BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

BÙI THỊ MINH HẢO

PHÂN LOẠI ĐỒNG CHẤT CÁC p – NHÓM THEO NHÓM TIỀM LỰC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2008

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN NGỌC CHÂU

Phản biện 1:……………………………………………
Phản biện 2:……………………………………………

Luận văn sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Phương pháp toán sơ cấp họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày …tháng…năm 2009

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin – Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

I. Lý do chọn đề tài

Hai nhóm G và H được gọi là đồng chất (isoclinic) nếu tồn tại hai đẳng cấu $\varphi: G/Z(G) \longrightarrow H/Z(H)$ và $\psi: [G,G] \longrightarrow [H,H]$ sao cho biểu đồ sau đây giao hoán

$$\begin{tikzcd} G/Z(G) \times G/Z(G) \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "\gamma_G"'] & H/Z(H) \times H/Z(H) \arrow[d, "\gamma_H"'] \\ {[G, G]} \arrow[r, "\psi"] & {[H, H]} \end{tikzcd}$$

trong đó $Z(G)$ và $[G, G]$ lần lượt là nhóm con tâm và nhóm con giao hoán tử của G, γ_G và γ_H là các ánh xạ được cho bởi $(\bar{x}, \bar{y}) \longmapsto [x, y]$, với x, y thuộc G hoặc x, y thuộc H.

Quan hệ đồng chất được định nghĩa như trên là một quan hệ tương đương trên tập các nhóm. Mỗi lớp tương đương được gọi là một lớp đồng chất (isoclinic class) hay còn gọi là một họ (family). Nếu hai nhóm G và H cùng thuộc một họ, ta kí hiệu $G \sim H$.

Nhóm K được gọi là nhóm tiềm lực (capable group) nếu tồn tại một nhóm G sao cho $G/Z(G) \cong K$. Bài toán phân loại đồng chất các nhóm G theo nhóm tiềm lực K, nghĩa là các nhóm G sao cho $G/Z(G) \cong K$, đã được P.Hall đề ra năm 1939 và đến nay vẫn còn là một bài toán mở.

Cho *p* là một số nguyên tố, Z_p là trường hữu hạn gồm *p* phần tử, $Z_p^n = Z_p \times Z_p \times \ldots \times Z_p$ (*n* lần) và *G* là một *p*-nhóm hữu hạn sao cho $G/Z(G) \cong Z_p^n$. Khi $n = 0$ thì *G* là một nhóm giao hoán. Với $n > 0$, theo P.Hall, Z_p^n là nhóm tiềm lực khi và chỉ khi $n \geq 2$.

Bài toán phân loại đồng chất các nhóm theo nhóm tiềm lực Z_p^n đã được sự quan tâm của nhiều người, chẳng hạn M.Hall và J.Senior, R.James, Nguyễn Ngọc Châu .... Đặc biệt, trong bản tóm tắt luận án PTS của Nguyễn Ngọc Châu (1988) đã đưa ra được một bất biến của lớp đồng chất những nhóm, theo nhóm tiềm lực Z_p^n , gọi là độ rắn của họ và đã chứng tỏ được tính hiệu quả của bất biến độ rắn đối với bài toán phân loại, đồng thời bài toán phân loại đồng chất các 2-nhóm theo nhóm tiềm lực Z_p^4 cũng đã được giải quyết xong.

Để tìm hiểu bài toán này tôi chọn đề tài luận văn thạc sĩ của mình là: **"Phân loại đồng chất các p-nhóm theo nhóm tiềm lực Z_p^4".**

II. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

- Nghiên cứu p- nhóm hữu hạn và các tính chất của nó.
- Nghiên cứu quan hệ đồng chất trên tập các nhóm.
- Nghiên cứu ma trận đặc trưng của các họ nhóm theo nhóm tiềm lực Z_p^n.
- Nghiên cứu độ rắn cũng như một số bất biến khác của các lớp đồng chất.
- Tìm hiểu sự tác động của các ma trận sơ cấp lên ma trận đặc trưng của các lớp đồng chất.

- Tìm dạng chuẩn của ma trận đặc trưng đối với từng lớp đồng chất.
- Phân lớp đồng chất các p- nhóm theo nhóm tiềm lực Z_p^4.

III. Phương pháp nghiên cứu

- Đọc các tài liệu về nhóm, p- nhóm hữu hạn và các tài liệu liên quan đến bài toán phân loại đồng chất các nhóm.
- Khảo sát bình phương ngoài của các ma trận sơ cấp.
- Khảo sát sự tác động của các ma trận sơ cấp lên ma trận đặc trưng của các lớp nhóm.
- Sử dụng các bất biến của lớp đồng chất, kết hợp với việc tìm dạng chuẩn của ma trận đặc trưng để tiến hành phân lớp các p- nhóm theo nhóm tiềm lực Z_p^4.

IV. Cấu trúc luận văn

Mở đầu

Chương I. p – nhóm và quan hệ đồng chất.

Chương II. Phân loại đồng chất các p- nhóm theo nhóm tiềm lực Z_p^4.

Kết luận

Danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1. *p*-NHÓM HỮU HẠN VÀ QUAN HỆ ĐỒNG CHẤT

Để thuận tiện cho người đọc, chương này nhắc lại một số khái niệm và kết quả quen biết về p- nhóm hữu hạn và quan hệ đồng chất giữa các nhóm. Các chi tiết liên quan cũng như các phép chứng minh có thể xem trong các tài liệu về lý thuyết nhóm.

1.1. *p*- Nhóm hữu hạn

Cho một nhóm G và $x, y \in G$. Ta có các kí hiệu: $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ gọi là giao hoán tử của x và y; $[G, G] = \langle [x,y];\ x,y \in G \rangle$ là nhóm con sinh bởi tất cả các giao hoán tử của x và y, gọi là nhóm con giao hoán tử của G; $Z(G) = \{ z \in G : [z, x] = 1 ,\ \forall x \in G \}$ là nhóm con tâm của G; $[G, G]$ và $Z(G)$ là các nhóm con chuẩn tắc của G.

Một nhóm G có tính chất $[G, G] \subset Z(G)$ được gọi là nhóm lũy linh lớp 2.

1.1.1. Mệnh đề: Với $x, y, z \in G$, ta có

$$[x, y]^{-1} = [y, x]$$

$$[xy, z] = [x, z]^{y}\,[y, z]$$

$$[x, yz] = [x, z]\,[x, y]^{z}$$

1.1.2. Định nghĩa: Một p- nhóm A được gọi là aben sơ cấp nếu A aben và mọi phần tử $x \in A$ đều thỏa mãn $x^{p} = 1$.

Mọi nhóm aben đều được xem như một Z- modun khi phép toán của nhóm được viết theo phép cộng. Đối với p- nhóm aben sơ cấp A, cấu trúc modun đó cảm sinh tự nhiên một cấu trúc Z_p-modun, hay nói cách khác A là một không gian vectơ trên trường Z_p. Một đồng cấu giữa hai nhóm aben sơ cấp là một ánh xạ tuyến tính giữa những không gian vectơ tương ứng.

1.1.3. Mệnh đề:

i) Giả sử G là một p- nhóm sao cho $G/Z(G) \cong Z_p^n$, $n \geq 2$, và $\{x_iZ(G)\}$, $i = 1,2,\ldots,n$, là một cơ sở của $G/Z(G)$, khi đó $[G, G]$ là aben sơ cấp và $\{ [x_i, x_j]; 1 \leq i < j \leq n\}$ là một hệ sinh của $[G, G]$.

ii) Nếu G là một p- nhóm lũy linh lớp 2, ta có

$$[G; G] \text{ là aben sơ cấp } \Leftrightarrow G/Z(G) \text{ là aben sơ cấp.}$$

1.1.4. Định nghĩa: Giả sử G là một nhóm, $a \in G$. Tập con $C_G(a) =\{ x \in G \mid x^{-1}ax = a \}$ là một nhóm con của G, và được gọi là nhóm tâm hóa của phần tử a trong nhóm G.

1.1.5. Định nghĩa: Cho G là một nhóm; $a, x \in G$. Ký hiệu $a^x = x^{-1}ax$ và gọi là phần tử liên hợp với a bởi phần tử x.

1.1.6. Mệnh đề: Cho một nhóm G. Trên G ta xác định một quan hệ hai ngôi R như sau: $\forall a, b \in G, aRb \Leftrightarrow \exists x \in G : b = a^x$. Khi đó quan hệ R là quan hệ tương đương trên nhóm G và được gọi là quan hệ liên hợp.

1.1.7. Bổ đề: Cho G là một nhóm, khi đó

i) $f: G/C_G(a) \to C_a$ là một song ánh.

$$\bar{g} \mapsto f(\bar{g}) = g^{-1}ag$$

ii) $Z(G) \leq C_G(a)$. Nếu G không giao hoán thì $Z(G) \not\leq C_G(a)$.

1.1.8. Mệnh đề: Cho một nhóm hữu hạn G, $\forall a \in G$, ta có

i) $a \in Z(G) \Leftrightarrow C_a = \{a\}$

ii) $|C_a| = [G : C_G(a)]$

iii) $|C_a| \leq |[G, G]|$

iv) $|C_a| \leq |G/Z(G)|$.

Nếu nhóm G là một nhóm không giao hoán thì $|C_a| < |G/Z(G)|$

1.1.9. Hệ quả: Giả sử G là một p-nhóm hữu hạn có cấp p^n, $|C_a| = p^k$, $|G/Z(G)| = p^h$ và $|[G, G]| = p^t$, khi đó theo mệnh đề trên ta có $k \leq \min\{h,t\}$.

Nếu nhóm G không giao hoán thì $k < h$.

Khi G là một p-nhóm hữu hạn, ký hiệu $j_k(G)$ là số lớp liên hợp có độ dài p^k trong G.

1.2. Quan hệ đồng chất

1.2.1. Định nghĩa: Hai nhóm G và H được gọi là đồng chất (isoclinic) nếu tồn tại hai đẳng cấu $\varphi: G/Z(G) \longrightarrow H/Z(H)$ và $\psi: [G,G] \longrightarrow [H,H]$ sao cho biểu đồ sau đây giao hoán

$$\begin{tikzcd}
G/Z(G) \times G/Z(G) \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[d, "\gamma_G"'] & H/Z(H) \times H/Z(H) \arrow[d, "\gamma_H"'] \\
{[G, G]} \arrow[r, "\psi"] & {[H, H]}
\end{tikzcd}$$

trong đó $Z(G)$ và $[G, G]$ lần lượt là nhóm con tâm và nhóm con giao hoán tử của G, γ_G và γ_H là các ánh xạ được cho bởi $(\bar{x}, \bar{y}) \longmapsto [x, y]$, với x, y thuộc G hoặc x, y thuộc H.

Từ định nghĩa ta thấy rằng quan hệ đồng chất là một quan hệ tương đương trên tập các nhóm, mỗi lớp tương đương được gọi là một lớp đồng chất (isoclinic class), hay còn gọi là một họ (family). Nếu G và H là hai nhóm thuộc cùng một họ, ký hiệu $G \sim H$.

Rõ ràng ánh xạ $\gamma_G : G/Z(G) \times G/Z(G) \longrightarrow [G, G]$ đặc trưng họ chứa nhóm G nên ta gọi γ_G là ánh xạ cấu trúc của họ.

1.2.2. Định nghĩa: Trong một họ nhóm, các nhóm có cấp nhỏ nhất được gọi là nhóm nguồn (stem group) của họ đó.

1.2.3. Mệnh đề: G là một nhóm nguồn $\Leftrightarrow$ $Z(G) \subset [G, G]$

1.2.4. Định nghĩa: Một nhóm K được gọi là nhóm tiềm lực (capable group), nếu tồn tại một nhóm G sao cho $G/Z(G) \cong K$.

Xét quan hệ đồng chất trên các nhóm hữu hạn, ta có các mệnh đề sau

1.2.5. Mệnh đề: Giả sử K là một p-nhóm aben hữu hạn kiểu $(n_1, n_2, \ldots, n_t)$, $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t > 0$, $t \geq 2$. K là một nhóm tiềm lực khi và chỉ khi $n_1 = n_2$. Đặc biệt, nhóm aben sơ cấp Z_p^n, là một nhóm tiềm lực khi $n \geq 2$.

1.2.6. Mệnh đề: Nếu $G \sim H$ và $|G| = |H|$, ta có $(j_k(G)) = (j_k(H))$.

1.3. Ma trận đặc trưng và độ rắn của một họ nhóm

Trong mục này cũng như trong các phần sau, n là số tự nhiên, $q = \frac{n(n-1)}{2}$, Z_p là trường hữu hạn gồm p phần tử .

Được gợi ý từ ánh xạ cấu trúc $\gamma_G : G/Z(G) \times G/Z(G) \longrightarrow [G,G]$, phần đầu mục này, bắt đầu với việc trình bày ánh xạ chấp nhận được, ma trận chấp nhận được, và quan hệ đồng chất giữa các ánh xạ và ma trận này.

Cho một không gian vectơ n – chiều V trên trường Z_p, $V \otimes V$ tenxơ cấp hai của V. Đặt N là không gian con của $V \otimes V$, sinh ra bởi các phần tử $v \otimes v$. Ta nhớ rằng $V^{(2)} = (V \otimes V)/N$ là bình phương ngoài (hay lũy thừa ngoài cấp hai) của V. Ta có $dimV^{(2)} = q$. Với $v, v' \square V$, viết $v \wedge v' = (v \otimes v') + N \square V^{(2)}$. Nếu $\gamma : V \times V \rightarrow U$ là ánh xạ song tuyến tính thay phiên thì tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $\underline{\gamma}$: $V^{(2)} \rightarrow U$ sao cho $\underline{\gamma}\,(v \wedge v') = \gamma\,(v, v')$.

1.3.1. *Định nghĩa:* Bình phương ngoài một ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \rightarrow V'$, ký hiệu $\varphi^{(2)} : V^{(2)} \rightarrow V'^{(2)}$ là ánh xạ tuyến tính cho bởi $\varphi^{(2)}\,(v \wedge v') = \varphi(v) \wedge \varphi(v')$.

Đối với một cơ sở $X = \{ x_i \,;\, 1 \leq i \leq n \}$ của V, ta ký hiệu $X^{(2)} = \{ x_i \wedge x_j \,;\, 1 \leq i < j \leq n \}$ một cơ sở của $V^{(2)}$.

Cho X, X' lần lượt là cơ sở của V, V'. Ma trận biểu diễn một ánh xạ tuyến tính $\varphi : V \rightarrow V'$ theo X, X' sẽ được viết $B_\varphi(X', X)$ hoặc B_φ nếu không cần chỉ rõ cơ sở. Một ma trận B gọi là có kiểu *(n,t)* nếu $B = B_{\underline{\gamma}}$, với $\underline{\gamma}: V^{(2)} \to U,\quad dimV = n,\quad dimU = t$ là một ánh xạ tuyến tính nào đó.

1.3.2. Định nghĩa: Bình phương ngoài của một ma trận vuông $Q = (q_{ij})$ cấp n, ký hiệu $Q^{(2)} = \left(q_{ij,hk}\right)$, $1 \le i < j \le n$, $1 \le h < k \le n$ là ma trận vuông cấp $\frac{n(n-1)}{2}$ (các hàng và các cột được sắp theo quan hệ thứ tự từ điển), và được xác định bởi

$$q_{ij,hk} = q_{ih}q_{jk} - q_{ik}q_{jh}$$

Với ánh xạ tuyến tính $\varphi: V \to V',\quad dimV = dimV'$, ta có $B_{\varphi^{(2)}} = (B_\varphi)^2$.

1.3.3. Mệnh đề: Với hai ma trận vuông Q và Q', ta dễ dàng chứng minh được

$$(QQ')^{(2)} = Q^{(2)}Q'^{(2)}.$$

1.3.4. Định nghĩa: Đối với hai ánh xạ song tuyến tính thay phiên $\gamma: V \times V \to U,\ \gamma': V' \times V' \to U'$, ta gọi $\underline{\gamma}$ đồng chất với $\underline{\gamma}'$, viết $\underline{\gamma} \sim \underline{\gamma}'$, nếu tồn tại đẳng cấu $\varphi: V \to V',\quad \psi: U \to U'$ sao cho $\underline{\gamma} = \psi^{-1}\underline{\gamma}'\varphi^{(2)}$.

Rõ ràng quan hệ đồng chất ở trên là một quan hệ tương đương.

1.3.5. Định nghĩa: Một ánh xạ tuyến tính $\underline{\gamma}: V^{(2)} \to U$ gọi là chấp nhận được nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

(i) $\underline{\gamma}$ là toàn ánh.

(ii) $\underline{\gamma}$ không suy biến, nghĩa là $\{v \in V; \underline{\gamma}(v \wedge V) = 0\} = \{0\}$

1.3.6. Định nghĩa: Ma trận chấp nhận được là ma trận biểu diễn một ánh xạ chấp nhận được.

Nếu V là không gian vectơ n chiều, U là không gian vectơ t chiều, ta gọi ma trận của ánh xạ chấp nhận được $\underline{\gamma}: V^{(2)} \to U$ là ma trận chấp nhận được kiểu (n,t).

Giả sử $e = \{ e_l;\ 1 \leq l \leq n \}$ và $u = \{ u_i;\ 1 \leq i \leq t \}$ lần lượt là cơ sở của không gian vectơ n chiều V, $n > 1$ và không gian vectơ t chiều U. Khi đó ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính $\underline{\gamma}: V^{(2)} \to U$ đối với cặp cơ sở $e^{(2)}$ và u là $B_{\underline{\gamma}}(e,u) = (b_{i,hk})_{1 \leq i \leq t, 1 \leq h < k \leq n}$ với $b_{i,hk}$ được xác định từ hệ thức $\underline{\gamma}\,(e_h \wedge e_k) = \sum_{i=1}^{t} b_{i,hk} u_i$.

$$
B_{\underline{\gamma}}(e,u) = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 12 & 13 & & hk & & (n-1)n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
b_{1,12} & b_{1,13} & \cdots & b_{1,hk} & \cdots & b_{1,(n-1)n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{i,12} & b_{i,13} & \cdots & b_{i,hk} & \cdots & b_{i,(n-1)n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{t,12} & b_{t,13} & \cdots & b_{t,hk} & \cdots & b_{t,(n-1)n}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Trong đó các cột được đánh chỉ số hk, $h < k$, và sắp xếp theo quan hệ thứ tự từ điển.

1.3.7. Mệnh đề: Cho một ma trận chấp nhận được $B_{\underline{\gamma}}(e,u) = (b_{i,hk})_{1 \leq i \leq t, 1 \leq h < k \leq n}$ kiểu (n,t). Khi đó:

i) B có hạng bằng t.

ii) Với mỗi bộ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in Z_p^n \backslash \{0\}$, $\exists l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\exists i \in \{1,2,\dots,t\}$ sao cho $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_{i,/jl/} \neq 0$.

Từ quan hệ đồng chất giữa các ánh xạ tuyến tính, ta có

1.3.8. Định nghĩa: Hai ma trận chấp nhận được $B_{\underline{\gamma}}$ và $B_{\underline{\gamma'}}$ đồng chất với nhau, viết $B \sim B'$, nếu tồn tại các ma trận khả nghịch P và Q sao cho $B = P^{-1}B'Q^{(2)}$.

Dễ dàng chứng tỏ được cả hai quan hệ đồng chất trong hai định nghĩa trên là quan hệ tương đương. Mỗi lớp tương đương gọi là một lớp đồng chất.

Từ tính chất của ánh xạ $\underline{\gamma}$ và ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính, ta có

1.3.9. Định lý: Đối với hai ánh xạ song tuyến tính thay phiên γ, γ' ta có $\underline{\gamma} \sim \underline{\gamma'} \iff B_{\underline{\gamma}} \sim B_{\underline{\gamma'}}$.

Hơn nữa, nếu $\underline{\gamma} \sim \underline{\gamma'}$, tồn tại các cơ sở *X*, *Y*, *X'*, *Y'* lần lượt của các không gian *V*, *U*, *V'*, *U'* sao cho $B_{\underline{\gamma}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}^{(2)}) = B_{\underline{\gamma'}}(\mathrm{Y}', \mathrm{X}'^{(2)})$.

1.3.10. Nhận xét: Cho hai ánh xạ song tuyến tính thay phiên γ, γ' sao cho $\underline{\gamma} \sim \underline{\gamma'}$. Khi đó $\underline{\gamma}$ chấp nhận được khi và chỉ khi $\underline{\gamma'}$ chấp nhận được.

Cho một ánh xạ chấp nhận được $\underline{\gamma}: V^{(2)} \to U$. Nếu $U = \{0\}$, ta phải có $V = \{0\}$. Một kết quả cổ điển là nếu $\dim U = 1$ thì $\dim V$ phải là một số chẵn. Hơn nữa, ta có

1.3.11. Mệnh đề: Để tồn tại một ánh xạ chấp nhận được $\underline{\gamma}: V^{(2)} \to U$, với $U \neq \{0\}$, điều kiện cần và đủ là :

i) $\dim V = n \geq 2$, $\dim U = t$, $1 \leq t \leq q$.

i) Nếu $\dim U = 1$ thì n là một số chẵn.

Cho G là một nhóm sao cho $G/Z(G) \cong Z_p^n, n \geq 2$. Khi đó $[G, G] \cong Z_p^t, 1 \leq t \leq q$. Một nhóm G như vậy được gọi là một nhóm kiểu *(n, t)*. Ta có $V(G) = G/Z(G)$ và $C(G) = [G,G]$ lần lượt là không gian vectơ n-chiều và t-chiều trên trường Z_p. Ký hiệu $V^{(2)}(G)$ là lũy thừa ngoài cấp hai của không gian $V(G)$. Do G là một nhóm lũy linh lớp 2, nên ánh xạ cấu trúc $\gamma_G: V(G) \times V(G) \to C(G)$ là song tuyến tính thay phiên, không suy biến. Do đó γ_G cho ta ánh xạ tuyến tính $\underline{\gamma_G}: V^{(2)}(G) \to C(G)$ là ánh xạ chấp nhận được.

Mệnh đề sau cho phép ta gọi ma trận chấp nhận được của ánh xạ $\underline{\gamma_G}$ là ma trận đặc trưng của họ chứa nhóm G.

1.3.12. Mệnh đề:

(i) Với G và H là hai nhóm kiểu *(n,t)*, ta có $G \sim H \Leftrightarrow \underline{\gamma_G} \sim \underline{\gamma_H}$.

(ii) Cho V và U lần lượt là Z_p-không gian vectơ n-chiều và t-chiều; $\underline{\gamma}: V^{(2)} \to U$ là một ánh xạ chấp nhận được. Khi đó tồn tại một nhóm G kiểu *(n,t)* sao cho $\underline{\gamma} \sim \underline{\gamma_G}$.

1.3.13. Định lý: Tồn tại một song ánh giữa các họ nhóm kiểu *(n,t)* và các lớp đồng chất của các ánh xạ chấp nhận được từ bình phương ngoài của Z_p – không gian n-chiều vào Z_p – không gian t-chiều. Hay nói cách khác, có một song ánh giữa các họ nhóm kiểu *(n,t)* và các lớp đồng chất của các ma trận chấp nhận được kiểu *(n,t)*.

Từ định nghĩa quan hệ đồng chất giữa các nhóm, rõ ràng họ các nhóm aben tương ứng với ánh xạ chấp nhận được $\underline{\gamma}: V^{(2)} \to U$, với $U = \{0\}$.

Định lý trên cho phép ta chuyển bài toán phân loại đồng chất các nhóm kiểu *(n,t)* về bài toán phân loại đồng chất các ma trận chấp nhận được kiểu *(n,t)*.

Ký hiệu $C^*G = Hom(C(G), Z_p)$. Với k □ C^*G, $k\gamma_G: V(G) \times V(G) \to Z_p$ là một dạng song tuyến tính thay phiên. Đặt

$$L_k = \{\, v \in V(G):\ k\gamma_G\big(v, V(G)\big) = 0 \,\},$$

ta định nghĩa

$$r_G = \min_{k \in C^*(G)\setminus\{0\}} \dim\,(V(G)/\,L_k).$$

Giả sử h □ $C^*(G)$ sao cho $r_G = dimV(G)/L_h$, khi đó dạng song tuyến tính $V(G)/L_h \times V(G)/L_h \to Z_p$ được cho bởi $h\gamma_G$ là không suy biến. Do đó r_G là một số chẵn và thỏa mãn $2 \le r_G \le n$.

1.3.14. *Mệnh đề:* Cho hai nhóm G và H có kiểu (n,t). Khi đó

$$G \sim H \implies r_G = r_H.$$

Đối với một họ Γ những nhóm kiểu (n,t), theo mệnh đề trên ta đặt $\mathrm{r}(\Gamma) = r_G$, với $G \in \Gamma$, và gọi đó là độ rắn của Γ.

Vì một ma trận không suy biến là tích của một số hữu hạn các ma trận sơ cấp nên để khảo sát quan hệ đồng chất giữa các ma trận chấp nhận được , việc tính bình phương ngoài của các ma trận sơ cấp là cần thiết. Để thuận tiện, chúng tôi nhắc lại định nghĩa của chúng.

1.3.15. *Định nghĩa:* Ký hiệu *P(i,j), Q(i,j,m), R(i,c)* là những ma trận trên trường K, lần lượt thu được từ ma trận đơn vị bằng cách đổi hàng i cho hàng j, cộng m lần hàng j cho hàng i và nhân một phần tử $c \,\square\, K\setminus\{0\}$ cho hàng i.

Các ma trận P, Q, R ở trên là những ma trận không suy biến và được gọi là các ma trận sơ cấp.

1.3.16. Mệnh đề:

(i) $\left(R(i,c)\right)^{(2)} = \prod_{1\le h\le n, h\ne i} R(/hi/, c)$.

(ii)

$$(P(i,j))^{(2)} = R(/ij/,-1) \times \prod_{h\notin(\min(i,j),\max(i,j))} P(/hi/, hj) \times \prod_{\min(i,j)<h<\max(i,j)} (R(/hi/,-1)\, R(/hj/,-1) P(/hi/,/hj/)).$$

(iii)

$$\left(Q(i,j,m)\right)^{(2)} = \prod_{h\notin(\min(i,j),\max(i,j))} Q(/hi/,/hj/,m) \times \prod_{\min(i,j)<h<\max(i,j)} Q(/hi/,/hj/-m).$$

Trong đó $/hi/ = \begin{cases} hi, & \text{nếu } h < i \\ ih, & \text{nếu } h > i \end{cases}$.

1.3.17. Hệ quả: Khi K là trường Z_2, ta có

(i) $P^{(2)}(i, j) = \prod_{k\ne i,j} P(/ki/,/kj/)$

(ii) $Q^{(2)}(i, j) = \prod_{k\ne i,j} Q(/ki/,/kj/)$.

1.3.18. Hệ quả: Bình phương ngoài của một ma trận không suy biến là một ma trận không suy biến.

Chương 2. PHÂN LOẠI ĐỒNG CHẤT CÁC p-NHÓM THEO NHÓM TIỀM LỰC Z_p^4.

Chương này là nội dung chính của luận văn, phân loại đồng chất các p-nhóm hữu hạn theo nhóm tiềm lực Z_p^4.

Một họ nhóm kiểu (n, t) sẽ được ký hiệu là $\Gamma_p(S)$, trong đó S là một dãy những bất biến của họ, trường hợp nhiều họ có cùng dãy bất biến S chúng tôi tạm thời ký hiệu $\Gamma_p(S;*)$, với * là số chỉ thứ tự các họ có cùng dãy S, và sẽ được xác định theo từng trường hợp cụ thể. Ở đây chúng tôi sẽ lấy $S = (n, t, r)$, trong đó (n, t) là kiểu của nhóm và r là độ rắn của họ nhóm.

Cho G là một p-nhóm hữu hạn sao cho $G/Z(G) \cong Z_p^4$, khi đó $[G, G] \cong Z_p^t$, $1 \le t \le 6$. Sau đây ta sẽ phân loại đồng chất các nhóm G có tính chất như thế, theo từng trường hợp của t, nghĩa là phân loại các nhóm kiểu (n,t).

2.1. Các nhóm kiểu (4,1)

2.1.1. Mệnh đề: Nếu tồn tại một nhóm kiểu (n,1) thì n phải là một số chẵn. Các nhóm kiểu ($2k$, 1) đều có một ma trận đặc trưng như sau

$$\begin{array}{ccccccc} 12 & 13 & & 34 & 35 & & (2k\text{-}1)2k \\ (1 & 0 \ldots\ldots 0 & & 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots 0 & 1\ ) \end{array}$$

trong đó thành phần ở các cột ($2l$-1)$2l$, $1 \le l \le k$, bằng 1; còn ngoài ra tất cả đều bằng 0.

2.1.2. Hệ quả: Mọi nhóm kiểu ($2k$, 1) đều thuộc cùng một họ. Họ này có độ rắn $r = 2k$ và được ký hiệu $\Gamma_p(2k, 1, 2k)$.

2.2. Các nhóm kiểu (4,2)

2.2.1. Mệnh đề: Giả sử G là một nhóm kiểu (4,2), khi đó họ chứa nhóm G có một ma trận đặc trưng là một trong ba ma trận sau

* Nếu r(G) = 2

$$B_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

* Nếu r(G) = 4

$$B_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \text{khi } p = 2$$

$$B_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \text{khi } p > 2$$

trong đó $x \in Z_p$ và x là phần tử nhỏ nhất thỏa mãn $x \not\equiv y^2 (\text{mod } p)$, $\forall y \in Z_p$.

2.2.2. Mệnh đề: Giả sử G là một nhóm nguồn và có kiểu (4,2). Khi đó số lớp liên hợp của G được phân chia như sau:

Nếu họ chứa nhóm G có ma trận đặc trưng là B_1 thì

$$j_0 = p^2; \; j_1 = p(p^2 - 1) \text{ và } j_2 = p^2(p^2 - 1).$$

Nếu họ chứa nhióm G có ma trận đặc trưng là B_2 thì

$$j_0 = p^2;\ j_1 = 2p^3 - 2p \text{ và } j_2 = p^4 - 2p^2 + 1.$$

Từ mệnh đề 2.2.1 và mệnh đề 2.2.2, ta có hệ quả sau

2.2.3. Hệ quả: Mọi nhóm kiểu (4,2) được chia thành ba họ tương ứng với ba ma trận đặc trưng B_1, B_2 và B_3. Ba họ này lần lượt được ký hiệu là $\Gamma_p(4,2,2;1)$, $\Gamma_p(4,2,2;2)$ và $\Gamma_p(4,2,4)$.

2.3. Các nhóm kiểu (4,3)

2.3.1. Mệnh đề: Giả sử G là một nhóm kiểu (4,3), khi đó họ chứa nhóm G có một ma trận đặc trưng là một trong năm ma trận được xác định như sau

$$B(_*) = (IH_*),$$

trong đó I là ma trận đơn vị gồm ba cột đầu tiên của $B(_*)$, H_* là ba cột cuối của $B(_*)$, $1 \le * \le 5$ và có dạng như sau

$$\underset{H_1}{\begin{matrix}0&0&0\\0&1&0\\\alpha&\beta&0\end{matrix}} \qquad \underset{H_2}{\begin{matrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}} \qquad \underset{H_3}{\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{matrix}} \qquad \underset{H_4}{\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{matrix}} \qquad \underset{H_5}{\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}}$$

trong đó khi $p = 2$, $\alpha = \beta = 1$ và khi $p > 2$, $\beta = 0$, α là một phần tử không phải là một bình phương trong Z_p, và họ $\Gamma_p(4,3;1)$ không phụ thuộc vào cách chọn α.

2.3.2. Nhận xét: Các ma trận đặc trưng trong mệnh đề trên cho thấy các nhóm kiểu (4,3) đều có độ rắn bằng 2.

2.3.3. Mệnh đề: Với mỗi *, $1 \leq * \leq 5$, ký hiệu G(*) là một nhóm nguồn của họ nhóm có ma trận đặc trưng là $B(*)$, khi đó số lớp liên hợp có độ dài p^l của mỗi nhóm G(*) được cho trong bảng sau

	j_0	j_1	j_2	j_3
G(1)	p^3	0	p^3-p	p^5-p
G(2)	p^3	0	$p^4 + p^2$-p	p^5-p^3
G(3)	p^3	p^2	p^4- 2p	$p^4 – p^3$
G(4)	p^3	p^4- p^3	$p^4 + p^2$-p	p^4 –p^3- p^2
G(5)	p^3	p^5- p^2	0	p^4- p^3

Từ mệnh đề 2.3.1 và mệnh đề 2.3.3 ta có hệ quả sau

2.3.4. Hệ quả: Các nhóm kiểu (4,3) được chia thành 5 họ phân biệt, ký hiệu

$$\Gamma_p(4,3,2;*), 1 \leq * \leq 5$$

trong đó * là số chỉ thứ tự từ điển của các bất biến j_l.

2.4. Các nhóm kiểu (4,4)

2.4.1. Mệnh đề: Giả sử G là một nhóm kiểu (4,4), khi đó họ chứa nhóm G có một ma trận đặc trưng là một trong bốn ma trận được xác định như sau

$$B(*) = (IH_*),$$

trong đó I là ma trận đơn vị gồm bốn cột đầu tiên của $B(*)$, H_* là hai cột cuối cùng của $B(*)$, $1 \leq * \leq 4$ và có dạng như sau

0	1	0	0	0	0	0	1
α	β	0	1	0	0	0	
0							
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	

trong đó khi p = 2, $\alpha = \beta = 1$ và khi p > 2, $\beta = 0,\ \alpha$ là một phần tử không phải là một bình phương trong Z_p, và họ $\Gamma_p(4,4;1)$ không phụ thuộc vào cách chọn α.

2.4.2. Nhận xét: Các ma trận đặc trưng trong mệnh đề trên cho thấy các nhóm kiểu (4,4) đều có độ rắn bằng 2.

2.4.3. Mệnh đề: Với mỗi *, $1 \leq * \leq 4$, ký hiệu G(*) là một nhóm nguồn của họ nhóm có ma trận đặc trưng là $B(_*)$, khi đó số lớp liên hợp có độ dài p^l của mỗi nhóm G(*) được cho trong bảng sau

	j_0	j_1	j_2	j_3
G(1)	p^4	0	0	p^5-p
G(2)	p^4	0	p^4-p^2	p^5-p^3
G(3)	p^4	0	p^5-p^3	p^5- p^4 + p^2 –p
G(4)	p^4	p^3	p^5-p^3	p^5-p^4 + p^2- 2p

Từ mệnh đề 2.4.1 và mệnh đề 2.4.3 ta có hệ quả sau

2.4.4. Hệ quả: Các nhóm kiểu (4,4) được chia thành 4 họ phân biệt, ký hiệu

$$\Gamma_p(4,4,2;*),\ 1 \le * \le 4$$

trong đó * là số chỉ thứ tự từ điển của các bất biến j_l.

2.5. Các nhóm kiểu (4,5)

Mệnh đề: Mọi nhóm kiểu (4,5) đều có độ rắn bằng 2 và được chia thành hai họ, ký hiệu $\Gamma_p(4,5,2;1)$ và $\Gamma_p(4,5,2;2)$. Hai họ nhóm này lần lượt có ma trận đặc trưng như sau

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2.6. Các nhóm kiểu (4,6)

Mệnh đề: Mọi nhóm kiểu (4,6) đều có một ma trận đặc trưng có dạng

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tóm lại, các nhóm G sao cho G/Z(G) $\cong Z_p^4$, được chia thành 16 họ đồng chất phân biệt, chúng được cho trong bảng dưới đây.

STT	Họ	j_0	j_1	j_2	j_3
1	$\Gamma_p(4,1,4)$	p	p^4-1	0	0
2	$\Gamma_p(4,2,2;1)$	p^2	p^3-p	p^4-p^2	0
3	$\Gamma_p(4,2,2;2)$	p^2	$2p^3-2p$	p^4-2p^2+1	0
4	$\Gamma_p(4,2,4)$	p^2	0	p^4-1	0
5	$\Gamma_p(4,3,2;1)$	p^3	0	p^3-p	p^4-p^2
6	$\Gamma_p(4,3,2;2)$	p^3	0	p^4+p^2-p	p^4-p^3-p
7	$\Gamma_p(4,3,2;3)$	p^3	p^2	p^4-2p	p^4-p^3
8	$\Gamma_p(4,3,2;4)$	p^3	p^4-p^3	p^4+p^2-p	$p^4-p^3-p^2$
9	$\Gamma_p(4,3,2;5)$	p^3	p^5-p^2	0	p^4-p^3
10	$\Gamma_p(4,4,2;1)$	p^4	0	0	p^5-p
11	$\Gamma_p(4,4,2;2)$	p^4	0	p^4-p^2	p^5-p^3
12		p^4	0	p^5-p^3	$p^5-p^4+p^2-p$
13		p^4	p^3	p^5-p^3	$p^5-p^4+p^2-2p$

14	$\Gamma_p(4,4,2;3)$	p^5	0	0	p^6-p^2
15	$\Gamma_p(4,4,2;4)$	p^5	0	p^5-p^3	p^6-p^4
16	$\Gamma_p(4,5,2;1)$ $\Gamma_p(4,5,2;2)$ $\Gamma_p(4,6,2)$	p^6	0	0	p^7-p^3

Các số j_l, $0 \leq l \leq 3$, cho trong bảng trên là số lớp liên hợp có độ dài p^l của các nhóm nguồn trong mỗi họ.

KẾT LUẬN

Trên cơ sở hai công cụ: độ rắn và ma trận đặc trưng của một họ nhóm kiểu (n,t) đã được đưa ra trong [2], kết hợp với việc sử dụng bình phương ngoài các ma trận sơ cấp, luận văn đã phân loại đồng chất các p- nhóm theo nhóm tiềm lực Z_p^4, với p là một số nguyên tố bất kỳ. Hy vọng rằng các kỹ thuật được khai thác và sử dụng trong đề tài sẽ tiếp tục được mở rộng nhằm đóng góp hơn nữa vào việc giải quyết những trường hợp còn lại của bài toán phân loại đồng chất những nhóm kiểu (n,t).