,01) = 1,9975$$

Nhận xét:

- Trong sách giáo khoa chuẩn chỉ có một ví dụ minh họa cho công thức tính gần đúng nhờ vi phân, không có bài tập nào thuộc kiểu nhiệm vụ này. Tức là việc chọn x_0 và Δx như thế nào cho phù hợp chưa được SGK đề cập đến.

- Vấn đề sai số mắc phải trong công thức này cũng không được đề cập. Do đó SGK nâng cao sau khi áp dụng công thức (*) để tính gần đúng đã yêu cầu so sánh kết quả tìm được với kết quả cho bởi máy tính bỏ túi. Cũng từ đó học sinh cũng nhận thấy để tính giá trị gần đúng các em có thể sử dụng máy tính bỏ túi, kết quả vừa chính xác vừa nhanh chóng

hơn. Do đó các em chỉ dùng công thức trên để tính gần đúng khi có yêu cầu của đề bài chứ không phải do yêu cầu của nội tại bài toán.

Bảng thống kê các kiểu nhiệm vụ liên quan đến Δx trong hai bộ sách giáo khoa lớp 11 chuẩn SGK11 và nâng cao SGKNC11

Bộ sách giáo khoa chuẩn 11:

Kiểu nhiệm vụ	Ví dụ và hoạt động	Bài tập SGK	Bài tập SBT	Tổng số bài tập
T1	1	2	0	3
T2	3	2	5	10
T3	1	2	1	4
T4a	1	0	1	2
T4b	1	2	6	9
T5	1	0	1	2
Tổng	8	8	14	30

Bộ sách giáo khoa nâng cao 11:

Kiểu nhiệm vụ	Ví dụ và hoạt động	Bài tập SGK	Bài tập SBT	Tổng số bài tập
T1	1	3	0	4
T2	1	4	1	6
T3	1	1	0	2
T4a	2	1	2	5
T4b	2	2	1	5
T5	1	2	1	4
Tổng	8	13	5	26

Nhận xét về các kiểu nhiệm vụ:

Nhìn chung thì trong cả hai bộ sách cơ bản và nâng cao các ví dụ, hoạt động và bài tập có sử dụng kí hiệu Δx , dx có số lượng tương đối ít. Khi học về đạo hàm học sinh chủ yếu sử dụng các công thức và qui tắc để tính đạo hàm trong khi đó Δx chỉ xuất hiện trong dạng bài tập liên quan đến việc tính đạo hàm bằng định nghĩa.

Kiểu nhiệm vụ T₁(Tìm số gia của hàm số khi biết số gia của đối số) và kiểu nhiệm vụ con (tính vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$): đây là

kiểu nhiệm vụ dẫn dắt nhằm giúp học sinh làm quen với các kí hiệu Δy , Δx và sử dụng công thức $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ để tính đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Kiểu nhiệm vụ T_2 (Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa) và các kiểu nhiệm vụ con: mặc dù có hai kĩ thuật τ_2 và τ'_2 để giải quyết kiểu nhiệm vụ này và việc sử dụng kĩ thuật τ'_2 thì bài toán tính đạo hàm sẽ được đưa về bài toán tính giới hạn quen thuộc mà học sinh đã được học trước đó nhưng cả hai bộ sách đều nêu qui tắc tính đạo hàm theo kĩ thuật τ_2 và các bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ này đều được SGK và SBT giải theo kĩ thuật τ_2 . Tuy nhiên theo kết quả thực nghiệm trong luận văn thạc sĩ “Một nghiên cứu didactic về khái niệm đạo hàm trong lớp 11 phổ thông” của Lê Anh Tuấn (2009) thì “*khi tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa việc tính $y'(x_0)$ bằng công thức $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ chiếm ưu thế so với việc tính $y'(x_0)$ bằng công thức $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$* ”.

Kiểu nhiệm vụ T_2 và các kiểu nhiệm vụ con có số lượng bài tập rất ít so với kiểu bài tập tính đạo hàm bằng công thức. Do đó đối với học sinh việc tính đạo hàm bằng định nghĩa rất ít khi được sử dụng mà khi tính đạo hàm thì các em chủ yếu sử dụng các công thức và qui tắc tính đạo hàm. Mối quan hệ giữa giới hạn và đạo hàm cũng không được các em quan tâm nên các em sử dụng các kí hiệu Δx , Δy một cách máy móc chứ không quan tâm đến bản chất, ý nghĩa của chúng.

Kiểu nhiệm vụ T_3 được giới thiệu trong phần ý nghĩa hình học của đạo hàm. Δx xuất hiện trong kiểu nhiệm vụ này để tính $f'(x_0)$ vì lúc này các qui tắc và công thức tính đạo hàm chưa được giới thiệu.

Kiểu nhiệm vụ T_{4a} (Tính vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ứng với Δx đã biết):

Sách giáo khoa cơ bản không định nghĩa vi phân của hàm số tại một điểm do đó không có bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ này mà chỉ có hoạt động 1 yêu cầu tính $f'(x_0)\Delta x$ với $f(x)$ cho trước, x_0 và Δx đã biết trước khi học định nghĩa vi phân của hàm số. Hoạt động này nhằm giúp học sinh hiểu vi phân là đại lượng phụ thuộc vào cả x và Δx mà kí hiệu vi phân $df(x_0)$ chưa thể hiện được.

Sách giáo khoa nâng cao có 5 bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ này vừa có mục đích như trên vừa giúp cho học sinh so sánh và nhận ra ý nghĩa của việc ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng.

Kiểu nhiệm vụ T_5 (Tính gần đúng một giá trị)

Trong sách giáo khoa cơ bản chỉ có hai bài thuộc kiểu nhiệm vụ này : một ví dụ và một trong sách bài tập. Học sinh chưa thấy được mối liên hệ giữa vi phân và việc tính gần đúng một giá trị, cách chọn x_0 và Δx không được nêu rõ ràng. Còn sách giáo khoa nâng cao cố gắng xây dựng để các em thấy được mối liên hệ giữa vi phân và việc tính gần đúng. Các bài tập được cho có bài hướng dẫn cách đặt Δx , x_0 có bài không hướng dẫn mà để các em tự xây dựng $f(x)$ và chọn Δx , x_0 phù hợp.

Nhìn chung, lượng bài tập về tính gần đúng không nhiều. Việc tính gần đúng nhờ vi phân phải sử dụng công thức phức tạp mà lại không biết sai số mắc phải là bao nhiêu trong khi đó chỉ cần sử dụng máy tính là có ngay kết quả. Do đó, việc tính gần đúng nhờ vi phân tỏ ra không thiết thực đối với học sinh và cũng chưa được thể chế quan tâm. Việc đưa vào khái niệm vi phân chỉ nhằm mục đích giới thiệu các kí hiệu dx , dy phục vụ cho chương Nguyên hàm và Tích phân mà các em sẽ được học ở chương trình lớp 12.

Nhận xét về các giá trị Δx :

Trong kiểu nhiệm vụ T_1 , Δx có thể nhận giá trị tùy ý. Giá trị của Δx trong các ví dụ và bài tập được cho là 1 ; $-0,1$; $0,1$; $0,001$; $0,05$ có cả giá trị dương lẫn giá trị âm, giá trị lớn (số 1) lẫn trị bé tuy nhiên giá trị dương và bé vẫn chiếm ưu thế.

Mặc dù Δx trong định nghĩa vi phân có giá trị tùy ý nhưng trong kiểu nhiệm vụ T_4 giá trị Δx được cho là $0,01$; $0,001$; $0,2$; $0,02$; $\frac{\pi}{360}$ có giá trị bé và dương.

Kiểu nhiệm vụ T_5 : để áp dụng công thức tính gần đúng nhờ vi phân Δx trong công thức $f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ phải có giá trị rất bé. Cụ thể Δx được cho trong hai bộ sách ở kiểu nhiệm vụ này là $-0,01$; $\frac{\pi}{360}$; $-0,0005$; $-0,004$: có giá trị rất bé, có cả giá trị dương lẫn giá trị âm.

Như vậy qua phân tích sách giáo khoa ta nhận thấy mặc dù kí hiệu Δx , Δy được giới thiệu và sử dụng nhiều trong chứng minh lý thuyết cũng như cố gắng đưa vào trong bài tập nhưng đối với học sinh đó là một kí hiệu khó, học sinh sử dụng kí hiệu một cách máy móc và không quan tâm đến bản chất của kí hiệu này. Các giá trị Δx được cho trong sách giáo khoa thường có giá trị rất bé.

Trong công thức tính vi phân của hàm số $dy = f'(x) dx$ thì dx là một thừa số vi phân và sau này được sử dụng trong chương Nguyên hàm và Tích phân ở chương trình lớp nhưng

qua cách trình bày của sách giáo khoa thì dx chính là Δx khi mà $\Delta x \rightarrow 0$, vai trò thừa số vi phân của dx bị lu mờ.

1.2. Δx trong chương trình đại học, cao đẳng

Nghiên cứu khoa học luận về Δx ta nhận thấy vi phân là một khái niệm quan trọng, có nhiều ứng dụng trong vật lý và toán học nhưng khi phân tích mối quan hệ thể chế của Δx trong các sách giáo khoa vật lý và toán học phổ thông tầm quan trọng đó chưa được thể hiện. Khái niệm vô cùng bé đã xuất hiện nhưng chỉ được hiểu theo nghĩa thông thường chứ chưa được định nghĩa chính thức. Do đó chúng tôi xem xét thêm trong một số giáo trình toán học cao cấp xem Δx và các khái niệm liên quan được giới thiệu như thế nào, từ đó có thể soi sáng cách trình bày của sách giáo khoa phổ thông.

Xem xét một số giáo trình toán cao cấp kí hiệu Δx cũng bắt đầu xuất hiện khi học qua khái niệm đạo hàm của hàm số:

“Giả sử U là tập mở trong R , $f: U \rightarrow R$ là hàm số xác định trên U , $x_0 \in U$ là một điểm tùy ý

Với $\Delta x \neq 0$ đủ bé, $x_0 + \Delta x \in U$ ta xét tỉ số

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \quad (*)$$

Δx được gọi là số gia của đối số, $\Delta f(x_0, \Delta x)$ được gọi là số gia của hàm số tại x_0 ứng với số gia Δx của đối số

Nếu tỉ số (*) có giới hạn khi $\Delta x \rightarrow 0$ thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của f tại x_0 và kí hiệu

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

Khi đó ta nói f có đạo hàm hay khả vi tại x_0 ”

Ta thấy có một điểm khác biệt so với cách định nghĩa Δx trong các giáo trình toán cao cấp với sách giáo khoa phổ thông là Δx không được định nghĩa cụ thể là $\Delta x = x - x_0$ mà chỉ được giới thiệu như một số thực tùy ý thỏa mãn điều kiện $x_0 + \Delta x$ thuộc vào khoảng U đang xét, cách định nghĩa này dễ thấy Δx không phụ thuộc vào biến số x , tuy nhiên kí hiệu Δx vẫn có thể gây nhầm lẫn Δx là tích của Δ và x . Do đó trong một số giáo trình toán cao cấp để những nhầm lẫn không đáng có như trên, trong định nghĩa đạo hàm Δx có thể được thay thế bởi các

kí hiệu như h hay k . Chẳng hạn trong giáo trình giải tích của khoa Toán đại học Sư Phạm Hà Nội, đạo hàm của hàm số tại một điểm x_0 được định nghĩa như sau:

“Giả sử U là tập mở trong R , $f: U \rightarrow R$ là hàm số xác định trên U , $x_0 \in U$ là một điểm tùy ý

Với $h \neq 0$ đủ bé, $x_0 + h \in U$ ta xét tỉ số

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0, h)}{h} \quad (*)$$

h được gọi là số gia của đối số, $\Delta f(x_0, h)$ được gọi là số gia của hàm số tại x_0 ứng với số gia h của đối số

Nếu tỉ số $(*)$ có giới hạn khi $h \rightarrow 0$ thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của f tại x_0 và kí hiệu

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0, h)}{h}$$

Khi đó ta nói f có đạo hàm hay khả vi tại x_0 ”

Sau đó vấn đề được đặt ra là giả sử ta có hàm $y=f(x)$ xác định trên một khoảng U nào đó và liên tục tại điểm x_0 đang xét. Khi đó số gia Δx của đối số sẽ ứng với số gia hàm số $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là một vô cùng bé với Δx , như vậy đối với Δy có chẳng một vô cùng bé $A \cdot \Delta x$ (A là hằng số) cũng tuyến tính đối với Δx sao cho hiệu của chúng là một vô cùng bé cấp cao so với Δx tức là $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$. Từ đó dẫn đến định nghĩa vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 :

“Vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là dy hay $df(x_0)$ là một biểu thức có hai tính chất sau:

1. Tuyến tính đối với Δx , tức là $dy = A \cdot \Delta x$ (A không phụ thuộc vào Δx)
2. Sai khác Δy một vô cùng bé bậc cao so với Δx , tức là $\Delta y = dy + [\alpha(\Delta x)] \cdot \Delta x$ với

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Vậy vi phân của hàm số $y=f(x)$: $dy = y'_x \cdot \Delta x = y'_x \cdot dx$.

Trong định nghĩa vi phân, hoàn toàn không bắt buộc phải giả thiết Δx là vô cùng bé nhưng nếu $\Delta x \rightarrow 0$ thì vi phân dy cũng là một vô cùng bé và là phần chính của số gia vô cùng bé Δy của hàm. Thật vậy, ta thấy vi phân $dy \approx \Delta y$ với sai số là $|\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x|$, khi đó nếu $|\Delta x|$ càng nhỏ thì $|\alpha(\Delta x)|$ cũng càng nhỏ nên sai số $|\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x|$ lại càng nhỏ không đáng kể, nhưng vi phân lại là một biểu thức đơn giản hơn nhiều so với Δy . Ví dụ ta xét hàm số $y = f(x) = \cos x$ thì

$\Delta y = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0 = -2 \sin(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}$ là biểu thức lượng giác phức tạp so với Δx còn vì phân $dy = (-\sin x_0) \Delta x$ là biểu thức tuyến tính đơn giản đối với Δx . Cách trình bày như trên cho ta thấy được cơ sở, và ý nghĩa của việc ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng. Khi ta ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng thì giá trị của Δx là vô cùng bé. Trong toán học, vô cùng bé là một đại lượng biến thiên mà trong quá trình biến đổi, giá trị tuyệt đối của nó có thể trở nên bé hơn một số $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý cho trước. “Một đại lượng biến thiên $\alpha(x)$ được gọi là đại lượng vô cùng bé khi $x \rightarrow x_0$ (kể cả $\pm \infty$) nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.”

Giả sử $f(x)$, $g(x)$ là các vô cùng bé khi $x \rightarrow x_0$, nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì ta nói $f(x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn so với $g(x)$ và kí hiệu $f(x) = o(g(x))$.

Mặc dù vô cùng bé đã được định nghĩa chính xác trong toán học nhưng trong chương trình phổ thông nó không được định nghĩa, không được phát biểu một cách tường minh. Tuy nhiên đôi lúc cụm từ “vô cùng bé” vẫn xuất hiện và học sinh cũng xem đó như là một khái niệm hiển nhiên, tự nhiên các em đã hiểu. Vậy cách hiểu của các em như thế nào, có chính xác về mặt khoa học? Đó là câu hỏi mà chúng tôi đặt ra và sẽ tìm kiếm câu trả lời trong phần thực nghiệm.

Cách định nghĩa vi phân như trên cũng cho phép mở rộng ra cho định nghĩa vi phân của hàm hai biến số hoặc hàm nhiều biến số. Ví dụ vi phân của hàm hai biến số “Vi phân của hàm số $z=f(x,y)$ tại điểm (x_0, y_0) , kí hiệu là dz hay $df(x_0, y_0)$ là một biểu thức có hai tính chất sau:

1. Tuyến tính đối với Δx , Δy tức là $df(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ (A , B là các hằng số không phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$).

2. Sai khác $\Delta df(x_0, y_0)$ một vô cùng bé bậc cao so với Δx , Δy tức là $df(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) + [\alpha(\Delta x)] \cdot \Delta x + [\beta(\Delta y)] \cdot \Delta y$ với $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$, $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \beta(\Delta y) = 0$.”

3. Kết luận chương 2

Trong toán học, Δx được đưa vào khi học khái niệm đạo hàm. Cách “định nghĩa” Δx trong sách giáo khoa trung học phổ thông và trong các giáo trình cao đẳng, đại học có sự khác nhau. Nếu trong sách giáo khoa $\Delta x = x - x_0$ để làm cho học sinh hiểu là giá trị Δx phụ thuộc vào x thì cách đưa vào Δx ở các giáo trình toán cao cấp tránh được sự nhầm lẫn này. Kí hiệu Δx cùng qui ước toán học đôi khi cũng gây ngộ nhận $\Delta x = \Delta \cdot x$ và để tránh điều này sách

giáo khoa phải nhấn mạnh trong phần chú ý. Trong các giáo trình toán cao cấp đôi khi người ta sử dụng h, k thay cho kí hiệu Δx . Với cách sử dụng này không chỉ tránh được nhầm lẫn Δx là một tích mà cách viết cũng gọn hơn nhiều. Mặt khác khi đề cập đến khái niệm vi phân ta lại có $\Delta x = dx$ mà dx là kí hiệu viết tắt xuất phát từ tiếng Latinh *differentia* có nghĩa là “hiệu” dùng để chỉ hiệu hai giá trị của biến số x . Do đó, mặc dù việc dùng kí hiệu Δx trong chương trình trung học phổ thông gây ra một số nhầm lẫn nhưng nó vẫn được sử dụng vì lý do lịch sử và phù hợp với kiến thức đã biết về Δx trong vật lý. Hơn nữa, kí hiệu này nhấn mạnh số gia đang xét tại điểm x , phù hợp với ý nghĩa của việc đưa vào định nghĩa đạo hàm và trình độ của học sinh phổ thông trung học.

Trong chương trình toán phổ thông, Δx không can thiệp vào trong bài tập, nó chỉ xuất hiện trong lý thuyết, chủ yếu trong bài vi phân (định nghĩa vi phân và ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng). Sự xuất hiện khiêm tốn đó không phải do thuộc tính của Δx mà do sự lựa chọn định nghĩa của các tác giả sách giáo khoa. Còn trong các giáo trình toán cao cấp, đã có nhiều ứng dụng liên quan đến Δx và vi phân như ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng, ứng dụng vi phân vào hình học, cách xây dựng vi phân cũng cho phép người học hiểu được ý nghĩa của nó cũng như có thể mở rộng phép tính vi phân cho hàm một biến số sang vi phân cho hàm nhiều biến số.

Chương trình phổ thông chỉ nghiên cứu hàm một biến số, chưa đưa vào hàm nhiều biến số nên vi phân được định nghĩa như trên để học sinh dễ hiểu mà vẫn chính xác với hàm số một biến. Tuy nhiên, với cách trình bày đó sự chuyển đổi didactic khái niệm vi phân từ chương trình phổ thông sang bậc cao đẳng, đại học không được thực hiện.

Khái niệm “vô cùng bé” chỉ được định nghĩa chính thức trong các giáo trình toán cao cấp nhưng ở học sinh trung học phổ thông khái niệm này đã xuất hiện khi học về đạo hàm, ứng dụng của đạo hàm. Cách hiểu này có chính xác về mặt khoa học, nó gây khó khăn hay tạo thuận lợi gì khi những học sinh này được học khái niệm chính xác?

CHƯƠNG III.

THỰC NGHIỆM

1. Tóm tắt kết quả 2 chương đầu

Thông qua việc nghiên cứu Δx trong toán học và trong vật lý ở hai chương đầu, chúng tôi rút ra một số nhận xét như sau:

Δx được đưa vào trong toán học và vật lý nhằm mục đích thu gọn, đơn giản hóa cách viết và đều không được định nghĩa tường minh, mà chủ yếu giới thiệu thông qua ký hiệu.

“Vô cùng bé” là một khái niệm được định nghĩa chính xác trong toán học: “Một đại lượng biến thiên $\alpha(x)$ được gọi là đại lượng vô cùng bé khi $x \rightarrow x_0$ (kể cả $\pm \infty$) nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ ”. Mặc khác, “vô cùng bé” lại được hiểu theo nghĩa thông thường, tức là đại lượng có giá trị rất bé, bé đến mức gần bằng 0, xấp xỉ bằng 0. Trong chương trình trung học phổ thông, các em chưa được học khái niệm “vô cùng bé” chính xác trong toán học, tuy nhiên ta vẫn bắt gặp cụm từ này vẫn được sử dụng trong toán học và vật lý, khi Δx được xem là có giá trị vô cùng bé thì vô cùng bé đó mang nghĩa thông thường, tức là có giá trị rất nhỏ.

Về mặt toán học, Δx có giá trị tùy ý, khi cần nói Δx mang giá trị vô cùng bé ta sẽ dùng công cụ giới hạn. Tuy nhiên trong chương trình trung học phổ thông Δx chỉ được giới thiệu trong lý thuyết, không ứng dụng nhiều trong bài tập, học sinh gặp Δx trong bài tập chủ yếu trong bài ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng, khi đó Δx mang giá trị vô cùng bé nên học sinh cũng ngầm hiểu Δx mang giá trị vô cùng bé trong toán học. Trong vật lý, sách giáo khoa ban cơ bản ban đầu Δx được giới thiệu là đại lượng có giá trị vô cùng bé tuy nhiên về sau khi công cụ giới hạn đã được giới thiệu trong toán học thì Δx mang giá trị tùy ý, còn sách giáo khoa ban nâng cao với trình độ học sinh khá hơn và yêu cầu tính chính xác cao hơn thì Δx được đưa vào đúng như bản chất toán học của nó tức giá trị của Δx là tùy ý, nó chỉ có giá trị vô cùng bé khi được đề cập đến. Cách trình bày này giống như cách trình bày trong các giáo trình cao đẳng, đại học.

Trong toán học, $\Delta x = dx$. Trong khi đó, trong vật lý chưa có sự nhất quán trong việc sử dụng hai ký hiệu Δx và dx , thông thường Δx được xem là khác dx nhưng đôi lúc lại ngầm giả định dx là Δx .

Về mặt giá trị ta nhận thấy trong cả toán học và vật lý, Δx có giá trị dương âm tùy ý. Tuy nhiên trong vật lý, có những Δx mà giá trị của nó luôn luôn dương, ví dụ như khoảng

thời gian Δt , quãng đường đi được $\Delta s, \dots$. Như vậy có hay không một hợp đồng didactic liên quan đến Δx là Δx luôn có giá trị dương?

Δx chỉ là một kí hiệu, không phải là tích $\Delta \cdot x$ và không phụ thuộc vào x , do đó ta có thể thay thế Δx bởi các kí hiệu h, k để tránh nhầm lẫn. Tuy nhiên trong vật lý và trong toán học (chương trình trung học) đều sử dụng kí hiệu này vì lý do lịch sử (hiệu của hai đại lượng) và phù hợp với trình độ học sinh.

2. Phát biểu giả thuyết nghiên cứu

Từ các kết luận rút ra từ sự phân tích chương trình và các bộ sách giáo khoa toán học và vật lý chúng tôi đưa ra các giả thuyết nghiên cứu sau đây:

H1: Trong các bài tập có mặt Δx , học sinh thao tác Δx như là một đại lượng phụ thuộc vào x bằng cách dựa vào 2 đẳng thức

$$\Delta x = \Delta \cdot x$$

$$\Delta x = x - x_0$$

H2: Tồn tại các quy tắc

R1: Δx có giá trị vô cùng bé

R2: Nếu nằm trong mô hình vật lý, dấu của Δx là dấu của đại lượng vật lý liên quan. Nếu nằm ngoài mô hình vật lý, dấu của Δx là dấu dương.

3. Thực nghiệm

Dành cho học sinh:

Câu 1: Trong chương trình toán học khi học định nghĩa đạo hàm, các em đã được giới thiệu kí hiệu Δx . Ta cũng gặp kí hiệu này trong vật lý. Em hãy nêu tất cả những hiểu biết của em về đại lượng Δx : định nghĩa, tính chất, dấu, ...

	Trong toán học	Trong vật lý
Định nghĩa		
Dấu		
Tính chất		

Câu 2: Xét dấu của các biểu thức sau :

	Dương	Âm	Ý kiến khác	Giải thích
Gia tốc trung bình : $a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$				
$-\Delta x + 3$				
$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$				

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-1000; 1)$ và $x_0 = 0,99999$. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 bằng định nghĩa, ta giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 0,99999$. Δx có thể nhận giá trị nào sau đây (giải thích về sự lựa chọn của mình)

- a) $\Delta x = 0.00001$
- b) $\Delta x = -1000$
- c) $\Delta x = 1$
- d) $\Delta x = 1000$

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau

- a) $y = \Delta x$
- b) $y = \frac{2x+5}{\Delta x}$

3.1. Phân tích a priori

Câu 1 có mục đích kiểm tra xem học sinh hiểu thế nào về Δx đồng thời kiểm tra giả thuyết H1. Ngoài định nghĩa Δx học sinh có biết thêm gì về bản chất của đại lượng này ở cả hai môn học toán và vật lý hay không. Chúng tôi dự kiến các câu trả lời của học sinh như sau:

	Trong toán học	Trong vật lý
Định nghĩa	$\Delta x = x - x_0$	$\Delta x = x - x_0$ $\Delta x = x_1 - x_2$ $\Delta x = x' - x$
Dấu	Có dấu tùy ý	có dấu tùy ý Luôn mang dấu dương

Tính chất	Có giá trị lớn bé tùy ý Không phụ thuộc vào x Phụ thuộc vào x Không là tích của Δx $\Delta x = dx$	Có giá trị rất bé $\Delta x \neq dx$ $\Delta x = dx$ khi giá trị của Δx rất bé
-----------	--	--

Câu 2 cũng nhằm mục đích kiểm tra mức độ hiểu biết của học sinh về đại lượng Δx , đặc biệt là dấu của đại lượng này.

Trong sách vật lý 10 đại lượng $a_{tb} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ dùng để chỉ giá trị đại số của vector vận tốc trung bình. Giá trị đại số xác định độ lớn và chiều của vector gia tốc trung bình. Điều đó có nghĩa là đại lượng $a_{tb} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ có thể mang giá trị dương hay âm. Nếu vật chuyển động nhanh dần thì $a_{tb} > 0$, ngược lại vật chuyển động chậm dần đều thì $a_{tb} < 0$. Tuy nhiên chúng tôi dự kiến đa số học sinh sẽ cho kết quả $a_{tb} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} > 0$ vì 2 lí do: thứ nhất là vì trong vật lý $\Delta t, \Delta s$ luôn mang dấu dương nên học sinh cho rằng Δv cũng lớn hơn 0, thứ hai là vì thông thường học sinh không thấy dấu trừ thì nghĩ đó là số dương.

Dự kiến các kết quả có thể có khi xét dấu biểu thức $-\Delta x + 3$:

$-\Delta x + 3$ có dấu tùy ý vì $-\Delta x < 0$ và $3 > 0$.

$-\Delta x + 3 > 0$ vì Δx có giá trị rất bé, xấp xỉ 0.

Về mặt toán học $3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$ cũng có giá trị dương âm tùy ý tuy nhiên dự kiến các câu trả lời của học sinh như sau:

$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \geq 0$ vì $3x^2 \geq 0, \Delta x \geq 0$.

$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \geq 0$ vì $3x^2 \geq 0, \Delta x \approx 0$.

Câu 3 là cụ thể hóa các khái niệm của câu 1 bằng các giá trị tương ứng. Với khoảng xác định và x_0 đã cho Δx là một đại lượng có giá trị tùy ý sao cho $x_0 + \Delta x$ thuộc về khoảng xác định đang xét.

Đáp án a $\Delta x = 0,00001$ là một đại lượng có giá trị rất bé và dương học sinh thường hay gặp khi làm các bài tập về Δx , tuy nhiên lại không thỏa mãn điều kiện $x_0 + \Delta x$ thuộc về khoảng xác định đang xét. Nếu đáp án a được chọn chiếm đa số thì học sinh chưa hiểu về bản chất của Δx đồng thời qui tắc hợp đồng R1 được tôn trọng.

Đáp án b $\Delta x = -1000$ thỏa mãn điều kiện $x_0 + \Delta x$ thuộc về khoảng xác định đang xét, là đáp án đúng, đại lượng này có giá trị âm, có giá trị tuyệt đối lớn không thường gặp ở Δx trong toán và vật lý phổ thông. Nếu học sinh chọn đáp án này tức là học sinh có sự hiểu biết về Δx .

Vì đáp án đúng b có giá trị là một đầu mút của khoảng xác định nên đáp án c cho $\Delta x = 1$ là đầu mút còn lại và đáp án d Δx có giá trị tuyệt đối bằng với giá trị tuyệt đối của đáp án b nhưng có giá trị dương. Đáp án c và d được đưa ra nhằm kiểm tra mức độ hiểu biết của học sinh về Δx .

Câu 4 với yêu cầu tính đạo hàm của hàm số có chứa Δx mà không giải thích gì thêm nhằm mục đích kiểm tra giả thuyết H1 xem học sinh có thao tác Δx như là một đại lượng phụ thuộc vào x hay không ?

Dự kiến các chiến lược có thể quan sát được đối với bài tập 3a:

Chiến lược S1: Đạo hàm của tích

S1a: Xem Δx là $\Delta \cdot x$: $y' = \Delta' \cdot x + \Delta$.

S1b: Xem Δx là $\Delta \cdot x$ trong đó Δ vì không chứa biến nên được xem như hằng số: $y' = \Delta$.

S1c: $y' = \Delta' \cdot x' = \Delta'$

Chiến lược S2: Đạo hàm của hiệu:

Vì $\Delta x = x - x_0$ nên $y' = 1$.

Chiến lược S3: Đạo hàm của hằng số (chiến lược tối ưu)

Vì Δx là đại lượng không phụ thuộc x nên $y' = 0$.

Dự kiến các chiến lược có thể quan sát được đối với bài tập 3b: tương ứng với các chiến lược của bài tập 3a

Chiến lược S1: Δx là một tích

S1a: $y' = \frac{2\Delta x - (2x+5)(\Delta' \cdot x + \Delta)}{(\Delta x)^2}$

S1b: $y' = \frac{2\Delta x - (2x+5)\Delta}{(\Delta x)^2}$

S1c: $y' = \frac{2\Delta x - (2x+5)\Delta'}{\Delta^2 x^2}$

Chiến lược S2: Δx là một hiệu

$$y' = \frac{2.\Delta x - (2x + 5)}{(\Delta x)^2}$$

Chiến lược S3: Δx là hằng số (chiến lược tối ưu)

$$y' = \frac{2}{\Delta x}$$

3.2. Phân tích a posteriori

Chúng tôi tiến hành thực nghiệm trên 150 học sinh lớp 12 ở 3 trường THPT : trường THPT Giồng Ông Tố (quận 2), THPT Long Trường (quận 9) và trường THPT Nguyễn Hữu Huân (quận Thủ Đức). Tổng số phiếu phát ra là 200 phiếu, tổng số phiếu thu về là 150 phiếu (đã loại bỏ các phiếu trắng). Ý kiến của tất cả các em tham gia thực nghiệm là đây là những bài tập khó, lạ và các em chưa bao giờ gặp khi làm bài tập trong lớp, một số em còn cho rằng các kiến thức này các em chưa được học. Điều đó có thể lý giải như sau trong toán học các em chủ yếu gặp Δx khi học định nghĩa đạo hàm, tìm đạo hàm của các hàm số bằng định nghĩa hay dạng bài tập tính giá trị gần đúng. Trên thực tế, tính đạo hàm chỉ sử dụng các công thức và quy tắc để tính toán, bài tập tính đạo hàm bằng định nghĩa không xuất hiện hoặc xuất hiện hoặc xuất hiện rất ít, bài tập tính giá trị gần đúng không được quan tâm và cũng không thiết thực đối với học sinh. Trong vật lý Δx không được khảo sát trong bài tập. Tóm lại Δx chỉ đóng vai trò là một kí hiệu, không là đối tượng nghiên cứu cũng không phải là công cụ. Do đó có thể nói bài tập này đối với các em là một sự phá vỡ hợp đồng didactic.

3.2.1. Phân tích a posteriori câu 1

Bảng tổng kết

Δx và các đại lượng có dạng Δx xuất hiện trong cả toán học lẫn vật lý tuy nhiên chúng chỉ xuất hiện chủ yếu trong lý thuyết, các phần chứng minh định lý chứ học sinh ít gặp trong bài tập. Do đó mặc dù đã tóm tắt lại lý thuyết các kiến thức trong toán học và vật lý có sự xuất hiện của Δx nhưng sau khi đọc lời giải của học sinh ở câu hỏi này chỉ khoảng 55% học sinh tham gia có câu trả lời, phần còn lại để trống. Nhận xét về dấu của Δx

	Trong toán học	Trong vật lý
Định nghĩa	1) Ghi lại định nghĩa đạo hàm: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó. Giới hạn hữu hạn (nếu có)	Δx là giá trị đại số của vector độ dời $\Delta x = x_1 - x_2$

	của tỉ số $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ khi x dần tới x_o được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_o, kí hiệu là $f'(x_o)$ hay $y'((x_o))$ nghĩa là $f'(x_o) = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ Trong định nghĩa trên nếu đặt $\Delta x = x - x_o$ và $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$ thì ta có $f'(x_o) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 2) Δx là số gia của đối số của x 3) $\Delta x = x - x_o$ được gọi là số gia của đối số tại x_o 4) Δx là hiệu số của x và x_o	
Dấu	Có thể dương hoặc âm Luôn dương	có dấu tùy ý Luôn mang dấu dương
Tính chất	$\Delta x = dx$	Có giá trị rất bé Lớn bé tùy ý Dương âm tùy ý

Mặc dù trong phần đầu phiếu thực nghiệm chúng tôi nói rõ là tìm hiểu về Δx và các đại lượng có dạng Δx , tuy nhiên qua khảo sát các em không tìm thấy mối liên hệ giữa Δx và Δt , do đó trong vật lý tất cả các em đều trả lời Δx là giá trị đại số của vector độ dời hoặc để trống chứ không có đáp án khác. Vì vậy trong phần tính chất của Δx trong vật lý, các em cũng không thấy mối quan hệ giữa Δx và dx .

Kết quả 45% không trả lời cho thấy đây là câu hỏi không quen thuộc đối với các em, là dạng bài tập phá vỡ hợp đồng. Học sinh có gặp Δx trong toán và trong vật lý, tuy nhiên yêu cầu các em nêu định nghĩa, tính chất của đại lượng này là hoạt động ngoài quan hệ thể chế.

3.2.2 Phân tích a posteriori câu 2

	Dương	Âm	Ý kiến khác (có thể dương hoặc âm)
--	-------	----	---------------------------------------

Gia tốc trung bình : $a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\approx 34,67\%$	$= 0\%$	$\approx 65,33\%$
$-\Delta x + 3$	$= 6\%$	$\approx 23,33\%$	$\approx 70,67\%$
$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$	$\approx 75,33\%$	$= 0\%$	$\approx 24,67\%$

Các giải thích tìm thấy trong phiếu thực nghiệm của các em:

$$a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t} > 0 \text{ vì } \Delta v, \Delta t \text{ luôn mang giá trị dương.}$$

$$a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ có dấu dương âm tùy ý tùy thuộc vào tính chất của chuyển động}$$

$$-\Delta x + 3 > 0 \text{ vì } \Delta x \text{ có giá trị rất bé, xấp xỉ } 0$$

$$-\Delta x + 3 < 0 \text{ vì các em thấy có sự xuất hiện của dấu } -: -\Delta x < 0$$

$$-\Delta x + 3 \text{ có thể dương cũng có thể âm: nếu } \Delta x < 3 \text{ thì } -\Delta x + 3 < 0, \text{ nếu } \Delta x > 3 \text{ thì } -\Delta x + 3 > 0$$

$$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \text{ vì } x^2 \geq 0 \text{ và } \Delta x > 0$$

$$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2 > 0 \text{ vì các em không thấy sự xuất hiện của dấu trừ trong biểu thức được cho}$$

$$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \text{ dương âm tùy ý tùy thuộc vào giá trị của } \Delta x$$

Với yêu cầu xét dấu của các biểu thức $a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, $-\Delta x + 3$, $3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$ chúng tôi muốn kiểm tra quy tắc hợp đồng R2 có được học sinh tôn trọng hay không. Ở biểu thức $a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ gần 65,33% học sinh tham gia cho câu trả lời chính xác về mặt toán học tức là a_{tb} có thể mang dấu dương hoặc âm tùy theo tính chất của chuyển động, nếu vật chuyển động nhanh dần đều thì a_{tb} mang giá trị dương, còn nếu vật chuyển động chậm dần đều thì a_{tb} mang giá trị âm. Như vậy, Δx trong câu này gắn với mô hình vật lý nên được học sinh hiểu đúng. Ở biểu thức $-\Delta x + 3$, 70,67% học sinh tham gia trả lời đúng là nó có thể mang dấu dương ($\Delta x < 3$) hay âm ($\Delta x > 3$). Số liệu thống kê cho thấy tồn tại cả hai qui tắc hợp đồng R1 và R2 : Δx có giá trị rất bé nên $-\Delta x + 3 > 0$, Δx có dấu dương nên $-\Delta x + 3 < 0$. Tuy nhiên ta cũng nhận thấy đáp án sai $a_{tb} > 0$ (34,67%) và $-\Delta x + 3 < 0$ (23,33%) cũng chiếm một lượng

đáng kể trong khi đó đáp án sai $a_{tb} < 0$ không một học sinh nào lựa chọn và $-\Delta x + 3 > 0$ số học sinh lựa chọn đáp án này cũng tương đối ít (6%) điều đó cho thấy qui tắc hợp đồng Δx là đại lượng mang giá trị dương tồn tại trong học sinh. Đến biểu thức $3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$ không gắn với mô hình vật lý thì đáp án đúng về mặt toán học là biểu thức có dấu tùy ý chỉ chiếm 24,67%, trong khi đó đáp án biểu thức mang giá trị dương chiếm 75,33%, không có em nào chọn đáp án biểu thức có giá trị âm. Như vậy chúng ta quy tắc R2 : Nếu nằm trong mô hình vật lý dấu Δx là dấu của đại lượng vật lý liên quan. Nếu nằm ngoài mô hình vật lý dấu của Δx là dấu dương được học sinh tôn trọng.

3.3.3 Phân tích a posteriori câu 3

a) $\Delta x = 0,00001$	b) $\Delta x = -1000$	c) $\Delta x = 1$	d) $\Delta x = 1000$
93/150 = 62%	16/150 $\approx$ 10,67%	31/150 $\approx$ 20,67%	10/150 $\approx$ 6,67%

Các giải thích tìm thấy trong phiếu thực nghiệm của các em khi trả lời:

Một số em chọn đáp án a với lời giải thích:

$$\triangleright f(x_0 + \Delta x) = f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$$

$$\triangleright x - x_0 = \Delta x \Rightarrow 1 - 0,99999 = 0,00001$$

Một số em chọn đáp án b với lời giải thích: Δx là đối số của $x_0 = 0,99999$ và $f(x)$ xác định trên khoảng $(-1000; 1)$

Một số em chọn đáp án c với lời giải thích: $(\Delta x)' = 1$

Phần còn lại các em chỉ chọn đáp án mà không giải thích.

Trong chương trình toán trung học phổ thông, học sinh gặp Δx khi tính đạo hàm bằng định nghĩa hay tính giá trị gần đúng. Do đó mặc dù đáp án a là không chính xác nhưng nó phù hợp với quan hệ cá nhân của học sinh. 62% học sinh chọn phương án a khẳng định sự tồn tại của quy tắc hợp đồng R1. Đáp án c tuy sai nhưng cũng chiếm một tỉ lệ khá lớn và khi chọn đáp án c đa số học sinh nhầm lẫn giữa việc tính giá trị của Δx với tính đạo hàm của đại lượng này, điều này có thể lí giải vì trong toán các em thường được yêu cầu tính đạo hàm của hàm số còn dạng bài tập có liên quan đến tính toán giá trị của Δx thường các em gặp trong vật lý như cho quãng đường đi được s yêu cầu tính khoảng thời gian Δt hay ngược lại. Tuy nhiên đối với các em Δx và Δt khác nhau.

3.3.4 Phân tích a posteriori câu 4

Sau khi phân tích bài làm của học sinh, chúng tôi bổ sung thêm các chiến lược sau:

Đối với câu 4a:

Chiến lược S4: $y' = (\Delta x)' = dx$

Đối với câu 4b:

Chiến lược S4: $y' = \frac{2x+5}{(\Delta x)^2}$

Chiến lược S5: $y' = \frac{2\Delta x - dx(2x+5)}{(\Delta x)^2}$

Chiến lược S6:

a) $y' = \frac{-5\Delta}{(\Delta x)^2}$

b) $y' = \frac{-5\Delta}{(\Delta x)^2} = \frac{-5}{\Delta x^2}$

Bảng tổng kết:

Câu 4a	S1			S2	S3	S4	Không làm
	a	b	c				
	0%	34,67%	0%	32,67%	20,67%	7,33%	4,67%

Câu 4b	S1			S2	S3	S4	S5	S6		Không làm
	a	b	c					a	b	
	0%	5,33%	0%	31,33%	22%	5,33%	5,33%	9,33%	7,33%	13,33%

Mặc dù sách giáo khoa đã khẳng định Δx chỉ là kí hiệu, không phải là tích của Δ và x nhưng kết quả thực nghiệm cho thấy phần lớn học sinh vẫn thao tác Δx như là một tích hay Δx là một hiệu $\Delta x = x - x_0$, Δx là một hằng số cũng được các em lựa chọn, ở đây ta cũng thấy xuất hiện một quan điểm mới về mối quan hệ giữa Δx và dx , đó là đạo hàm $(\Delta x)' = dx$. Quan sát bảng kết quả thực nghiệm và so sánh mối tương quan giữa câu 4a, 4b: Nếu ở câu 4a 34,67% xem Δx là một tích thì đến câu 4b chỉ 5,33% còn giữ quan điểm này, các quan điểm xem Δx là hiệu, Δx là hằng số tương đối ổn định.

Có nhiều quan điểm về Δx , các kết quả lại rải đều ở các quan điểm, không có sự thống nhất quan điểm ở câu 4a và câu 4b, các em tỏ ra lúng túng, không nhất quán khi giải quyết các bài toán liên quan chứng tỏ học sinh chưa nắm vững, chưa hiểu rõ về đại lượng Δx .

KẾT LUẬN CHUNG

➤ Trong chương 1 nghiên cứu về Δx trong vật lý, chúng tôi nhận thấy Δx xuất hiện dưới các hình thức Δx , Δs , Δt ,... chỉ độ biến thiên của đại lượng tương ứng. Trong chương trình vật lý trung học phổ thông, nếu Δx trong sách giáo khoa cơ bản lớp 10 có giá trị rất bé thì nó lại có giá trị tùy ý trong sách giáo khoa nâng cao. Tuy nhiên, khi công cụ giới hạn đã được giới thiệu thì Δx trong cả hai bộ sách 12 đều có giá trị tùy ý, đúng như bản chất của nó. Δx xuất hiện trong vật lý chủ yếu đóng vai trò kí hiệu.

➤ Trong chương 2 nghiên cứu về Δx trong toán học, chúng tôi nhận thấy Δx được giới thiệu chính thức trong toán và đóng vai trò là công cụ. Vai trò công cụ của Δx xuất hiện trong việc tính đạo hàm bằng định nghĩa và tính giá trị gần đúng. Tuy nhiên, trên thực tế, học sinh chỉ tính đạo hàm bằng công thức và các quy tắc chứ không dùng định nghĩa, còn việc tính giá trị gần đúng được giới thiệu nhưng chỉ mang tính hình thức, sách giáo khoa chưa đưa ra được các ví dụ mà việc dùng công thức tính giá trị gần đúng là tối ưu hơn máy tính bỏ túi. Do đó, có thể kết luận vai trò công cụ của Δx trong toán học khá mờ nhạt.

➤ Trong chương 3, kết quả thực nghiệm cho thấy trên thực tế Δx chỉ đóng vai trò là một kí hiệu, không phải là đối tượng nghiên cứu cũng không phải là công cụ để giải quyết một bài toán được đặt ra: học sinh dường như không thiết lập được mối liên quan giữa Δx trong toán học với các các lượng Δs , Δv , Δt trong vật lý. Tuy nhiên, các bài toán thực nghiệm cho thấy chỉ khi Δx được gắn với một đối tượng vật lý thì học sinh mới hiểu đúng đắn về ý nghĩa đại lượng này. Như vậy, đối với học sinh, Δx chỉ sống được khi gắn với mô hình vật lý.

➤ Giới hạn của đề tài:

Do hạn chế về thời gian, chúng tôi tiến hành thực nghiệm vào giữa học kì một trên đối tượng là học sinh khối lớp 12. Kết quả thực nghiệm sẽ đầy đủ và thuyết phục hơn nếu được tiến hành trên học sinh khối lớp 12 lẫn 11, khi học sinh đã học xong khái niệm đạo hàm, vi phân.

➤ Hướng nghiên cứu mở ra từ luận văn:

Kết quả thực nghiệm và phân tích chương 1, 2 cho thấy Δx có một tầm quan trọng nhất định trong vật lý và trong toán học ở nhà trường phổ thông nhưng chưa được giáo viên lẫn học sinh quan tâm đúng mức. Từ đó chúng tôi đặt ra câu hỏi: liệu có thể dạy khái niệm Δx bằng

cách xây dựng một tiêu đề án didactic về Δx từ tiếp cận vật lý không? Đó cũng là hướng nghiên cứu mới mà đề tài mở ra.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lương Duyên Bình tổng chủ biên (2009), *Vật lý 12*, NXB Giáo dục.
2. Lương Duyên Bình tổng chủ biên (2008), *Vật lý 11*, NXB Giáo dục.
3. Lương Duyên Bình tổng chủ biên (2007), *Vật lý 10*, NXB Giáo dục.
4. Nguyễn Cang (1999), *Lịch sử toán học*, NXB Trẻ.
5. Nguyễn Huy Đoan tổng chủ biên (2007), *Đại số và Giải tích 11 nâng cao sách giáo viên*, NXB Giáo dục
6. Trần Văn Hạo tổng chủ biên (2008), *Giải tích 12*, NXB Giáo dục.
7. Trần Văn Hạo tổng chủ biên (2008), *Giải tích 12 sách giáo viên*, NXB Giáo dục.
8. Trần Văn Hạo tổng chủ biên (2007), *Đại số và Giải tích 11*, NXB Giáo dục.
9. Trần Văn Hạo tổng chủ biên (2007), *Đại số và Giải tích 11 sách giáo viên*, NXB Giáo dục.
10. Trần Lương Công Khanh (2009), *Tài liệu viết tay về Lịch sử Toán*.
11. Trần Lương Công Khanh (2010), *Phép tính tích phân: Tiếp cận khoa học luận và giá trị của các ostensif*], dx, Tham luận .
12. Nguyễn Thế Khôi tổng chủ biên (2009), *Vật lý 12 nâng cao*, NXB Giáo dục.
13. Nguyễn Thế Khôi tổng chủ biên (2008), *Vật lý 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.
14. Nguyễn Thế Khôi tổng chủ biên (2007), *Vật lý 10 nâng cao*, NXB Giáo dục.
15. Đoàn Quỳnh tổng chủ biên (2008), *Giải tích 12 nâng cao*, NXB Giáo dục.
16. Đoàn Quỳnh tổng chủ biên (2008), *Giải tích 12 nâng cao sách giáo viên*, NXB Giáo dục.
17. Đoàn Quỳnh tổng chủ biên (2007), *Đại số và Giải tích 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.
18. Đoàn Quỳnh tổng chủ biên (2007), *Bài tập Đại số và Giải tích 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.
19. Lê Anh Tuấn (2009), *Một nghiên cứu didactic về khái niệm đạo hàm ở lớp 11 phổ thông*, Luận văn thạc sĩ, ĐHSP TPHCM.
20. Nguyễn Duy Tiến (2004), *Bài giảng giải tích tập 1*, NXB ĐH Quốc Gia Hà Nội.
21. Vũ Tuấn tổng chủ biên (2007), *Bài tập Đại số và Giải tích 11*, NXB Giáo dục.
22. G. M. Fichtengon (1968), *Cơ sở Giải tích toán học tập I*, NXB Đại học và trung học chuyên nghiệp.
23. G. I. Rudavin-A. Nuxanbaép- G. Sliakhin (1979), *Một số quan điểm Triết học trong Toán học*, NXB Giáo dục.

Tên: ... Vũ Lâm Bình Dương

Lớp: ... 14⁺ 7

Trường: ... THPT Long Bình

BÀI TẬP DÀNH CHO HỌC SINH

Câu 1: Trong chương trình toán học khi học định nghĩa đạo hàm, các em đã được giới thiệu kí hiệu Δx . Ta cũng gặp kí hiệu này trong vật lý. Em hãy nêu tất cả những hiểu biết của em về đại lượng Δx : định nghĩa, tính chất, dấu, ...

	Trong toán học	Trong vật lý
Định nghĩa	Số gia	Giá trị đại số của vectơ độ dời
Dấu	$+$, $-$	$+$
Tính chất (giá trị lớn, bé, mối quan hệ với dx , ...)	$dx = (x)' \Delta x = \Delta x$	$\Delta x = x_2 - x_1$

Câu 2: Xét dấu của các biểu thức sau :

(Các em đánh dấu X vào ô mình lựa chọn sau đó giải thích sự lựa chọn của mình)

	Dương	Âm	Ý kiến khác	Giải thích
Gia tốc trung bình : $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	X	X		Vì Δv có thể âm hoặc dương nên a_m có thể âm hoặc dương.
$-\Delta x + 3$		X		$\Delta x < 3$
$3x^3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$	X			$\Delta x > 0$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-1000; 1)$ và $x_0 = 0,99999$. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 bằng định nghĩa, ta giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 0,99999$. Δx có thể nhận giá trị nào sau đây (giải thích về sự lựa chọn của mình)

a) $\Delta x = 0,00001$

b) $\Delta x = -1000$

c) $\Delta x = 1$

d) $\Delta x = 1000$

Giải thích: $0,99999 + 0,00001 = 1$

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \Delta x$

$$y' = x' \cdot \Delta x$$

b) $y = \frac{2x+5}{\Delta x}$

$$y' = \frac{(2x+5)' \cdot \Delta x - (\Delta x)' \cdot (2x+5)}{(\Delta x)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot \Delta x - x' \cdot \Delta x \cdot (2x+5)}{(\Delta x)^2}$$

$$= \frac{\Delta x [2 - x'(2x+5)]}{(\Delta x)^2} = \frac{2 - x'(2x+5)}{\Delta x}$$

Câu 4: Tính vi phân (vi phân cấp 1) và vi phân cấp 2 (vi phân của biểu

thức vi phân cấp 1) của biểu thức $y = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

$$y(x) = y = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$$

$$y'(x) = 9x^2 - 10x + 1$$

$$\text{Vi phân cấp 1: } (9x^2 - 10x + 1)dx = dy(x)$$

$$y''(x) = 18x - 10$$

$$\text{Vi phân cấp 2: } (18x - 10)dx = dy'(x)$$

Tên: Nguyễn Thị Gấm

Lớp: 12⁰¹

Trường: THPT Nguyễn Hữu Huân

BÀI TẬP DÀNH CHO HỌC SINH

Câu 1: Trong chương trình toán học khi học định nghĩa đạo hàm, các em đã được giới thiệu kí hiệu Δx . Ta cũng gặp kí hiệu này trong vật lý. Em hãy nêu tất cả những hiểu biết của em về đại lượng Δx : định nghĩa, tính chất, dấu, ...

	Trong toán học	Trong vật lý
Định nghĩa		
Dấu		
Tính chất (giá trị lớn, bé, mối quan hệ với dx , ...)		

Câu 2: Xét dấu của các biểu thức sau :

(Các em đánh dấu X vào ô mình lựa chọn sau đó giải thích sự lựa chọn của mình)

	Dương	Âm	Y kiến khác	Giải thích
Gia tốc trung bình : $a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	X			
$-\Delta x + 3$		X		
$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$	X			

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-1000; 1)$ và $x_0 = 0,99999$. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 bằng định nghĩa, ta giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 0,99999$. Δx có thể nhận giá trị nào sau đây (giải thích về sự lựa chọn của mình)

a) $\Delta x = 0,00001$

(b) $\Delta x = -1000$

c) $\Delta x = 1$

d) $\Delta x = 1000$

Giải thích: $\Delta x = x - x_0 \dots \because -1000 \leq x \leq 0,99999 \dots$
 $\dots \because x \leq -999,00001 \dots \leq (-1000; 1) \dots$
 nhận $\Delta x = -1000$

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \Delta x$

$$y = x_1 - x_2$$

$$y' = x_1' - x_2'$$

b) $y = \frac{2x+5}{\Delta x}$

$$y = \frac{2x+5}{x_1 - x_2}$$

$$y' = \frac{(2x+5)' \cdot x_1 - (2x+5) \cdot x_1'}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{2x_1 + 5 - (2x+5) \cdot x_1'}{(x_1 - x_2)^2}$$

Câu 4: Tính vi phân (vi phân cấp 1) và vi phân cấp 2 (vi phân của biểu thức vi phân cấp 1) của biểu thức $y = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

Câu 5: Trình bày theo hiểu biết của em định nghĩa "vô cùng bé"?

Vô cùng bé là rất rất nhỏ.

Câu 6: Trong các đại lượng sau, theo các em đại lượng nào là "vô cùng bé"?

a) 0,000001

☒ b) $\frac{1}{n}$ khi $n \rightarrow +\infty$

c) -0,00001

d) -9897756

Giải thích sự lựa chọn của em : Vì $n \rightarrow +\infty$ nghĩa là n vô cùng lớn.

$\Rightarrow \frac{1}{n}$ là vô cùng bé

Tên: ... Nguyễn Thị Thu Thảo ...

Lớp: ... 12.04 ...

Trường: ... Nguyễn Huệ ...

BÀI TẬP DÀNH CHO HỌC SINH

Câu 1: Trong chương trình toán học khi học định nghĩa đạo hàm, các em đã được giới thiệu kí hiệu Δx . Ta cũng gặp kí hiệu này trong vật lý. Em hãy nêu tất cả những hiểu biết của em về đại lượng Δx : định nghĩa, tính chất, dấu, ...

	Trong toán học	Trong vật lý
Định nghĩa		
Dấu		
Tính chất (giá trị lớn, bé, mối quan hệ với dx , ...)		

Câu 2: Xét dấu của các biểu thức sau :

(Các em đánh dấu X vào ô mình lựa chọn sau đó giải thích sự lựa chọn của mình)

	Dương	Âm	Ý kiến khác	Giải thích
Giá tốc trung bình : $a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	✓			đều, vì cũng dấu với nhau
$-\Delta x + 3$		✓		
$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$	✓			

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-1000; 1)$ và $x_0 = 0,99999$. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 bằng định nghĩa, ta giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 0,99999$. Δx có thể nhận giá trị nào sau đây (giải thích về sự lựa chọn của mình)

- a) $\Delta x = 0,00001$
- b) $\Delta x = -1000$
- c) $\Delta x = 1$
- d) $\Delta x = 1000$

Giải thích: $\Delta x = x - x_0 \in (-1000, 1 - 0,99999) = (-1000, 0,00001)$
 $\Rightarrow$ nhận $\Delta x = -1000$

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \Delta x$

$$y = x_1 - x_2 \Rightarrow y' = (x_1 - x_2)' = x_1' - x_2' = 0$$

b) $y = \frac{2x+5}{\Delta x}$

$$\Rightarrow y = \frac{2x+5}{x-x_0} \Rightarrow y' = \left(\frac{2x+5}{x-x_0} \right)' = \frac{-2x_0-5}{(x-x_0)^2}$$

Câu 4: Tính vi phân (vi phân cấp 1) và vi phân cấp 2 (vi phân của biểu

thức vi phân cấp 1) của biểu thức $y = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

• Vi phân cấp 1:

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 10x + 1$$

• Vi phân cấp 2:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)' = 18x - 10$$

Câu 5: Trình bày theo hiểu biết của em định nghĩa "vô cùng bé"?

là số $\rightarrow 0$

Câu 6: Trong các đại lượng sau, theo các em đại lượng nào là "vô cùng bé"?

a) 0,000001

b) $\frac{1}{n}$ khi $n \rightarrow +\infty$

c) -0,00001

d) -9897756

Giải thích sự lựa chọn của em :
Với $n \rightarrow +\infty$ thì số càng lớn
mà $\frac{1}{n} \rightarrow$ số vô cùng bé

Tên: Nguyễn Thị Ngọc

Lớp: 12.01.4

Trường: THPT Nguyễn Huệ

BÀI TẬP DÀNH CHO HỌC SINH

Câu 1: Trong chương trình toán học khi học định nghĩa đạo hàm, các em đã được giới thiệu kí hiệu Δx . Ta cũng gặp kí hiệu này trong vật lý. Em hãy nêu tất cả những hiểu biết của em về đại lượng Δx : định nghĩa, tính chất, dấu, ...

	Trong toán học	Trong vật lý
Định nghĩa	Sự sai lệch giữa x và x_0 .	- Nếu x là thời gian Δx là khoảng thời gian giữa 2 thời điểm bất kỳ. - Nếu x là vị trí của chất điểm Δx tức thì là khoảng cách.
Dấu	Đúng, Âm	Đúng
Tính chất (giá trị lớn, bé, mối quan hệ với Δx , ...)		

Câu 2: Xét dấu của các biểu thức sau :

(Các em đánh dấu X vào ô mình lựa chọn sau đó giải thích sự lựa chọn của mình)

	Dương	Âm	Ý kiến khác	Giải thích
Gia tốc trung bình : $a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	X	X		- Dấu của chuyển động tăng dần trong chuyển động có gia tốc. - Dấu của chuyển động giảm dần trong chuyển động có gia tốc.
$-\Delta x + 3$	X			- Δx là một giá trị được quan niệm là một số thực, $-\Delta x$ luôn dương, lớn hơn nhỏ hơn 3.
$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$	X			- Luôn dương với $(-\Delta x + 3)$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-1000; 1)$ và $x_0 = 0,99999$. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 bằng định nghĩa, ta giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 0,99999$. Δx có thể nhận giá trị nào sau đây (giải thích về sự lựa chọn của mình)

- a) $\Delta x = 0,00001$
- b) $\Delta x = -1000$
- c) $\Delta x = 1$
- d) $\Delta x = 1000$

Giải thích: ... $\Delta x = 0,00001$...

... Chọn a vì Δx là số vô cùng nhỏ, có thể tính ...

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \Delta x$

... $y = x - x_0$

... $y' = (x)' - (x_0)' = 1$

b) $y = \frac{2x+5}{\Delta x}$

... $y = \frac{2x+5}{x-x_0} = \frac{2x+5}{(x-x_0) \cdot 1}$

Câu 4: Tính vi phân (vi phân cấp 1) và vi phân cấp 2 (vi phân của biểu

thức vi phân cấp 1) của biểu thức $y = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

... Vi phân cấp 1

... $y' = 9x^2 - 10x + 1$

... Vậy $dy = d(3x^3 - 5x^2 + x - 1) = y' dx = (9x^2 - 10x + 1) dx$

Câu 5: Trình bày theo hiểu biết của em định nghĩa "vô cùng bé"?

"Vô cùng bé" là một giá trị rất nhỏ, không xác định được và không có giới hạn.

Câu 6: Trong các đại lượng sau, theo các em đại lượng nào là "vô cùng bé"?

- a) 0,000001
- b) $\frac{1}{n}$ khi $n \rightarrow +\infty$
- c) -0,00001
- d) -9897756

Giải thích sự lựa chọn của em: $\frac{1}{n}$ khi $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{n} = 0$$

Khi $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n}$ tiến tới 0, không bao giờ bằng 0, càng nhỏ đến khi $\frac{1}{n}$ càng tiến gần 0, vì càng nhỏ.

Tên: Nguyễn Thị Diễm Hương...

Lớp: 12^{A2}.....

Trường: THPT Long Xuyên.....

BÀI TẬP DÀNH CHO HỌC SINH

Câu 1: Trong chương trình toán học khi học định nghĩa đạo hàm, các em đã được giới thiệu kí hiệu Δx . Ta cũng gặp kí hiệu này trong vật lý. Em hãy nêu tất cả những hiểu biết của em về đại lượng Δx : định nghĩa, tính chất, dấu, ...

	Trong toán học	Trong vật lý
Định nghĩa	Δx là số gia	Δx là giá trị đại số trong vectơ độ dời
Dấu	âm	dương
Tính chất (giá trị lớn, bé, mối quan hệ với dx , ...)		

Câu 2: Xét dấu của các biểu thức sau :

(Các em đánh dấu X vào ô mình lựa chọn sau đó giải thích sự lựa chọn của mình)

	Dương	Âm	Ý kiến khác	Giải thích
Gia tốc trung bình : $a_{\text{tb}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	X			vật luôn dương
$-\Delta x + 3$			X	tùy vào Δx , nếu $\Delta x < 0 \Rightarrow$ - $-\Delta x + 3 > 0$, còn nếu $\Delta x > 0 \Rightarrow$ - $-\Delta x + 3 < 0$
$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$	X			

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-1000; 1)$ và $x_0 = 0,99999$. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 bằng định nghĩa, ta giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 0,99999$. Δx có thể nhận giá trị nào sau đây (giải thích về sự lựa chọn của mình)

- a) $\Delta x = 0,00001$
 b) $\Delta x = -1000$
 c) $\Delta x = 1$
 d) $\Delta x = 1000$

Giải thích:

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \Delta x$

$$\therefore y' = (\Delta x)'$$

b) $y = \frac{2x+5}{\Delta x}$

$$\therefore y' = \frac{(2x+5)' \cdot \Delta x - (\Delta x)' (2x+5)}{(\Delta x)^2}$$

Câu 4: Tính vi phân (vi phân cấp 1) và vi phân cấp 2 (vi phân của biểu

thức vi phân cấp 1) của biểu thức $y = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

$$\therefore y = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$$

$$\therefore y' = 9x^2 - 10x + 1$$

$$\therefore y'' = 18x - 10$$

Câu 5: Trình bày theo hiểu biết của em định nghĩa “vô cùng bé”?

là số càng nhỏ, số nào bé hơn.....

Câu 6: Trong các đại lượng sau, theo các em đại lượng nào là “vô cùng bé”

a) 0,000001

b) $\frac{1}{n}$ khi $n \rightarrow +\infty$

c) -0,00001

d) -9897756

Giải thích sự lựa chọn của em : ...D.....

Tên: Phan Lạc Nghĩa

Lớp: 12.2

Trường: Sông Lấp

BÀI TẬP DÀNH CHO HỌC SINH

Câu 1: Trong chương trình toán học khi học định nghĩa đạo hàm, các em đã được giới thiệu kí hiệu Δx . Ta cũng gặp kí hiệu này trong vật lý. Em hãy nêu tất cả những hiểu biết của em về đại lượng Δx : định nghĩa, tính chất, dấu, ...

	Trong toán học	Trong vật lý
Định nghĩa	$\Delta x = x - x_0$ khi x biến đổi x_0	Giá trị đại số của vector độ dời
Dấu	+	-, +
Tính chất (giá trị lớn, bé, mối quan hệ với dx , ...)	$dx = (x')\Delta x = \Delta x$	bé, lớn

Câu 2: Xét dấu của các biểu thức sau :

(Các em đánh dấu X vào ô mình lựa chọn sau đó giải thích sự lựa chọn của mình)

	Dương	Âm	Ý kiến khác	Giải thích
Gia tốc trung bình : $a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	X	X		✓ $\Delta v > 0 \Rightarrow \Delta v > 0$ h. $\Delta v < 0 \Rightarrow \Delta v < 0$
$-\Delta x + 3$	X			✓ $\Delta x \rightarrow 0$
$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$	X			✓ tại $(\Delta x)^2 > 0$ nên ✓ $3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2 > 0$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-1000; 1)$ và $x_0 = 0,99999$. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 bằng định nghĩa, ta giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 0,99999$. Δx có thể nhận giá trị nào sau đây (giải thích về sự lựa chọn của mình)

~~a) $\Delta x = 0,00001$~~

b) $\Delta x = -1000$

c) $\Delta x = 1$

d) $\Delta x = 1000$

Giải thích: ... ✓ ... $\Delta x \rightarrow 0$...

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \Delta x$

$y' = \frac{(\Delta x - \Delta x)' \cdot (\Delta x)' - \Delta x \cdot (\Delta x)'}{(\Delta x)^2} = 0$

b) $y = \frac{2x+5}{\Delta x}$

$y' = \frac{(2x+5)' \cdot \Delta x - \Delta x' \cdot (2x+5)}{(\Delta x)^2}$

$= \frac{2 \cdot \Delta x - 0}{(\Delta x)^2} = \frac{2}{\Delta x}$

Câu 4: Tính vi phân (vi phân cấp 1) và vi phân cấp 2 (vi phân của biểu

thức vi phân cấp 1) của biểu thức $y = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

$y' = 9x^2 - 10x + 1$

$y'' = 18x - 10$

Câu 5: Trình bày theo hiểu biết của em định nghĩa "vô cùng bé"?

Đã hiểu, con xác định đúng chưa ạ?

Câu 6: Trong các đại lượng sau, theo các em đại lượng nào là "vô cùng bé"

a) 0,000001

~~$\frac{1}{n}$~~ khi $n \rightarrow +\infty$

c) -0,00001

d) -9897756

Giải thích sự lựa chọn của em: Vì $n \rightarrow +\infty$ thì $\frac{1}{n}$ rất nhỏ mà $\frac{1}{n}$ sẽ là số rất nhỏ (bằng máy tính ta cũng thấy).

Tên: Nguyễn Văn Tuấn

Lớp: 11.41

Trường: THPT Nguyễn Huệ

BÀI TẬP DÀNH CHO HỌC SINH

Câu 1: Trong chương trình toán học khi học định nghĩa đạo hàm, các em đã được giới thiệu kí hiệu Δx . Ta cũng gặp kí hiệu này trong vật lý. Em hãy nêu tất cả những hiểu biết của em về đại lượng Δx : định nghĩa, tính chất, dấu, ...

	Trong toán học	Trong vật lý
Định nghĩa	Cho hàm $y = f(x)$ xác định trên (a, b) và số x_0 . Khi đó $f(x_0) + \Delta y - f(x_0)$ được gọi là biến thiên của $f(x)$ tại x_0 khi $x \rightarrow x_0$ và $\Delta x = x - x_0$.	$\Delta x = x_2 - x_1$ là giá trị đại số của vectơ độ dời.
Dấu	$x - x_0 > 0 \Rightarrow \Delta x > 0$ $x - x_0 < 0 \Rightarrow \Delta x < 0$	$x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow \Delta x > 0$ $x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow \Delta x < 0$
Tính chất (giá trị lớn, bé, mối quan hệ với $dx, \dots$)	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Nếu $ \Delta x $ khá nhỏ thì $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x_0)$. Do đó $f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$. $\Rightarrow f'(x_0) \Delta x$ được gọi là vi phân của hàm $f(x)$ tại x_0 .	$v_{tb} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ Δt rất nhỏ $\Rightarrow v_{tb} = v_{tbc}$ thời. $a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ Δt rất nhỏ $\Rightarrow a_{tb} = a_{tbc}$ thời.

Câu 2: Xét dấu của các biểu thức sau :

(Các em đánh dấu X vào ô mình lựa chọn sau đó giải thích sự lựa chọn của mình)

	Dương	Âm	Ý kiến khác	Giải thích
Gia tốc trung bình : $a_{tb} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$			X	Δv sẽ nhỏ hơn 0 và tăng theo chiều Δt dương
$-\Delta x + 3$		X		
$3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$	X			luôn dương với mọi Δx

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-1000; 1)$ và $x_0 = 0,99999$. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 bằng định nghĩa, ta giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 0,99999$. Δx có thể nhận giá trị nào sau đây (giải thích về sự lựa chọn của mình)

~~X~~ $\Delta x = 0,00001$

b) $\Delta x = -1000$

c) $\Delta x = 1$

d) $\Delta x = 1000$

Giải thích: $\Delta x = x - x_0 = x - 0,99999 \dots$
 $\dots$ khi $x \rightarrow 1$ thì $x - 0,99999 \dots \rightarrow 0,0001 \dots$

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \Delta x$

$$y' = 1$$

b) $y = \frac{2x+5}{\Delta x}$

$$y = \frac{2x+5}{x-x_0}$$

$$y' = \frac{2x-5}{(x-x_0)^2} = \frac{2x_0-5}{\Delta x^2}$$

Câu 4: Tính vi phân (vi phân cấp 1) và vi phân cấp 2 (vi phân của biểu

thức vi phân cấp 1) của biểu thức $y = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

$$y = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$$

$$\Rightarrow dy = (9x^2 - 10x + 1) \cdot dx$$

$$\Rightarrow d(dy) = (18x - 10) \cdot dx^2$$

Câu 5: Trình bày theo hiểu biết của em định nghĩa "vô cùng bé"?

Hàm $f(x)$ được gọi là "tổng vô cùng bé" khi $x \rightarrow x_0$ nếu
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Câu 6: Trong các đại lượng sau, theo các em đại lượng nào là "vô cùng bé"?

a) 0,000001

~~b) $\frac{1}{n}$ khi $n \rightarrow +\infty$~~

c) -0,00001

d) -9897756

Giải thích sự lựa chọn của em : $n \rightarrow +\infty$ thì $\frac{1}{n}$ "vô cùng bé"

Câu 5: Trình bày theo hiểu biết của em định nghĩa "vô cùng bé"?

... là một số mà trị tuyệt đối của nó tiến tới 0 càng...

Câu 6: Trong các đại lượng sau, theo các em đại lượng nào là "vô cùng bé"

a) 0,000001

b) $\frac{1}{n}$ khi $n \rightarrow +\infty$

c) -0,00001

d) -9897756

Giải thích sự lựa chọn của em :

Nếu $n = 10 \Rightarrow \frac{1}{10} = 0,1$

$n = 100 \Rightarrow \frac{1}{100} = 0,01$

$\Rightarrow$ Nếu $n \rightarrow +\infty$ thì $\frac{1}{n}$ sẽ càng nhỏ?