

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

VÕ TẤN SỸ

NỘI SUY VÀ MỊN HÓA
BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ : 60. 46. 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu**

Phản biện 1: **PGS. TSKH. Trần Quốc Chiến**

Phản biện 2: **PGS. TS. Huỳnh Thế Phùng**

Luận văn được bảo vệ trước hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ Khoa học ngành Phương pháp toán sơ cấp họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 29 tháng 5 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong chương trình toán học phổ thông, bất đẳng thức là loại toán khó và rất khó. Điều đặc biệt của một số dạng toán bất đẳng thức là tuy khó nhưng có thể được giải hoàn toàn bằng phương pháp sơ cấp, không vượt quá giới hạn của toán học phổ thông.

Với mong muốn thực hiện một đề tài thiết thực phục vụ cho việc giảng dạy Toán của bản thân ở nhà trường phổ thông tôi đã chọn đề tài "**Nội suy và mìn hóa bất đẳng thức đại số**".

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Hệ thống và phát triển một số phương pháp, kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức.

Nghiên cứu một số kỹ thuật nội suy bất đẳng thức nhằm tạo ra một số bất đẳng thức mới từ các bất đẳng thức đã biết, thực chất là sử dụng nội suy để mìn hóa bất đẳng thức đã biết.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu từ các tài liệu, sách chuyên đề của GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu và các sách chuyên đề về bất đẳng thức, các bài báo Toán học về bất đẳng thức, nhằm hệ thống các dạng mẫu mực để phát triển một số phương pháp chứng minh.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu sách giáo khoa trung học phổ thông, các tài liệu tham khảo dành cho giáo viên, tạp chí toán học tuổi trẻ và các đề tài nghiên cứu khoa học có liên quan.

Sưu tầm, phân tích, tổng hợp tư liệu và đối chiếu với thực nghiệm sư phạm ở trường phổ thông.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi. Đóng góp thiết thực cho việc dạy và học bất đẳng thức trong trường phổ thông, đem lại niềm đam mê sáng tạo từ những bài toán cơ bản nhất.

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm có 3 chương:

Chương 1. Một số bất đẳng thức cổ điển

Giới thiệu một số phương pháp, kỹ thuật về ứng dụng bất đẳng thức AM - GM, Cauchy - Schwarz trong giải toán bất đẳng thức.

Chương 2. Các bài toán nội suy bất đẳng thức

Trình bày phương pháp nội suy bất đẳng thức bậc hai trên một đoạn, nội suy bất đẳng thức trong lớp hàm đơn điệu.

Chương 3. Mịn hóa một số bất đẳng thức đại số

Nghiên cứu các phương pháp mịn hoá bất đẳng thức chứa các giá trị trung bình, thứ tự sắp xếp của dãy số sinh bởi hàm lồi, lõm và sử dụng tam thức bậc hai để sáng tác một số bài toán về bất đẳng thức đại số.

Chương 1

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

1.1 Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Định lý 1.1 (Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz). Với mọi bộ số $(a_i), (b_i), i = 1, 2, \dots, n$, ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(a_i), (b_i)$ là hai bộ tỉ lệ.

1.1.1 Độ gần đều và sắp thứ tự dãy cặp điểm

Định nghĩa 1.1.

i) Xét các cặp số không âm x, y với tổng không đổi (để đơn giản, ta chọn $x + y = 1$). Ta gọi hiệu

$$\rho(x, y) := \max(x, y) - \min(x, y),$$

là độ lệch của cặp số x, y hay là độ gần đều của cặp số x, y .

ii) Cặp x_1, y_1 được gọi là gần đều hơn (độ lệch nhỏ hơn) cặp x_2, y_2 (hay cặp x_2, y_2 được gọi là xa đều hơn cặp x_1, y_1 .) nếu

$$\rho(x_1, y_1) \leq \rho(x_2, y_2).$$

Định lý 1.2. Xét các cặp số không âm x_j, y_j ($j = 1, 2$) với tổng không đổi (để đơn giản ta chọn $x + y = 1$). Khi đó

$$x_1 y_1 \geq x_2 y_2$$

khi và chỉ khi cặp x_1, y_1 gần đều hơn cặp x_2, y_2 .

Định nghĩa 1.2.

i) Xét các cặp số dương x, y với tích không đổi (để đơn giản, ta chọn $xy = a > 0$). Ta gọi hiệu

$$\rho(x, y) := \max(x, y) - \min(x, y),$$

là độ lệch của cặp số x, y hay là độ gần đều của cặp số x, y .

ii) Cặp x_1, y_1 được gọi là gần đều hơn (độ lệch nhỏ hơn) cặp x_2, y_2 (hay cặp x_2, y_2 được gọi là xa đều hơn cặp x_1, y_1 .) nếu

$$\rho(x_1, y_1) \leq \rho(x_2, y_2).$$

Định lý 1.3. Xét các cặp số dương x_j, y_j ($j = 1, 2$) với tích không đổi (để đơn giản ta chọn $xy = 1$). Khi đó

$$x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2$$

khi và chỉ khi cặp x_1, y_1 gần đều hơn cặp x_2, y_2 .

Bài toán 1.1. Cho

$$B = \left\{ \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{2009} + a_{2010}}{2}, \frac{a_{2010} + a_1}{2} \right\},$$

là một hoán vị của bộ số

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2010}\}.$$

Chứng minh rằng

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{2010}.$$

1.1.2 Kỹ thuật tách và ghép bộ số

Thực chất kỹ thuật này cũng chính là cách sắp thứ tự và điều chỉnh bộ số theo quá trình gần đều hoặc đều theo từng nhóm. Để hiểu rõ hơn về phương pháp này ta xét một bài toán sau:

Bài toán 1.4 (APMO 1991). Cho hai bộ số dương $(a_k), (b_k)$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$, có chung tổng:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Chúng minh rằng

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{a_k + b_k}} \sqrt{a_k + b_k} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k).$$

Từ đó, suy ra

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \geq \frac{(\sum_{k=1}^n a_k)^2}{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Điều cần chứng minh.

Bài toán 1.5 (Japan MO 2004). Cho $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$.

Chúng minh rằng

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leq 2 \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right).$$

Bài toán 1.6 (Romania MO 2004). Chứng minh rằng, với mọi $a, b, c > 0$, ta đều có

$$\frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Bài toán 1.7 (MO USA). Cho các số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)}.$$

Bài toán 1.8 (Iran MO 1998). Cho các số $x, y, z \geq 1$ sao cho $\frac{1}{x} +$

$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Chứng minh

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Bài toán 1.9 (IMO 2005). Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xyz \geq 1$. Chứng minh rằng.

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

1.1.3 Thứ tự và sắp lại thứ tự của bộ số

Kỹ thuật sắp lại thứ tự bộ dãy số cho trước để phù hợp với đặc thù của từng bài toán đóng vai trò tích cực trong việc định hướng sáng tác bài tập cũng như chứng minh một số bất đẳng thức. Để hiểu rõ hơn về cách sử dụng phương pháp này, ta xét 2 bài toán điển hình sau:

Bài toán 1.10. Giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \right)^2 &= \left(\frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{a}{b} \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{c}{b} \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{b}{c} \frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{a}{c} \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{c}{a} \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} + \frac{a^2}{c^3} \right) \left(\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \right). \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} + \frac{a^2}{c^3} \right) \geq \left(\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \right).$$

Thật vậy, ta có các biến đổi sau

$$\begin{aligned} \left(\frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} + \frac{a^2}{c^3} \right) &\geq \left(\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \right) \\ \Leftrightarrow b^5 c^3 + c^5 a^3 + a^5 b^3 &\geq a^5 c^3 + b^5 a^3 + c^5 b^3 \\ \Leftrightarrow a^3 b^3 (a^2 - b^2) + b^3 c^3 (b^2 - c^2) + c^3 a^3 (c^2 - a^2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^3 (b^3 - c^3 + c^3) (a^2 - b^2) + b^3 c^3 (b^2 - c^2) + c^3 a^3 (c^2 - a^2) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a^3(b^3 - c^3)(a^2 - b^2) + c^3(b^2 - c^2)(a^3 - b^3) \geq 0.$$

Suy ra

$$\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} \right)^2,$$

hay

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \leq \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3}.$$

Điều phải chứng minh.

Bài toán 1.11. Giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2} \geq a + b + c.$$

1.2 Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và nhân (AM - GM)

Định lý 1.4 (Bất đẳng thức AM - GM). Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số không âm. Khi đó

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \quad (1.1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

1.2.1 Phương pháp đồng bậc trong bất đẳng thức

Trong một số bài toán bất đẳng thức thường gặp mà dấu đẳng thức xảy ra tại các giá trị biến số bằng nhau và chạy khắp tập $\mathbb{R}^+$ nên các bất đẳng thức bộ phận cũng xảy ra đẳng thức tại các biến số bằng nhau và chạy khắp tập $\mathbb{R}^+$. Khi đó nếu sử dụng bất đẳng thức AM - GM thì ta lấy đại diện đơn thức ở vế lớn cộng thêm vào các đơn thức đồng bậc rồi giải.

Chú ý 1.

i) Đơn thức $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ có bậc là $\alpha + \beta + \gamma$.

ii) Khi sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta cần chú ý lựa chọn thừa số cộng thêm sao cho dấu đẳng thức xảy ra.

Bài toán 1.15 (Canada MO 2002). Chứng minh

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c, \forall a, b, c > 0.$$

Giải. Ta thấy cả hai vế của biểu thức đều bậc 1 nên biểu thức cộng thêm cũng bậc 1.

Theo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + 2(a + b + c) \geq 3(a + b + c).$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 1.18 (Hi Lạp MO 2007). Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{(b + c - a)^4}{a(a + b - c)} + \frac{(c + a - b)^4}{b(b + c - a)} + \frac{(a + b - c)^4}{c(c + a - b)} \geq ab + bc + ca.$$

Bài toán 1.21 (USA MO 1998). Cho a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Bài toán 1.22 (IMO 2001). Cho a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Bài toán 1.24. Cho a, b, c là những số dương phân biệt thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a^{102}}{b^{100}} + \frac{b^{102}}{c^{100}} + \frac{c^{102}}{a^{100}} < 1.$$

Chứng minh rằng luôn tồn tại các số tự nhiên k ($0 \leq k \leq 99$) sao cho bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a^{k+3}}{b^{k+1}} + \frac{b^{k+3}}{c^{k+1}} + \frac{c^{k+3}}{a^{k+1}} \leq \frac{1}{100} + \frac{a^{k+2}}{b^k} + \frac{b^{k+2}}{c^k} + \frac{c^{k+2}}{a^k}.$$

1.2.2 Biến đổi về dạng bất đẳng thức đồng bậc

Trong kỹ thuật này ta sẽ sử dụng giả thiết của từng bài toán cụ thể để đưa các bất đẳng thức đã cho về dạng bất đẳng thức đồng bậc và sử dụng nguyên lý đồng bậc để giải. Xét một số bài toán liên quan sau:

Bài toán 1.25 (France Pre MO 2005). Cho a, b, c là những số thực dương thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3.$$

Giải. Vì biểu thức cho dưới dạng bậc 2 mà bất đẳng thức có bậc cao nhất là 1 nên để áp dụng được nguyên lý đồng bậc ta phải bình phương hai vế của bất đẳng thức.

Ta có biến đổi sau:

$$\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right)^2 \geq 9 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Theo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{b^2c^2}{a^2} \geq 2b^2; \quad \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \geq 2c^2; \quad \frac{c^2a^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{c^2} \geq 2a^2.$$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 1.27 (IMO Shortlist 1998). Cho a, b, c là những số thực dương thỏa mãn điều kiện: $abc = 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Bài toán 1.28 (IMO 1995). Cho a, b, c là những số thực dương thỏa mãn điều kiện: $abc = 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Chương 2

CÁC BÀI TOÁN NỘI SUY

BẤT ĐẲNG THỨC

Bài toán nội suy là một chuyên đề chọn lọc cần thiết cho giáo viên và học sinh hệ Chuyên Toán bậc trung học phổ thông. Trong phạm vi của luận văn, tác giả chỉ đề cập đến một số dạng toán nội suy bất đẳng thức cũng như thuật toán giải chúng. Đây là phần không thể thiếu đối với bạn đọc yêu thích môn Toán.

2.1 Nội suy bất đẳng thức bậc hai trên một đoạn

2.1.1 Dạng nội suy của bất đẳng thức bậc hai

Xuất phát từ bất đẳng thức bậc hai quen biết

$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \forall x, y \geq 0. \quad (2.2)$$

Dấu của đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Cũng xuất phát từ bất đẳng thức cùng dạng với (2.2) (ứng với $0 \leq \alpha \leq 1, x, y > 0$), ta có

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{y}{x}\right)^{1-\alpha} \geq 2,$$

hay

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} y^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha} x^2 \geq 2xy,$$

ta thu được bất đẳng thức dưới dạng tương đương

$$x^{\alpha} y^{2-\alpha} + y^{\alpha} x^{2-\alpha} \geq 2xy.$$

Dấu của đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$x^2 + y^2 \geq x^\alpha y^{2-\alpha} + y^\alpha x^{2-\alpha}.$$

Thật vậy, chia 2 vế bất đẳng thức cho y^2 và đặt $t = \frac{x}{y}$ rồi sử dụng đạo hàm khảo sát hàm số, ta thu được

$$f(t) = t^2 - t^{2-\alpha} - t^\alpha + 1 \geq 0, \forall t \in [0, 1]$$

từ đó, suy ra

$$x^2 + y^2 \geq x^\alpha y^{2-\alpha} + y^\alpha x^{2-\alpha}. \quad (2.3)$$

Hệ thức (2.3) được xem là bất đẳng thức nội suy của bất đẳng thức bậc hai (2.2).

2.1.2 Một số bài toán nội suy

Bài toán 2.1. Xét tam thức bậc hai $P(x) = x^2 - 1$. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình sau:

$$\underbrace{P(P(\dots(P(x))\dots))}_{2010} = 0.$$

Giải. Đặt

$$P_n(x) = \underbrace{P(P(\dots(P(x))\dots))}_n.$$

Nhận xét rằng $P_1(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $P_{n+1}(x) = P_1(P_n(x)) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Vì vậy phương trình $P_n(x) = a$ với $a < -1$ không có nghiệm thực.

Ta chứng minh, bằng phương pháp quy nạp toán học, phương trình $P_n(x) = a$ với $a > 0$ luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Thật vậy, với $n = 1$ thì phương trình $x^2 - 1 = a$ có hai nghiệm thực phân biệt. Giả sử phương trình $P_n(x) = a$ với $a > 0$ có hai nghiệm thực phân biệt. Xét phương trình $P_{n+1}(x) = a$ với $a > 0$. Ta có

$$P_{n+1}(x) = a \Leftrightarrow P_1(P_n(x)) = a \Leftrightarrow (P_n(x) - \sqrt{a+1})(P_n(x) + \sqrt{a+1}) = 0.$$

Do phương trình $P_n(x) + \sqrt{a+1} = 0$ vô nghiệm nên suy trình phương trình $P_{n+1}(x) = a$ với $a > 0$ cũng có hai nghiệm thực phân biệt.

Tiếp theo, bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh phương trình $P_n(x) = 0$ có $n+1$ nghiệm thực phân biệt.

Thật vậy, với $n=1$ và $n=2$ thì ta có kết quả là hiển nhiên. Giả sử, phương trình $P_n(x) = 0$ có $n+1$ nghiệm thực phân biệt. Xét phương trình $P_{n+2}(x) = 0$, ta thu được phương trình

$$P_n^2(x)(P_n^2(x) - 2) = 0 \Leftrightarrow P_n^2(x)(P_n(x) - \sqrt{2})(P_n(x) + \sqrt{2}) = 0,$$

theo giả thiết quy nạp, phương trình trên có $n+3$ nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $P_n(x) = 0$ có đúng $n+1$ nghiệm nên phương trình đã cho có 2011 nghiệm thực phân biệt.

Bài toán 2.2. Giả sử $G(x) = Px^2 + Qx + R$. Khi đó bất đẳng thức $G(x) \geq 0$ thoả mãn với mọi $x \in [a, b]$ khi và chỉ khi $G(a) \geq 0$, $G(b) \geq 0$ và

$$2G\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{G(a) + G(b)}{2} \geq \sqrt{G(a)G(b)}. \quad (2.4)$$

Bài toán 2.3. Chứng minh rằng với mọi tam thức bậc hai $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ ta đều có $|f(x)| \leq 1$, $\forall x \in [a, b]$ xảy ra khi và chỉ khi $|f(a)| \leq 1$, $|f(b)| \leq 1$ và khi đó

$$\begin{aligned} -1 + \sqrt{(1-f(a))(1-f(b))} &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\leq 1 - \sqrt{(1+f(a))(1+f(b))}. \end{aligned}$$

Bài toán 2.4. Cho $p(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn điều kiện

$$\left\{ |p(0)|, \left| p\left(\frac{1}{2}\right) \right|, |p(1)| \right\} \subset [0, 1].$$

Chứng minh rằng $|a| \leq 8$, $|b| \leq 8$, $|c| \leq 1$, và $|2ax + b| \leq 8$, $\forall x \in [0, 1]$.

2.2 Nội suy bất đẳng thức trong lớp hàm đơn điệu

2.2.1 Khai triển một số hàm bậc cao

Ta xét một số kết quả liên quan đến khai triển hàm số như sau:

Định lý 2.1. Với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp $2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) và $f^{2n+1}(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, đều tồn tại đa thức $P_{2n}(x)$ bậc không quá $2n$ sao cho hàm số

$$h(x) := f(x) - P_{2n}(x)$$

đơn điệu trong khoảng (a, b) .

Định lý 2.2. Với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp $2n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) và $f^{2n}(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, đều tồn tại đa thức $P_{2n-1}(x)$ bậc không quá $2n - 1$ sao cho hàm số

$$h(x) := f(x) - P_{2n-1}(x)$$

lồi hoặc lõm trong khoảng (a, b) .

Định lý 2.3. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên $[a, b]$. Khi đó ứng với mọi phép phân hoạch đoạn $[a, b]$ bởi các điểm

$$x_0, x_1, \dots, x_n \quad (a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$$

ta đều có

i) Nếu $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a, b]$ thì

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}) < \int_a^b f(x) dx < \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i).$$

ii) Nếu $f''(x) > 0$, $x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx < \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}.$$

Tương tự, ta cũng có các kết quả đối với hàm nghịch biến và trường hợp $f''(x) < 0$.

2.2.2 Các bài toán nội suy

Bài toán 2.8. Cho số $p \in (0, 1)$ và cho hàm số $f(x) = |x - p|$. Xét các bộ số x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$) trong $[0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + |f(x_3) - f(x_4)|.$$

Giải. Nhận xét rằng, đồ thị hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$ có trục đối xứng $x = p$. Hàm số đã cho nghịch biến trong $[0, p]$ và đồng biến trong $[p, 1]$. Ta bổ sung thêm điểm $x = p$ vào dãy số x_1, x_2, x_3, x_4 và sắp theo thứ tự tăng dần

$$u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq u_4 \leq u_5.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} M &= |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + |f(x_3) - f(x_4)| \\ &\leq |f(u_1) - f(u_2)| + |f(u_2) - f(u_3)| + |f(u_3) - f(u_4)| + |f(u_4) - f(u_5)| \\ &\leq |f(0) - f(p)| + |f(p) - f(1)| = p + (1 - p) = 1. \end{aligned}$$

Vậy $\max M = 1$, chẳng hạn: $x_1 = 0, x_2 = x_3 = p, x_4 = 1$.

Bài toán 2.11. Xét tất cả các dãy số

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2010} < x_{2011} = 2\pi.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=0}^{2010} |\cos(x_i) - \cos(x_{i+1})|.$$

Bài toán 2.14. Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$. Xét tất cả các dãy số $(x_i)_1^4$, sao cho

$$-\infty = a < x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < b = +\infty.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=0}^3 |f(x_i) - f(x_{i+1})| \leq 2.$$

Nhận xét 2.2. Ta nhận thấy rằng ứng với a, b, c, α, β là các số dương, $\alpha > \beta$ thì ta luôn có

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a}\right)^\alpha \geq \left(\frac{a}{b}\right)^\beta + \left(\frac{b}{c}\right)^\beta + \left(\frac{c}{a}\right)^\beta$$

và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Tính chất này có thể nhìn nhận như là hàm số

$$g(x) := \left(\frac{a}{b}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x + \left(\frac{c}{a}\right)^x$$

đồng biến trong $[0, \infty)$.

Như vậy, vấn đề đặt ra: ta có thể thiết lập được hay không các hàm tương tự đối với các bất đẳng thức dạng khác khi đã tường minh cách chứng minh cho từng trường hợp cụ thể, từ đó ta thu được bài toán nội suy bất đẳng thức. Xét một số bài toán liên quan sau:

Bài toán 2.15. Cho a, b, c, α, β là các số dương, $\alpha > \beta$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{b+c}{2a}\right)^\alpha + \left(\frac{c+a}{2b}\right)^\alpha + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^\alpha \geq \left(\frac{b+c}{2a}\right)^\beta + \left(\frac{c+a}{2b}\right)^\beta + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^\beta.$$

Bài toán 2.17. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác α, β là các số dương thoả mãn $\alpha > \beta \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3a}{2b+2c-a}\right)^\alpha + \left(\frac{3b}{2c+2a-b}\right)^\alpha + \left(\frac{3c}{2a+2b-c}\right)^\alpha \\ & \geq \left(\frac{3a}{2b+2c-a}\right)^\beta + \left(\frac{3b}{2c+2a-b}\right)^\beta + \left(\frac{3c}{2a+2b-c}\right)^\beta. \end{aligned}$$

Bài toán 2.18. Cho a, b, c, α, β là các số dương, $\alpha > \beta$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a^2}{bc}\right)^\alpha + \left(\frac{b^2}{ca}\right)^\alpha + \left(\frac{c^2}{ab}\right)^\alpha \geq \left(\frac{a^2}{bc}\right)^\beta + \left(\frac{b^2}{ca}\right)^\beta + \left(\frac{c^2}{ab}\right)^\beta.$$

Chương 3

MỊN HOÁ MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

3.1 Các bài toán chứa giá trị trung bình

3.1.1 Các giá trị trung bình

Trong mục này chúng ta sẽ tìm hiểu các đại lượng trung bình thường gặp trong chương trình toán phổ thông và một số dạng trung bình khác cần đặt tên và tập trung nghiên cứu.

Ta chứng minh được dãy các bất đẳng thức giữa các giá trị trung bình như sau:

$$\begin{aligned} \min(a, b) &\leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a, b), \\ \min(a, b, c) &\leq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \\ &\leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq \max(a, b, c), \\ \min(a_1, a_2, \dots, a_n) &\leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \\ &\leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \leq \max(a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

3.1.2 Một số dạng đa thức đối xứng sơ cấp

Trong mục này ta quan tâm chủ yếu đến các dạng đa thức đồng bậc biến số thực và nhận giá trị thực, đặc biệt là các đa thức đối xứng sơ cấp quen biết liên quan đến các hằng đẳng thức đáng nhớ.

Định nghĩa 3.1. Cho $\bar{a}$ là bộ n số dương $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$). Khi đó

$$f(x) = (x+a_1)(x+a_2) \cdots (x+a_n) = x^n + E_1(\bar{a})x^{n-1} + E_2(\bar{a})x^{n-2} + \cdots + E_n(\bar{a}).$$

Trong đó

$$E_1(\bar{a}) = \sum_{i=1}^n a_i; \quad E_2(\bar{a}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j, \dots; \quad E_n(\bar{a}) = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Đặt $E_0(\bar{a}) = 1$. Ta gọi $E_r(\bar{a})$, ($r \in \{1, 2, \dots, n\}$) là các hàm (đa thức) đối xứng sơ cấp thứ r ($E_r(\bar{a})$ là tổng của tất cả các tích r số khác nhau của bộ số $\bar{a}$).

Ký hiệu

$$P_r^r(\bar{a}) = \frac{r!(n-r)!}{n!} E_r(\bar{a}).$$

3.1.3 Các bài toán liên quan

Bài toán 3.1. Cho $\bar{a}$ là bộ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là các số thực dương. Đặt $P_0 = 1$, $P_k = P_k(\bar{a})$, $E_r = E_r(\bar{a})$. Chứng minh rằng

$$P_{k-1} \cdot P_{k+1} \leq P_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Bài toán 3.2. Chứng minh bất đẳng thức

$$E_{k-1} \cdot E_k \leq E_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Bài toán 3.3. Cho các số $a_i \geq 0$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Chứng minh bất đẳng thức

$$P_1 \geq P_2^{\frac{1}{2}} \geq P_3^{\frac{1}{3}} \geq \dots \geq P_n^{\frac{1}{n}}.$$

Hệ quả 3.1. Từ kết quả Bài toán 3.3, ta thu được bất đẳng thức sau:

$$p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \dots \geq p_n.$$

Với

$$\begin{cases} p_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\ p_2 = \sqrt{\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j}{\binom{n}{2}}} \\ \dots\dots\dots \\ p_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \end{cases}$$

Đặc biệt, $p_1 \geq p_n$ chính là bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân.

Từ hệ quả trên, vấn đề đặt ra: có thể tìm được độ lệch giữa trung bình cộng và trung bình nhân hay không? Giải quyết vấn đề trên ta chứng minh bài toán sau:

Bài toán 3.4. Với mọi dãy số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta đều có

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{1}{n} (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n})^2.$$

3.2 Thứ tự sắp được của dãy số sinh bởi hàm lồi, lõm

3.2.1 Cơ sở lí thuyết

Định lý 3.1 (Bất đẳng thức Jensen). Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng (a, b) . Nếu $f(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$ thì $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ ta luôn có

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right). \quad (3.5)$$

Định lý 3.2 (Bất đẳng thức Jensen suy rộng). Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng (a, b) . Nếu $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$ thì với $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, ta luôn có

$$f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_1 + \epsilon) + f(x_2 - \epsilon),$$

trong đó $0 \leq \epsilon \leq x_2 - x_1$.

Tương tự, ta cũng có kết quả đối với hàm lõm.

Hệ quả 3.2. Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng (a, b) , có $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$ và $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$. Khi đó với mọi dãy số tăng dần $\{u_k\}$ trong $\left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$:

$$x_1 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

và dãy số giảm dần $\{v_k\}$ trong $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2\right)$:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} < v_n < v_{n-1} < \cdots < v_1 < v_0 = x_2,$$

sao cho

$$u_j + v_j = x_1 + x_2, \forall j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

ta đều có

$$f(u_0) + f(v_0) \geq f(u_1) + f(v_1) \geq \cdots \geq f(u_n) + f(v_n).$$

Hay $\{f(u_n) + f(v_n)\}$ là một dãy giảm.

Tương tự, ta cũng có kết quả đối với hàm lõm.

3.2.2 Các bài toán minh họa

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng (a, b) . Nếu $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$ thì với $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, ta đặt

$$\epsilon_r = r(x_2 - x_1), 0 < r < 1.$$

Ta thấy ϵ_r là hàm tăng theo r và $\epsilon_r \geq 0$.

Lại đặt $g(r) = f(x_1 + \epsilon_r) + f(x_2 - \epsilon_r)$, ta có các kết quả sau:

i) Nếu $r_1, r_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right], r_1 \leq r_2$ thì $g(r_1) \geq g(r_2)$.

ii) Nếu $r_1, r_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], r_1 \leq r_2$ thì $g(r_1) \leq g(r_2)$.

iii) Nếu $r_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $r_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, thì

$$r_1 \leq 1 - r_2 \Rightarrow g(r_1) \geq g(r_2),$$

$$r_1 \geq 1 - r_2 \Rightarrow g(r_1) \leq g(r_2).$$

Tương tự, ta cũng có kết quả đối với hàm lõm trên khoảng (a, b) .

Xét một số hàm cơ bản để minh họa cho phương pháp này:

1) Cho hàm số $f(x) = x^2$ là hàm lồi trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

Dựa vào kết quả nêu trên, cho r lần lượt nhận các giá trị $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$, ta có bài toán:

Bài toán 3.8. Cho x_1, x_2 là các số thực. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \left(\frac{4x_1 + x_2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4x_2 + x_1}{5}\right)^2 &\geq \left(\frac{2x_1 + x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}\right)^2 \\ &\geq \left(\frac{2x_1 + 3x_2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3x_1 + 2x_2}{5}\right)^2 \geq 2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

2) Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ là hàm lõm trên khoảng $(-1, +\infty)$.

Dựa vào kết quả trên, cho r lần lượt nhận các giá trị $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}$, ta có bài toán:

Bài toán 3.12. Cho x_1, x_2 là các số thực thoả mãn $x_1, x_2 \geq -1$.

Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x_1 + 2x_2 + 3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2x_1 + x_2 + 3}} &\geq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3x_1 + 2x_2 + 5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2x_1 + 3x_2 + 5}} \\ &\geq \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3x_1 + 4x_2 + 7}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4x_1 + 3x_2 + 7}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x_1 + x_2 + 2}}. \end{aligned}$$

3) Với hàm số $f(x) = \ln(x)$ là hàm lõm trên khoảng $(0, +\infty)$. Chọn các giá trị của r lần lượt bằng $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}$, ta có dãy bất đẳng thức sau:

Bài toán 3.13. Cho x_1, x_2 là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) &\geq \ln \sqrt{\frac{(3x_1 + 2x_2)(3x_2 + 2x_1)}{5}} \geq \ln \sqrt{\frac{(2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1)}{3}} \\ &\geq \ln \sqrt{\frac{(4x_1 + 5x_2)(4x_2 + 5x_1)}{9}} \geq \ln \sqrt{\frac{(3x_1 + 4x_2)(3x_2 + 4x_1)}{7}}. \end{aligned}$$

Nhận xét 3.1. Trên đây tác giả chỉ minh họa đối với một số hàm đơn giản 2 biến số; trong quá trình sáng tác bài tập, ta có thể sử dụng nhiều hàm khác nhau và tổng quát hoá cho trường hợp n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$.

3.3 Một số bài toán min hoá chọn lọc

Trong quá trình giải toán, để chứng minh $f(x) \geq g(x)$ ta có thể nghĩ đến phương pháp tìm $h(x)$ sau đó chứng minh $f(x) \geq h(x)$ và $h(x) \geq g(x)$. Trong phần này ta xét một phương pháp tìm $h(x)$ dựa vào 2 Bổ đề sau:

Bổ đề 3.3. Trong ba số bất kỳ x_1, x_2, x_3 luôn tồn tại hai số x_i, x_j , ($i, j \in \{1; 2; 3\}$) sao cho:

$$\begin{cases} x_i \geq a \\ x_j \geq a \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x_i \leq a \\ x_j \leq a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Bổ đề 3.4. Nếu $\begin{cases} x \geq a \\ y \geq a \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \leq a \\ y \leq a \end{cases}$ ($a \in \mathbb{R}$) thì $xy \geq a(x + y) - a^2$.

Ta sẽ vận dụng 2 Bổ đề này để giải một số bài toán sau:

Bài toán 3.14 (Chào IMO 2007). Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z).$$

Bất đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải. Theo Bổ đề 1, do vai trò của x, y, z trong bài toán là như nhau nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq 1, y \geq 1$ hoặc $x \leq 1, y \leq 1$. Khi đó theo Bổ đề 2 ta có

$$xy \geq x + y - 1 \Leftrightarrow xyz \geq xz + yz - z,$$

(vì $z > 0$), nên suy ra

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq xz + yz - z + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8.$$

Ta sẽ chứng minh

$$xz + yz - z + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z).$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} xz + yz - z + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 &\geq 5(x + y + z) \\ \Leftrightarrow (x + z - 2)^2 + (y + z - 2)^2 + 3(x - 1)^2 + 3(y - 1)^2 + 2(z - 1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng, suy ra

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z),$$

điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài toán 3.15. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức

$$5(x^3 + y^3 + z^3) + 3xyz + 9 \geq 9(xy + yz + zx).$$

Nhận xét 3.2. Với ý tưởng từ hai bài toán trên, bằng cách sử dụng định lý về dấu của Tam thức bậc hai, ta xây dựng được bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.16 (Bài toán tổng quát 1). Cho x, y, z là 3 số thực không âm thì

$$xyz + m(x^2 + y^2 + z^2) + 3m + 2 \geq (2m + 1)(x + y + z). \quad (3.6)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Trong đó m là số thực cho trước và $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Với ý tưởng và phương pháp như trên, ta cũng xây dựng được các bài toán:

Bài toán 3.17 (Bài toán tổng quát 2). Cho x, y, z là 3 số thực không âm thì

$$2xyz + (2n - 1)(x^2 + y^2 + z^2) + 1 \geq 2n(xy + yz + zx). \quad (3.7)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Trong đó n là số thực cho trước và $n \geq 1$

Bài toán 3.19 (Bài toán tổng quát 4). Cho x, y, z là 3 số thực dương thì

$$\begin{aligned} & \alpha(p + 2q)xyz + (mp + 2nq - q)(x^{2\alpha} + y^{2\alpha} + z^{2\alpha}) \\ & + 2\alpha(3mp + 3nq + p - q) - 3(mp + 2np - q) \\ & \geq \alpha(2mp + p)(x + y + z) + 2\alpha nq(xy + yz + zx). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Trong đó m, n, p, q là những số thực thoả mãn $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $n \geq 1$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $\alpha > 1$.

Bằng cách tổng quát hoá các trường hợp trên, ta chứng minh được:

Bài toán 3.22 (Bài toán tổng quát 5). Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm thì

$$(n-1) \prod_{i=1}^n x_i + (n-2) \sum_{i=1}^n x_i^{n-1} + 1 \geq (n-1) \sum_{j=1}^n \prod_{i=1, i \neq j}^n x_i, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3. \quad (3.9)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Nhận xét 3.3. Từ các bài toán tổng quát trên, ta thực hiện các phép biến đổi cơ bản, hoặc có thể áp dụng bất đẳng thức đối với các bộ biến số $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta sẽ sáng tác được vô số bài tập với nhiều dạng toán khác nhau.

KẾT LUẬN

Tóm lại, luận văn "**Nội suy và mịn hoá bất đẳng thức đại số**" đã đạt được một số kết quả sau:

1) Hệ thống và phát triển một số phương pháp, kỹ thuật mới trong chứng minh bất đẳng thức với việc ứng dụng 2 bất đẳng thức cơ bản nhất của chương trình toán phổ thông là AM - GM và Cauchy - Schwarz.

2) Trình bày một số phương pháp nội suy bất đẳng thức bậc hai trên một đoạn, các kỹ thuật nội suy bất đẳng thức đại số trong lớp hàm đơn điệu. Đặc biệt là kết quả của Lupas về ước lượng tam thức bậc hai trên một đoạn, đây là công cụ mới nhất và hữu ích trong quá trình giải toán về tam thức bậc hai.

3) Mịn hoá một số bất đẳng thức chứa các giá trị trung bình, tìm được dãy các bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân và tính được độ lệch giữa chúng. Sắp xếp được thứ tự của dãy số sinh bởi hàm lồi, lõm và dãy bất đẳng thức liên quan, từ đó sáng tác các bài tập mới với việc sử dụng các lớp hàm khác nhau. Bên cạnh đó, tác giả cũng đã sử dụng một số phương pháp mới trong chứng minh bất đẳng thức và xây dựng một số bài toán bất đẳng thức tổng quát.

Mặc dầu đã có nhiều cố gắng trong quá trình thực hiện đề tài nhưng tác giả vẫn chưa giải quyết được ý tưởng mà tác giả đã quan tâm nghiên cứu, đó là tìm biểu thức $x_i + \epsilon_1$, $x_j - \epsilon_2$ để thay thế $x_i + \epsilon$ và $x_j - \epsilon$ với $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$; $\epsilon_1 \geq 0$, $\epsilon_2 \geq 0$, $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ trong mục 3.2.

Hy vọng trong thời gian tới, tác giả sẽ giải quyết được vấn đề này để luận văn được hoàn chỉnh và thiết thực phục vụ cho việc dạy toán ở trường phổ thông.