

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG**

NGUYỄN NHƯ' MINH

**NGUYÊN LÝ ÁNH XẠ CƠ
MỘT VÀI MỞ RỘNG VÀ ỨNG DỤNG**

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 6046.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - 2007

**Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG**

Người hướng dẫn khoa học: TS. LÊ HOÀNG TRÍ

Phản biện 1 : PGS.TS. Đinh Huy Hoàng

Phản biện 2 : PGS.TSKH. Trần Quốc Chiến

Luận văn được bảo vệ tại hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 29 tháng 12 năm 2007.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Điểm bất động là một khái niệm xuất hiện rất sớm trong Toán học. Cho một không gian X bất kỳ và một ánh xạ f từ X vào X , hay từ một tập con của X vào X . Một điểm x thuộc X được gọi là một điểm bất động của f nếu $x = f(x)$. Khi X là một không gian metric đủ và f là ánh xạ co từ X vào X thì nguyên lý ánh xạ co của Banach khẳng định sự tồn tại duy nhất điểm bất động.

Nguyên lý ánh xạ co có rất nhiều ứng dụng trong toán học. Nó dùng để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của: Hệ phương trình tuyến tính, phương trình tích phân, phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân, tìm giới hạn của dãy số...

Chính vì lẽ đó, tôi chọn đề tài nghiên cứu “Nguyên lý ánh xạ co. Một vài mở rộng và ứng dụng”, nhằm có điều kiện tiếp cận sâu hơn, làm phong phú thêm cho bài giảng trên lớp của mình.

2. Mục tiêu và nhiệm vụ nghiên cứu:

- Nghiên cứu điểm bất động dựa trên nguyên lý ánh xạ co của Banach.
- Nghiên cứu các áp dụng của nguyên lý ánh xạ co.
- Nghiên cứu ánh xạ không dẫn trên không gian Hilbert, không gian Banach.

3. Phương pháp nghiên cứu:

- Nghiên cứu lý thuyết thông qua tài liệu sẵn có và trên Internet.

4. Cấu trúc của luận văn:

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, phần tài liệu tham khảo, gồm có 3 chương.

- * Chương 1: Nguyên lý ánh xạ co của Banach.
- * Chương 2: Một số bài toán mở rộng.
- * Chương 3: Các áp dụng.

CHƯƠNG 1 : NGUYÊN LÝ ÁNH XẠ CO CỦA BANACH

1.1. Nguyên lý ánh xạ co:

1.1.1 Ánh xạ Lipschitz: Cho X_1, X_2 là 2 không gian metric với các metric tương ứng là d_1 và d_2 . Ánh xạ $F : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ thỏa mãn $d_2(F(x), F(y)) \leq M \cdot d_1(x, y)$, với M cố định và với mọi $x, y \in X_1$, được gọi là ánh xạ Lipschitz. Số M nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức trên gọi là hằng số Lipschitz, kí hiệu là $L(F)$ của ánh xạ F . Dĩ nhiên $L(F) \geq 0$.

* Nếu $L(F) < 1$, thì F được gọi là ánh xạ co.

* Nếu $L(F) \leq 1$, thì F được gọi là ánh xạ không dẫn.

Ánh xạ Lipschitz là ánh xạ liên tục.

1.1.2 Dãy Cauchy : Một dãy điểm (x_n) trong không gian metric X được gọi là một dãy Cauchy, nếu :

Một dãy điểm (x_n) trong không gian metric X được gọi là một dãy Cauchy, nếu :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$ (hay : $\lim_{n,m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$)

1.1.3 Không gian metric đầy đủ: Một không gian metric (X, d) được gọi là đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ trong X (có giới hạn trong X theo metric d).

1.1.4 Bước lặp thứ n của ánh xạ F : Cho Y là tập hợp bất kì khác rỗng và ánh xạ $F : Y \rightarrow Y$. Với $y \in Y$, ta định nghĩa $F^n y$ bằng quy nạp như sau : $F^0(y) = y$, $F^{n+1}(y) = F(F^n(y))$ và gọi $F^n(y)$ là bước lặp thứ n của y đối với F . Tập $\{F^n(y), y \in Y, n = 0, 1, 2, \dots\}$ gọi là quỹ đạo của y đối với F .

1.1.5 Nguyên lý ánh xạ co của Banach :

Cho (Y, d) là không gian metric đầy đủ và $F : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ co. Lúc đó : F có duy nhất điểm bất động $u \in Y$ và $F^n(y) \rightarrow u$ khi $n \rightarrow \infty$, với $y \in Y$.

Chứng minh: Lấy y tùy ý thuộc Y . Do F là ánh xạ co nên : $d(F(y), F^2(y)) = d[F(y), F(F(y))] \leq \alpha d(y, F(y))$. Suy ra : $d(F^n(y), F^{n+1}(y)) \leq \alpha^n d(y, F(y))$. Lúc đó, với mọi n và với mọi $p > 0$, ta có :

$$\begin{aligned} d(F^n(y), F^{n+p}(y)) &\leq d(F^n(y), F^{n+1}(y)) + d(F^{n+1}(y), F^{n+2}(y)) + \dots + d(F^{n+p-1}(y), F^{n+p}(y)) \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+p-1}) d(F, F(y)) \\ &\leq ((\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+p-1}) + \alpha^{n+p} + \dots) d(Fy, y) \\ &= \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(y, Fy), \text{ do } 0 \leq \alpha < 1 \end{aligned}$$

Do: $0 \leq \alpha < 1$, nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$. Suy ra: $\{F^n(y)\}$ là một dãy Cauchy. Không gian (X, d) là đầy đủ, nên tồn tại $u \in Y$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(y) = u$. Hàm F là liên tục, nên ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(y) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(y)) = F(u)$$

Do $\{F^{n+1}(y)\}$ là dãy con của dãy $\{F^n(y)\}$, vì vậy $F(u) = u$ hay u là điểm bất động của ánh xạ F .

Vậy : với mỗi $y \in Y$, dãy $\{F^n(y)\}$ tồn tại giới hạn và $F^n(y) \rightarrow u$, khi $n \rightarrow \infty$

- Tính duy nhất : Giả sử F có 2 điểm bất động $x_0, y_0, x_0 \neq y_0, F(x_0) = x_0, F(y_0) = y_0$.

Lúc đó : $d(x_0, y_0) = d(F(x_0), F(y_0)) \leq \alpha d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0)$: vô lý

Vậy: $x_0 = y_0$.

1.2 Các mở rộng của nguyên lý ánh xạ co đã biết:

1.2.1 Định lý 1 : Cho (X, d) là một không gian metric đầy đủ và $F : X \rightarrow X$ là một ánh xạ (không cần phải liên tục). Giả sử với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mỗi x thuộc X , $d(x, F(x)) < \delta$, thì $F[B(x, \varepsilon)] \subset B(x, \varepsilon)$.

(với $B(x, \varepsilon)$ là quả cầu mở tâm x , bán kính ε).

Lúc đó, nếu $d(F^n(u), F^{n+1}(u)) \rightarrow 0$, khi $n \rightarrow \infty$, với $u \in X$, thì dãy $\{F^n(u)\}$ hội tụ tới điểm bất động của F .

* Chứng minh :

Cho $u \in X$. Ta kí hiệu $F^n(u) = u_n$, và chứng minh $\{u_n\}$ là dãy Cauchy. Cho trước $\varepsilon > 0$. Từ $d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \rightarrow 0$, chọn N đủ lớn ta có: $d(u_n, u_{n+1}) < \delta(\varepsilon)$ với mọi $n \geq N$.

Từ: $d(u_N, u_{N+1}) < \delta(\varepsilon) \Leftrightarrow d(u_N, F^{N+1}u) = d(u_N, F(F(u_N))) = d(u_N, F(u_N)) < \delta(\varepsilon)$

$\Rightarrow F[B(u_N, \varepsilon)] \subset B(u_N, \varepsilon)$. Vậy: $u_{N+1} = F(u_N) \in B(u_N, \varepsilon)$

Ta chứng minh quy nạp $F^k(u_N) = u_{N+k} \in B(u_N, \varepsilon), \forall k \geq 0$. (1)

* Khi $k = 0$, hiển nhiên ta có $F^0(u_N) = u_N \in B(u_N, \varepsilon)$

* Giả sử (1) đúng khi $k = p \geq 0$, tức là: $F^p(u_N) = u_{N+p} \in B(u_N, \varepsilon)$ là đúng.

* Ta chứng minh (1) là đúng khi $k = p + 1$

Thật vậy: Ta có $F^{p+1}(u_N) = F(F^p u_N) \in B(u_N, \varepsilon)$, do $F^p(u_N) \in B(u_N, \varepsilon)$

$\Rightarrow \forall k \geq 0, u_{N+k} \in B(u_N, \varepsilon)$.

Do $u_s, u_k \in B(u_N, \varepsilon), \forall k, s \geq N$. Ta có $d(u_s, u_k) \leq d(u_s, u_N) + d(u_N, u_k) < 2\varepsilon$

$\Rightarrow \{u_n\}$ là dãy Cauchy.

Do (X, d) là đầy đủ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = z \in X$. Ta chứng minh z là điểm bất động của F .

Giả sử ngược lại rằng z không phải là điểm bất động của F , nghĩa là: $d(z, Fz) = a > 0$

Ta có thể chọn một $u_n \in B(z, \frac{a}{3})$ sao cho: $d(u_n, u_{n+1}) < \delta(\frac{a}{3})$. Khi đó, theo giả thiết ta có:

$F[B(u_n, \frac{a}{3})] \subset B(u_n, \frac{a}{3})$. Vì vậy: $F(z) \in B(u_n, \frac{a}{3})$ (*). Nhưng điều này không thể được, bởi vì:

$d(F(z), u_n) \geq d(F(z), z) - d(u_n, z) \geq \frac{2a}{3}$. Vậy: $F(z) \notin B(u_n, \frac{a}{3})$. Điều này vô lý với (*). Vậy $F(z) = z$.

Áp dụng kĩ thuật trên, ta dẫn đến các tổng quát hoá nguyên lý ánh xạ co sau đây :

1.2.2 Định lý 2 : Cho (X, d) là không gian metric đầy đủ và $F : X \rightarrow X$ thoả mãn $d(F(x), F(y)) \leq \varphi[d(x, y)]$, ở đây $\varphi : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ là ánh xạ không giảm (không cần phải liên tục), thoả mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0, t > 0$.

Lúc đó : F có điểm bất động duy nhất u và $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = u, x \in X$.

* Chứng minh : Ta chỉ xét $\varphi(t) < t$ (1), với mọi $t > 0$. Vì nếu ngược lại thì $t \leq \varphi(t)$ với $t > 0$. Do tính không giảm của hàm φ nên $\varphi(t) \leq \varphi[\varphi(t)] = \varphi^2(t) \Rightarrow t \leq \varphi^2(t)$. Bằng quy nạp, ta có : $t \leq \varphi^n(t), \forall n > 0 \Rightarrow t \leq 0$: vô lý.

Chúng ta sẽ chứng minh rằng : $d[F^n(x), F^{n+1}(x)] \leq \phi^n[d(x, F(x))]$

Thật vậy, từ $d[F(x), F(y)] \leq \phi[d(x, y)] \Rightarrow d[F(x), F^2(x)] \leq \phi[d(x, F(x))]$
 $\Rightarrow d(F^2(x), F^3(x)) \leq \phi[d(F(x), F^2(x))] \leq \phi^2[d(x, F(x))]$

 $\Rightarrow d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq \phi^n[d(x, F(x))]$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(F^n(x), F^{n+1}(x)) = 0$

Cho $\varepsilon > 0$, chọn $\delta(\varepsilon) = \varepsilon - \varphi(\varepsilon) > 0$, do (1). Nếu $d(x, F(x)) < \delta(\varepsilon)$ thì $\forall z \in B(x, \varepsilon)$, ta có:

$$d(F(z), x) \leq d(F(z), F(x)) + d(F(x), x) \leq \varphi[d(z, x)] + \delta(\varepsilon) \leq \varphi(\varepsilon) + \varepsilon - \varphi(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow F(z) \in B(x, \varepsilon)$$

Theo định lý 1, F có điểm bất động u và $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = u, x \in X$

1.2.3. Định lý 3 : Cho (X, d) là 1 không gian metric đầy đủ và $F : X \rightarrow X$ thỏa mãn điều kiện $d(F(x), F(y)) \leq \alpha(x, y)d(x, y)$, với $\alpha : X^2 \rightarrow \mathbf{R}^+$ có tính chất : Với bất kì đoạn $[a, b] \subset \mathbf{R}^+ \setminus \{0\} : \sup\{\alpha(x, y) / a \leq d(x, y) \leq b\} = \lambda(a, b) < 1$ thì F có duy nhất điểm bất động $u \in X$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = u, x \in X$.

Chứng minh : Xét dãy $u_n = d(F^n(x), F^{n+1}(x))$ với một x nào đó thuộc X .

Ta có :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) = d[F(F^n(x), F(F^{n+1}(x)))] \leq \alpha(F^n(x), F^{n+1}(x)).d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \\ &< d(F^n x, F^{n+1} x) = u_n \end{aligned}$$

với $a \leq d(F^n x, F^{n+1} x) \leq b, [a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \{u_n\}$ là dãy số giảm.

Hơn nữa, $0 \leq u_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = p \geq 0$.

Ta phải chứng minh rằng $p = 0$. Nếu ngược lại thì $d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \in [p, p+1]$ với n đủ lớn.

Ta chứng minh quy nạp $p \leq d(F^{n+k}(x), F^{n+k+1}(x)) \leq c^k d(F^n(x), F^{n+1}(x))$ với $c = \lambda(p, p+1)$.

* Khi $k = 0 : p \leq d(F^n x, F^{n+1} x) \leq p + 1$.

* Giả sử bất đẳng thức đúng với $k \geq 0$, tức :

$$p \leq d(F^{n+k}(x), F^{n+k+1}(x)) \leq c^k d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq c^k (p+1). \text{Lúcđó:}$$

$$\begin{aligned} p &\leq d(F^{n+k+1}(x), F^{n+k+2}(x)) \leq d[F(F^{n+k}(x), F(F^{n+k+1}(x)))] \leq c.d(F^{n+k}(x), F^{n+k+1}(x)) \\ &\leq c.c^k d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq c^{k+1}(p+1) \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức trên đúng với mọi $k \geq 0$. Do $0 < c < 1$ nên điều này mâu thuẫn, nghĩa là $p = 0$. Vậy : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d(F^n(x), F^{n+1}(x)) = 0$ (1)

Bây giờ, cho trước $\varepsilon > 0$. Kí hiệu $\lambda = \lambda\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right)$ và chọn $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon(1-\lambda)\right\}$. Giả sử :

$d(F(x), x) < \delta, x \in X$. Ta chứng minh $F[B(x, \varepsilon)] \subset B(x, \varepsilon)$.

Cho $z \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(z, x) < \varepsilon$. Ta chứng minh $d(F(z), x) < \varepsilon$.

Ta có : $d(F(z), x) \leq d(F(z), F(x)) + d(F(x), x)$. (2)

Ta chia ra hai trường hợp sau :

* Khi $d(z, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Lúc đó : $d(F(z), x) \leq d(F(z), z) + d(z, x) < \delta + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
 $\Rightarrow F(z) \in B(x, \varepsilon)$.

* Khi $\frac{\varepsilon}{2} \leq d(z, x) < \varepsilon$, thì $d(F(z), x) \leq \alpha(z, x)d(z, x) + d(F(x), x) \leq \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon = \varepsilon$
 $\Rightarrow F(z) \in B(x, \varepsilon)$

Vậy : $F[B(x, \varepsilon)] \subset B(x, \varepsilon)$ (3)

Kết hợp (2) và (3) và theo định lý 1 (2.1) ta khẳng định rằng F có điểm bất động u và $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = u, u \in X$.

Tính duy nhất : Giả sử F có 2 điểm bất động u_1, u_2 , tức $u_1 = F(u_1)$ và $u_2 = F(u_2)$.

Lúc đó : $d(u_1, u_2) = d(F(u_1), F(u_2)) \leq \alpha(u_1, u_2)d(u_1, u_2) < d(u_1, u_2)$.

Điều này vô lý. Vậy F có duy nhất điểm bất động.

1.2.4. Định lý 4 : Cho (X, d) là không gian metric đầy đủ và $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}^+$ là hàm số không âm bất kì (không cần phải liên tục).

Giả sử : $\inf\{\varphi(x) + \varphi(y) / d(x, y) \geq a, \forall x, y \in X\} = \mu(a) > 0, \forall a > 0 (**)$. Lúc đó, mỗi dãy $\{x_n\}$ trong X mà $\varphi(x_n) \rightarrow 0$ thì $x_n \rightarrow u \in X$.

Chứng minh : Đặt $A_n = \{x \in X / \varphi(x) \leq \varphi(x_n)\}$. Ta có $A_n \neq \emptyset$ vì $x_n \in X$ và $\varphi(x) \leq \varphi(x_n)$, với mọi n , và với mọi họ hữu hạn có giao khác trống. Ta chứng minh đường kính $\delta(A_n)$ của A_n dần tới 0.

Cho trước $\varepsilon > 0$, do $\varphi(x_n) \rightarrow 0$ nên chọn N đủ lớn để $\varphi(x_n) \leq \frac{1}{2}\mu(\varepsilon)$ với mọi $n \geq N$.

Lúc đó: Với mọi $n \geq N$ và với mọi x, y thuộc về A_n ta có:

$\varphi(x) \leq \varphi(x_n), \varphi(y) \leq \varphi(x_n)$, nên: $\varphi(x) + \varphi(y) < 2\varphi(x_n) < \mu(\varepsilon) \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon$. Vì

vậy $\delta(A_n) \rightarrow 0$. Vì $\delta(\overline{A_n}) = \delta(A_n) \rightarrow 0$.. Theo nguyên lý Cantor về dãy hình cầu đóng có đường kính thắt dần, ta có $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{A_n} = \{u\}$, u duy nhất. Do $x_n \in \overline{A_n}$ với mỗi n , nên $x_n \rightarrow u$.

Với bất kỳ dãy $\{y_n\}$ thoả mãn $\varphi(y_n) \rightarrow 0$, ta có: $\varphi(x_n) + \varphi(y_n) \rightarrow 0$. Theo giả thiết (**) ta có: $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$.

Định lý sau là một hệ quả hiển nhiên:

1.2.5. Định lý 5 : Cho (X, d) là 1 không gian metric đầy đủ và $F : X \rightarrow X$ là liên tục. Giả sử rằng hàm số $\varphi(x) = d(x, F(x))$ có tính chất (**) trong định lý 4(2.4) và $\inf_{x \in X} d(x, F(x)) = 0$.

Thì F có duy nhất điểm bất động.

CHƯƠNG 2 : MỘT SỐ BÀI TOÁN MỞ RỘNG

■ Bài toán 1: Cho (X, d) là không gian metric đầy đủ và $F : X \rightarrow X$ là ánh xạ thoả mãn $F^N : X \rightarrow X$ là ánh xạ co (với N là 1 số tự nhiên nào đó, F không cần liên tục). Chứng minh rằng F có duy nhất điểm bất động u và dãy $\{F^n x\}$ hội tụ về u với $x \in X$.

Chứng minh :

* Do X đầy đủ và $F^N : X \rightarrow X$ là ánh xạ co nên F^N có điểm bất động duy nhất u , tức là $F^N(u) = u \in X$.

$$\text{Từ } F^N(u) = u \Rightarrow F(F^N(u)) = F(u) \Leftrightarrow F^N(F(u)) = F(u)$$

$\Rightarrow F(u)$ là điểm bất động của F^N .

Do tính duy nhất về điểm bất động đối với một ánh xạ co nên $F(u) = u$ (*) hay u điểm bất động của F .

* Dãy $F^n x \rightarrow u$:

Đặt $g(x) = F^N(x)$. Do F^N có điểm bất động u nên $g^n(x) \rightarrow u (n \rightarrow \infty)$. Với mọi $x \in X$, ta chứng minh dãy $F^n(x)$ hội tụ về u .

Đặt: $x_k = F^k(x)$, với $k = 0, n-1$

Do: $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) = u$ nên ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x_k) = u$, nghĩa là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M_k \in \mathbb{N} / \forall n > M_k \Rightarrow d[g^n(x_k), u] < \varepsilon$$

Chọn $M = \max\{M_k, k = 0, n-1\}$, thì $\forall n > M \Rightarrow d[g^n(x_k), u] < \varepsilon$ (*).

Chọn: $A = N(M+1) \in \mathbb{N}$. Ta viết: $n = p.N + k$, $k < N$. Lúc đó: Với mọi $n > A$ ta có: $p.N + k > N(M+1) \Rightarrow p.N + k > N.M + N \Rightarrow (p-M)N > N - k > 0$. Suy ra: $p > M$.

Ta có: $F^n(x) = F^{p.N+k}(x) = F^{p.N}[F^k(x)] = F^{p.N}(x_k) = g^p(x_k)$.

Từ kết quả $p > M$ và áp dụng (*) ta có: $d[g^p(x_k), u] < \varepsilon \Rightarrow d[F^n(x), u] < \varepsilon$.

Tức dãy $\{F^n(x)\}$ hội tụ về u .

■ Bài toán 2: Cho (X, d) là không gian metric đầy đủ và $F_n : X \rightarrow X$ là dãy các hàm liên tục. Giả sử rằng mỗi F_n có điểm bất động x_n .

(a) Cho $F_n \rightarrow F$ đều trên X . Chứng minh :

i) Nếu $x_n \rightarrow x_0$ hay nếu $F(x_n) \rightarrow x_0$ thì x_0 là điểm bất động của F .

ii) Nếu F là ánh xạ co thì x_n hội tụ đến điểm bất động duy nhất của F .

(b) Cho $F_n \rightarrow F$ theo từng điểm, với mỗi F_n là ánh xạ Lipschitz và $L(F_n) \leq M < +\infty$, với mọi n .

Hãy chứng minh :

i) F là ánh xạ Lipschitz với $L(F) \leq M$.

ii) Nếu $x_n \rightarrow x_0$ thì x_0 là điểm bất động đối với F .

iii) Nếu $M < 1$ thì $\{x_n\}$ hội tụ đến điểm bất động duy nhất của F .

Lời giải :

Câu (a)

• Khi $x_n \rightarrow x_0$:

$$\begin{aligned} \text{i). Ta có } d(Fx_0, x_0) &\leq d(Fx_0, x_n) + d(x_n, x_0) \\ &= d(Fx_0, F_n x_n) + d(x_n, x_0) \quad (\text{do } F_n \text{ có điểm bất động } x_n) \\ &\leq d(F_n x_n, Fx_n) + d(Fx_n, Fx_0) + d(x_n, x_0) \end{aligned}$$

$$\text{Do } F_n \rightarrow F \text{ nên } F \text{ liên tục} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{3} > 0, \exists N_1 / \forall n \geq N_1 \text{ thì } d(Fx_n, Fx_0) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\text{Do } F_n \rightarrow F \text{ nên } \exists N_2 / \forall n \geq N_2 : d(F_n x_n, Fx_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\text{Do } x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow \exists N_3 / \forall n \geq N_3 : d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Chọn $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Lúc đó, $\forall n \geq N \Rightarrow d(Fx_0, x_0) < \varepsilon$ hay x_0 là điểm bất động của F .

• Khi $F(x_n) \rightarrow x_0$:

$$\text{Ta có : } d(F_n x_n, x_0) \leq d(F_n x_n, Fx_n) + d(Fx_n, x_0)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \Rightarrow d(F_n x_n, Fx_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{do } F_n \rightarrow F)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \Rightarrow d(Fx_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{do } F(x_n) \rightarrow x_0)$$

Chọn $N = \max\{N_1, N_2\}$. Lúc đó :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N \text{ ta có : } d(F_n x_n, x_0) < \varepsilon \text{ hay } d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Theo chứng minh trên thì x_0 là điểm bất động của F .

$$\text{ii) Ta có : } d(x_n, x_0) = d[F_n(x_n), F(x_0)]$$

$$\begin{aligned} &\leq d[F_n(x_n), F(x_n)] + d[F(x_n), F(x_0)] \\ &\leq d[F_n(x_n), F(x_n)] + \alpha d(x_n, x_0) \\ \Rightarrow (1 - \alpha)d(x_n, x_0) &\leq d[F_n(x_n), F(x_n)] \end{aligned}$$

Do $F_n \rightarrow F \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N / \forall n \geq N : d[F_n(x_n), F(x_n)] \leq \varepsilon(1 - \alpha) \quad (0 \leq \alpha < 1)$.

$$\Rightarrow d(x_n, x_0) \leq \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow x_0.$$

Câu (b) :

i) F là ánh xạ Lipschitz với $L(F) \leq M$

$$\text{Ta có : } d[F(x), F(y)] \leq d[F(x), F_n(x)] + d[F_n(x), F_n(y)] + d[F_n(y), F(y)]$$

Do F_n là ánh xạ Lipschitz, nên :

$$d[F(x), F(y)] \leq d[F(x), F_n(x)] + Md(x, y) + d[F_n(y), F(y)]$$

Lại do F_n hội tụ điểm đến F , nên chuyển qua giới hạn hai vế ta được :

$$d[F(x), F(y)] \leq Md(x, y)$$

hay f là ánh xạ Lipschitz.

ii) Nếu $x_n \rightarrow x_0$ thì x_0 là điểm bất động của F

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } d[Fx_0, x_0] &\leq d[Fx_0, F_n x_0] + d[F_n x_0, F_n x_n] + d[F_n x_n, x_0] \\ &= d[Fx_0, F_n x_0] + d[F_n x_0, F_n x_n] + d(x_n, x_0) \end{aligned}$$

Do F_n là ánh xạ Lipschitz $\Rightarrow F_n$ là hàm số liên tục.

$$\text{Vậy khi } x_n \rightarrow x_0 \text{ thì } F_n x_n \rightarrow F_n x_0.$$

Do F_n hội tụ về F theo từng điểm nên $F_n x_0 \rightarrow Fx_0$.

Chuyển qua giới hạn hai vế, ta được $Fx_0 = x_0$ hay x_0 là điểm bất động của F

iii) Nếu $M < 1$ thì $x_n \rightarrow x_0$ và x_0 là điểm bất động duy nhất của ánh xạ F :

Cho x_n là điểm bất động của F_n và x_0 là điểm bất động của F . Ta có:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) &= d(F_n(x_n), F(x_0)) \leq d(F_n(x_n), F_n(x_0)) + d(F_n(x_0), F(x_0)) \\ &\leq M.d(x_n, x_0) + d(F_n(x_0), F(x_0)). \end{aligned}$$

Suy ra: $d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{1-M} d(F_n(x_0), F(x_0))$. Từ đó $x_n \rightarrow x_0$ do F_n hội tụ điểm về F và $M < 1$.

■ Bài toán 3 : Cho (X, d) là 1 không gian metric đầy đủ và $\{a_n\}$ là 1 dãy số không âm, có

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ Cho $F : X \rightarrow X$ là ánh xạ thoả mãn :

$$d(F^n(x), F^n(y)) \leq a_n d(x, y), \quad \forall x, y \in X. \text{ Hãy chứng minh } F \text{ có duy nhất điểm bất động và } F^n(z) \rightarrow u, z \in X \text{ (Weissinger – 1952)}$$

Chứng minh :

Từ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên số hạng tổng quát $a_n \rightarrow 0$. Vì vậy với $n \geq N$, ta có

$$0 \leq a_n < 1, N \in \mathbb{N}$$

Ta có: $0 \leq a_N < 1$. Do $d(F^N(x), F^N(y)) \leq a_N d(x, y) \Rightarrow F^N$ là ánh xạ co nên F^N có duy nhất điểm bất động u , hay $F^N u = u$.

Từ $F^N(u) = u \Rightarrow F(F^N u) = F(u) \Rightarrow F^N(Fu) = F(u)$ hay $F(u)$ là điểm bất động của F^N . Do tính duy nhất của điểm bất động đối với ánh xạ co F^N nên ta có $F(u) = u$ hay u là điểm bất động của F .

- Tính duy nhất : Giả sử F có điểm bất động u, v với $u \neq v$.

Ta có : $d(u, v) = d(F(u), F(v)) = d(F^N(F(u)), F^N(F(v))) \leq a_N d(F(u), F(v)) = a_N d(u, v) < d(u, v)$: vô lý. Vậy $u = v$.

- $F^n(z) \rightarrow u$, với $z \in X$: Do chứng minh trên F^N là ánh xạ co. Sử dụng kết quả của bài toán 1 ta kết luận được dãy số: $\{F^n(z)\}$ hội tụ về u với $z \in X$.

■ Bài toán 4: Cho (X, d) là một không gian metric đầy đủ và $F : X \rightarrow X$ là ánh xạ thỏa mãn : với mọi tập đóng bất kỳ $A \subset X$ với $\delta(A) \neq \emptyset$ ($\delta(A)$ là đường kính của tập A) ta có $\delta(F(A)) \leq \alpha \delta(A)$ với $0 \leq \alpha < 1$. Chứng minh F có duy nhất điểm bất động. (H.Amann)

Chứng minh: Với mọi x, y thuộc X mà $x \neq y$,

Ta đặt $A = \{x, y\} \Rightarrow \delta(A) = d(x, y)$. Ta có $F(A) = \{F(x), F(y)\}$. Suy ra: $\delta(F(A)) = d(F(x), F(y))$.

Theo giả thiết: $d(F(x), F(y)) = \delta(F(A)) \leq \alpha \delta(A) = \alpha d(x, y)$. Khi $x = y$ ta cũng có kết quả này. Vậy F là ánh xạ co.

Theo nguyên lý ánh xạ co của Banach, F có duy nhất điểm bất động.

■ Bài toán 5 : Cho (Y, d) là không gian metric đầy đủ và $B = B(y_0, r) = \{y/d(y, y_0) < r\}$ là quả cầu mở tâm y_0 , bán kính r . Cho $F : B \rightarrow Y$ là ánh xạ co với hằng số $\alpha < 1$. Nếu $d(F(y_0), y_0) < (1-\alpha)r$, thì F có điểm bất động.

Chứng minh:

Chọn $0 < \varepsilon < r$ sao cho $d(F(y_0), y_0) \leq (1-\alpha)\varepsilon < (1-\alpha)r$:

thì $K = \{y/d(y, y_0) \leq \varepsilon\}$ là quả cầu đóng chứa trong B .

Với mọi $y \in K$, ta có:

$$\begin{aligned} \text{Lúc đó : } d(F(y), y_0) &\leq d(F(y), F(y_0)) + d(F(y_0), y_0) \\ &\leq \alpha d(y, y_0) + d(F(y_0), y_0) \\ &\leq \alpha d(y, y_0) + (1-\alpha)\varepsilon \\ &\leq \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow F(K) \subset K$. Suy ra: F là ánh xạ từ K vào K

Do X đầy đủ, $K \subset X$ và K đóng $\Rightarrow K$ là không gian đầy đủ và do $F : K \rightarrow K$, là ánh xạ co $\Rightarrow F$ có duy nhất điểm bất động trên K .

Nhận xét rằng : $F : B \rightarrow Y$ là ánh xạ co, với Y là không gian metric đầy đủ. Nếu F thoả mãn : $d(F(y_0), y_0) \leq (1-\alpha)r$ với $B(y_0, r) \subset Y$ thì F có điểm bất động (ảnh của quả cầu di chuyển không xa tâm của nó)

■ Bài toán 6 : Cho E là không gian Banach và $F : E \rightarrow E$ là toán tử tuyến tính thoả mãn : $(I - F)^{-1}$ là tồn tại

a) Cho $G : E \rightarrow E$ là ánh xạ Lipschitz với $\|(I - F)^{-1}\| \cdot L(G) < 1$ với $L(G)$ là hằng số Lipschitz của G . Chứng minh ánh xạ : $x \mapsto F(x) + G(x), x \in E$, có duy nhất điểm bất động.

b) Cho λ, r là 2 số dương, $\lambda < 1$ và đặt $K = K(0, r)$ là quả cầu đóng tâm O , bán kính r . Giả sử $G : K \rightarrow E$ là một ánh xạ Lipschitz thoả mãn $\|G(0)\| \leq \frac{(1-\lambda)r}{\|(I - F)^{-1}\|}$. Chứng minh rằng : nếu

$$\|(I - F)^{-1}\| \cdot L(G) < \lambda$$

thì ánh xạ $x \mapsto F(x) + G(x), x \in K$, có duy nhất điểm bất động.

Lời giải :

a) Xét ánh xạ $H : E \rightarrow E$ xác định bởi: $H = (I - F)^{-1} \circ G$ thì H liên tục.

$$\begin{aligned} \text{Lúc đó: } \forall x, y \in E, \text{ ta có: } \|H(x) - H(y)\| &= \|(I - F)^{-1} \circ G(x) - (I - F)^{-1} \circ G(y)\| = \\ &= \|(I - F)^{-1} \cdot (G(x) - G(y))\| \leq \|(I - F)^{-1}\| \cdot \|G(x) - G(y)\| \leq \|(I - F)^{-1}\| \cdot L(G) \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

Do giả thiết: $\alpha = \|(I - F)^{-1}\| \cdot L(G), 0 \leq \alpha < 1$, nên H là ánh xạ co từ E vào E . Theo nguyên lý ánh xạ co của Banach thì H có điểm bất động duy nhất x_0 , tức là: $H(x_0) = x_0$.

$$\text{Từ: } H(x_0) = x_0 \Rightarrow (I - F)^{-1} \circ G(x_0) = x_0 \Rightarrow G(x_0) = I(x_0) - F(x_0).$$

$$\Rightarrow (G + F)(x_0) = x_0 \text{ hay ánh xạ } x \mapsto F(x) + G(x) \text{ từ } E \text{ vào } E \text{ có duy nhất điểm bất động}$$

b) Đặt $H = (I - F)^{-1} \circ G$. Ta chứng minh rằng hàm H từ K vào E là ánh xạ co.

Thật vậy: Với mọi x, y thuộc K .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \|H(x) - H(y)\| &= \|(I - F)^{-1} \circ G(x) - (I - F)^{-1} \circ G(y)\| \\ &= \|(I - F)^{-1}\| \cdot \|G(x) - G(y)\| \leq \|(I - F)^{-1}\| \cdot L(G) \cdot \|x - y\| < \lambda \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

Do $0 < \lambda < 1$, nên H là ánh xạ co. Theo nguyên lý ánh xạ co của Banach, thì hàm H có duy nhất điểm bất động x_0 , tức là $H(x_0) = x_0$. Từ $H(x_0) = x_0$, ta suy ra:

$$(I - F)^{-1} \cdot G(x_0) = x_0 \Rightarrow G(x_0) = x_0 - F(x_0)$$

Hay: $(F + G)(x_0) = x_0$ hay hàm $\varphi : x \mapsto F(x) + G(x)$ có điểm bất động duy nhất.

Ta lại chứng minh hàm H là ánh xạ từ K vào K . Với mọi $x \in K(0, r)$ ta có: $\|x\| \leq r$.

Ta chứng minh $\|H(x)\| \leq r$. Thật vậy:

$$\text{Ta có: } \|H(x)\| = \|H(x) - H(0) + H(0)\| \leq \|H(x) - H(0)\| + \|H(0)\|$$

$$\begin{aligned} &= \|(I-F)^{-1}G(x) - (I-F)^{-1}G(0)\| + \|H(0)\| \leq \|(I-F)^{-1}\| \|G(x) - G(0)\| + \|(I-F)^{-1}G(0)\| \\ &\leq \|(I-F)^{-1}\| \cdot L(G) \|x\| + \|(I-F)^{-1}\| \|G(0)\| \leq \lambda \cdot r + \|(I-F)^{-1}\| \|G(0)\|. \\ &\leq \lambda \cdot r + \|(I-F)^{-1}\| \cdot \frac{1-\lambda}{\|(I-F)^{-1}\|} \cdot r = \lambda \cdot r + (1-\lambda)r = r \end{aligned}$$

Suy ra $\|H(x)\| \leq r$, tức $H: K(0, r) \rightarrow K(0, r)$ và H là ánh xạ co nên H có duy nhất điểm bất động trên $K(0, r)$.

■ **Bài toán 7:** Một không gian metric (X, d) là ε -xích nếu với mỗi cặp $x, y \in X$ có một số hữu hạn điểm $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y$ sao cho $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon, \forall i: 0 \leq i \leq n$. Cho (X, d) là đầy đủ và $F: X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử rằng có một số $\varepsilon > 0$ và một số $k: 0 \leq k < 1$ sao cho $d(F(x), F(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ mỗi khi $d(x, y) < \varepsilon$.

Chứng minh rằng nếu (X, d) là ε -xích thì F có duy nhất điểm bất động (M. Edelstein).

Lời giải:

Chọn $x_0 \in X \Rightarrow F(x_0) \in X$ (Do F là ánh xạ từ X vào X). Do X là ε -xích nên tồn tại $p \in \mathbb{N}$, tồn tại $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$.

Suy ra: $d(x_0, x_1) < \varepsilon; d(x_1, x_2) < \varepsilon; \dots, d(x_{p-1}, x_p) < \varepsilon, F(x_p) = x_0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } d(F(x_0), F^2(x_0)) &\leq d(F(x_0), F(x_1)) + d(F(x_1), F(x_2)) + \dots + d(F(x_{p-1}), F(F(x_0))). \\ &\leq k[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{p-1}, Fx_0)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(F^2(x_0), F^3(x_0)) &\leq d(F^2(x_0), F^2(x_1)) + d(F^2(x_1), F^2(x_2)) + \dots + d(F^2(x_{p-1}), F^2(F(x_0))) \\ &\leq k[d(F(x_0), F(x_1)) + d(F(x_1), F(x_2)) + \dots + d(F(x_{p-1}), F(F(x_0)))] \\ &\leq k^2[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{p-1}, F(x_0))]. \end{aligned}$$

Tiếp tục quá trình này, ta có:

$$d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0)) \leq k^n[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{p-1}, F(x_0))].$$

Do $0 \leq k < 1$, nên $k^n \rightarrow 0$, khi n dần về vô cùng. Suy ra dãy $\{F^n(x)\}$ là một dãy Cauchy. Không gian X là đầy đủ nên tồn tại $u \in X$ sao cho: $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = u$.

$$\text{Do } F \text{ là hàm liên tục, nên ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} F(F^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(x) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x)) = F(u)$$

Do dãy $\{F^{n+1}(x)\}$ là dãy con của dãy $\{F^n(x)\}$ nên ta có $F(u) = u$ hay u là điểm bất động của F .

Tính duy nhất:

Cho $u \in X; v \in X$ là hai điểm bất động của F . Ta chứng minh $u = v$. Chọn $p \in \mathbb{N}$ để $u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_p = v, d(x_0, x_1) < \varepsilon; d(x_1, x_2) < \varepsilon, \dots, d(x_{p-1}, x_p) < \varepsilon$. Như đã chứng minh ở trên, ta có: $d(F^n(x_0), F^n(x_1)) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$

Mà $F^n(x_0) = F^n(u) = u \Rightarrow F^n(x_1) \rightarrow u (n \rightarrow \infty)$.

Tương tự: $d(F^n(x_1), F^n(x_2)) \rightarrow 0$. Mà $F^n(x_1) \rightarrow u \Rightarrow F^n(x_2) \rightarrow u$ khi $n \rightarrow \infty$

.....

Tiếp tục như vậy ta có kết quả $F^n(x_p) \rightarrow u$. Vì vậy $u = v$

CHƯƠNG 3 : CÁC ÁP DỤNG**3.1. Một số kết quả lý thuyết :****3.2 Ánh xạ không dẫn trên không gian Hilbert :**

Nguyên lý ánh xạ co của Banach xây dựng trên một không gian metric đầy đủ bất kì. Nếu cho trước không gian một cấu trúc đầy đủ, giả thiết về tính co rút của ánh xạ có thể thay thế bởi tính không dẫn, dĩ nhiên, tính duy nhất của điểm bất động có thể không còn bảo toàn.

Mệnh đề Cho H là một không gian Hilbert thực và $u, v \in H$. Nếu cho một số $x \in H$ sao

cho $\|x - u\| \leq R, \|x - v\| \leq R$ và $\|x - \frac{u+v}{2}\| \geq r$ thì $\|u - v\| \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}$.

Chứng minh : Ta có :

$$\|(x - u) - (x - v)\|^2 + \|(x - u) + (x - v)\|^2 = 2[\|x - u\|^2 + \|x - v\|^2]$$

$$\Rightarrow \|u - v\|^2 = 2[\|x - u\|^2 + \|x - v\|^2] - \|(x - u) + (x - v)\|^2$$

$$= 2[\|x - u\|^2 + \|x - v\|^2] - 4\left\|x - \frac{u+v}{2}\right\|^2$$

(áp dụng đẳng thức hình bình hành)

$$\Rightarrow \|u - v\|^2 \leq 4R^2 - 4r^2 = 4(R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow \|u - v\| \leq 2\sqrt{R^2 - r^2} \quad (\text{đpcm})$$

Áp dụng mệnh đề trên ta nghiên cứu ánh xạ không dẫn trên các tập bị chặn.

3.3 Ánh xạ không dẫn trên quả cầu đóng trong không gian Hilbert :

Bổ đề : Cho H là không gian Hilbert và $C = \{x \in H / \|x\| \leq c\}$ là quả cầu đóng trong H . Ta định nghĩa ánh xạ $r : H \rightarrow C$ xác định bởi

$$r(x) = \begin{cases} x, & \|x\| \leq c \\ c \cdot \frac{x}{\|x\|}, & \|x\| \geq c \end{cases}$$

thì $r : H \rightarrow C$ là ánh xạ không dẫn.

Chứng minh : Ta khẳng định nếu $u, v \neq 0$ thì

$$\langle u - r(u), r(v) - r(u) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

* Nếu $\|u\| \leq c$ thì $r(u) = u$, thì (1) là hiển nhiên.

* Nếu $\|u\| \geq c$ thì $\langle u - r(u), r(v) - r(u) \rangle = \left\langle u - c \frac{u}{\|u\|}, r(v) - c \frac{u}{\|u\|} \right\rangle$

– Nếu $\|v\| \leq c$ thì : $r(v) = v$. Lúc đó (2) trở thành :

$$\begin{aligned} \langle u - r(u), r(v) - r(u) \rangle &= \langle u, v \rangle - c \|u\| - c \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|} + c^2 \\ &= \langle u, v \rangle \left(1 - \frac{c}{\|u\|} \right) - c \|u\| \left(1 - \frac{c}{\|u\|} \right) \\ &= \left(1 - \frac{c}{\|u\|} \right) (\langle u, v \rangle - c \|u\|) \end{aligned}$$

Ta có bất đẳng thức Cô Si – Svác : $\|\langle u, v \rangle\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle \leq \|\langle u, v \rangle\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle - c \|u\| \leq \|u\| \cdot \|v\| - c \|u\| = \|u\| (\|v\| - c)$$

Do $c \geq \|v\| \Rightarrow \|v\| - c \leq 0$ và $\frac{c}{\|u\|} \leq 1 \Rightarrow (2) \leq 0$.

– Nếu $\|v\| \geq c$, thì : $r(v) = c \frac{v}{\|v\|}$. Lúc đó (2) trở thành :

$$\begin{aligned} \langle u - r(u), r(v) - r(u) \rangle &= \left\langle u - c \frac{u}{\|u\|}, c \frac{v}{\|v\|} - c \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \\ &= \frac{c \langle u, v \rangle}{\|v\|} \left(1 - \frac{c}{\|u\|} \right) - c \|u\| \left(1 - \frac{c}{\|u\|} \right) \\ &= \left(1 - \frac{c}{\|u\|} \right) \left(\frac{c \langle u, v \rangle}{\|v\|} - c \|u\| \right) \end{aligned}$$

Do $\|u\| \geq c \Rightarrow 1 - \frac{c}{\|u\|} \geq 0$.

$$\langle u, v \rangle \leq \|\langle u, v \rangle\| \leq \|u\| \cdot \|v\| \Rightarrow \frac{c \langle u, v \rangle}{\|v\|} \leq \frac{c \|u\| \cdot \|v\|}{\|v\|} = c \|u\|$$

$$\Rightarrow \frac{c\langle u, v \rangle}{\|v\|} - c\|u\| \leq 0 \Rightarrow (3) \leq 0 \Rightarrow (2) \leq 0$$

Kết luận : $\langle u - r(u), r(v) - r(u) \rangle \leq 0; \forall u, v \in H$ và $u \neq 0, v \neq 0$.

Để chứng minh hệ quả, ta viết :

$$\begin{aligned} x - y &= r(x) - r(y) + x - r(x) - y + r(y) \\ &= r(x) - r(y) + a; \text{ với } a = x - r(x) - y + r(y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x - y\|^2 = \|r(x) - r(y)\|^2 + \|a\|^2 + 2\langle a, r(x) - r(y) \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Đề ý rằng : } \langle a, r(x) - r(y) \rangle &= \langle x - r(x) + r(y) - y, r(x) - r(y) \rangle \\ &= \langle x - r(x), r(x) - r(y) \rangle + \langle r(y) - y, r(x) - r(y) \rangle \\ &= -\langle x - r(x), r(y) - r(x) \rangle - \langle y - r(y), r(x) - r(y) \rangle, (4) \end{aligned}$$

Do

$$\begin{cases} \langle x - r(x), r(y) - r(x) \rangle \leq 0 \\ \langle y - r(y), r(x) - r(y) \rangle \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (4) \geq 0.$$

Vì vậy : $\|x - y\|^2 \geq \|r(x) - r(y)\|^2$ hay $\|r(x) - r(y)\| \leq \|x - y\| \Rightarrow r$: ánh xạ không dẫn (đpcm).

Định lý (Tính không tuyến tính đối với ánh xạ không dẫn).

Cho H là không gian Hilbert và C là quả cầu đóng trong H ($C = \{x \in H / \|x\| \leq c\}$). Lúc đó mỗi ánh xạ không dẫn $F : C \rightarrow H$ có ít nhất một trong hai tính chất sau :

- F có điểm bất động.
- Có $x \in \delta C$ và $\lambda \in (0, 1)$ sao cho $x = \lambda F(x)$.

Chứng minh :

a) Theo bổ đề trong 3.3, thì ánh xạ $r : H \rightarrow C$ là một ánh xạ không dẫn. Ta có : $r \circ F : C \rightarrow C$ thì $r \circ F$ có một điểm bất động $x = r \circ F(x)$ với $x \in C$. Nếu $F(x) \in C$ thì $r \circ F(x) = F(x) \Rightarrow x = r \circ F(x) = F(x)$ hay F có điểm bất động x .

b) Nếu $F(x) \notin C$, thì : $x = r \circ F(x) = c \cdot \frac{F(x)}{\|F(x)\|} \Rightarrow \|x\| = c$ hay $x \in \delta C$.

$$\text{Đặt } \lambda = \frac{c}{\|F(x)\|} \Rightarrow x = \lambda F(x)$$

$$\text{Do } F(x) \notin C \Rightarrow \|F(x)\| > c \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\|F(x)\|} < 1 \quad (\text{đpcm})$$

Hệ quả : Cho $C = \{x \in H / \|x\| \leq r\}$ và $F : C \rightarrow H$ là ánh xạ không dẫn. Giả sử rằng $\forall x \in \delta C$, một trong số các điều kiện sau thoả mãn :

- $\|F(x)\| \leq \|x\|$

b) $\|F(x)\| \leq \|x - F(x)\|$

c) $\|F(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \|x - F(x)\|^2$

d) $\langle x, Fx \rangle \leq \|x\|^2$

e) $F(x) = -F(-x)$

thì F có một điểm bất động.

Chứng minh :

a) Giả sử F không có điểm bất động $\Rightarrow \exists x \in \delta C, x = \lambda F(x), \lambda \in (0,1)$. Thế $\|x\| = \lambda \|F(x)\|$ vào a) ta có : $\|F(x)\| \leq \lambda \|F(x)\| \Rightarrow \lambda > 1$: vô lý

Vì vậy F có điểm bất động.

b) Giả sử F không có điểm bất động nào $\Rightarrow \exists x \in \delta C, x = \lambda F(x), \lambda \in (0,1)$.

Từ b) suy ra : $\|F(x)\| \leq \|\lambda F(x) - F(x)\| = (1-\lambda) \|F(x)\|$

$$\Rightarrow 1 \leq 1-\lambda : \text{vô lý vì } \lambda \in (0,1).$$

c) Tương tự:

Giả sử F không có điểm bất động nào $\Rightarrow \exists x \in \delta C, x = \lambda F(x), \lambda \in (0,1)$.

Từ c) ta có : $\|F(x)\|^2 \leq \lambda^2 \|F(x)\|^2 + (1-\lambda)^2 \|F(x)\|^2$

$$\Rightarrow 1 \leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 < \lambda + 1 - \lambda = 1 : \text{vô lý}$$

d) Tương tự:

Giả sử F không có điểm bất động nào $\Rightarrow \exists x \in \delta C, x = \lambda F(x), \lambda \in (0,1)$.

Theo d) ta có :

$$\langle \lambda F(x), F(x) \rangle \leq \lambda^2 \|F(x)\|^2 \Leftrightarrow \lambda \|F(x)\|^2 \leq \lambda^2 \|F(x)\|^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda \leq \lambda^2 < \lambda : \text{vô lý}$$

e) Ta thấy $x \in C$ thì $-x \in C, 0 \in C$. Vậy C là tập đối xứng qua gốc O .

$$\forall x \in \delta C, \text{ thì : } \|x\| = r = \|-x\|$$

$$F : C \rightarrow C \Rightarrow F(x) \in C \Rightarrow \|F(x)\| \leq \|x\| \Rightarrow \|-F(-x)\| = \|F(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in \delta U$$

Theo kết quả ở câu a) $\Rightarrow F$ có điểm bất động.

3.4. Nghiệm của phương trình vi phân và phương trình tích phân :

■. Bài toán 1: Phương trình tích phân Volterra loại 2

Cho $K : [0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ là hàm liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipschitz đối với biến thứ 3 : $|K(t, s, x) - K(t, s, y)| \leq L|x - y|$, L là hằng số Lipschitz, $\forall (s, t) \in [0, T] \times [0, T], \forall x, y \in \mathbf{R}$.

Lúc đó : với mọi $v \in [0, T]$ phương trình $u(t) = v(t) + \int_0^t K(t, s, u(s)) ds, t \in [0, T]$, sẽ có

nghiệm duy nhất $u \in [0, T]$.

Ngoài ra, nếu ta định nghĩa dãy hàm $\{u_n\}$ bằng quy nạp với giá trị đầu $u_0 \in [0, T]$:

$$u_{n+1}(t) = v(t) + \int_0^t K(t, s, u_n(s)) ds \text{ thì dãy hàm } \{u_n\} \text{ hội tụ đều trên } [0, T] \text{ tới nghiệm duy nhất}$$

u.

Lời giải : Gọi E là không gian Banach của mọi hàm liên tục trên $[0, T]$, có giá trị thực, có chuẩn $|g| = \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} |g(t)|$ trên E. Chuẩn này tương đương với chuẩn sup $\|x\|$, từ:

$$e^{-LT} \|x\| \leq |x| \leq \|x\|$$

Xác định ánh xạ $F : E \rightarrow E$ cho bởi :

$$F[g(t)] = F(g)(t) = v(t) + \int_0^t K(t, s, g(s)) ds$$

Ta chỉ cần chứng minh F là ánh xạ co. Thật vậy :

$$\begin{aligned} |F(g) - F(h)| &= \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \|Fg(t) - Fh(t)\| \\ &= \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \left| \int_0^t [K(t, s, g(s)) - K(t, s, h(s))] ds \right| \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \int_0^t |K(t, s, g(s)) - K(t, s, h(s))| ds \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \cdot L \int_0^t |g(s) - h(s)| ds \\ &= L \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \int_0^t e^{Ls} \cdot e^{-Ls} |g(s) - h(s)| ds \\ &\leq L \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \int_0^t e^{Ls} \cdot \max_{t \in [0, T]} e^{-Ls} |g(s) - h(s)| ds \\ &= L \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \cdot \int_0^t e^{Ls} |g - h| ds = L |g - h| \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \cdot \int_0^t e^{Ls} ds \\ &= L |g - h| \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \cdot \frac{1}{L} (e^{Lt} - 1) = |g - h| \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \cdot (e^{Lt} - 1) \cdot e^{-Lt} \\ &\leq (1 - e^{-Lt}) \cdot |g - h| \end{aligned}$$

Do $1 - e^{-Lt} < 1$ nên ánh xạ $F : E \rightarrow E$ là ánh xạ co. Vậy theo nguyên lý của Banach về ánh xạ co suy ra F có duy nhất điểm bất động $u \in [0, T]$.

Theo nguyên lý ánh xạ co của Banach, ta có dãy $\{F^n x\}$, với hội tụ về u

3.5. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính :

3.5.1. Xét trường hợp hệ vô hạn các phương trình tuyến tính

■ Bài toán 1 : Xét hệ vô hạn các phương trình tuyến tính :

$$(*)x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i, i=1,2,...; a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}$$

Giả sử rằng một trong những điều kiện sau đây thoả mãn :

a) Đối với hằng số $0 \leq \alpha < 1$ và $\beta > 0$, ta có :

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \alpha, |b_i| \leq \beta \text{ với } i = 1, 2, \dots$$

b) Đối với số $p > 0$, ta có :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{p-1} < 1, \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p < +\infty$$

c) Kí hiệu: $C_i = \sup\{|a_{ij}|, j = 1, 2, \dots\}$, ta có : $\sum_{i=1}^{\infty} C_i < 1, \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| < \infty$

Chứng minh rằng : Hệ (*) có duy nhất nghiệm trong không gian, tương ứng m (không gian của các dãy số bị chặn với chuẩn sup): ℓ^p và ℓ^1

Lời giải :

a) Trong không gian m ta định nghĩa chuẩn sup.

Với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, \dots) \in m$.

$$\text{Đặt: } f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j + b_1, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j + b_2, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i, \dots \right).$$

Ta phải chứng minh rằng: Với mọi x thuộc m, thì f(x) thuộc m.

Thật vậy: $\forall i \in \mathbf{N}$, ta có: $\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}x_j| + |b_i|$. Do $x \in m \Rightarrow \forall i \in \mathbf{N}$, thì: $|x_i| \leq \|x\|$.

$$\text{Suy ra: } \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \cdot \|x\| + |b_i| \leq \|x\| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| + |b_i| \leq \|x\| \cdot \alpha + \beta.$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i \right| \leq \|x\| \cdot \alpha + \beta, \forall i \in \mathbf{N} \Rightarrow f(x) \in m.$$

$\forall x = (x_i) \in m; \forall x' = (x'_i) \in m$, ta có:

$$\|f(x) - f(x')\| = \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}(x_j - x'_j), \dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x_j - x'_j), \dots \right) \right\|.$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x_j - x'_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \cdot |x_j - x'_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \|x - x'\| \leq \|x - x'\| \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \|x - x'\| \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(x')\| \leq \alpha \cdot \|x - x'\|.$$

Suy ra f là ánh xạ co. Theo nguyên lý ánh xạ co của Banach thì f có điểm bất động duy nhất. Vậy hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm.

b- Không gian ℓ^p là không gian vectơ các dãy số (ξ_n) sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$. Trong ℓ^p ta

định nghĩa chuẩn $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, với $x = (\xi_n) \in \ell^p$ thì ℓ^p là không gian Banach. (Xem ở

[2] phần tài liệu tham khảo)

Cho bất kỳ $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$.

$$\text{Đặt } f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j + b_1, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j + b_2, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i, \dots \right)$$

Ta phải chứng minh: $\forall x \in \ell^p$ thì $f(x) \in \ell^p$

Với mọi $x = (x_i) \in \ell^1$,

Ta đặt: $f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j + b_1, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j + b_2, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i, \dots \right)$. Ta phải chứng minh $f(x) \in \ell^1$.

Thật vậy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i \right| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}x_j| + |b_i| \right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_i x_j| + |b_i| \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[|c_i| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| + |b_i| \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} [|c_i| \|x\| + |b_i|] = \|x\| \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| < +\infty \end{aligned}$$

Vậy: $f(x) \in \ell^1$.

Với mọi $x = (x_i) \in \ell^1, x' = (x'_i) \in \ell^1$. Ta có:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x')\| &= \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}(x_j - x'_j), \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}(x_j - x'_j), \dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x_j - x'_j), \dots \right) \right\| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x_j - x'_j) \right|. \end{aligned}$$

Với mọi $i \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x_j - x'_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \cdot |x_j - x'_j| \leq c_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x'_j| = c_i \cdot \|x - x'\|.$

Suy ra: $\|f(x) - f(x')\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_i \|x - x'\| = \|x - x'\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i$

Nếu $\sum_{i=1}^{\infty} c_i < 1$, thì f là ánh xạ co. Không gian ℓ^1 là không gian Banach, nên f có duy nhất

điểm bất động. Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

3.5.2 Xét trường hợp hệ hữu hạn các phương trình tuyến tính:

■ Xét hệ hữu hạn các phương trình: $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i; i = \overline{1, n} (*)$.

Trong đó: a_{ij}, b_i là những hằng số thực, $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1, i = \overline{1, n}$. Chứng minh hệ đã cho(*) có nghiệm duy nhất.

Lời giải:

$\forall x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Ta định nghĩa chuẩn trên $\mathbf{R}^n$ là chuẩn xác định như sau:

$\forall x, x' \in \mathbf{R}^n, d(x, x') = \|x - x'\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x'_i|$, thì $\mathbf{R}^n$ là không gian metric đầy đủ vì là không gian metric đầy đủ.

Đặt:
$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + b_1, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + b_2, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j + b_n \right)$$

Tương tự như bài toán trên, ta phải chứng minh $f(x) \in \mathbf{R}^n$. Thực vậy:

Với mọi $i \in \overline{1, n}$, ta có: $\left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| + |b_i|$.

Do $x = (x_i) \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \forall i \in \overline{1, n}, |x_i| \leq \|x\|$.

Tacó: $\left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| + |b_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x\| + |b_i| \leq \|x\| \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + |b_i| \leq \|x\| + |b_i| \in \mathbf{R}$.

Suy ra: $f(x) \in \mathbf{R}^n$.

$\forall x = (x_i) \in \mathbf{R}^n, x' = (x'_i) \in \mathbf{R}^n$, ta có:

$$\|f(x) - f(x')\| = \left\| \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j - x'_j), \sum_{j=1}^n a_{2j}(x_j - x'_j), \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}(x_j - x'_j) \right) \right\|.$$

$$\forall i \in \overline{1, n}, \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x'_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j - x'_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x - x'\| \leq \|x - x'\| \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x - x'\|$$

Nếu : $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1, i = \overline{1, n}$, thì f là ánh xạ co trên E^n . Do không gian E^n là không gian đầy đủ

với chuẩn nêu trên, nên theo nguyên lý ánh xạ co của Banach hàm f có duy nhất điểm bất động trên không gian E^n . Như vậy hệ đã cho (*) có nghiệm duy nhất.

3.6. Một số dạng phương trình và bài toán khác :

3.7. Ánh xạ không dẫn trên không gian Banach :

- Bài toán 1 (Trang 77 của [10]).

Một không gian Banach gọi là lồi đều nếu có một toàn ánh đơn điệu tăng $\varphi, \varphi: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ liên tục tại 0, với $\varphi(0) = 0, \varphi(2) = 1$, sao cho : $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ và $\|x - y\| \geq \varepsilon$, thì

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \varphi(\varepsilon)$$

Cho $\eta: [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ là hàm ngược của φ

- a) Cho E là lồi đều và u, v là hai phần tử của E . Giả sử rằng có một x thuộc về E với

$$\|x - u\| \leq R, \|x - v\| \leq R, \left\| x - \frac{u + v}{2} \right\| \geq r > 0. \text{ Chứng minh :}$$

$$\|u - v\| \leq R \cdot \eta \left[\frac{R - r}{R} \right]$$

- b) Cho E là không gian Banach lồi đều và $C \subset E$ là 1 tập lồi, đóng, bị chặn. Chứng minh rằng mỗi ánh xạ không dẫn F từ C vào C có một điểm bất động (Brower [1965], Gôhde [1965], Kirk [1965]).

- c) Cho C là một tập lồi, đóng, trên không gian Banach lồi đều E . Hãy chỉ ra rằng với mỗi x_0 thuộc về E , có duy nhất điểm u thuộc C , với $\|x_0 - u\| = \inf_{c \in C} \|x_0 - c\|$.

Lời giải :

$$a) \text{ Từ } \begin{cases} \|x - u\| \leq R \\ \|x - v\| \leq R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left\| \frac{x - u}{R} \right\| \leq 1 \\ \left\| \frac{x - v}{R} \right\| \leq 1 \end{cases}$$

Đặt $X = \frac{x - u}{R}, Y = \frac{x - v}{R}$ thì $X, Y \in E$ và $\|X\| \leq 1, \|Y\| \leq 1$

$$\text{Ta có : } \|X - Y\| = \left\| \frac{x - u}{R} - \frac{x - v}{R} \right\| = \left\| \frac{u - v}{R} \right\| \geq \varepsilon$$

Do E là không gian Banach lồi đều, nên ta có :

$$\left\| \frac{X + Y}{2} \right\| = \left\| \frac{(x - u) + (x - v)}{2R} \right\| = \left\| \frac{2x - (u + v)}{2R} \right\| = \left\| \frac{x}{R} - \frac{u + v}{2R} \right\|$$

$$= \frac{1}{R} \left\| x - \frac{u+v}{2} \right\| \leq 1 - \varphi(\varepsilon)$$

Do $\left\| x - \frac{u+v}{2} \right\| \geq r > 0$ nên $1 - \varphi(\varepsilon) \geq \frac{r}{R}$ hay $\frac{r}{R} \leq 1 - \varphi(\varepsilon) \leq 1$.

Từ đó $r \leq R$ và $\varphi(\varepsilon) \leq 1 - \frac{r}{R} = \frac{R-r}{R} < 1$.

Áp dụng bất đẳng thức hình bình hành, ta có :

$$\|u - v\|^2 = 2\|x - v\|^2 + 2\|x - v\|^2 - 4\left\| x - \frac{u+v}{2} \right\|^2 \leq 2R^2 + 2R^2 - 4r^2 = 4(R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow \|u - v\| \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}. \text{Viết } r = \left(1 - \frac{R-r}{R}\right)R$$

$$\Rightarrow \|u - v\| \leq 2\sqrt{R^2 + R^2\left(1 - \frac{R-r}{R}\right)^2} = 2R\sqrt{\frac{R-r}{R}\left(2 - \frac{R-r}{R}\right)}.$$

Ta chứng minh : $\sqrt{\frac{R-r}{R}\left(2 - \frac{R-r}{R}\right)} \leq 1$ (1)

Giả sử ngược lại : $\sqrt{\frac{R-r}{R}\left(2 - \frac{R-r}{R}\right)} > 1$

$$\Rightarrow \frac{R-r}{R}\left(2 - \frac{R-r}{R}\right) > 1 \quad (2)$$

Đặt $t = \frac{R-r}{R}$ thì $0 \leq t < 1$.

$$(2) \Leftrightarrow t(2-t) - 1 > 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 < 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 < 0 \text{ vô lý do } 0 < t < 1.$$

Vậy $\sqrt{\frac{R-r}{R}\left(2 - \frac{R-r}{R}\right)} \leq 1$.

Từ đó : $\|u - v\| \leq 2R\sqrt{\frac{R-r}{R}\left(2 - \frac{R-r}{R}\right)} \leq 2R$

hay $\|u - v\| \leq R\eta\left(\frac{R-r}{R}\right)$.

b) C là tập lồi khác rỗng $\Rightarrow \exists x_0 \in C$. Đặt $C' = C - x_0$ và C' là tập lồi, bị chặn và chứa 0.

Vì vậy, không giảm tổng quát ta có thể giả sử rằng $0 \in C$. Với mỗi số tự nhiên $n \geq 2$, ta đặt

$$F_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)F. \text{ Ta chứng minh } F_n \text{ là ánh xạ từ } C \text{ vào } C.$$

Thật vậy, cho $x, y \in C \Rightarrow F(x), F(y) \in C$. Do C là lồi nên $\alpha F(x) + (1-\alpha)F(y) \in C$
 $\alpha \in (0,1)$.

Ta phải chứng minh: $\alpha \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(x) + (1-\alpha) \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(y) \in C$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } & \alpha \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(x) + (1-\alpha) \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(y) \\ &= \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y) - \frac{1}{n} [\alpha F(x) + (1-\alpha)F(y)] \end{aligned}$$

Đặt: $\alpha F(x) + (1-\alpha)F(y) = z \Rightarrow z \in C \Rightarrow z - \frac{1}{n}z = \left(1 - \frac{1}{n}\right)z \in C$ do C lồi và chứa 0.

Vậy $F_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)F$ là ánh xạ từ C vào C . Do F là ánh xạ không giãn có hệ số

$\alpha \in (0,1) \Rightarrow 0 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha < 1 \Rightarrow F_n$ là ánh xạ co từ C vào C , $n \geq 2$. Theo nguyên lý ánh xạ co của Banach, F_n có duy nhất điểm bất động $x_n \in C : F_n(x_n) = x_n$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } F_n(x_n) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)F(x_n) \Leftrightarrow x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)F(x_n) \\ \Rightarrow x_n - F(x_n) &= \frac{1}{n}F(x_n) \Rightarrow \|x_n - F(x_n)\| = \frac{1}{n}\|F(x_n)\| \leq \frac{1}{n}\delta(C) \quad (*) \end{aligned}$$

với $\delta(C)$ là đường kính của tập lồi C . Ta chứng minh F có điểm bất động.

$$\text{Với } n \geq 2, \text{ đặt } Q_n = \left\{ x \in C / \|x - F(x)\| \leq \frac{1}{n}\delta(C) \right\}.$$

Do $(*) \Rightarrow Q_n \neq \emptyset, \forall n \geq 2$ và $Q_2 \supset Q_3 \supset \dots$ và $\{Q_n\}$ là dãy giảm các tập đóng khác rỗng.

Đề ý rằng nếu $x, y \in Q_{8n^2}$, thì $a = \frac{x+y}{2}, \|a - F(a)\| \leq 2\sqrt{2\delta(C)} \cdot \sqrt{\frac{\delta(C)}{8n^2}} = \frac{1}{n}\delta(C)$

$\Rightarrow a = \frac{x+y}{2} \in Q_n$. Do $\{Q_n\}$ là dãy giảm $\Rightarrow \forall x, y \in Q_n$ thì $\frac{x+y}{2} \in Q_n$.

Đặt $d_n = \inf \{\|x\|, x \in Q_n\}$. Do $\{Q_n\}$ là dãy giảm nên $\{d_n\}$ là dãy tăng các số thực, bị chặn trên bởi $\delta(C)$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d \in \mathbb{R}$

Lại đặt $A_n = Q_{8n^2} \cap \overline{B\left(0, d + \frac{1}{n}\right)}$ thì A_n là tập đóng. Ta chứng minh $A_n \neq \emptyset, \forall n \geq 2$

Cho $x \in \overline{B\left(0, d + \frac{1}{n}\right)}$ thì $\|x\| \leq d + \frac{1}{n}$.

Do định nghĩa của d_n , thì $\|x\| \geq d_{8n^2} \Rightarrow x \in Q_{8n^2}$

Vậy $A_n \neq \Phi$. Ta tính đường kính của A_n .

$$\text{Nếu } x, y \in A_n \Rightarrow \|x\| \leq d + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\|x\|}{d + \frac{1}{n}} \leq 1 \text{ và } \|y\| \leq d + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\|y\|}{d + \frac{1}{n}} \leq 1.$$

$$\text{Nếu } \left\| \frac{x-y}{d + \frac{1}{n}} \right\| \geq \varepsilon \Rightarrow \text{do } E \text{ là không gian Banach lồi đều nên :}$$

$$\left\| \frac{x+y}{2\left(d + \frac{1}{n}\right)} \right\| = \frac{\|x+y\|}{2\left(d + \frac{1}{n}\right)} \leq 1 - \varphi(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{\|x-y\|}{d + \frac{1}{n}} \leq 1 - \varphi(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \left(d + \frac{1}{n}\right) \varepsilon \leq \|x-y\| \leq [1 - \varphi(\varepsilon)] \left(d + \frac{1}{n}\right) \quad (2)$$

Lấy giới hạn (2) khi $n \rightarrow \infty$, ta được : $\varepsilon d \leq \|x-y\| \leq [1 - \varphi(\varepsilon)]d$

Do $\varphi(x)$ là hàm đơn điệu tăng $\varphi: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ nên hàm $1 - \varphi(x)$ là hàm đơn điệu giảm và tiến dần về 0 (do $\varphi(2) = 1$). Vậy A_n là dãy các tập đóng có đường kính dần về 0 nên theo

nguyên lý Cantor sẽ có $x_0 \in \bigcap_{n \geq 2} A_n \Rightarrow x_0 \in Q_{8n^2} \Rightarrow \|x_0 - F(x_0)\| \leq \frac{\delta(C)}{8n^2}$.

Vì vậy $\|x_0 - F(x_0)\| = 0$ hay $x_0 = F(x_0)$ (do x_0 là điểm bất động của ánh xạ không dẫn F).

c) Đặt $\inf_{c \in C} \|x_0 - c\| = M$. Giả sử với mỗi $x_0 \in E$, tồn tại hai phần tử $u, v \in E$ sao cho :

$$\begin{cases} \|x_0 - u\| = M = \inf_{c \in C} \|x_0 - c\| \\ \|x_0 - v\| = M = \inf_{c \in C} \|x_0 - c\| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|x_0 - u\| \leq \|x_0 - c\|, \forall c \in C \\ \|x_0 - v\| \leq \|x_0 - c\|, \forall c \in C \end{cases}$$

$$\left\| x - \frac{u+v}{2} \right\| \geq r > 0, r \text{ là một số dương nào đó.}$$

Theo kết quả câu a), thì $\|u - v\| \leq R\eta\left(\frac{R-r}{R}\right)$. Với $\eta\left(\frac{R-r}{R}\right)$ là hàm của $\frac{R-r}{R}$.

Để ý rằng R có thể bằng r . Khi $R = r \Rightarrow \eta(0) = \eta \circ \varphi(0) = 1_E(0) = 0 \Rightarrow u = v$.

• **Bài toán 2** : Cho $K^\infty = \left\{ x = \{x_i\} \in C_0 / \|x\| = \sup_{1 \leq i < \infty} |x_i| \leq 1 \right\}$, là quả cầu đơn vị C_0 (C_0 là tập các dãy số có giới hạn bằng 0). Chứng tỏ rằng $\varphi: K^\infty \rightarrow K^\infty$ cho bởi $\varphi(x_1, x_2, \dots) = (1, x_1, x_2, \dots)$ là ánh xạ không dẫn, nhưng không có điểm bất động (Beals).

Lời giải : Kí hiệu $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots)$

$$\Rightarrow \varphi(x) = (1, x_1, x_2, \dots), \varphi(y) = (1, y_1, y_2, \dots)$$

$$\text{Ta có } z = \varphi(x) - \varphi(y) = (0, x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots)$$

$$\Rightarrow \|z\| = \|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \sup_{1 \leq i < \infty} |x_i - y_i| \leq 1 \text{ theo (gt)}$$

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots)$$

$$\Rightarrow \|x - y\| = \sup_{1 \leq i < \infty} |x_i - y_i|$$

$$\Rightarrow \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|x - y\| \Rightarrow \varphi: K^\infty \rightarrow K^\infty \text{ là ánh xạ không dẫn.}$$

Giả sử φ có điểm bất động $x_0 \in K^\infty, x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots)$.

$$\varphi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow (1, x_0^1, x_0^2, \dots) = (x_0^1, x_0^2, \dots) \Rightarrow x_0^j = 1 \text{ với mọi } j. \text{ Như vậy } x_0 \notin C_0: \text{ vô lý.}$$

Như vậy hàm φ xác định như trên không có điểm bất động mặc dù nó là ánh xạ không dẫn.

KẾT LUẬN

- 1) Luận văn đã hệ thống lại các mở rộng đã biết thuộc phần nguyên lý ánh xạ co của Banach (Chương 1)
- 2) Đã chứng minh được 7 bài toán mở rộng (Chương 2).
- 3) Đã chỉ ra nhiều áp dụng của nguyên lý ánh xạ co và ánh xạ không dẫn trên không gian Banach (Chương 3)