

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

NGUYỄN TRÍ THÀNH

**NHÓM GIÁ TRỊ VÀ TRƯỜNG
THẠNG DƯ CỦA CHUẨN PHI
ARCHIMEDE**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thành phố Hồ Chí Minh - 2011

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

NGUYỄN TRÍ THÀNH

NHÓM GIÁ TRỊ VÀ TRƯỜNG THẶNG DƯ CỦA CHUẨN PHI ARCHIMEDE

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 604605

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS MỸ VINH QUANG

Thành phố Hồ Chí Minh - 2011

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên trong luận văn này, tôi xin gửi đến PGS.TS My Vinh Quang, người thầy đã tận tình hướng dẫn và hết lòng giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn, lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất.

Tôi cũng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với quý thầy PGS.TS Bùi Tường Trí, PGS.TS Bùi Xuân Hải, TS Trần Huyền, PGS.TS Lê Hoàn Hóa, cố PGS.TS Đậu Thế Cấp, quý thầy đã trực tiếp giảng dạy, trang bị cho tôi kiến thức cơ bản làm nền tảng cho quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi vô cùng cảm ơn Ban Giám Hiệu, quý Thầy Cô khoa Toán-Tin, quý Thầy Cô Phòng Sau đại học Trường Đại Học Sư Phạm Thành Phố Hồ Chí Minh đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi được học tập và hoàn thành luận văn.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn gia đình, người thân, bạn bè và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Bình Dương, tháng 9 năm 2011

Nguyễn Trí Thành

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN.....	1
MỤC LỤC	2
MỘT SỐ KÍ KIỂU.....	4
LỜI NÓI ĐẦU.....	5
CHƯƠNG 1: KIẾN THỨC CƠ BẢN.....	7
1.1. Khái niệm cơ bản :.....	7
1.1.1. Định nghĩa.....	7
1.1.2 Chú ý.....	7
1.1.3. Định nghĩa.....	8
1.1.4. Định lý.....	8
1.1.5. Định nghĩa chuẩn phi Archimede	10
1.1.6. Ví dụ về chuẩn phi Archimede.....	10
1.1.8. Định lý.....	12
1.1.9 Hệ quả.....	13
1.1.10. Mệnh đề :.....	13
1.2. Xây dựng trường số p -adic.....	14
1.2.1. Định nghĩa.....	14
1.2.2. Mệnh đề.....	14
1.2.3. Mệnh đề.....	14
1.2.4. Định lý Ostrowsky.....	14
1.2.5. Xây dựng trường số p -adic $\mathbb{Q}_p$	15
1.2.6. Định nghĩa đồng dư trong $\mathbb{Q}_p$	16
1.3. Khai triển p -adic của x trong $\mathbb{Q}_p$	16
1.3.1. Bổ đề.....	16
1.3.2. Bổ đề.....	16
1.3.4. Định lý.....	16
1.3.2 Khai triển p -adic của x trong $\mathbb{Q}_p$	17
CHƯƠNG 2: NHÓM GIÁ TRỊ VÀ TRƯỜNG THẶNG DƯ CỦA CHUẨN PHI ARCHIMEDE..	18
2.1. Nhóm giá trị của chuẩn phi Archimede.....	18
2.1.1. Định nghĩa.....	18
2.1.2. Ví dụ.....	18
2.1.3. Định lý.....	19
2.1.4. Định nghĩa.....	19
2.1.5. Định lý.....	19

2.1.6.Hệ quả	21
2.1.7.Hệ quả	21
2.2. Trường thẳng dư của chuẩn phi Archimede.....	21
2.2.1.Mệnh đề.....	21
2.2.2.Định nghĩa.....	22
2.2.3.Ví dụ về trường thẳng dư	22
2.2.4.Định lý.....	24
2.2.5. Mệnh đề.....	25
2.2.6. Nhận xét	25
2.3. Bao đủ của một trường F	25
2.3.1.Định lý	25
2.3.2.Định nghĩa.....	27
2.3.3.Định lý.....	27
2.3.4.Định lý.....	28
2.4.Bao đóng của một trường.....	29
2.4.1.Định nghĩa.....	29
2.4.2.Định nghĩa.....	29
2.4.3.Định lý.....	29
2.4.4.Hệ quả.	31
2.5. Sự khai triển thành chuỗi.....	31
2.5.1.Định nghĩa.....	31
2.5.2.Định nghĩa.....	31
2.5.3.Định lý.....	31
2.5.4.Hệ quả.	33
2.5.5.Định lý.....	33
2.5.6.Hệ quả.	34
2.6. Xây dựng một trường với chuẩn phi Archimede với nhóm giá trị và trường thẳng dư cho trước.....	35
2.6.1. Định lý.....	35
2.6.2.Định nghĩa.....	38
2.6.5. Bổ đề 3.....	39
KẾT LUẬN.....	47
Tài liệu tham khảo.....	48

MỘT SỐ KÍ KIỂU

$\mathbb{C}_p$	: Tập các số nguyên p-adic.
$\mathbb{C}_p^*$	: Tập các phần tử khả nghịch trong $\mathbb{C}_p$
$\mathfrak{o}_p$	: Trường số p-adic.
$\mathbb{E}_p$	: Trường số phức p-adic.
$ \mathfrak{g} $	: Chuẩn thông thường.
$ \mathfrak{g} _p$	: Chuẩn p-adic.
$\ \mathfrak{g}\ $	: Chuẩn trên bao đủ, bao đóng.
ord_p^a	: Số mũ của p trong sự phân tích a thành thừa số nguyên tố.
$B_a(r)$	: Hình cầu mở tâm a bán kính r trong $\mathfrak{o}_p$.
$\overline{B}_a(r)$	: Hình cầu đóng tâm a bán kính r trong $\mathfrak{o}_p$.
$S_a(r)$	: Mặt cầu tâm a bán kính r trong $\mathfrak{o}_p$.
$ F^* $	: Nhóm giá trị của trường F.
F_p	: Trường thặng dư của trường F.

LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích P -adic là chuyên ngành mới của Toán học đang phát triển và có nhiều ứng dụng, đặc biệt trong Lý thuyết số hiện đại. Vào những năm 40 của thế kỉ 20, giải tích P -adic phát triển mạnh mẽ thành một chuyên ngành độc lập nhờ vào việc phát hiện những mối liên hệ sâu sắc của giải tích P -adic với những vấn đề lớn của số học và hình học đại số.

Một chuẩn $|\cdot|: F \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là chuẩn phi Archimede trên trường F nếu thỏa mãn điều kiện mạnh hơn (iii) là (iii') : $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

Một trường với chuẩn phi Archimede có nhiều tính chất lạ, đặc biệt mà chuẩn Archimede bình thường không có. Ví dụ như nhóm giá trị và đặc biệt là trường thặng dư của trường với chuẩn phi Archimede là những khái niệm chỉ có trong trường với chuẩn phi Archimede.

Chính vì vậy mà chúng tôi chọn đề tài “ **Nhóm giá trị và trường thặng dư của chuẩn phi Archimede** ” để có thể tìm hiểu, khám phá và nghiên cứu thêm những tính chất thú vị của nó.

Luận văn sẽ làm sáng tỏ hơn các nhóm giá trị và trường thặng dư của trường với chuẩn phi Archimede. Cụ thể nghiên cứu mối liên hệ giữa nhóm giá trị và trường thặng dư của 1 trường với chuẩn phi Archimede với bao đủ và bao đóng đại số của nó. Thấy rõ ứng dụng nhóm giá trị trường thặng dư trong việc nghiên cứu các trường với chuẩn phi Archimede, đặc biệt là khai triển thành chuỗi và khảo sát sự tồn tại trường với chuẩn phi Archimede với trường thặng dư và nhóm giá trị cho trước.

Cấu trúc của luận văn được chia thành hai chương:

Chương 1: Kiến thức cơ bản

Chương này chúng tôi sẽ trình bày các kiến thức cơ bản về giải tích p -adic chẳng hạn như chuẩn trên một trường, các tính chất chung, đặc biệt là khái niệm chuẩn phi Archimede, xây dựng trường p -adic, khai triển p -adic của phân tử trong $\mathbb{Q}_p$ và một số tính chất cần thiết cho chương sau.

Chương 2: Nhóm giá trị và trường thặng dư của chuẩn phi Archimede.

Trong chương này chúng tôi sẽ chỉ ra mối liên hệ giữa trường thặng dư và nhóm giá trị của một trường với chuẩn phi Archimede với bao đủ và bao đóng của nó. Ứng dụng các trường định chuẩn để khai triển thành chuỗi. Đặc biệt xây dựng một trường với chuẩn phi Archimede với nhóm giá trị và trường thặng dư cho trước.

Tuy đã có nhiều cố gắng, nhưng do khả năng còn nhiều hạn chế nên không tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được sự thông cảm và những góp ý chân tình của quý thầy giáo, cô giáo cùng tất cả các bạn.

Bình Dương, tháng 9 năm 2011.

Nguyễn Trí Thành

CHƯƠNG 1: KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày các kiến thức cơ bản về giải tích p-adic chẳng hạn như chuẩn trên một trường, các tính chất chung, đặc biệt là khái niệm chuẩn phi Archimede, xây dựng trường p-adic, khai triển p-adic của phân tử trong $\mathbb{Q}_p$ và một số tính chất cần thiết cho chương sau. Đa số chứng minh trong chương này đều được bỏ qua và người đọc có thể dễ dàng tìm thấy chúng qua các tài liệu tham khảo.

1.1. Khái niệm cơ bản :

1.1.1. Định nghĩa.

Cho F là một trường. Ánh xạ $|\cdot|: F \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một chuẩn trên F nếu thỏa các điều kiện sau:

$$i) |x| \geq 0, \forall x \in F. |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$ii) |xy| = |x||y|, \forall x, y \in F$$

$$iii) |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in F$$

Ví dụ 1) $F = \mathbb{R}$ và $F = \mathbb{C}$, giá trị tuyệt đối thông thường là chuẩn trên F

2) $F = \mathbb{C}$, môđun của một số phức là chuẩn trên F

3) F là một trường. Xét ánh xạ:

$$|\cdot|: F \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy $|\cdot|$ là một chuẩn trên F , gọi là chuẩn tầm thường.

1.1.2 Chú ý.

Cho $|\cdot|$ là một chuẩn trên trường F . Ta định nghĩa hàm $d: F \times F \rightarrow \mathbb{R}$

như sau: $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in F$.

Do $|\cdot|$ là một chuẩn trên F nên ta dễ dàng kiểm tra được d là một mêtric trên F và do đó (F, d) là một không gian mêtric.

1.1.3. Định nghĩa.

Cho $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ là hai chuẩn trên trường F . Ta nói rằng hai chuẩn này tương đương nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy theo chuẩn $|\cdot|_1$ khi và chỉ khi $\{x_n\}$ là dãy Cauchy theo chuẩn $|\cdot|_2$

Chú ý rằng $\{x_n\}$ là dãy Cauchy theo chuẩn $|\cdot|$, nghĩa là: $|x_m - x_n| \xrightarrow{m,n \rightarrow +\infty} 0$. Hay với $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0, |x_m - x_n| < \varepsilon$

1.1.4. Định lý.

(Các điều kiện để chuẩn tương đương)

Cho F là một trường; $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ là hai chuẩn trên trường F . Các điều sau là tương đương:

- 1) $\forall x \in F, |x|_1 < 1$ khi và chỉ khi $|x|_2 < 1$
- 2) $\forall x \in F, |x|_1 \leq 1$ khi và chỉ khi $|x|_2 \leq 1$
- 3) $\exists c > 0, c \in \mathbb{R} : \forall x \in F, |x|_2 = |x|_1^c$
- 4) Các tôpô sinh bởi $|\cdot|_1$ và $|\cdot|_2$ là trùng nhau.
- 5) $|\cdot|_1$ tương đương với $|\cdot|_2$ ($|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$).

Chứng minh.

$1 \Rightarrow 2) \forall x \in F, |x|_1 \leq 1$, ta sẽ chứng minh $|x|_2 \leq 1$. Thật vậy, giả sử ngược lại $|x|_2 > 1$, khi đó $\left| \frac{1}{x} \right|_2 = \frac{1}{|x|_2} < 1$ theo (1) ta có $\frac{1}{|x|_1} < 1$ suy ra $|x|_1 > 1$ (mâu thuẫn với giả thiết) nên $|x|_2 \leq 1$. Lập luận tương tự ta cũng có $|x|_1 \leq 1$ nếu $|x|_2 \leq 1$

Vậy $|x|_1 \leq 1$ khi và chỉ khi $|x|_2 \leq 1$

$2 \Rightarrow 1) \forall x \in F, |x|_1 < 1$, ta sẽ chứng minh $|x|_2 < 1$. Giả sử ngược lại $|x|_2 \geq 1$, vì $|x|_1 < 1$ nên theo (2) ta có $|x|_2 \leq 1$ suy ra $|x|_2 = 1$. Khi đó $\left| \frac{1}{x} \right|_2 = \frac{1}{|x|_2} = 1$

nên theo (2) ta có $\left| \frac{1}{x} \right|_1 \leq 1$ hay $|x|_1 \geq 1$ (mâu thuẫn giả thiết) do đó $|x|_2 < 1$

Tương tự ta cũng có nếu $|x|_2 < 1$ thì $|x|_1 < 1$

Vậy $|x|_1 < 1$ khi và chỉ khi $|x|_2 < 1$

1 $\Rightarrow$ 3) Ta xét hai trường hợp

Trường hợp nếu có một trong hai chuẩn là tầm thường ta sẽ chứng minh chuẩn còn lại cũng tầm thường. Giả sử $|\mathbf{g}_1|$ là tầm thường. Khi đó với $\forall x \in F^*, |x|_1 = 1$. Giả sử $|x|_2 \neq 1$, thế thì $|x|_2 > 1$ hoặc $|x|_2 < 1$

Nếu $|x|_2 < 1$ thì theo (1) ta có $|x|_1 < 1$ (mâu thuẫn giả thiết)

Ngược lại nếu $|x|_2 > 1$ thì $\left| \frac{1}{x} \right|_2 = \frac{1}{|x|_2} < 1$, suy ra $\left| \frac{1}{x} \right|_1 < 1$ do đó $|x|_1 > 1$ (mâu thuẫn)

nên $|x|_2 = 1$, tức là $|\mathbf{g}_1| = |\mathbf{g}_2|$. Hay $c = 1$.

Trường hợp nếu cả hai chuẩn đều không tầm thường.

Khi đó, $\exists x_0 \in F : |x_0|_1 > 1$ suy ra $\left| \frac{1}{x_0} \right|_1 < 1$ nên $\left| \frac{1}{x_0} \right|_2 < 1$ do đó $|x_0|_2 > 1$

Đặt $a = |x_0|_1, b = |x_0|_2, a > 0, b > 0$. Với mọi $x \in F^*$, giả sử $|x|_1 = a^\alpha (\alpha = \log_a |x|)$. Ta sẽ chứng minh

$|x|_2 = b^\alpha$. Thật vậy, $\forall r > \alpha (r \in \mathbb{Q})$ ta có $a^r > a^\alpha$. Giả sử $r = \frac{m}{n}, (m, n) = 1$. Khi đó $|x_0|_1^{\frac{m}{n}} > |x|_1$ suy ra

$|x_0|_1^m > |x|_1^n$ nên $\left| \frac{x^n}{x_0^m} \right|_1 < 1$ theo (1) ta có $\left| \frac{x^n}{x_0^m} \right|_2 < 1$ do đó $|x^n|_2 < |x_0^m|_2$ hay $|x|_2 < |x_0|_2^{\frac{m}{n}} = |x_0|_2^r = b^r$.

Chọn dãy $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}, r_n > \alpha : r_n \rightarrow \alpha$ suy ra $|x_0|_2^{r_n} > |x|_2 \Rightarrow |x_0|_2^\alpha \geq |x|_2 \Leftrightarrow |x|_2 \leq b^\alpha$

Tương tự ta chứng minh được $|x|_2 \geq b^\alpha$. Vậy $|x|_2 = b^\alpha$

Khi đó, $\forall x \in F^*, |x|_2 = b^\alpha = \left(a^{\log_a b} \right)^\alpha = \left(a^\alpha \right)^{\log_a b} = |x|_1^c, c = \log_a b > 0$.

3 $\Rightarrow$ 5) Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy theo chuẩn $|\mathbf{g}_1|$. Khi đó $|x_m - x_n|_1 \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0$ suy ra

$|x_m - x_n|_1^c \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0$

nên $|x_m - x_n|_2 \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0$ hay $\{x_n\}$ là dãy Cauchy theo chuẩn $|\mathbf{g}_2|$.

$5 \Rightarrow 1) \forall x \in F^*, |x|_1 < 1$ suy ra $|x^n|_1 \rightarrow 0$ nên $\{x^n\}$ là dãy Cauchy theo chuẩn $|\cdot|_1$ suy ra $\{x^n\}$ là dãy Cauchy theo chuẩn $|\cdot|_2$ nên $|x^{n+1} - x^n|_2 \rightarrow 0$ suy ra $|x^n|_2 |x - 1|_2 \rightarrow 0$, mà $|x|_1 < 1$ suy ra $x \neq 1$ do đó $|x - 1|_2 \neq 0$ hay $|x^n|_2 \rightarrow 0$

Ta có $|x^n|_2 < 1$ (với n đủ lớn) suy ra $|x|_2 < 1$. Tương tự ta cũng có $|x|_2 < 1 \Rightarrow |x|_1 < 1$

Vậy $|x|_1 < 1$ khi và chỉ khi $|x|_2 < 1$

$$3 \Rightarrow 4) \text{ Ta có } B_2(a, r) = \{x \in F : |x - a|_2 < r\} = \{x \in F : |x - a|_1^c < r\}$$

$$= \{x \in F : |x - a|_1 < r^c\} = B_1(a, r^c)$$

Khi đó, $\forall A \in \tau_1, \forall a \in A, \exists r > 0 : B_1(a, r) \subset A \Leftrightarrow \exists c > 0 : B_2(a, r^c) \subset A \Leftrightarrow a \in \tau_2$

Vậy $\tau_1 = \tau_2$

$4 \Rightarrow 1)$ Giả sử $x \in F, |x|_1 < 1$. Thế thì $|x^n|_1 \rightarrow 0$ suy ra $x^n \rightarrow 0$ theo τ_1 ,

mà $\tau_1 = \tau_2$ nên $x^n \rightarrow 0$ theo τ_2 . Khi đó, $|x^n|_2 \rightarrow 0$ nên $|x|_2 < 1$

Tương tự, nếu $|x|_2 < 1$ thì $|x|_1 < 1$

•

1.1.5. Định nghĩa chuẩn phi Archimede .

Cho $|\cdot|$ là một chuẩn trên trường F . Chuẩn $|\cdot|$ được gọi là chuẩn phi Archimede trên F nếu nó thỏa thêm điều kiện:

$$(iii') |x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}, \forall x, y \in F$$

Chuẩn thỏa (iii) nhưng không thỏa (iii') được gọi là chuẩn Archimede.

1.1.6. Ví dụ về chuẩn phi Archimede.

Ví dụ 1: Chuẩn tầm thường trên trường F là chuẩn phi Archimede.

Ví dụ 2: Nếu K là trường hữu hạn thì mọi chuẩn trên K đều tầm thường, vì vậy nó là chuẩn phi Archimede.

1.1.7. Mệnh đề.

Cho F là một trường với chuẩn phi Archimede $|\cdot|$.

i. $\forall x, y \in F, |x| \neq |y|$ thì $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$. Nghĩa là, mọi tam giác đều cân trong không gian mêtric sinh bởi chuẩn $|\cdot|$.

ii. Các tập

$$B_a(r) = \{x \in F : |x - a| < r\}$$

$$\bar{B}_a(r) = \{x \in F : |x - a| \leq r\}$$

$$S_a(r) = \{x \in F : |x - a| = r\}$$

là các tập vừa đóng vừa mở.

iii. Mọi điểm thuộc hình cầu đều là tâm của nó. Nghĩa là, $\forall b \in B_a(r) \Rightarrow B_a(r) = B_b(r)$

iv. Dãy $\{x_n\} \subset F$ là dãy Cauchy $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$

v. Nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Khi đó,

+) nếu $x_n \rightarrow 0$ thì $|x_n| \rightarrow 0$

+) nếu $x_n \not\rightarrow 0$ thì $\{x_n\}$ là dãy dừng. Nghĩa là, $\exists N : \forall n \geq N, |x_n| = |x_{n+1}| = |x_{n+2}| = L$

Chứng minh.

i) Không mất tính tổng quát, giả sử $|x| > |y|$. Khi đó,

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} = |x| \Leftrightarrow |x + y| \leq |x| \quad (1)$$

Mặt khác, $|x| = |x + y - y| \leq \max\{|x + y|, |y|\}$ mà $|x| > |y|$ nên $\max\{|x + y|, |y|\} = |x + y|$

Do đó $|x| \leq |x + y|$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $|x + y| = |x| = \max\{|x|, |y|\}$

ii) Rõ ràng $B_a(r)$ là tập mở. Ta chỉ còn phải chứng minh $B_a(r)$ là tập đóng,

tức $\forall x \notin B_a(r)$, ta chứng minh $\exists \varepsilon > 0, B_x(\varepsilon) \cap B_a(r) = \emptyset$.

Thật vậy, chọn $\varepsilon = \frac{r}{2}$, giả sử $\exists y \in B_a(r) \cap B_x(\frac{r}{2})$ ta suy ra

$$|y - x| < \frac{r}{2} \text{ và } |y - a| < r$$

Khi đó, $|x - a| = |x - y + y - a| \leq \max\{|x - y|, |y - a|\} < r \Leftrightarrow |x - a| < r$ suy ra $x \in B_a(r)$ (mâu thuẫn) nên

$B_a(r) \cap B_x(\varepsilon) = \emptyset$. Vậy $B_a(r)$ là tập đóng.

iii) $\forall b \in B_a(r)$ ta chứng minh $B_a(r) = B_b(r)$. Thật vậy,

$\forall x \in B_a(r) \Leftrightarrow |x-a| < r \Leftrightarrow |x-b+b-a| < r$ nên $\max\{|x-b|, |b-a|\} < r$ mà $|b-a| < r$ do đó $|x-b| < r$ khi và chỉ khi $x \in B_b(r)$. Vậy $B_a(r) = B_b(r)$

iv) Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Khi đó, $\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n > N, |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$.

Ngược lại, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ thì $\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n > N, |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

Với mọi $m, n > N$, giả sử rằng $m > n$ ta có

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \dots + x_{n+1} - x_n| \leq \max\{|x_m - x_{m-1}|, |x_{n+1} - x_n|\} < \varepsilon$$

suy ra $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy.

v) Nếu $x_n \rightarrow 0$ thì $|x_n - 0| = |x_n| \rightarrow 0$

Nếu $x_n \not\rightarrow 0$ thì $|x_n| \not\rightarrow 0$ nên $\exists \varepsilon > 0$ và dãy con $\{x_{n_k}\}$ sao cho $|x_{n_k}| < \varepsilon$. Mặt khác, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên $\exists N : \forall m, n > N, |x_m - x_n| < \varepsilon$. Ta sẽ chứng minh $|x_m| = |x_{m+1}| = L, \forall m > N$. Thật vậy, cố định $n_k > N$, ta có $|x_m| = |x_m - x_{n_k} + x_{n_k}| = \max\{|x_m - x_{n_k}|, |x_{n_k}|\} \text{ (theo i) } = |x_{n_k}|, \forall m > N$

Vậy $\{x_n\}$ là dãy dừng. •

1.1.8. Định lý.

(Các điều kiện tương đương của chuẩn phi Archimede)

Cho F là một trường, $|\cdot|$ là một chuẩn trên F . Các điều sau là tương đương:

i) $|\cdot|$ là chuẩn phi Archimede

ii) $|2| \leq 1$

iii) $|n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} = \{n = n.1 / n \in \mathbb{N}, 1 \text{ đơn vị của } F\}$

iv) N bị chặn. Nghĩa là, $\exists c > 0 : |n| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$

Chứng minh.

$i \Rightarrow ii)$ ta có $|2| = |1+1| \leq \max\{|1|, |1|\} = 1$ suy ra $|2| \leq 1$

ii $\Rightarrow$ iii) Với mọi $n \in N$, giả sử $n = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \dots + a_s 2^s$ với $0 \leq a_i \leq 1, 2^s \leq n < 2^{s+1}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} |n| &= |a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \dots + a_s 2^s| \leq |a_0| + |a_1| |2| + |a_2| |2^2| + \dots + |a_s| |2^s| \\ &\leq 1 + |2| + |2^2| + \dots + |2^s| \leq s+1 \text{ (vì } |2| \leq 1) \end{aligned}$$

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, giả sử $n^k = b_0 + b_1 2 + b_2 2^2 + \dots + b_t 2^t, 2^t \leq n^k < 2^{s+1}$ thì $|n^k| \leq t+1$. Ta có $n < 2^{s+1}$ suy ra $n^k < 2^{(s+1)k}$ mà $n^k \geq 2^t$ nên $2^t < 2^{(s+1)k}$ do đó $t < (s+1)k$

Khi đó $t+1 \leq (s+1)k$, mặt khác $|n^k| \leq t+1$ nên $|n^k| \leq (s+1)k$ suy ra $|n| \leq \sqrt[k]{s+1} \sqrt[k]{k}$

Vậy $|n| \leq 1$ khi $k \rightarrow \infty$

iii $\Rightarrow$ iv) Hiển nhiên

iv $\Rightarrow$ i) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$|x+y|^n = |(x+y)^n| = \left| \sum_{k=1}^n C_n^k x^k y^{n-k} \right| \leq \sum_{k=1}^n |C_n^k| |x^k| |y^{n-k}|$$

mà N bị chặn nên có $c > 0: |C_n^k| \leq c$, do đó $|x+y|^n \leq (n+1)c (\max\{|x|, |y|\})^n$ suy ra

$$|x+y| \leq \sqrt[n]{(n+1)c} (\max\{|x|, |y|\}) \text{ nên } |x+y| \leq \max\{|x|, |y|\} (n \rightarrow \infty). \quad \bullet$$

1.1.9 Hệ quả.

Nếu F là trường đặc số p thì mọi chuẩn trên F đều là chuẩn phi Archimede.

Chứng minh

Với mọi $m \in N$, ta có $m = pq + r, 0 \leq r \leq p-1$ suy ra $m.1 = pq.1 + r.1 = r.1$. Do đó,

$$N = \{0, 1, \dots, p-1\}$$

suy ra N bị chặn. Vậy mọi chuẩn trên F đều là chuẩn phi Archimede.

1.1.10. Mệnh đề :

$\mathbb{I}[x]$ là vành các đa thức của x và $\mathbb{I}(x) = \left\{ s = \frac{f}{g} ; f, g \in \mathbb{I}[x], g \neq 0 \right\}$ là trường các phân

thức của x .

$$\text{Lấy } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 1, \text{ đặt } |f| = \begin{cases} 0 & f = 0 \\ \rho^{\deg f} & f \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } s = \frac{f}{g} \in \mathbb{K}(x), \text{ đặt } |s| = \left| \frac{f}{g} \right| = \frac{|f|}{|g|}, g \neq 0$$

Khi đó $|\cdot|$ là chuẩn phi Archimede.

1.2. Xây dựng trường số p-adic

1.2.1. Định nghĩa.

Cho p là một số nguyên tố cố định. Với mỗi $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, ta luôn có

$$x = p^\alpha \cdot \frac{m}{n} \left(\begin{matrix} m, n \in \mathbb{Z}, (m, n) = 1 \\ (m, p) = 1, (n, p) = 1 \end{matrix} \right)$$

α gọi là p -số mũ của x , ký hiệu $\text{ord}_p(x) = \alpha$. Quy ước: $\text{ord}_p(0) = \infty, \infty \pm a = \infty$.

1.2.2. Mệnh đề

Cho ρ là một số thực thỏa $0 < \rho < 1$ và p là một số nguyên tố. Ánh xạ

$$|\cdot|_\rho : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto |x|_\rho = \rho^{\text{ord}_p(x)}$$

là một chuẩn phi Archimede trên $\mathbb{K}$ với quy ước $\rho^\infty = 0$

1.2.3. Mệnh đề.

Với mỗi số nguyên tố p , ta có chuẩn

$$|x|_p = \left(\frac{1}{p} \right)^{\text{ord}_p(x)}, \forall x \in \mathbb{K}$$

Chuẩn $|\cdot|_p$ được gọi là chuẩn p -adic hay chuẩn p . Chuẩn p là chuẩn phi Archimede.

1.2.4. Định lý Ostrowsky.

Mọi chuẩn không tầm thường trên $\mathbb{K}$ đều tương đương với giá trị tuyệt đối thông thường hoặc $|\cdot|_p$ (p là một số nguyên tố).

1.2.5. Xây dựng trường số p-adic $\mathbb{Q}_p$.

Từ định lý Ostrowsky ta thấy mọi chuẩn không tầm thường trên $\mathbb{Q}$ đều tương đương với giá trị tuyệt đối thông thường $|\cdot|$ hoặc là chuẩn phi Archimede $|\cdot|_p$ (p là một số nguyên tố). Mặt khác, ta biết rằng làm đầy đủ $\mathbb{Q}$ theo $|\cdot|$ ta được trường số thực $\mathbb{R}$.

Vậy làm đầy đủ $\mathbb{Q}$ theo $|\cdot|_p$ ta sẽ được trường mới mà ta gọi là trường các số p-adic $\mathbb{Q}_p$. Cụ thể ta xây dựng như sau :

Xét $|\cdot|_p$ là chuẩn p -adic trên $\mathbb{Q}$; $|x| = \left(\frac{1}{p}\right)^{ord_p(x)}, \forall x \in \mathbb{Q}$. Ký hiệu S là tập tất cả các dãy cauchy trong $\mathbb{Q}$ theo chuẩn $|\cdot|_p$. Trên S xét quan hệ tương đương $\sim$ cho như sau:

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{Q}, \{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Ký hiệu $\mathbb{Q}_p = S / \sim = \{ \overline{\{x_n\}} : \{x_n\} \text{ Cauchy trong } \mathbb{Q} \text{ theo } |\cdot|_p \}$. Ta sẽ trang bị hai phép toán cộng và nhân cho $\mathbb{Q}_p$ để nó trở thành một trường.

$$\text{Phép cộng: } \forall x = \overline{\{x_n\}}, y = \overline{\{y_n\}} \in \mathbb{Q}_p, x + y = \overline{\{x_n + y_n\}}$$

$$\text{Phép nhân: } \forall x = \overline{\{x_n\}}, y = \overline{\{y_n\}} \in \mathbb{Q}_p, x \cdot y = \overline{\{x_n \cdot y_n\}}$$

Với hai phép toán cho như trên $\mathbb{Q}_p$ là một trường với:

$$\text{Phần tử không: } \bar{0} = \overline{\{x_n = 0\}}$$

$$\text{Phần tử đơn vị: } \bar{1} = \overline{\{x_n = 1\}}$$

$$\text{Phần tử đối: } x = \overline{\{x_n\}} \Rightarrow -x = \overline{\{-x_n\}}$$

$$\text{Phần tử nghịch đảo: Với } \overline{\{x_n\}} \neq \bar{0} \text{ suy ra } x_n \neq 0 \text{ nên } \exists N > 0: \forall n > N, |x_n| = a \neq 0$$

Khi đó dãy $\{y_n\}$ với

$$y_n = \begin{cases} 0, n \leq N \\ x_n^{-1}, n > N \end{cases}$$

là một dãy cauchy trong $\mathbb{Q}$ theo chuẩn $|\cdot|_p$, và dễ thấy $\overline{\{x_n\}} \cdot \overline{\{y_n\}} = \bar{1}$. Tức phần tử nghịch đảo của $\overline{\{x_n\}}$ là phần tử $\overline{\{y_n\}}$

Xét $\theta: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}_p, \theta(x) = \overline{\{x_n = x\}}, \forall x \in \mathfrak{a}$, θ là đơn cấu trường. Do đó, ta có thể coi $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_p$.

Với mỗi $x = \overline{\{x_n\}} \in \mathfrak{a}_p$, ta định nghĩa $|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$. Định nghĩa này hợp lý. Thật vậy,

Đầu tiên luôn luôn tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$

+ Nếu $x_n \rightarrow 0$ thì $|x_n| \rightarrow 0$ suy ra $|x| = 0$

+ Nếu $x_n \not\rightarrow 0$ thì $|x_n| = a \neq 0, \forall n > N$ suy ra $|x_n| \rightarrow a \Rightarrow |x| = a$

Tiếp theo $|x|$ không phụ thuộc vào cách chọn phần tử đại diện. Giả sử $x = \overline{\{x_n\}} = \overline{\{y_n\}}$ thì $x_n - y_n \rightarrow 0$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$. Mặt khác, ta luôn có $|x_n - y_n| \geq ||x_n| - |y_n||$ suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} (|x_n| - |y_n|) = 0$ hay $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n|$.

$|\cdot|$ định nghĩa như trên là một chuẩn trên $\mathfrak{a}_p$. Hơn nữa, mọi dãy cauchy trong $(\mathfrak{a}, |\cdot|)$ đều hội tụ trong $(\mathfrak{a}_p, |\cdot|)$, tức $(\mathfrak{a}_p, |\cdot|)$ là một mở rộng của $(\mathfrak{a}, |\cdot|)$. •

1.2.6. Định nghĩa đồng dư trong $\mathfrak{a}_p$.

Với $a, b \in \mathfrak{a}_p$ ta định nghĩa $a \equiv b \pmod{p^n} \Leftrightarrow a - b \in \mathfrak{p}^n \Leftrightarrow |a - b| \leq p^{-n}$

1.3. Khai triển p -adic của x trong $\mathfrak{a}_p$.

1.3.1. Bổ đề.

Nếu $x = \overline{\{x_n\}} \in \mathfrak{a}_p$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

1.3.2. Bổ đề.

Cho $x \in \mathfrak{a}_p, |x|_p \leq 1$. Khi đó, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists r \in \mathbb{Z} : |x - r| < p^{-n} (r \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\})$

1.3.4. Định lý.

Cho $x \in \mathfrak{a}_p, |x|_p \leq 1$. Khi đó, x có một đại diện là $\overline{\{a_n\}}_{n=1, +\infty}$ thỏa hai điều kiện

$$1) a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n < p^n (n=1, 2, \dots)$$

$$2) a_n \equiv a_{n+1} \pmod{p^n}, n=1, 2, \dots$$

1.3.2 Khai triển p -adic của x trong $\mathbb{Q}_p$.

i) Với $x \in \mathbb{Q}_p, |x|_p \leq 1$, theo định lý 1.3.4, tồn tại dãy cauchy $\{a_n\}$ trong $\mathbb{Q}_p$ thỏa hai điều kiện $a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n < p^n (n=1, 2, \dots)$ và $a_n \equiv a_{n+1} \pmod{p^n}, n=1, 2, \dots$ để $x = \overline{\{a_n\}}$. Khi đó, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có các khai triển p -phân

$$\begin{aligned} a_n &= b'_0 + b'_1 p + \dots + b'_{n-1} p^{n-1}, \quad b'_i = \overline{0, p-1} \\ a_n &= b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1} + b_n p^n, \quad b_i = \overline{0, p-1} \end{aligned}$$

Mặt khác, $a_n \equiv a_{n+1} \pmod{p^n} \Leftrightarrow a_n - a_{n+1} \equiv 0 \pmod{p^n}$ nên suy ra

$$b'_0 + b'_1 p + \dots + b'_{n-1} p^{n-1} = b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1}$$

do đó $a_n = b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1}$ nên $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i p^i$

Tóm lại với mọi $x \in \mathbb{Q}_p, |x|_p \leq 1, \exists b_i \in \{0, 1, \dots, p-1\} : x = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n p^n$, gọi là khai triển p -adic của x trong $\mathbb{Q}_p$.

ii) Với x không thỏa điều kiện $|x|_p \leq 1$ thì ta sẽ nhân x với một số p^m thích hợp sao cho $x' = x.p^m$ thỏa mãn $|x'|_p \leq 1$. Khi đó $x' = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n p^n$ suy ra $x = \sum_{i=-m}^{+\infty} b_i p^i, b_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Công thức này gọi là khai triển p -adic của x trong $\mathbb{Q}_p$.

CHƯƠNG 2: NHÓM GIÁ TRỊ VÀ TRƯỜNG THẶNG DƯ CỦA CHUẨN PHI ARCHIMEDE

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày mối liên hệ giữa trường thặng dư và nhóm giá trị của một trường F với chuẩn phi Archimede $|\cdot|$ với bao đủ và bao đóng của nó. Ứng dụng các trường định chuẩn để khai triển thành chuỗi. Đặc biệt xây dựng một trường với chuẩn phi Archimede với nhóm giá trị và trường thặng dư cho trước.

2.1. Nhóm giá trị của chuẩn phi Archimede.

2.1.1. Định nghĩa.

Kí hiệu $F^* := \{x \in F : x \neq 0\}$; $X \subset F, |X| := \{|x| : x \in X\}$. Nhóm giá trị G của F là nhóm con $|F^*|$ của nhóm nhân các số thực dương $\mathbb{R}^+$.

$$G = |F^*| = \{|x|, x \in F\}.$$

2.1.2. Ví dụ.

Ví dụ 1. Nhóm giá trị của $\mathbb{R}$: $|\mathbb{R}^*| = \mathbb{R}^+$,

Nhóm giá trị của $\mathbb{C}$: $|\mathbb{C}^*| = \mathbb{R}^+$

Ví dụ 2. Nhóm giá trị của $\mathbb{Q}_p$

$$G = |\mathbb{Q}_p^*| = \{|x|_p, x \in \mathbb{Q}_p^*\} = \left\{ \left(\frac{1}{p} \right)^{\text{ord}_p^x}, x \neq 0 \right\} = \{p^m, m \in \mathbb{Z}\} = \langle p \rangle$$

Nhóm xiclic sinh bởi phần tử p .

•

Ví dụ 3. Nhóm giá trị của $|\cdot|$ trên $\mathbb{R}(x)$ (Mệnh đề 1.1.10).

$$\begin{aligned} G = |\mathbb{R}(x)^*| &= \{|s|, s \in \mathbb{R}(x)^*\} = \left\{ \left| \frac{f}{g} \right|; f, g \in \mathbb{R}[x], g \neq 0 \right\} = \{\rho^{\deg f - \deg g}\} \\ &= \{\rho^m, m \in \mathbb{Z}\} = \langle \rho \rangle \end{aligned}$$

Nhóm xiclic sinh bởi ρ .

•

2.1.3. Định lý.

Hai chuẩn $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ trên F tương đương nhau thì các nhóm giá trị G_1, G_2 đẳng cấu với nhau.

Chứng minh.

Từ định lý 1.1.4. chương 1, ta có : $|\cdot|_1 : |\cdot|_2 \Leftrightarrow |x|_2 = |x|_1^c, \forall x \in K (c > 0)$

$$G_1 = \{a = |x|_1, x \in F\} \text{ suy ra } G_2 = \{b = |x|_2, x \in F\} = \{b = |x|_1^c, x \in F\} = \{a^c, a \in G_1\}$$

Hai nhóm G_1, G_2 đẳng cấu với nhau qua phép đẳng cấu.

$$f: G_1 \rightarrow G_2$$

$$a \mapsto a^c$$

•

2.1.4. Định nghĩa.

G là nhóm giá trị của chuẩn phi Archimede trên trường F .

+ Chuẩn trên F là dày đặc nếu 1 là điểm tụ (điểm giới hạn) của G .

+ Ngược lại, chuẩn trên F là rời rạc nếu 1 không là điểm tụ (điểm cô lập) của G .

2.1.5. Định lý.

1. Chuẩn trên F là dày đặc khi và chỉ khi nhóm giá trị G trù mật trong $\mathbb{R}^+$. 2. Chuẩn trên F là rời rạc khi và chỉ khi nhóm giá trị G là nhóm xiclic $G = \langle \rho \rangle (\rho > 0)$.

Chứng minh.

1.

$\Leftarrow$) Nhóm giá trị G trù mật trong $\mathbb{R}^+$ thì 1 là điểm tụ của G nên chuẩn trên F là dày đặc.

$\Rightarrow$) Chuẩn trên F là dày đặc, khi đó 1 là điểm tụ.

Ta có : nếu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+; 1 < \alpha < \beta$ thì $\sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n+1]{\beta}$ (1) với $n > \frac{\alpha^2}{\beta - \alpha}$. Thật vậy,

$$\beta^n = [\alpha + (\beta - \alpha)]^n > n\alpha^{n-1}(\beta - \alpha) > \alpha^{n+1} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n+1]{\beta}.$$

Bây giờ, ta chứng minh rằng với mọi khoảng số thực $[\alpha, \beta], 1 < \alpha < \beta$ đều chứa ít nhất một phần tử của G .

Do 1 là điểm tụ của G nên với $\varepsilon = \sqrt[n]{\alpha} \exists x \in G : 1 < x < \sqrt[n]{\alpha}$

(Trong khoảng $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, nếu $\exists y \in G$ mà $0 < y < 1$ ta lấy $x = \frac{1}{y} \Rightarrow x > 1$).

Gọi n là số lớn nhất sao cho $1 < x < \sqrt[n]{\alpha}$ nghĩa là $\sqrt[n+1]{\alpha} \leq x < \sqrt[n]{\alpha}$

Khi đó $\sqrt[n+1]{\alpha} \leq x < \sqrt[n+1]{\beta}$ suy ra $\alpha \leq x^{n+1} < \beta$. Như vậy $\exists y = x^{n+1} \in G$ và $y \in [\alpha, \beta)$

Cuối cùng, nếu $0 < \alpha < \beta < 1$ thì ta xét khoảng $\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right]$ ($\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha} > 1$)

Theo chứng minh trên, $\exists y \in G : \frac{1}{\beta} < y \leq \frac{1}{\alpha}$. Khi đó $x = \frac{1}{y} \in G$ suy ra $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\alpha}$ hay $\alpha \leq x < \beta$.

2.

$\Leftrightarrow$ Nếu $G = \langle \rho \rangle$ ($\rho > 0$) thì $\varepsilon = \min \left\{ \left| 1 - \rho \right|, \left| 1 - \frac{1}{\rho} \right| \right\}$ ta có khoảng $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ không chứa

điểm khác 1 của G , nên 1 không là điểm tụ của G

Vậy chuẩn là rời rạc.

$\Rightarrow$ Chuẩn trên F là rời rạc, khi đó 1 không là điểm tụ (điểm cô lập).

Nếu chuẩn là tầm thường thì mệnh đề đúng

Nếu chuẩn là không tầm thường.

Trước hết ta chứng minh rằng :

$\forall a \in G, a > 1$ cũng là điểm cô lập của G . Thật vậy, nếu a là điểm tụ thì : $\frac{x}{a} \in G, \frac{x}{a} \neq 1$

và $\frac{x}{a} \in \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}, 1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)$ suy ra 1 là điểm tụ (mâu thuẫn).

Từ kết quả trên ta suy ra $[1, a]$ chỉ có hữu hạn giá trị của G nên tồn tại giá trị nhỏ nhất $\rho \in G, \rho > 1$.

Ta chứng minh $G = \langle \rho \rangle$. Ta xét 2 trường hợp :

Đầu tiên ta xét trường hợp $\forall x \in G, x > 1$.

Khi đó $1 < \rho \leq x$ suy ra $\exists n \in \mathbb{N} : \rho^n \leq x < \rho^{n+1}$ nên $1 \leq \frac{x}{\rho^n} < \rho$ do đó $\frac{x}{\rho^n} = 1$

(Nếu $\frac{x}{\rho^n} > 1$ mâu thuẫn với giả thiết của ρ nhỏ nhất) nên $x = \rho^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Tiếp theo ta xét trường hợp $x \in G, 0 < x < 1$

Khi đó $\frac{1}{x} > 1$. Áp dụng chứng minh trên ta có $\frac{1}{x} = \rho^n \quad (n \in \mathbb{N})$ nên $x = \rho^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$

Vậy $G = \{\rho^m, m \in \mathbb{Z}\} = \langle \rho \rangle$.

2.1.6. Hệ quả .

Cho $|\mathfrak{g}_1| : |\mathfrak{g}_2|$ trên F . Khi đó :

- $|\mathfrak{g}_1|$ rời rạc khi và chỉ khi $|\mathfrak{g}_2|$ rời rạc.
- $|\mathfrak{g}_1|$ dày đặc khi và chỉ khi $|\mathfrak{g}_2|$ dày đặc.

2.1.7. Hệ quả.

Các chuẩn sau đây là rời rạc :

- Chuẩn là giá trị tuyệt đối thông thường.
- Các chuẩn trên trường hữu hạn.
- Chuẩn $|\mathfrak{g}_p|$ trên $\mathfrak{K}$.
- Chuẩn trên trường $\mathbb{C}(x)$.

Chuẩn phi Archimede dày đặc sẽ được nói đến trong phần 2.4.

2.2. Trường thặng dư của chuẩn phi Archimede.

2.2.1. Mệnh đề.

Cho $|\mathfrak{g}|$ là chuẩn phi Archimede trên trường F . khi đó $\bar{B}_0(1) = \{x \in F : |x| \leq 1\}$ là vành con của trường F và $B_0(1) = \{x \in F : |x| < 1\}$ là ideal tối đại của $\bar{B}_0(1)$.

Chứng minh .

Đầu tiên ta chứng minh $\bar{B}_0(1)$ là vành con của trường F . Thật vậy, với $\forall x, y \in \bar{B}_0(1)$ suy ra $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$

nên $|x - y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq 1$ Hơn nữa $|xy| = |x||y| \leq 1 \Rightarrow xy \in \bar{B}_0(1)$.

Vậy $\bar{B}_0(1)$ là vành con của trường F .

Tiếp theo ta chứng minh $B_0(1)$ là ideal tối đại của $\bar{B}_0(1)$. Ta có với $\forall x, y \in B_0(1)$ suy ra $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases}$ nên

$|x - y| \leq \max\{|x|, |y|\} < 1$ do đó $x - y \in B_0(1)$. Vậy $B_0(1)$ là ideal.

Giả sử có ideal I của $B_0(1)$ sao cho $B_0(1) \subsetneq I \subseteq \overline{B_0(1)}$

Khi đó tồn tại $x \in I, x \notin B_0(1)$ nên $|x|=1, |x^{-1}|=1$. Ta chứng minh $I = \overline{B_0(1)}$.

Thật vậy, $\forall x \in I, x^{-1} \in \overline{B_0(1)}$ suy ra $1 = (x^{-1})x \in I$ nên $I = \overline{B_0(1)}$

Do đó $B_0(1)$ là ideal tối đại của $\overline{B_0(1)}$.

Vậy vành thương $k = \overline{B_0(1)} / B_0(1)$ là trường •

2.2.2. Định nghĩa.

Trường $F_p = \overline{B_0(1)} / B_0(1)$ là trường thặng dư của trường F .

2.2.3. Ví dụ về trường thặng dư.

Ví dụ 1 : Trường thặng dư của $\mathfrak{a}_p$.

Ta có : $\overline{B_0(1)} = \mathfrak{C}_p = \{x \in \mathfrak{a}_p : |x| \leq 1\}$

$$\mathfrak{C}_p^* = \{x \in \mathfrak{a}_p : |x| = 1\}$$

$$B_0(1) = M_p = \{x \in \mathfrak{a}_p : |x| < 1\}$$

$$M_p = \mathfrak{C}_p \setminus \mathfrak{C}_p^* = p\mathfrak{C}_p.$$

Thật vậy, $\forall x = pa \in p\mathfrak{C}_p, |x| = |pa| = |p||a| \leq p^{-1} < 1 \Rightarrow x \in M_p \Rightarrow p\mathfrak{C}_p \subseteq M_p$.

Ngược lại, $\forall x \in M_p$ giả sử $|x| = p^m (m \in \mathfrak{C})$. Do $|x| < 1$ nên $m \leq -1$ suy ra $|x| \leq p^{-1}$.

Mặt khác, $x = pc$ trong đó, $c = \frac{x}{p}$. Ta có $|c| = \frac{|x|}{|p|} = \frac{|x|}{p^{-1}} \leq \frac{p^{-1}}{p^{-1}} = 1 \Leftrightarrow |c| \leq 1 \Leftrightarrow c \in \mathfrak{C}_p$

Từ đó suy ra $x = pc \in p\mathfrak{C}_p$ nên $M_p \subseteq p\mathfrak{C}_p$.

M_p là ideal tối đại của vành $\mathfrak{C}_p$ và trường thặng dư của $(\mathfrak{a}_p, |\mathfrak{q}|)$ là :

$$F_p = \mathfrak{C}_p / M_p = \mathfrak{C}_p / p\mathfrak{C}_p.$$

Hơn nữa trường thặng dư của $(\mathfrak{a}_p, |\mathfrak{q}|)$ là $F_p = \mathfrak{C}_p / p\mathfrak{C}_p$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh $\mathfrak{C}_p / p\mathfrak{C}_p \cong \mathfrak{C}_p / p\mathfrak{C}_p = F_p$. Thật vậy,

xét tương ứng $f: \mathbb{C}/p\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/p\mathbb{C}, a + p\mathbb{C} \mapsto a + p\mathbb{C}$. Khi đó f là đẳng cấu vành.

Đầu tiên ta chứng minh f là đơn ánh. Tức là ta phải chứng minh

$\forall a, b \in \mathbb{C}, a - b = pc \in p\mathbb{C} (c \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow a - b = pc \in p\mathbb{C} (c \in \mathbb{C}_p)$. Thật vậy, $c \in \mathbb{C}$ thì rõ ràng $c \in \mathbb{C}_p$.

Ngược lại, nếu $c \in \mathbb{C}_p$ thì $c = \frac{a-b}{p}$ suy ra $|c| = \frac{|a-b|}{|p|} \leq 1$ nên $|a-b| \leq p^{-1}$ do đó

$(a-b)p \in \mathbb{C}$ nên $c \in \mathbb{C}$. Vậy f là đơn ánh.

Tiếp theo ta chứng minh f là toàn ánh.

$\forall a + p\mathbb{C}_p \in \mathbb{C}/p\mathbb{C}_p$, vì $a \in \mathbb{C}_p$ nên $a = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p^n = a_0 + p \sum_{n=1}^{+\infty} a_n p^{n-1}$ suy ra $a - a_0 = p \sum_{n=1}^{+\infty} a_n p^{n-1}$ mặt khác

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n p^{n-1} \in \mathbb{C}_p$ do đó $a - a_0 \in p\mathbb{C}_p$ nên $a + p\mathbb{C}_p = a_0 + p\mathbb{C}_p = f(a_0 + p\mathbb{C}) \Leftrightarrow f(a_0 + p\mathbb{C}) = a + p\mathbb{C}_p$

Vậy f là toàn ánh

Cuối cùng ta chứng minh f là đẳng cấu. Dễ dàng kiểm tra trực tiếp f là đồng cấu vành. Do đó f là đẳng cấu nên $\mathbb{C}/p\mathbb{C}_p \cong \mathbb{C}/p\mathbb{C} = F_p$

Vậy trường thặng dư của $(\mathfrak{O}_p, |\cdot|_p)$ là $F_p = \mathbb{C}/p\mathbb{C}$.

Ví dụ 2.

Trường thặng dư của $\mathfrak{O}_p(x)$ (mệnh đề 1.1.10)

Ta có :

$$\begin{aligned} \bar{B}_0(1) &= \{h \in \mathfrak{O}_p(x) : |h| \leq 1\} = \{0 \text{ hay } h = \frac{f}{g} \in \mathfrak{O}_p(x) : \left| \frac{f}{g} \right| \leq 1\} \\ &= \{0 \text{ hay } h = \frac{f}{g} \in \mathfrak{O}_p(x) : \rho^{\deg f - \deg g} \leq 1\} = \{0 \text{ hay } h = \frac{f}{g} \in \mathfrak{O}_p(x) : \deg f - \deg g \leq 0\} \end{aligned}$$

$$= \{0 \text{ hay } h = \frac{f}{g} \in \mathfrak{O}_p(x) : \deg f \leq \deg g\}.$$

$$\begin{aligned} B_0(1) &= \{h \in \mathfrak{O}_p(x) : |h| < 1\} = \{0 \text{ hay } h = \frac{f}{g} \in \mathfrak{O}_p(x) : \left| \frac{f}{g} \right| < 1\} \\ &= \{0 \text{ hay } h = \frac{f}{g} \in \mathfrak{O}_p(x) : \rho^{\deg f - \deg g} < 1\} = \{0 \text{ hay } h = \frac{f}{g} \in \mathfrak{O}_p(x) : \deg f - \deg g < 0\} \\ &= \{0 \text{ hay } h = \frac{f}{g} \in \mathfrak{O}_p(x) : \deg f < \deg g\}. \end{aligned}$$

Khi đó Trường thặng dư của $\mathfrak{p}$ là

$$\mathfrak{p} = \overline{B_0(1)} / B_0(1) = \left\{ \bar{0} \text{ hay } \bar{h} = \frac{\bar{f}}{g} : \rho^{\deg f - \deg g} = 1, \frac{f}{g} \in \mathfrak{p}(x) \right\}$$

$$= \left\{ \bar{0} \text{ hay } \bar{h} = \frac{\bar{f}}{g} : \deg f = \deg g, \frac{f}{g} \in \mathfrak{p}(x) \right\}$$

Cuối cùng ta có $\mathfrak{p}$; $\mathfrak{p}$. Thật vậy,

Xét tương ứng $\varphi: \overline{B_0(1)} \rightarrow \mathfrak{p}$

$$h = \frac{f}{g} \in \overline{B_0(1)} \quad f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Đặt $\varphi(h) = \frac{a_n}{b_n}$. Hiển nhiên φ là ánh xạ.

Dễ dàng thấy φ là đồng cấu vành. Thật vậy,

$$h = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}, h' = \frac{a'_m x^m + a'_{m-1} x^{m-1} + \dots + a'_1 x + a'_0}{b'_m x^m + b'_{m-1} x^{m-1} + \dots + b'_1 x + b'_0} \in \overline{B_0(1)}$$

$$\varphi(h + h') = \varphi\left(\frac{(a_n b'_m + a'_m b_n) x^{m+n} + \dots}{b_n b'_m x^{m+n} + \dots}\right) = \frac{a_n b'_m + a'_m b_n}{b_n b'_m} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{a'_m}{b'_m} = \varphi(h) + \varphi(h')$$

$$\varphi(hh') = \varphi\left(\frac{a_n a'_m x^{m+n} + \dots}{b_n b'_m x^{m+n} + \dots}\right) = \frac{a_n a'_m}{b_n b'_m} = \frac{a_n}{b_n} \frac{a'_m}{b'_m} = \varphi(h) \varphi(h').$$

Rõ ràng φ là toàn cấu.

$$\text{Hơn nữa } \ker \varphi = \left\{ h \in \overline{B_0(1)} : \varphi(h) = 0 \right\} = \left\{ h = \frac{f}{g} \in \overline{B_0(1)} : \deg f < \deg g \right\} = B_0(1)$$

Theo định lý Noether: $\overline{B_0(1)} / B_0(1) \cong \mathfrak{p}$. Vậy $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}$.

2.2.4. Định lý.

Hai chuẩn $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ trên F tương đương nhau thì các trường thặng dư tương ứng F_p^1, F_p^2 là như nhau.

Chứng minh.

Cho $|\cdot|_1; |\cdot|_2$. Áp dụng định lý 1.1.4: $|x|_1 \leq 1 \Leftrightarrow |x|_2 \leq 1$ và $|x|_1 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 < 1$

$$\text{nên } \overline{B_0^1(1)} = \{x \in F : |x|_1 \leq 1\} = \{x \in F : |x|_2 \leq 1\} = \overline{B_0^2(1)}$$

$$B_0^1(1) = \{x \in F : |x|_1 < 1\} = \{x \in F : |x|_2 < 1\} = B_0^2(1)$$

$$\text{Vậy } F_P^1 = \overline{B_0^1(1)} / B_0^1(1) = \overline{B_0^2(1)} / B_0^2(1) = F_P^2.$$

2.2.5. Mệnh đề.

Nếu trường F có đặc số p thì trường thặng dư F_p cũng có đặc số p .

Chứng minh.

Nếu F có đặc số p thì $p \cdot 1 = 0$. Khi đó $p \cdot \bar{1} = \overline{p \cdot 1} = \bar{0}$. Vậy F_p cũng có đặc số p •

2.2.6. Nhận xét .

- Nếu $F = \mathbb{Q}(x)$ thì trường thặng dư $\mathbb{Q}_p[x]$; $\mathbb{Q}_p$.
- Nếu $F = \mathbb{C}_p$ thì $\text{Char } F = \text{Char } F_p = p$.
- Nếu $F = \mathbb{R}$ thì $\text{Char } F = \text{Char } F_p = 0$.
- Nếu $F = \mathbb{R}_p$ thì $\text{Char } F_p = p$ nhưng $\text{Char } F = 0$.

2.3. Bao đủ của một trường F .

2.3.1. Định lý .

Cho trường F với chuẩn $\|\cdot\|$ phi Archimede. Khi đó tồn tại duy nhất trường L với chuẩn $\|\cdot\|$ và phép nhúng $i: F \rightarrow L$ sao cho :

1. Chuẩn $\|\cdot\|$ cảm sinh $\|\cdot\|$.
2. L đầy đủ.
3. $i(F)$ trù mật trong L .

Chứng minh.

*Sự tồn tại :

Gọi V là tập hợp các dãy $\{x_n\}$ Cauchy trong F . Trên V ta định nghĩa 2 phép toán

$$\begin{aligned}\{x_n\} + \{y_n\} &= \{x_n + y_n\} \\ \{x_n\} \{y_n\} &= \{x_n y_n\}\end{aligned}$$

Khi đó V là một vành giao hoán có đơn vị. Đặt $I = \{\{x_n\} \in V : \{x_n\} \rightarrow 0\} \subseteq V$.

Ta có : I là ideal tối đại của V . Thật vậy,

$\forall a_n, b_n \in I : \{a_n\} \rightarrow 0, \{b_n\} \rightarrow 0$ suy ra $\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\} \rightarrow 0$ nên $\{a_n\} - \{b_n\} \in I$

$\forall a_n \in I : \{a_n\} \rightarrow 0 \quad \forall \{x_n\} \in V$ nên $\{x_n\}$ bị chặn, do đó $\{a_n\}\{x_n\} = \{a_n x_n\} \rightarrow 0$

suy ra $\{a_n\}\{x_n\} \in I$. Vậy I là ideal tối đại của V .

Hơn nữa, nếu I' là ideal của V sao cho $I \subsetneq I' \subseteq V$

Khi đó tồn tại $\{a_n\} \in I', \{a_n\} \notin I$ nên $\{a_n\} \not\rightarrow 0$. Khi n đủ lớn $a_n \neq 0$, nên tồn tại $\{a_n^{-1}\} \in V$ mà I' là ideal của V nên $\forall \{x_n\} \in V : \{a_n^{-1}\}\{x_n\} \in I'$ suy ra $\{x_n\} = \{a_n\}\{a_n^{-1}\}\{x_n\} \in I'$ do đó $V \subset I'$.

Vậy I là ideal tối đại của V .

Mặt khác I là ideal tối đại của V nên $L = V/I$ là trường với các phép toán :

$$\overline{\{x_n\}} + \overline{\{y_n\}} = \overline{\{x_n + y_n\}} \quad ; \quad \overline{\{x_n\}}\overline{\{y_n\}} = \overline{\{x_n y_n\}}$$

Bây giờ ta chứng minh L là trường cần tìm

Ta có chuẩn $\|\cdot\|$ trên L được định nghĩa $\|\overline{\{x_n\}}\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n|$

Chuẩn trên tồn tại và không phụ thuộc vào dãy đại diện.

Hơn nữa chuẩn $\|\cdot\|$ trên L là chuẩn phi Archimede. Thật vậy,

$$(i) \quad \|\overline{\{x_n\}}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = 0 \Leftrightarrow \{x_n\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \overline{\{x_n\}} = \bar{0}$$

$$(ii) \quad \|\overline{\{x_n\}}\overline{\{y_n\}}\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n y_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| \lim_{n \rightarrow +\infty} |y_n| = \|\overline{\{x_n\}}\| \|\overline{\{y_n\}}\|$$

$$(iii') \quad \|\overline{\{x_n\}} + \overline{\{y_n\}}\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n + y_n| \leq \max \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n|, \lim_{n \rightarrow +\infty} |y_n| \right\} = \max \left\{ \|\overline{\{x_n\}}\|, \|\overline{\{y_n\}}\| \right\}.$$

Đặc biệt phép nhúng

$$i: F \rightarrow L = V/I$$

$x \mapsto \overline{\{x\}}$ là đơn cấu trường.

nên $\forall x \in F, |x| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x| = \|\overline{\{x\}}\| = \|i(x)\|$ suy ra chuẩn $\|\cdot\|$ cảm sinh $\|\cdot\|$.

Giả sử $\overline{\{x_k\}_1}, \overline{\{x_k\}_2}, \dots, \overline{\{x_k\}_n}$ là dãy Cauchy trong L . Phần tử thứ n tùy ý của dãy là 1 lớp $\overline{\{x_k\}_n}$ chứa dãy $\{x_k\}$ trong F .

$$\forall n, \exists y_n \in \{x_n\} \text{ sao cho } |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ Ta có : } |y_m - y_n| = |(y_m - x_m) - (y_n - x_n) + (x_m - x_n)| \\ \leq \max\{|y_m - x_m|, |y_n - x_n|, |x_m - x_n|\} \leq \max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, |x_m - x_n|\right\} \rightarrow 0 ; m, n \rightarrow \infty$$

Vậy dãy $\{y_k\}$ là dãy Cauchy trong F . Do đó $\overline{\{y_k\}} = \bar{x} \in L$. Hơn nữa,

$$\forall n, \|\overline{\{x_k\}_n} - \overline{\{y_n\}\} = |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ nên } \overline{\{x_k\}_n} \rightarrow \overline{\{y_n\}} = \bar{x} \in L. \text{ Vậy } L \text{ đầy đủ.}$$

Cuối cùng $i(F)$ là trù mật. Thật vậy, i là đơn cấu trường nên có thể xem F là trường con của L . Mặt khác, theo 2) mỗi phần tử $x \in L$ là giới hạn của một dãy Cauchy trong F , suy ra $i(F)$ (hay F) trù mật trong L .

*Tính duy nhất :

Giả sử $(L', \|\cdot\|')$ với đơn cấu trường $i': F \rightarrow L'$ thỏa mãn các điều kiện 1), 2), 3).

$\forall x \in L$, tồn tại dãy Cauchy $\{i(x_n)\} \in i(F)$ sao cho $\{i(x_n)\} \rightarrow x$ theo $\|\cdot\|$.

Khi đó, dãy $\{x_n\}$ tương ứng là dãy Cauchy trong F , dãy $\{i'(x_n)\}$ tương ứng là dãy Cauchy trong $i'(F)$. suy ra $\{i'(x_n)\} \rightarrow x' \in L'$. Ta có đẳng cấu trường

$$\varphi: L \rightarrow L' \\ x \mapsto x'$$

Hơn nữa, $i' = \varphi(i)$ và $\|\varphi(x)\| = \|x'\| = \lim |x_n| = \|x\|$ nghĩa là ánh xạ bảo toàn chuẩn. •

2.3.2. Định nghĩa.

Trường $(L, \|\cdot\|)$ trong định lý trên (2.3.1) là một bao đủ của trường $(F, |\cdot|)$

Kí hiệu : $L = \mathbf{F}^{\mathbf{L}}$

Chuẩn $\|\cdot\|$ vẫn được kí hiệu $|\cdot|$ nếu không cần phân biệt.

2.3.3. Định lý.

Cho $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ là hai chuẩn phi Archimede tương đương trên trường F . Giả sử

$(L_1, \|\cdot\|_1), (L_2, \|\cdot\|_2)$ là hai bao đủ của hai chuẩn tương ứng. Khi đó :

1. $L_1 = L_2$
2. $\|\cdot\|_1 : \|\cdot\|_2$

Chứng minh.

1. Lấy $x = \overline{\{x_n\}} \in L_1, \{x_n\}$ là dãy Cauchy đối với $\|\cdot\|_1$ trong F.

Vì $\|\cdot\|_1 : \|\cdot\|_2$ nên $\{x_n\}$ cũng là dãy Cauchy đối với $\|\cdot\|_2$ do đó nó hội tụ trong L_2 và $\|x\|_1 = \|x\|_2^c$ ($c > 0$), nên

$$\|x - x_n\|_1 = \lim \|x - x_n\|_1 = 0 = \lim \|x - x_n\|_2^c = \|x - x_n\|_2$$

suy ra $\{x_n\} \rightarrow x$ theo $\|\cdot\|_2$ do đó $x \in L_2$ hay $L_1 \subset L_2$

Tương tự, $L_2 \subset L_1$. Vậy $L_1 = L_2$.

$$2. \quad \forall x = \overline{\{x_n\}} \in L, \|x\|_1 = \lim \|x_n\|_1 = \lim \|x_n\|_2^c = \left[\lim \|x_n\|_2 \right]^c = \|x\|_2^c. \quad \bullet$$

2.3.4. Định lý.

Nếu $L = F$ thì

1. Nhóm giá trị bằng nhau $G_F = G_L$.

2. Các trường thặng dư đẳng cấu với nhau $F_p ; L_p$.

Chứng minh.

1.

$$G_F = \{\|x\|, x \in F^*\} \quad ; \quad G_L = \{\|x\|, x \in L^*\}$$

Vì $F \subseteq L \Rightarrow G_F \subseteq G_L$. Mặt khác, $\forall a \in G_L, a = \|x\|, x \in L^* ; x = \lim x_n \neq 0$ trong đó $\{x_n\}$ là dãy

Cauchy trong F. Với n đủ lớn thì $|x_n| = |x|$

suy ra $\|x\| = \lim |x_n| = |x| \in G_F$ nên $G_L \subseteq G_F$. Vậy $G_F = G_L$.

2.

$$F_p = \overline{B_0^F}(1) / B_0^F(1) \qquad L_p = \overline{B_0^L}(1) / B_0^L(1)$$

Xét ánh xạ :

$$\varphi : \overline{B_0^F}(1) \rightarrow L_p$$

$$x \quad \text{a} \quad \overline{\{x\}}$$

Dễ dàng nhận ra φ là toàn cấu vành.

$$\text{Hơn nữa } \ker \varphi = \left\{ x \in \overline{B}_0^F(1) : \overline{\{x\}} = \overline{0} \right\} = \left\{ x \in \overline{B}_0^F(1) : |x| < 1 \right\} = B_0^F(1)$$

$$\text{Vậy } \overline{B}_0^F(1) \setminus B_0^F(1) \cong L_p \text{ hay } F_p \cong L_p$$

•

2.4. Bao đóng của một trường.

2.4.1. Định nghĩa.

Trường F là đóng đại số nếu mọi đa thức $f(x) \in F[x]$, $\deg f \geq 1$ đều có nghiệm trên F .

2.4.2. Định nghĩa.

Cho F là một trường. Trường K chứa F được gọi là một bao đóng đại số nếu K đóng đại số và K là nhỏ nhất có tính chất đó.

Kí hiệu: $K = \overline{F}$

2.4.3. Định lý.

Giả sử chuẩn $\|\cdot\|$ phi Archimede rời rạc không tầm thường trên F với nhóm giá trị G_F và trường thặng dư F_p . Chuẩn $\|\cdot\|$ là chuẩn phi Archimede cảm sinh trên bao đóng đại số $\overline{F}$ với nhóm giá trị $G_{\overline{F}}$ và trường thặng dư $\overline{F}_p$. Khi đó :

1. $G_{\overline{F}} = \left\{ a \in \mathbb{I}^+, a^n \in G_F, n \in \mathbb{N} \right\}$ là tập các căn bậc n tùy ý của các giá trị trong G_F .

2. $\overline{F}_p = \overline{(F_p)}$ trường thặng dư của bao đóng đại số bằng bao đóng trường thặng dư.

Chứng minh.

1.

Đặt $A = \left\{ r \in \mathbb{I}^+, r^n \in G_F, n \in \mathbb{N} \right\}$. Ta chứng minh $G_{\overline{F}} = A$

$$\forall r \in G_{\overline{F}} = \left\{ \|x\|, x \in \overline{F}^* \right\} \Rightarrow \exists \alpha \in \overline{F}^* : \|\alpha\| = r$$

Giả sử $\text{Irr}(\alpha, F) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in F[x]$, $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $\|\alpha\| = r = |a_0|^{\frac{1}{n}}$.

suy ra $r^n = |a_0| \in G_F$ nên $G_{\overline{F}} \subseteq A$.

Ngược lại $\forall r \in A, \exists n \in \mathbb{N} : r^n = a \in G_F$ nên $\exists \alpha \in \overline{F}^* : \|\alpha\| = a$

Xét đa thức $f(x) = x^n - \alpha \in F[x]$ có nghiệm $\beta \in \overline{F}$ suy ra $\beta^n - \alpha = 0$ nên $\beta^n = \alpha$ do đó $|\beta|^n = |\alpha|$.

Khi đó $|\beta| = |\alpha|^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} = (r^n)^{\frac{1}{n}} = r$ suy ra $r \in G_{\overline{F}}$ hay $A \subseteq G_{\overline{F}}$

Vậy $A = G_{\overline{F}}$.

•

2.

$$\text{Đặt } k_{\overline{F}} = \overline{F}_p \quad ; \quad \overline{k_F} = \overline{(F_p)}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $k_{\overline{F}} = \overline{k_F}$.

Đầu tiên ta chứng minh $k_{\overline{F}} \subseteq \overline{k_F}$. Thật vậy, $\forall \alpha \in k_{\overline{F}}$ suy ra $\alpha = \overline{\beta}$, $\beta \in \overline{F}, |\beta| \leq 1$.

Giả sử $\text{Irr}(\beta, F) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in F[x], n \in \mathbb{N}$ nên

$$\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \dots + a_1\beta + a_0 = 0$$

Xét $\pi \in F$ sao cho $|\pi| = \max\{|F^*| \cap (0,1)\}$ và $G_F = \{|\pi|^n : n \in \mathbb{Z}\}$ (định lý 2.1.5).

Ta có $\forall i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \exists k_i \in \mathbb{Z} : |a_i| = |\pi|^{k_i}$. Đặt $m = \min\{k_i : i = 0, 1, \dots, n-1\}$

$$|\pi^{-m}a_i| = |\pi|^{-m} \cdot |a_i| = |\pi|^{-m} \cdot |\pi|^{k_i} = |\pi|^{k_i - m} \leq 1 \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ nên } \overline{\pi^{-m}a_i} \in k_F$$

$$\text{Mặt khác : } \pi^{-m}(\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \dots + a_1\beta + a_0) = 0$$

$$\Rightarrow \pi^{-m}\beta^n + \pi^{-m}a_{n-1}\beta^{n-1} + \dots + \pi^{-m}a_1\beta + \pi^{-m}a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\pi^{-m}\beta^n} + \overline{\pi^{-m}a_{n-1}\beta^{n-1}} + \dots + \overline{\pi^{-m}a_1\beta} + \overline{\pi^{-m}a_0} = \overline{0}$$

suy ra $\alpha = \overline{\beta}$ là nghiệm của đa thức $\overline{f} = x^n + \overline{a_{n-1}}x^{n-1} + \dots + \overline{a_1}x + \overline{a_0} \in k_F[x], n \in \mathbb{N}$

nên $\alpha \in \overline{k_F}$. Vậy $k_{\overline{F}} \subseteq \overline{k_F}$

Cuối cùng ta phải chứng minh $\overline{k_F} \subseteq k_{\overline{F}}$. Thật vậy,

giả sử đa thức $\overline{f(x)} = x^n + \overline{a_{n-1}}x^{n-1} + \dots + \overline{a_1}x + \overline{a_0} \in k_F[x]$ là đa thức có $\deg f = n \geq 1$.

Khi đó đa thức $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in F[x]$ có nghiệm $\alpha \in \overline{F}$

Do đó $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0 = 0$ suy ra $\overline{\alpha}$ là nghiệm của

$$\overline{f} = x^n + \overline{a_{n-1}}x^{n-1} + \dots + \overline{a_1}x + \overline{a_0} \in k_F[x] \text{ nên } \overline{\alpha} \in \overline{k_F}. \text{ Mặt khác } \|\alpha\| \leq 1. \text{ Thật vậy,}$$

Nếu $\|\alpha\| > 1$ thì $\|0\| = 0 = \|\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0\|$

$$= \max \left\{ \|\alpha^n\|, \|a_i \alpha^i\| \mid i = 0, 1, \dots, n-1 \right\} = \|\alpha^n\| = \|\alpha\|^n > 1(!).$$

Suy ra $\alpha \in \overline{B_0^F}(1)$ do đó $\overline{\alpha} \in k_F$ nên $\overline{k_F} \subseteq k_F$

Vậy $\overline{k_F} = k_F$ •

2.4.4. Hệ quả.

Nhóm giá trị G_F trù mật trong $\mathbb{R}^+$. Từ đó suy ra chuẩn $\|\cdot\|$ là dày đặc.

Chứng minh.

Lấy $r \in G_F, r > 1, \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt[n]{r} \in G_F$ và $\sqrt[n]{r} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ do đó 1 là điểm tụ của G_F

suy ra G_F trù mật trong $\mathbb{R}^+$. Vậy chuẩn $\|\cdot\|$ là dày đặc (định lý 2.1.5.). •

2.5. Sự khai triển thành chuỗi.

2.5.1. Định nghĩa.

Cho F là một trường với chuẩn rời rạc. Khi đó tồn tại $\pi \in F$ sao cho $|\pi| = \max |F^*| \cap (0, 1)$

và $G_F = |F^*| = \{|\pi|^n : n \in \mathbb{N}\}$ (theo định lý 2.1.5.), $|\pi|$ là phần tử sinh của nhóm giá trị G_F .

2.5.2. Định nghĩa.

Cho F là một trường với chuẩn $\|\cdot\|$ phi Archimede rời rạc.

Trường thặng dư $F_p = \overline{B_0(1)} / \overline{B_0(1)} = \{\overline{a_0}, \overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\}$. Gọi $R = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ tập tất cả các đại diện của

các lớp trong F_p là hệ thặng dư đầy đủ của F_p , nghĩa là :

$$+ a_0 = 0$$

$$+ |a_i| = 1 \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$+ r_1, r_2 \in R; r_1 \neq r_2 \Rightarrow |r_1 - r_2| = 1 \text{ hay } \overline{r_1} \neq \overline{r_2}$$

$$+ \forall x \in \overline{B_0(1)}, \exists r \in R: |x - r| < 1 \text{ hay } \overline{x} = \overline{r}$$

2.5.3. Định lý.

Cho F là một trường với chuẩn $\|\cdot\|$ phi Archimede không tầm thường rời rạc và π, R như định nghĩa trên.

Mỗi phần tử $x \in F, x \neq 0$ có thể khai triển thành chuỗi duy nhất

$$x = \sum_{i=m}^{+\infty} a_i \pi^i \quad (*)$$

Hơn nữa nếu F đầy đủ thì chuỗi $(*)$ hội tụ về một phần tử trong F .

Chứng minh.

Đầu tiên ta chứng minh sự tồn tại của chuỗi.

Lấy $x \in F, x \neq 0$. Khi đó tồn tại $m \in \mathbb{C}$ thỏa $|x| = |\pi|^m = |\pi^m| \Rightarrow |\pi^{-m}x| \leq 1$

suy ra $\exists a_0 \in R : |\pi^{-m}x - a_0| < 1$ do đó $|\pi^{-m}x - a_0| \leq |\pi|$ (do $|\pi| = \max |F^*| \cap (0,1)$)

nên $|\pi^{-1}(\pi^{-m}x - a_0)| \leq 1$. Đặt $x_1 = \pi^{-1}(\pi^{-m}x - a_0)$, khi đó $x_1 \in F, |x_1| \leq 1$ sao cho $\pi^{-m}x = a_0 + x_1\pi$

Lập lại quá trình cho x_1 chúng ta có $\exists a_1 \in R, x_2 \in F, |x_2| \leq 1$ sao cho $x_1 = a_1 + x_2\pi$

Ta có $\pi^{-m}x = a_0 + x_1\pi = a_0 + (a_1 + x_2\pi)\pi = a_0 + a_1\pi + x_2\pi^2$

Với $n \in \mathbb{N}$, theo quy nạp ta có $\pi^{-m}x = a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_n\pi^n + x_{n+1}\pi^{n+1}$

Ở đây $a_i \in R \forall i = 0, 1, \dots, n$; $|x_{n+1}| \leq 1$. Mặt khác $|x_{n+1}\pi^{n+1}| = |x_{n+1}| |\pi|^{n+1} < 1$ suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}\pi^{n+1} = 0$

do đó $\pi^{-m}x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \pi^i$ nên $x = \sum_{i=m}^{\infty} a_i \pi^i \quad m \in \mathbb{C}$

Tiếp theo ta chứng minh tính duy nhất của chuỗi.

Giả sử $x = \sum_{i=m}^{\infty} a_i \pi^i = \sum_{i=m}^{\infty} b_i \pi^i \quad (m \in \mathbb{C}; a_i, b_i \in R)$ thì $\sum_{i=m}^{\infty} (a_i - b_i) \pi^i = 0$

Ta chia cho π^m được $(a_m - b_m) + (a_{m+1} - b_{m+1})\pi + (a_{m+2} - b_{m+2})\pi^2 + \dots = 0$

$\Rightarrow \overline{(a_m - b_m)} + \overline{(a_{m+1} - b_{m+1})\pi} + \overline{(a_{m+2} - b_{m+2})\pi^2} + \dots = 0$

Vì $\overline{\pi} = \overline{0} \quad (\pi \in B_0(1))$ nên $\overline{a_m - b_m} = \overline{0} \Rightarrow \overline{a_m} - \overline{b_m} = 0 \Rightarrow \overline{a_m} = \overline{b_m}$

suy ra $a_m = b_m \quad (do \ a_m, b_m \in R)$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $a_{m+1} = b_{m+1}, a_{m+2} = b_{m+2}, \dots$

Vậy sự khai triển của x là duy nhất.

Cuối cùng nếu F đầy đủ

Ta xét dãy $\{x_n\}$, $x_n = \sum_{i=m}^{+\infty} a_i \pi^i$ với $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots \in \mathfrak{I}$ và $m \in \mathbb{C}$. Ta có

$$|x_n - x_{n+1}| = |a_{n+1}\pi^{n+1}| = |a_{n+1}||\pi^{n+1}| = |a_{n+1}||\pi|^{n+1} \rightarrow 0$$

Do đó dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong F đầy đủ nên hội tụ về 1 phần tử trong F . •

2.5.4. Hệ quả.

Nếu $|x| \leq 1, x \neq 0$ thì $x = a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots$

2.5.5. Định lý.

Cho chuẩn $|\cdot|_p$ phi trên trường F . Khi đó

$$F \text{ compact địa phương khi và chỉ khi } \begin{cases} 1. \text{ Chuẩn là rời rạc} \\ 2. \text{ Trường thặng dư là hữu hạn.} \end{cases}$$

Chứng minh.

$\Rightarrow$)

F là compact địa phương. Lấy $x \in F$ sao cho $|x| > 0$

Trước tiên ta chứng minh chuẩn là rời rạc. Thật vậy,

Giả sử rằng trường thặng dư $F_p = \{\overline{0}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots\}$ là vô hạn, trong đó $|x_n| = 1 \forall n$

và $\forall m \neq n: x_m \neq x_n$ hay $|x_m - x_n| = 1$

Vì $|x.x_n| = |x||x_n| = |x|$ nên $x.x_n \in \overline{B_0}(|x|) \forall n$

Xét dãy $\{x.x_n\}$ trong F . Ta có $\forall m \neq n: |x.x_m - x.x_n| = |x||x_m - x_n| = |x| > 0$

do đó dãy $\{x.x_n\}$ không có dãy con hội tụ.

suy ra $\overline{B_0}(|x|)$ không compact (mâu thuẫn F compact địa phương)

Vậy trường thặng dư F_p là hữu hạn.

Tiếp theo ta chứng minh trường thặng dư là hữu hạn.

Giả sử chuẩn là dày đặc khi đó 1 là điểm tụ của nhóm giá trị G_F .

Khi đó tồn tại dãy tăng $\{a_n\} \rightarrow 1, a_n \in G_F$. Đặt $a_n = |x_n|, x_n \in F, |x_n| \leq 1$

Vì $|x.x_n| = |x||x_n| \leq |x|$ nên $x.x_n \in \overline{B_0}(|x|) \forall n$

Xét dãy $\{x.x_n\}$ trong $\overline{B_0}(|x|)$ ta có

$$\begin{aligned} m < n \Rightarrow |x.x_m - x.x_n| &= |x||x_m - x_n| = |x|\max\{|x_m|, |x_n|\} \\ &= |x|\max\{a_m, a_n\} = |x|.a_n \end{aligned}$$

suy ra $|x.x_m - x.x_n| \rightarrow |x| > 0$ $m, n \rightarrow +\infty$ do đó dãy $\{x.x_n\}$ không có dãy con hội tụ

nên $\overline{B_0}(|x|)$ không compact (mâu thuẫn F compact địa phương)

Vậy chuẩn là rời rạc.

$\Leftarrow$)

Cho chuẩn $|\cdot|$ là rời rạc trên F và trường thặng dư F_p hữu hạn.

Ta cần chứng minh $\overline{B_0}(1)$ compact. Thật vậy, trường thặng dư F_p hữu hạn nên hệ thặng dư đầy đủ hữu hạn.

Giả sử $\{x_n\}$ là dãy tùy ý trong $\overline{B_0}(1)$, $|x_n| \leq 1 \forall n$. Ta chứng minh tồn tại dãy con hội tụ trong $\overline{B_0}(1)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = a_{0n} + a_{1n}\pi + a_{2n}\pi^2 + \dots \quad a_i \in R \forall i \text{ (hệ quả 2.5.4.)}$$

Các phần tử a_{0n} ($n = 0, 1, 2, \dots$) nhận giá trị trong R hữu hạn nên có vô hạn chỉ số n để a_{0n} bằng nhau và đều bằng $b_0 \in R$.

Lấy dãy con $\{x_{0n}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho số hạng đầu tiên của mỗi phần tử bằng b_0 . Trong dãy $\{x_{0n}\}$ các phần tử a_{1n} ($n = 0, 1, 2, \dots$) nhận giá trị trong R hữu hạn nên có vô hạn chỉ số n để a_{1n} bằng nhau và đều bằng $b_1 \in R$. Nên lấy dãy con $\{x_{1n}\}$ của $\{x_{0n}\}$ sao cho số hạng thứ hai của mỗi phần tử bằng b_1 .

Tiếp tục quá trình ta có $\forall m \in \mathbb{N}$ tồn tại dãy $\{x_{mn}\}$ là dãy con của dãy $\{x_{m-1n}\}$ sao cho số hạng thứ $m+1$ của mỗi phần tử bằng $b_m \in R$. Mặt khác dãy đường chéo của $\{x_{mn}\}$ là dãy con của $\{x_n\}$ và $\{x_{mn}\} \rightarrow b = b_0 + b_1\pi + b_2\pi^2 + \dots \quad m \rightarrow +\infty$. Hơn nữa $|b| \leq 1 \Rightarrow b \in \overline{B_0}(1)$ suy ra $\{x_n\}$ có dãy con hội tụ trong $\overline{B_0}(1)$ hay $\overline{B_0}(1)$ compact.

Vậy F compact địa phương. •

2.5.6. Hệ quả.

1. $|\cdot|$ (x) không compact địa phương.

2. Trường thặng dư $\overline{F_p}$ vô hạn.

3. $\overline{F}$ không compact địa phương.

2.6. Xây dựng một trường với chuẩn phi Archimede với nhóm giá trị và trường thặng dư cho trước.

2.6.1. Định lý.

Cho trước trường F . Khi đó tồn tại 1 trường với chuẩn Phi Archimede rời rạc, đầy đủ mà trường thặng dư của nó là F .

Chứng minh.

Đầu tiên ta xây dựng trường các chuỗi Laurent hình thức trên trường F . Ta kí hiệu là $F((X))$.
Phần tử trong $F((X))$ có dạng :

$$f(X) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n X^n \quad (a_n \in F \text{ và } a_{-n} = 0 \text{ với } n \text{ đủ lớn}) \quad \text{hay} \quad f(X) = \sum a_n X^n$$

Ta định nghĩa 2 phép toán sau đây :

$$\begin{aligned} \sum a_n X^n + \sum b_n X^n &:= \sum (a_n + b_n) X^n \\ (\sum a_n X^n)(\sum b_n X^n) &:= \sum c_n X^n \quad (c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j) \end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $F((X))$ là 1 trường. Thật vậy , dễ thấy $F((X))$ là 1 vành với 2 phép toán trên. Phần tử đơn vị là 1

Tiếp theo ta kiểm tra mọi phần tử khác 0 trong $F((X))$ đều khả nghịch

$$\begin{aligned} f_1(X) &= a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n + \dots \quad (a_0 \neq 0) \\ g_1(X) &= b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n + \dots \end{aligned}$$

nếu $f_1(X).g_1(X) = 1$

$$\text{thì} \begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = a_0^{-1} \\ b_1 = \frac{-a_1 b_0}{a_0} \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\text{Giả sử có } b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \Rightarrow b_n = \frac{-(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0)}{a_0}$$

Khi đó tồn tại $g_1(X)$ thỏa $f_1(X).g_1(X) = 1$. Vậy $f_1(x)$ khả nghịch.

$$\begin{aligned}
f(X) &= a_m X^m + a_{m+1} X^{m+1} + a_{m+2} X^{m+2} + \dots \quad (a_m \neq 0, m \in \mathbb{C}) \in F((X)) \\
&= X^m (a_m + a_{m+1} X + a_{m+2} X^2 + \dots) \\
&= X^m \cdot g(X) \quad (g(X) = a_m + a_{m+1} X + a_{m+2} X^2 + \dots)
\end{aligned}$$

Theo chứng minh trên ta có $g(X)$ khả nghịch suy ra tồn tại $f^{-1}(X) = X^{-m} g^{-1}(X)$ nên $f(X)$ khả nghịch. Vậy $F((X))$ là trường.

Tiếp theo ta định nghĩa $\text{ord} f = \min \{n : a_n \neq 0\}$ với mỗi $f(X) \in F((X))$

Khi đó ta định nghĩa chuẩn trên trường $F((X))$:

$$|f| := \begin{cases} 0 & a_n = 0 \forall n \\ e^{-\text{ord} f} & \end{cases}$$

Khi đó $(F((X)), | \cdot |)$ là trường với chuẩn phi Archimede và nhóm giá trị là $\{e^n : n \in \mathbb{Z}\}$

Thật vậy, ta kiểm tra 3 điều kiện

$$\text{i)} \quad |f| \geq 0, |f| = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 \forall n \Leftrightarrow f = 0$$

$$\text{ii)} \quad \text{Với } f, g \in F((X))$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \text{ord}(fg) &= \min \{n : c_n \neq 0\} = \min \left\{ n : \sum_{i+j=n} (a_i b_j) \neq 0 \right\} \\
&= \min \{n : a_n \neq 0\} + \min \{n : b_n \neq 0\} = \text{ord} f + \text{ord} g
\end{aligned}$$

$$\text{suy ra } |fg| = e^{-\text{ord}(fg)} = e^{-(\text{ord} f + \text{ord} g)} = e^{-\text{ord} f} \cdot e^{-\text{ord} g} = |f| |g|$$

$$\text{iii)} \quad \text{Với } f, g \in F((X))$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \text{ord}(f+g) &= \min \{n : a_n + b_n \neq 0\} \geq \min \{ \min \{n : a_n \neq 0\}, \min \{n : b_n \neq 0\} \} \\
&\geq \min \{ \text{ord} f, \text{ord} g \}
\end{aligned}$$

$$\text{nên } |f+g| = e^{-\text{ord}(f+g)} \leq e^{-\min \{ \text{ord} f, \text{ord} g \}} \leq \max \{ |f|, |g| \}$$

suy ra $(F((X)), | \cdot |)$ là trường với chuẩn phi Archimede

Nhóm giá trị là $\{e^n : n \in \mathbb{Z}\} ; (\mathbb{C}, +)$.

Một chuỗi lũy thừa hình thức trên F là 1 phần tử $\sum a_n X^n \in F((X))$ với $a_n = 0$ ($n < 0$).

Khi đó tập $F[[X]]$ của tất cả chuỗi lũy thừa tạo thành 1 vành con của $F((X))$.

Thực tế $F[[X]] = \{f \in F((X)) : |f| \leq 1\}$ là quả cầu đơn vị đóng của $F((X))$.

Tiếp theo để chứng minh định lý ta chứng minh $F[[X]]$ và $F((X))$ đầy đủ.

Đầu tiên ta chứng minh $F[[X]]$ đầy đủ. Thật vậy, ta lấy dãy $\{f_n\}$ Cauchy trong $F[[X]]$

$$f_n(X) = a_{0n} + a_{1n}X + a_{2n}X^2 + \dots$$

$$f_m(X) = b_{0m} + b_{1m}X + b_{2m}X^2 + \dots$$

$$\text{suy ra } |f_n - f_m| = e^{-\text{ord}(f_n - f_m)} \rightarrow 0 \quad m, n \rightarrow \infty$$

do đó $\text{ord}(f_n - f_m) \rightarrow \infty \quad m, n \rightarrow \infty$ nên $\forall i, \exists N_i \forall m, n \geq N_i : \text{ord}(f_n - f_m) \geq i + 1$.

$$\text{Vậy } a_{kn} = b_{km} \quad \forall 0 \leq k \leq i, \forall m, n \geq N_i$$

$$\text{Đặt } c_k = a_{kN_k} \quad (0 \leq k \leq i): f(X) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \dots \in F[[X]]$$

do đó $\text{ord}(f_n - f) \geq i + 1 \quad \forall n \geq N_i$ nên $f_n(X) \rightarrow f(X)$

Vậy $F[[X]]$ đầy đủ.

Tiếp theo ta chứng minh $F((X))$ đầy đủ. Ta lấy $\{f_n\}$ là dãy Cauchy trong $F((X))$

$$\text{nên } \forall \varepsilon > 0, \exists N: |f_n - f_N| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\text{do đó } \forall \varepsilon > 0, \exists N: |f_n| \leq \max\{|f_n - f_N|, |f_N|\} \leq \max\{\varepsilon, |f_N|\} = A \quad \forall n \geq N$$

suy ra $\text{ord}(f_n) \geq k \quad (k \in \mathbb{Z})$. Khi đó $\{X^{-k}f_n\}$ là dãy Cauchy trong $F[[X]]$

nên theo chứng minh trên ta có $X^{-k}f_n(X) \rightarrow g(X)$ nghĩa là $f_n(X) \rightarrow f'(X)$

$$\text{với } f'(X) = X^{-k}g(X) \in F((X)).$$

Vậy $F((X))$ đầy đủ.

Cuối cùng ta chứng minh định lý 2.6.1.

$$\text{Ta xét ánh xạ } \theta: \sum a_n X^n \mapsto a_0$$

Dễ thấy θ là một đồng cấu từ $F[[X]]$ tới F và $\text{Ker}\theta = \{f \in F((X)): |f| < 1\}$.

Vậy trường thương của $F((X))$ đẳng cấu với F

•

2.6.2. Định nghĩa.

Một tập con X của R gọi là sắp thứ tự tốt nếu mỗi tập con khác rỗng của X có phần tử nhỏ nhất.

Ví dụ : Tập hữu hạn, $\mathbb{N}$, $\{-3, -2, -1, 0, 1, \dots\}$

Tập con của tập sắp thứ tự tốt là sắp thứ tự tốt.

$\mathbb{I}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ không phải là tập sắp thứ tự tốt.

2.6.3. Bổ đề 1.

Cho X là tập con của R . Các mệnh đề sau là tương đương :

- i) X sắp thứ tự tốt.
- ii) Mỗi dãy trong X có 1 dãy con tăng.
- iii) X không có dãy giảm nghiêm ngặt. (X không có $a_1, a_2, \dots$ thỏa $a_1 > a_2 > \dots$).

Chứng minh.

i) $\Rightarrow$ ii) X sắp thứ tự tốt. Lấy bất kì $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset X$

Do X sắp thứ tự tốt nên $\exists a_{n_1}$ là phần tử nhỏ nhất trong $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Ta có $\{a_{n_1+1}, \dots, a_n\} \subset B = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}, a_{n_1+1}, \dots, a_n\} \subset X$

Suy ra tồn tại a_{n_2} nhỏ nhất trong $\{a_{n_2+1}, \dots, a_n\}$. Hiển nhiên $a_{n_1} \leq a_{n_2}$

Tiếp tục quá trình ta được dãy tăng $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \dots \leq a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}}$

Vậy mỗi dãy trong X có 1 dãy con tăng

ii) $\Rightarrow$ iii) Mỗi dãy trong X có 1 dãy con tăng

Giả sử trong X có dãy giảm nghiêm ngặt $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$

Mâu thuẫn với mỗi dãy trong X có 1 dãy con tăng.

Vậy trong X không có dãy giảm nghiêm ngặt.

iii) $\Rightarrow$ i) X không có dãy giảm nghiêm ngặt

Giả sử X không sắp thứ tự tốt. Nghĩa là tồn tại tập con A không có phần tử nhỏ nhất.

Lấy bất kì $a_1 \in A$. Vì A không có phần tử nhỏ nhất nên tồn tại $a_2 < a_1$.

Tương tự tồn tại $a_3 < a_2 < a_1$, nên A có dãy giảm nghiêm ngặt (mâu thuẫn).

Vậy X sắp thứ tự tốt.

2.6.4. Bổ đề 2.

i) Cho X là tập sắp thứ tự tốt, $a \in X$. Khi đó a là phần tử lớn nhất của X hoặc có 1 phần tử $a' \in X$ thỏa $a' > a$ và $(a, a') \cap X = \emptyset$.

ii) Một tập sắp thứ tự tốt thì đếm được.

Chứng minh.

i) Giả sử a không là phần tử lớn nhất

ta xét $B = \{b / b \in X, b > a\} \subset X$. Hiển nhiên $B \neq \emptyset$

Do X sắp thứ tự tốt nên tồn tại a' bé nhất trong B suy ra $a' > a$ và $(a, a') \cap X = \emptyset$.

ii) X là tập sắp thứ tự tốt

Lấy a không là phần tử lớn nhất trong X

Do đó có 1 phần tử $a' \in X$, thỏa $a' > a$ và $(a, a') \cap X = \emptyset$.

Mặt khác $\exists r_a \in (a, a') / r_a \in \mathfrak{a}$. Ta xét ánh xạ :

$$f : X \rightarrow \mathfrak{a} \\ a \mapsto r_a$$

Khi đó f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử $r_a = r_b$ trong đó $r_a \in (a, a') / r_a \in \mathfrak{a}$, $r_b \in (b, b') / r_b \in \mathfrak{a}$ và $(a, a') \cap X = \emptyset$, $(b, b') \cap X = \emptyset$. Ta chứng minh $a=b$.

Nếu $a < b$ thì $a < b < r_b = r_a < a'$ nên tồn tại $b \in (a, a') \cap X$ (mâu thuẫn với $(a, a') \cap X = \emptyset$). Tương tự nếu $b < a$ thì $b < a < r_a = r_b < b'$ nên tồn tại $a \in (b, b') \cap X$ (mâu thuẫn với $(b, b') \cap X = \emptyset$) suy ra $a=b$ nên f là đơn ánh.

Vậy X đếm được.

2.6.5. Bổ đề 3.

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$

i) Cho $a \in \mathbb{R}$. Nếu X, Y là tập sắp thứ tự tốt thì $a+X$, $X \cup Y$, $X+Y$ cũng sắp thứ tự tốt và $X \cap (-Y)$ hữu hạn.

ii) Cho $a_1, a_2, \dots$ là 1 dãy trong R thỏa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Nếu $(-\infty, a_n) \cap X$ là tập sắp thứ tự tốt với mọi n thì X cũng là tập sắp thứ tự tốt.

Trong đó : $-X = \{-x : x \in X\}$; $a + X = \{a + x : x \in X\}$; $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$.

Chứng minh.

i)

Đầu tiên ta chứng minh $a+X$ sắp thứ tự tốt. Thật vậy, giả sử $\{b_n\}$ là 1 dãy trong $a+X$ thì dãy $\{b_n - a\}$ là 1 dãy trong X , mà X sắp thứ tự tốt nên tồn tại dãy tăng $\{b_{n_k} - a\}$ là dãy con của $\{b_n - a\}$ (theo bổ đề 2.6.5.) nên $\{b_{n_k}\}$ là dãy tăng mà $\{b_{n_k}\}$ là dãy con của $\{b_n\}$ suy ra trong $\{b_n\}$ tồn tại dãy con $\{b_{n_k}\}$ tăng

Vậy $a+X$ sắp thứ tự tốt.

Tiếp theo ta cần chứng minh $X \cup Y$ sắp thứ tự tốt. Ta lấy dãy $\{a_n\}$ là 1 dãy con của $X \cup Y$. Khi đó tồn tại vô số n để $a_n \in X$ hoặc $a_n \in Y$, có nghĩa tồn tại dãy con $\{a_{n_k}\}$ của dãy $\{a_n\}$ sao cho $\{a_{n_k}\} \subset X$ hoặc $\{a_{n_k}\} \subset Y$ mà X, Y sắp thứ tự tốt nên trong $\{a_{n_k}\}$ có 1 dãy con $\{a_{n_{k_l}}\}$ tăng (theo bổ đề 2.6.5) do đó tồn tại dãy con tăng $\{a_{n_{k_l}}\}$ của dãy $\{a_n\}$

Vậy $X \cup Y$ sắp thứ tự tốt (theo bổ đề 2.6.5).

Hơn nữa $X+Y$ cũng là tập sắp thứ tự tốt. Thật vậy, lấy dãy $\{x_n + y_n\} \subset X + Y$ trong đó $\{x_n\} \subset X$ và $\{y_n\} \subset Y$. Vì $\{x_n\} \subset X$, X sắp thứ tự tốt nên tồn tại dãy $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ là dãy tăng. Mặt khác dãy $\{y_{n_k}\}$ cũng là 1 dãy trong Y mà Y sắp thứ tự tốt suy ra trong $\{y_{n_k}\}$ tồn tại dãy con $\{y_{n_{k_l}}\}$ tăng.

Do đó tồn tại trong $\{x_n + y_n\}$ dãy con $\{x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}}\}$ tăng. Vậy $X+Y$ sắp thứ tự tốt.

Cuối cùng ta chứng minh $X \cap (-Y)$ hữu hạn. Ta có $X \cap (-Y) \subset X$ nên $X \cap (-Y)$ cũng là sắp thứ tự tốt. Giả sử $X \cap (-Y)$ vô hạn

Đầu tiên ta lấy K_1 là tập con khác rỗng của $X \cap (-Y)$ nên tồn tại a_1 nhỏ nhất trong K_1 . Tiếp theo ta xét $K_2 = \{x \in X \cap (-Y) : x > a_1\}$ vì $X \cap (-Y)$ vô hạn nên $K_2 \neq \emptyset$ suy ra tồn tại a_2 nhỏ nhất trong K_2 nên $a_2 > a_1$.

Ta lại xét $K_3 = \{x \in X \cap (-Y) : x > a_2\} \neq \emptyset$ vì $X \cap (-Y)$ vô hạn nên tồn tại a_3 nhỏ nhất trong K_3 khi đó $a_3 > a_2 > a_1$. Tiếp tục quá trình ta có dãy $\{a_n\} \subset X \cap (-Y)$ sao cho $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ nên tồn tại dãy $\{-a_n\}$ giảm nghiêm ngặt trong Y (mâu thuẫn với Y sắp thứ tự tốt)

Vậy $X \cap (-Y)$ hữu hạn.

ii)

Xét tập con S khác rỗng của X . Ta chứng minh S có phần tử nhỏ nhất. Lấy bất kỳ $x \in S$, vì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ nên tồn tại $a_n > x$

Khi đó $\emptyset \neq (-\infty, a_n) \cap S \subset (-\infty, a_n) \cap X$ mà $(-\infty, a_n) \cap X$ là tập sắp thứ tự tốt nên $(-\infty, a_n) \cap S$ là tập sắp thứ tự tốt. Suy ra tồn tại phần tử nhỏ nhất s

Ta chứng minh s là phần tử nhỏ nhất trong S . Nghĩa là với mỗi $a \in S$ thì $a \geq s$.

Thật vậy, nếu $a \leq x$ thì $a \in (-\infty, a_n) \cap S$ mà s là phần tử nhỏ nhất của $(-\infty, a_n) \cap S$ nên $a \geq s$.

Ngược lại, nếu $a > x$ thì $a > x \geq s$ vì s là phần tử nhỏ nhất của $(-\infty, a_n) \cap S$.

Vậy X là tập sắp thứ tự tốt.

2.6.7. Định lý.

Cho trước F là 1 trường và Γ là nhóm con của nhóm nhân $(0, +\infty)$. Khi đó luôn tồn tại 1 trường với chuẩn Phi Archimede đầy đủ mà trường thặng dư của nó đẳng cấu với F và nhóm giá trị bằng Γ .

Chứng minh.

Ta ký hiệu $\text{Log } \Gamma := \{\log x : x \in \Gamma\}$ ở đây $\log$ với chuẩn logarit thông thường. $\log \Gamma$ là 1 nhóm con của $(\mathbb{R}, +)$. Ta định nghĩa $K = \{f : \log \Gamma \rightarrow F : \text{supp } f \text{ là tập sắp thứ tự tốt}\}$, ở đây $\text{supp } f = \{x \in \log \Gamma : f(x) \neq 0\}$ và $r(f)$ là phần tử nhỏ nhất của $\text{supp } f$.

Chúng ta định nghĩa phép toán cộng và nhân trong K :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f * g(x) = \sum_{y \in \log \Gamma} f(y)g(x-y)$$

Định nghĩa trên là hợp lý . Thật vậy, đầu tiên ta chứng minh $f(x) + g(x) \in K$

Giả sử $x \in \text{supp}(f + g)$ thì $f(x) + g(x) \neq 0$ do đó $\begin{cases} f(x) \neq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ nên $\begin{cases} x \in \text{supp } f \\ x \in \text{supp } g \end{cases}$

suy ra $x \in \text{supp } f \cup \text{supp } g$. Vậy $\text{supp}(f + g) \subset (\text{supp } f \cup \text{supp } g)$ mà $\text{supp } f \cup \text{supp } g$ sắp thứ tự tốt (theo bổ đề 2.6.5) nên $\text{supp}(f + g)$ sắp thứ tự tốt.

Vậy $f(x)+g(x) \in K$.

Tiếp theo ta chứng minh $f * g(x) = \sum_{y \in \log \Gamma} f(y)g(x-y)$ là tổng hữu hạn.

Lấy $y \in \log \Gamma$ sao cho $f(y)g(x-y) \neq 0$ khi đó

$$\begin{cases} f(y) \neq 0 \\ g(x-y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \text{supp } f \\ (x-y) \in \text{supp } g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \text{supp } f \\ (y-x) \in -\text{supp } g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \in \text{supp } f \\ y \in x - \text{supp } g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \text{supp } f \\ y \in -\{-x + \text{supp } g\} \end{cases}$$

suy ra $y \in \text{supp } f \cap [-\{-x + \text{supp } g\}]$. Mặt khác $\text{supp } f, \{-x + \text{supp } g\}$ sắp thứ tự tốt

nên theo bổ đề 2.6.5 $\text{supp } f \cap [-\{-x + \text{supp } g\}]$ hữu hạn .

Vậy $\sum_{y \in \log \Gamma} f(y)g(x-y)$ là tổng hữu hạn.

Cuối cùng ta sẽ chứng minh $f * g \in K$

$$\text{Ta có } f * g(x) = \sum_{y \in \log \Gamma} f(y)g(x-y) = \sum_{\substack{y \in \text{supp } f \\ x \in y + \text{supp } g}} f(y)g(x-y)$$

Giả sử $x \in \text{supp}(f * g)$ thì $\begin{cases} y \in \text{supp } f \\ x \in y + \text{supp } g \end{cases}$ suy ra $x \in \text{supp } f + \text{supp } g$

do đó $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g$ mà theo bổ đề 2.6.5 $\text{supp } f \cup \text{supp } g$ sắp thứ tự tốt nên $\text{supp}(f * g)$ sắp thứ tự tốt.

Vậy $f * g \in K$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh K là trường với các phép toán trên. Đầu tiên ta dễ dàng nhận thấy K là vành giao hoán với 2 phép toán trên, đơn vị là

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

Tiếp theo ta chứng minh với mỗi phần tử $0 \neq f \in K$ thì f khả nghịch.

Trước hết ta xét trường hợp $X = \text{supp } f$ có phần tử nhỏ nhất là 0. Khi đó $f(0) \neq 0$ và $f(x) = 0$ với $x \in \log \Gamma, x < 0$.

Đặt $X_1 = X, X_2 = X + X, \dots$. Theo bổ đề 2.6.5 X_n là tập sắp thứ tự tốt.

vì $0 \in X_n$ nên $X_1 \subset X_2 \subset \dots$. Ta kí hiệu $X_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$

Khi đó X_∞ là tập sắp thứ tự tốt. Thật vậy, giả sử a là phần tử bé nhất trong $\{x \in X : x > 0\}$ khi đó với mỗi $x \in X, x > 0$ thì $x \geq a$.

Với mỗi $x \in X_\infty$ và $x < na$ ($n \in \mathbb{N}$) thì $x \in X_n$. Thật vậy, nếu $x \notin X_n$ thì $x \in X_k$ với

$k > n$, do đó $x = x_1 + \dots + x_k$ với $x_i \in X, x_i \neq 0$ mà $x_i \geq a$ với mỗi i nên $x \geq ka > na$ (mâu thuẫn).

Vậy với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có $X_\infty \cap (-\infty, na) \subset X_n$ mà X_n là tập sắp thứ tự tốt nên $X_\infty \cap (-\infty, na)$ là tập sắp thứ tự tốt.

Như vậy X_∞ là tập sắp thứ tự tốt (áp dụng bổ đề 2.6.5)

Bây giờ chúng ta xây dựng hàm g thỏa $g * f = \varepsilon$

Đầu tiên ta xét $g: \log \Gamma \rightarrow F$ thỏa $g(0) = f(0)^{-1}$ và $g(x) = 0 \ \forall x \notin X_\infty$

Như vậy $\text{supp } g \subset X_\infty$ mà X_∞ là tập sắp thứ tự tốt nên $\text{supp } g$ là tập sắp thứ tự tốt. Điều đó chứng tỏ rằng $g \in K$ và $g(0)f(0) = 1$.

Còn với $x \in X_\infty$ ta sẽ xây dựng hàm $g(x)$ bằng phương pháp quy nạp như sau :

Chúng ta cần xây dựng g để :

$$\sum_{y \geq 0} f(y)g(x-y) = 0 \quad (x \in X_\infty, x > 0)$$

$$\text{Khi đó : } f(0)g(x) = -\sum_{y > 0} f(y)g(x-y) \text{ hay } f(0)g(x) = -\sum_{y \geq a} f(y)g(x-y) \quad (x \in X_\infty, x > 0) (*)$$

Nếu $x \in (0, a]$ và $y > a$ thì $x-y < 0$, do đó $f(y)g(x-y) = 0$. Nếu $y = a$ thì $f(a) = 0$

nên $f(y)g(x-y) = 0$ do đó $g = 0$ trên $(0, a]$ (theo (*))

Bây giờ ta định nghĩa quy nạp hàm g .

Hàm $g = 0$ trên $(0, a]$. Giả sử chúng ta xác định $g(x)$ thỏa (*) với $x \in X_\infty \cap (0, na]$, khi đó với

$x \in (na, (n+1)a]$, $y \geq a$ suy ra $(x-y) \in (0, na]$, do đó $g(x-y)$ xác định

theo giả thiết quy nạp, nên với $x \in X_\infty \cap (na, (n+1)a]$

$$g(x) = -\frac{1}{f(0)} \sum_{y \geq a} f(y)g(x-y)$$

Vậy chúng ta đã xây dựng được hàm $g \in K$ thỏa $f * g = \varepsilon$

Tiếp theo với hàm $f \in K$, $f \neq 0$ ta chứng minh f khả nghịch.

Thật vậy, đặt $s = r(f)$, khi đó f khả nghịch khi và chỉ khi $f'(x) = f(x+s)$ khả nghịch. Mặt khác $f'(0) = f(s+0) = f(s) \neq 0$ (do $s = r(f)$)

$$\forall x < 0: x+s < s \text{ nên } f'(x) = f(x+s) = 0 \quad \forall x < 0$$

nên $\text{supp } f'$ có phần tử nhỏ nhất là 0. Theo chứng minh trên f' khả nghịch nên f khả nghịch.

Vậy K là một trường.

Ta định nghĩa chuẩn của f :

$$|f| := \begin{cases} e^{-r(f)} & (f \neq 0) \\ 0 & (f = 0) \end{cases}$$

Ta dễ dàng kiểm tra $f, g, f+g$ khác 0 thì $r(f+g) \geq \min\{r(f), r(g)\}$ và $r(f * g) = r(f) + r(g)$, $|\cdot|$ là 1 chuẩn của K . Nhóm giá trị là $\{e^{-r}: r \in \log \Gamma\} = \Gamma$. Thật vậy, $\text{supp}(f+g) \subset (\text{supp } f \cup \text{supp } g) \Rightarrow r(f+g) \geq \min\{r(f), r(g)\}$.

Ta có $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g$ suy ra $r(f * g) \geq r(f) + r(g)$. Mặt khác

$$\begin{aligned} f * g[r(f) + r(g)] &= \sum_{y \in \text{supp } f} f(y)g[r(f) + r(g) - y] \\ &= f[r(f)]g[r(g)] + \sum_{y > r(f)} f(y)g[r(f) + r(g) - y] = f[r(f)]g[r(g)] \neq 0 \end{aligned}$$

nên $r(f) + r(g) \in \text{supp}(f * g)$ suy ra $r(f) + r(g) \geq r(f * g)$

Vậy $r(f * g) = r(f) + r(g)$

Bây giờ kiểm tra $|\cdot|$ là 1 chuẩn của K . Nếu $f=0$ hoặc $g=0$ thì hiển nhiên $|\cdot|$ là 1 chuẩn của K . Ta chỉ xét trường hợp $f \neq 0, g \neq 0$. Ta kiểm tra 3 điều kiện của chuẩn

i) Hiển nhiên $|f| \geq 0$. $|f| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

ii) $|fg| = e^{-r(fg)} = e^{-(r(f)+r(g))} = e^{-r(f)}e^{-r(g)} = |f||g|$ vì $r(f * g) = r(f) + r(g)$

$$\text{iii)} \quad |f + g| = e^{-r(f+g)} \leq e^{\max\{-r(f), -r(g)\}} \leq \max\{|f|, |g|\}$$

$$\text{vì } r(f + g) \geq \min\{r(f), r(g)\}$$

Vậy $|\bullet|$ là 1 chuẩn của K. Khi đó nhóm giá trị là $\{e^{-r}: r \in \log \Gamma\} = \Gamma$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \quad \overline{B_0}(1) &= \{f \in K : |f| \leq 1\} = \{f \in K : r(f) \geq 0\} = \{f \in K : f(x) = 0 \quad x \in (-\infty, 0)\} \\ B_0(1) &= \{f \in K : |f| < 1\} = \{f \in K : f(x) = 0 \quad x \in (-\infty, 0]\} \end{aligned}$$

Hơn nữa $\theta: f \mapsto f(0)$ là đồng cấu từ $\overline{B_0}(1)$ đến F có $\ker \theta = B_0(1)$ nên trường thặng dư của K đẳng cấu với F.

Vậy trường các lớp thặng dư của K đẳng cấu với F và nhóm giá trị bằng Γ

Cuối cùng ta chứng minh K đầy đủ.

Lấy dãy Cauchy $\{f_n\}$ theo chuẩn $|\bullet|$ trong K. Ta chứng minh $\{f_n\}$ hội tụ trong K.

$$\text{Với } x \in \mathbb{I}, \exists N(x) \text{ sao cho } \forall m, n > N(x) : |f_m(y) - f_n(y)| < e^{-x} \Leftrightarrow e^{-r(f_m - f_n)} < e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow r(f_m - f_n) > x \Leftrightarrow f_m(x) - f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \log \Gamma \cap (-\infty, x]$$

$$\Leftrightarrow f_m(x) = f_n(x) \quad \forall x \in \log \Gamma \cap (-\infty, x]$$

$$\text{nên } f_m(x) = f_n(x) \quad (\forall x \in \log \Gamma) \quad \forall m, n > N(x).$$

Đặt $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_n(x) \quad , n > N(x)$. Tiếp theo ta chứng minh $f(x) \in K$, tức là

$\text{supp } f$ là tập sắp thứ tự tốt. Thật vậy, S là tập con khác rỗng của $\text{supp } f$ với

$$x \in S : f(x) = f_n(x) \quad \forall n > N(x) \text{ khi đó } S \cap (-\infty, x] \text{ là tập khác rỗng. Hơn nữa } y \in S \cap (-\infty, x] \text{ thì}$$

$$f_m(y) = f_n(y) \quad \forall m, n > N(x) \text{ và } 0 \neq f(y) = f_m(y) \quad \forall m > N(y), \text{ suy ra}$$

$$0 \neq f(y) = f_n(y) \quad \forall n > \max\{N(x), N(y)\} \text{ nên } f_n(y) \neq 0 \text{ hay } y \in \text{supp } f_n$$

$$\text{do đó } S \cap (-\infty, x] \subset \text{supp } f_n$$

mà $\text{supp } f_n$ là tập sắp thứ tự tốt suy ra $S \cap (-\infty, x]$ là tập sắp thứ tự tốt nên trong S có phần tử nhỏ nhất.

Như vậy $\text{supp } f$ là tập sắp thứ tự tốt, khi đó $f(x) \in K$

$$\text{Cuối cùng ta có } |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ do định nghĩa của } f(x) \text{ nên } \{f_n\} \rightarrow f(x) \in K.$$

Vậy K đầy đủ. •

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày những vấn đề cơ bản của một trường với chuẩn phi Archimede, như nhóm giá trị và đặc biệt là trường thặng dư của trường với chuẩn phi Archimede. Tiếp đó khảo sát sự tồn tại trường với chuẩn phi Archimede với trường thặng dư và nhóm giá trị cho trước.

Như vậy, luận văn đã trình bày mối liên hệ giữa nhóm giá trị và trường thặng dư của 1 trường với chuẩn phi Archimede với bao đủ và bao đóng đại số của nó . Thấy rõ ứng dụng nhóm giá trị và trường thặng dư trong việc nghiên cứu các trường với chuẩn phi Archimede, ứng dụng trong việc khai triển thành chuỗi.

Đặc biệt luận văn đã mô tả đầy đủ, chi tiết cách xây dựng một trường với chuẩn phi Archimede mà trường thặng dư đẳng cấu với một trường cho trước và nhóm giá trị bằng một nhóm cho trước.

Tài liệu tham khảo.

Tiếng Anh :

- [1].A.J.Baker (2003), An Introduction to p-adic Nubers and p-adic Analysis.
- [2].Neal Koblitz (1984), p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions, Springer.
- [3].Neal Koblitz (1980), p-adic Analysis: a Short Course an Recent work, Cambridge University Press.
- [4].P.C.Hu and C.C.Yang (2000), Meromorphic function over non-Archimedean fiels, Kluwer Academic Publishers, London.
- [5].William Cherry (2009), Lecture on Non-Achimedean Function Thoery Advanced School on p-adic Analysis and Aphplications, The Abdus Salam International Center for Theoretical Physics, Trieste, Italy.
- [6]. William Cherry and Julie Tzu-Yueh Wang (2000), Non-Archimedean Anlytic Maps to Algebraic Curves, Value Distribution Theory and Complex Dynamics, Contemporary Math,(303), American Mathematical Society .
- [7].W.H.Schikhof (1984), Ultrametric calculus, An introduction to p-adic analysis.
- [8]. Z.I.Borevich and I.R.Shafarevich (1966), Number Thoery, Academic Press.
- William Cherry (2009), Lecture on Non-Archimedean Function Theory
Advanced School on p-adic Analysis and Aphplications, The Abdus Salam
International Centre for Theoretical Physics,Trieste, Italy.