



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM T.P HỒ CHÍ MINH

VÕ SƠN PHÒNG

PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN
VÀ
SỰ HỘI TỤ YẾU CỦA ĐỘ ĐO XÁC SUẤT

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN GIẢI TÍCH

MÃ SỐ: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS ĐẬU THẾ CẤP

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH-2010

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan :

- 1. Những nội dung trong luận văn này là do tôi thực hiện dưới sự hướng dẫn trực tiếp của thầy Đậu Thế Cấp.*
- 2. Mọi tham khảo dùng trong luận văn đều được trích dẫn rõ ràng tên tác giả, tên công trình, thời gian, địa điểm công bố.*
- 3. Mọi sao chép không hợp lệ, vi phạm quy chế đào tạo, hay gian trá, tôi xin chịu hoàn toàn trách nhiệm.*

Học viên

Võ Sơn Phòng

MỞ ĐẦU

Lý thuyết về độ đo trong không gian mêtric giữ vai trò quan trọng trong nhiều vấn đề về giải tích và xác suất. Đã có rất nhiều kết quả đặc sắc về lĩnh vực này như định lý Prohorov, định lý Varadarajans, định lý Fernique

Mục đích của luận văn này là nghiên cứu về phân tử ngẫu nhiên và sự hội tụ yếu của độ đo xác suất trong không gian mêtric và các vấn đề có liên quan.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại Học Sư Phạm Thành Phố Hồ Chí Minh dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Đậu Thế Cấp. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới Thầy về sự hướng dẫn tận tâm và nhiệt tình của Thầy đối với tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và thực hiện luận văn.

CHƯƠNG I

MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1 GIẢI TÍCH HÀM VÀ LÝ THUYẾT ĐỘ ĐO

1.1.1 Không gian tôpô

Cho X là một tập. Một họ τ các tập con của X gọi là một *tôpô* trên X nếu có các tính chất sau:

- (i) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$;
- (ii) $U_i \in \tau, i \in I$ thì $\cup_{i \in I} U_i \in \tau$;
- (iii) $U, V \in \tau$ thì $U \cap V \in \tau$.

Nếu τ là một tôpô trên X thì cặp $X = (X, \tau)$ được gọi là *không gian tôpô*.

Cho (X, τ) là không gian tôpô. Khi đó các tập $U \in \tau$ gọi là *tập mở*. Phần bù của tập mở gọi là *tập đóng*.

Cho A là một tập con của không gian tôpô X . Tập con đóng bé nhất của X chứa A gọi là *bao đóng* của A , được kí hiệu là $\bar{A}$. Tập $A \subset X$ gọi là *tập trù mật* trong X nếu $\bar{A} = X$. Không gian tôpô (X, τ) gọi là không gian *khả li* (hay *tách được*), nếu nó có tập con đếm được trù mật.

Tập con mở lớn nhất được chứa trong A gọi là *phần trong* của A , kí hiệu là $\text{int } A$.

Một họ $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ các tập mở của X gọi là một *phủ mở* của X nếu $\cup_{\alpha \in I} G_\alpha = X$. Không gian tôpô X gọi là không gian *compắc* nếu từ mọi phủ mở $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ của X đều có thể trích ra được một phủ con hữu hạn. Tập con $A \subset X$ gọi là *compắc* nếu nó compắc đối với tôpô cảm sinh, tức là tôpô $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ trên A .

1.1.2 Không gian mêtric

Cho $X \neq \emptyset$. Một ánh xạ $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là *mêtric* (hay *khoảng cách*) trên X nếu với mọi $x, y, z \in X$ đều có

$$(i) \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(iii) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Nếu d là một mêtric thì cặp $X = (X, d)$ gọi là *không gian mêtric*.

Giả sử X là không gian mêtric. Với mọi $x \in X, \varepsilon > 0$ đặt

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

và gọi là *hình cầu* tâm x bán kính ε . Tập con G của X gọi là *mở* nếu mọi $x \in G$ tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $B(x, \varepsilon) \subset G$. Họ các tập mở của X là một tôpô trên X , gọi là *tôpô sinh bởi mêtric*. Không gian mêtric là không gian tôpô với tôpô sinh bởi mêtric.

Ta nói dãy $(x_n) \subset X$ *hội tụ* về $x \in X$ nếu $d(x_n, x) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Kí hiệu là $x_n \rightarrow x$ (khi $n \rightarrow \infty$) hay $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

1.1.3 Định lí. Tập $F \subset X$ là tập đóng khi và chỉ khi với mọi dãy

$$(x_n) \subset F, \quad x_n \rightarrow x \in X \quad \text{thì} \quad x \in F.$$

Giả sử X là không gian mêtric. Dãy $(x_n) \subset X$ được gọi là *dãy cơ bản* (hay *dãy Cauchy*) nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Không gian mêtric X gọi là *không gian đầy đủ* nếu mọi dãy cơ bản đều hội tụ.

Trong không gian mêtric X , một tập $A \subset X$ là tập compact nếu với mọi dãy $(x_n) \subset A$, đều tồn tại dãy con $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ sao cho $x_{n_k} \rightarrow x \in A$.

Nếu X là không gian mêtric compact thì mọi tập con đóng của nó đều là tập compact.

Tập F của một không gian tôpô gọi là tập có *tính chất* G_δ nếu F là giao của đếm được các tập mở.

1.1.4 Định lí. Trong không gian mêtric, mọi tập con đóng đều có tính chất G_δ

Chứng minh. Giả sử F đóng trong không gian mêtric (X, d) . Đặt

$$G_n = \left\{ x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Khi đó mọi $x \in G_n$, ta có $d(x, F) = a < \frac{1}{n}$. Đặt $r = \frac{1}{n} - a$ thì $r > 0$ và

$$d(y, F) \leq d(x, y) + d(x, F) < r + a = \frac{1}{n}, \forall y \in B(x, r)$$

nên $B(x, r) \subset G_n$. Vậy G_n mở. Ta sẽ chứng minh $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Thật vậy, với $x \in F$ ta có

$$d(x, F) = 0 < \frac{1}{n} \text{ với mọi } n, \text{ nên } x \in G_n \text{ với mọi } n \text{ hay } x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

$$\text{Do đó } F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

Ngược lại, với $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ ta có $x \in G_n, \forall n$, nên $d(x, F) < \frac{1}{n}, \forall n$. Từ đó, với mỗi n đều có

$y_n \in F$ sao cho $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) = 0$, chứng tỏ $y_n \rightarrow x$. Mà F đóng nên $x \in F$, do

đó $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subset F$. Vậy $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Từ đó suy ra F có tính chất G_δ . $\square$

1.1.5 Không gian Banach thực

Không gian vector thực E gọi là *không gian định chuẩn* (thực) nếu tồn tại ánh xạ $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(i) \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

với mọi $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

Nếu đặt $d(x, y) = \|x - y\|$, với $x, y \in E$ thì d metric trên E , gọi là *metric sinh bởi chuẩn*.

Không gian định chuẩn là không gian metric với metric sinh bởi chuẩn.

Không gian định chuẩn đầy đủ được gọi là *không gian Banach*.

Cho E là không gian định chuẩn. Kí hiệu E^* là không gian các phiếm hàm tuyến tính trên E , E' là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên E . Với mọi $f \in E'$ ta gọi chuẩn của f là

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \inf \{k > 0 : |f(x)| \leq k \|x\|, \forall x \in E\}.$$

Không gian E' gọi là *không gian liên hợp (tôpô)* của E .

1.1.6 Định lí (Định lí Hahn- Banach). Cho E là không gian định chuẩn, F là không gian con của E . Khi đó với mỗi $f \in F'$, tồn tại $\bar{f} \in E'$ sao cho

$$\bar{f}|_F = f \text{ và } \|\bar{f}\| = \|f\|.$$

1.1.7 Hệ quả. Cho E là không gian định chuẩn. Khi đó với mỗi $x \in E, x \neq 0$, tồn tại $f \in E'$ sao cho $f(x) = \|x\|$ và $\|f\| = 1$.

1.1.8 Hệ quả. Giả sử E là không gian định chuẩn. Khi đó với mọi $x, y \in E$, nếu $f(x) = f(y)$ với mọi $f \in E'$ thì $x = y$.

1.1.9 Hệ quả. Giả sử E là không gian khả li. Khi đó tồn tại dãy $(f_n) \subset E'$ sao cho $\|x\| = \sup_n |f_n(x)|, \forall x \in E$.

Chứng minh. Vì E khả li nên tồn tại dãy $(x_n) \subset E$ sao cho $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ trù mật trong E . Vậy tồn tại dãy $(f_n) \subset E'$ sao cho

$$\|f_n\| = 1 \text{ và } f_n(x_n) = \|x_n\|.$$

Giả sử $x \in E$. Vì $|f_n(x)| \leq 1 \cdot \|x\|$, $\forall n$, nên $\|x\| \geq \sup_n |f_n(x)|$. Mặt khác, với mọi $\varepsilon > 0$, vì

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ trù mật trong E nên tồn tại $n : \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó

$$\|x\| - \|x_n\| < \|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ hay } \|x_n\| > \|x\| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| \|x_n\| - (\|x_n\| - f_n(x)) \right| \geq |f_n(x_n)| - \left| \|x_n\| - f_n(x) \right| \\ &= \|x_n\| - |f_n(x_n) - f_n(x)| \\ &= \|x_n\| - |f_n(x_n - x)| \\ &\geq \|x_n\| - \|f_n\| \cdot \|x_n - x\| = \|x_n\| - \|x_n - x\| \\ &> \left(\|x\| - \frac{\varepsilon}{2} \right) - \frac{\varepsilon}{2} = \|x\| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Do đó với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n sao cho $|f_n(x)| \geq \|x\| - \varepsilon$.

Vậy $\|x\| = \sup_n |f_n(x)|$. $\square$

1.1.10 Độ đo

Cho $\Omega \neq \emptyset$. Họ các tập con $\mathbf{F} \subset 2^\Omega$ được gọi là một *đại số* nếu thỏa mãn các điều kiện

- (i) $\emptyset, \Omega \in \mathbf{F}$;
- (ii) Nếu $A, B \in \mathbf{F}$ thì $A \setminus B \in \mathbf{F}$;
- (iii) Nếu $A, B \in \mathbf{F}$ thì $A \cup B \in \mathbf{F}$.

Nếu thay điều kiện (iii) bởi điều kiện

- (iii') Nếu $A_n \in \mathbf{F}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{F}$ thì $\mathbf{F}$ gọi là *σ -đại số*.

1.1.11 Định lý.

1. $\mathbf{F}$ là đại số khi và chỉ khi thỏa mãn (i) và

- (iv) Nếu $A \in \mathbf{F}$ thì $A^c = X \setminus A \in \mathbf{F}$;

- (v) Nếu $A, B \in \mathbf{F}$ thì $A \cap B \in \mathbf{F}$.

2. $\mathbf{F}$ là σ -đại số khi và chỉ khi (i), (ii) và

(v') Nếu $A_n \in \mathbf{F}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{F}$.

Cặp $(\Omega, \mathbf{F})$, trong đó $\mathbf{F}$ là σ -đại số các tập con của Ω , gọi là một *không gian đo*. Cho hai không gian đo $(\Omega, \mathbf{F})$ và $(Y, \mathbf{G})$. Ánh xạ $\varphi: \Omega \rightarrow Y$ gọi là $\mathbf{F} / \mathbf{G}$ -đo được nếu $\varphi^{-1}(B) \in \mathbf{F}$ với mọi $B \in \mathbf{G}$.

Cho $\Omega \neq \emptyset$ và $\mathbf{F}$ là σ -đại số các tập con của Ω . Ánh xạ $\mu: \mathbf{F} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ được gọi là *độ đo* trên $\mathbf{F}$ nếu thỏa mãn:

(i) $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathbf{F}$;

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$;

(iii) Nếu $A_n \in \mathbf{F}, \forall n$ và $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ thì $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Nếu $\mu(\Omega) < \infty$ thì μ được gọi là *độ đo hữu hạn*. Đặc biệt, nếu $\mu(\Omega) = 1$ thì μ được gọi là *độ đo xác suất*.

Bộ ba $(\Omega, \mathbf{F}, \mu)$, trong đó $\mathbf{F}$ là σ -đại số các tập con của Ω , μ là độ đo trên $\mathbf{F}$, được gọi là một *không gian độ đo*.

Không gian độ đo gọi là *đầy đủ* nếu $A \in \mathbf{F}$, $\mu(A) = 0$ thì mọi tập con $B \subset A$ đều thuộc $\mathbf{F}$. Khi đó ta cũng có $\mu(B) = 0$.

Nếu μ là độ đo xác suất thì $(\Omega, \mathbf{F}, \mu)$ gọi là một *không gian xác suất*.

1.2 TẬP BOREL TRONG KHÔNG GIAN TÔPÔ

1.2.1 Tập Borel

Cho X là không gian tôpô. Khi đó σ -đại số bé nhất chứa các tập mở của X được gọi là σ -đại số Borel của X , kí hiệu là $\mathbf{B}(X)$. Tập $A \in \mathbf{B}(X)$ được gọi là *tập Borel*.

Kí hiệu $K = \{[a, b), (-\infty, b), [a, +\infty): a, b \in \mathbb{R}\}$.

Mỗi tập dạng $D = D_1 \times \cdots \times D_n, D_j \in K, j = 1, \cdots, n$ gọi là một *khoảng* trong $\mathbb{R}^n$. Kí hiệu M_n là tập hợp các hợp của hữu hạn các khoảng rời nhau trong $\mathbb{R}^n$.

1.2.2 Định lí.

- (i) M_n là đại số;
- (ii) $\sigma(M_n) = \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$.

Chứng minh.

(i) Vì $\emptyset = [a, a) \times \cdots \times [a, a)$ nên $\emptyset \in M_n$. Ta chứng minh $\mathbb{R}^n \in M_n$ bằng qui nạp.

Với $n = 1, \mathbb{R} = (-\infty, a) \cup [a, +\infty) \in M_1$. Giả sử với $k \leq n - 1, \mathbb{R}^k \in M_k$. Khi đó

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times [(-\infty, a) \cup [a, +\infty)] = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, a) \cup \mathbb{R}^{n-1} \times [a, +\infty) \in M_n$$

vì $\mathbb{R}^{n-1}$ là hợp của hữu hạn khoảng rời nhau trong $\mathbb{R}^{n-1}$.

Ta sẽ chứng minh rằng, nếu $A, B \in M_n$ thì $A \cap B \in M_n$. Nếu $A, B \in K$ thì $A \cap B \in K$. Giả sử A, B là khoảng trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$A = D_1 \times \cdots \times D_n, \text{ với } D_j \in K; B = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n, \text{ với } \Delta_j \in K.$$

Ta có $A \cap B = (D_1 \cap \Delta_1) \times \cdots \times (D_n \cap \Delta_n)$ nên $A \cap B$ là khoảng trong $\mathbb{R}^n$.

Bây giờ giả sử $A, B \in M_n$. Khi đó $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ với A_i là khoảng trong $\mathbb{R}^n$,

$B = \bigcup_{j=1}^q B_j$, với B_j là khoảng trong $\mathbb{R}^n$. Ta có

$$\begin{aligned} A \cap B &= \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^p (A_i \cap B) \\ &= \bigcup_{i=1}^p \left[A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^q B_j \right) \right] = \bigcup_{i=1}^p \bigcup_{j=1}^q (A_i \cap B_j) \end{aligned}$$

nên $A \cap B \in M_n$.

Cuối cùng ta chứng minh rằng nếu $A, B \in M_n$ thì $A \setminus B \in M_n$. Trước hết giả sử A, B là khoảng trong $\mathbb{R}^n$, ta sẽ chứng minh $A \setminus B \in M_n$ bằng phương pháp qui nạp.

Với $n=1$, dễ thấy $A \setminus B \in M_1$. Giả sử khẳng định đúng đến mọi $k \leq n-1$. Ta có

$A = A_1 \times A_2, B = B_1 \times B_2$ với A_1, B_1 là khoảng trong $\mathbb{R}^{n-1}$ và A_2, B_2 là khoảng trong $\mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} A \setminus B &= (A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = (A_1 \times (A_2 \setminus B_2)) \cup ((A_1 \setminus B_1) \times A_2) \\ &= \left(((A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \setminus B_1)) \times (A_2 \setminus B_2) \right) \cup ((A_1 \setminus B_1) \times A_2) \\ &= ((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)) \cup ((A_1 \setminus B_1) \times A_2). \end{aligned}$$

Vì $A_1 \cap B_1$ là khoảng trong $\mathbb{R}^{n-1}$, $A_2 \setminus B_2$ là khoảng trong $\mathbb{R}$, $A_1 \setminus B_1$ là hợp hữu hạn các khoảng rời nhau trong $\mathbb{R}^{n-1}$ và A_2 là khoảng trong $\mathbb{R}$ nên $A \setminus B$ là hợp hữu hạn các khoảng rời nhau trong $\mathbb{R}^n$. Vậy $A \setminus B \in M_n$.

Xét trường hợp $A, B \in M_n$. Khi đó $A = \bigcup_{i=1}^p A_i$, với A_i là khoảng rời nhau trong $\mathbb{R}^n$; $B = \bigcup_{j=1}^q B_j$, với

B_j là khoảng rời nhau trong $\mathbb{R}^n$.

Ta có

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) \setminus B = \bigcup_{i=1}^p (A_i \setminus B) = \bigcup_{i=1}^p \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^q B_j \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^p \bigcap_{j=1}^q (A_i \setminus B_j) \end{aligned}$$

do đó $A \setminus B \in M_n$.

Vậy M_n là σ -đại số.

(ii) Vì $M_n \subset \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$, $\sigma(M_n)$ là σ -đại số nhỏ nhất chứa M_n , mà $\mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ là σ -đại số nên $\sigma(M_n) \subset \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$.

Giả sử U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Vì các khoảng mở lập thành hệ cơ sở của tôpô trong $\mathbb{R}^n$, nên

$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$, trong đó

$$U_k = (\alpha_1, \beta_1) \times \dots \times (\alpha_n, \beta_n).$$

Vì $(\alpha_i, \beta_i) = \bigcup_{m=1}^{\infty} [\alpha_i + \frac{1}{m}, \beta_i)$ nên

$$U_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} [\alpha_1 + \frac{1}{m}, \beta_1) \times \dots \times [\alpha_n + \frac{1}{m}, \beta_n) \in \sigma(M_n).$$

Từ đó $U \in \sigma(M_n)$, mà $\mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ là σ -đại số sinh bởi các tập mở của $\mathbb{R}^n$ nên $\mathbf{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(M_n)$. Vậy $\sigma(M_n) = \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Cho E là không gian là không gian Banach. Tập $A \subset E$ được gọi là *tập trụ* nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}$; $f_1, f_2, \dots, f_n \in E'$; $\hat{A} \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ sao cho

$$A = \{x \in E : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \hat{A}\}.$$

Kí hiệu tập các tập trụ là $\mathbf{F}(E)$.

1.2.3 Định lí.

(i) $\mathbf{F}(E)$ là đại số

(ii) Nếu E là không gian Banach khả li thì $\sigma(\mathbf{F}(E)) = \mathbf{B}(E)$ với $\mathbf{B}(E)$ là σ -đại số Borel của E .

Chứng minh.

(i) Lấy $f \in E'$ tùy ý, ta có $E = \{x \in E : f(x) \in \hat{B} = \mathbb{R}\}$

do đó $E \in \mathbf{F}(E)$. Nếu $A \in \mathbf{F}(E)$ thì tồn tại $n \in \mathbb{N}$, $\hat{A} \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$, $f_1, f_2, \dots, f_n \in E'$ sao cho

$$A = \{x \in E : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \hat{A}\}.$$

Ta có $A^c = E \setminus A = \{x \in E : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \hat{A}^c = \mathbb{R}^n \setminus \hat{A}\} \in \mathbf{F}(E)$.

Nếu $A_1, A_2 \in \mathbf{F}(E)$ thì tồn tại $m, n \in \mathbb{N}$, $\hat{A}_1 \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^m)$, $\hat{A}_2 \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$, $f_1, f_2, \dots, f_m \in E'$,

$g_1, g_2, \dots, g_n \in E'$ sao cho

$$A_1 = \{x \in E : (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \hat{A}_1\};$$

$$A_2 = \{x \in E : (g_1(x), \dots, g_n(x)) \in \hat{A}_2\}.$$

Từ đó, vì $\hat{A}_1 \times \hat{A}_2 \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^{m+n})$ nên

$$A_1 \cap A_2 = \{x \in E : (f_1(x), \dots, f_m(x), g_1(x), \dots, g_n(x)) \in \hat{A}_1 \times \hat{A}_2\} \in \mathbf{F}(E)$$

Vậy $\mathbf{F}(E)$ là đại số.

(ii) Giả sử $A \in \mathbf{F}(E)$. Khi đó $A = \{x \in E : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \hat{A}\}$ trong đó $f_1, f_2, \dots, f_n \in E'$ và $\hat{A} \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$.

Đặt $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n) : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \vec{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Vì f_i liên tục nên $\vec{f}$ liên tục. Do đó $\vec{f}$ là $\mathbf{B}(E) / \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ - đo được, tức là $\vec{f}^{-1}(G) \in \mathbf{B}(E)$ với mọi $G \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$. Mặt khác $A = \{x \in E : (\vec{f}(x)) \in \hat{A}\} = \vec{f}^{-1}(\hat{A})$, với $\hat{A} \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ nên $A \in \mathbf{B}(E)$. Từ đó suy ra $\mathbf{F}(E) \subset \mathbf{B}(E)$ và $\sigma(\mathbf{F}(E)) = \mathbf{B}(E)$.

Ngược lại, giả sử U mở trong E . Do E là không gian mêtric khả li nên E thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai. Do đó $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$. Mặt khác cũng vì E khả li nên theo Hệ quả 1.1.9 của

Định lý Hahn- Banach, tồn tại dãy $(f_n) \subset E'$, $\|f_n\| = 1$ sao cho mọi $x \in E$ ta có $\|x\| = \sup |f_n(x)|$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \bar{B}(x, r) &= \{y \in E : \|y - x\| \leq r\} \\ &= \left\{y \in E : \sup_n |f_n(y - x)| \leq r\right\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y \in E : |f_n(y - x)| \leq r\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y \in E : f_n(y) \in [r - f_n(x), r + f_n(x)]\} \in \sigma(\mathbf{F}(B)). \end{aligned}$$

Hơn nữa ta có $B(x, r) = \{y \in E : \|y - x\| < r\}$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \left\{ y \in E : \|y - x\| < r - \frac{1}{n} \right\} \\
&= \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \bar{B}\left(x, r - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

nên $B(x, r) \in \sigma(\mathbf{F}(E))$. Từ đó $U \in \sigma(\mathbf{F}(E))$ và suy ra $\mathbf{B}(E) \subset \sigma(\mathbf{F}(E))$.

Vậy $\sigma(\mathbf{F}(E)) = \mathbf{B}(E)$. $\square$

CHƯƠNG II

PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN VÀ CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN

2.1 PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN

Trong đoạn này ta luôn kí hiệu $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{p})$ là một không gian xác suất đầy đủ, $\mathbf{e}$ là không gian Banach khả li, $\mathbf{G}$ là σ -đại số con của $\mathbf{F}$, $\mathbf{B}(\mathbf{e})$ là σ -đại số Borel của $\mathbf{e}$.

Ánh xạ $X: \Omega \rightarrow \mathbf{e}$ gọi là *phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ -đo được*, nhận giá trị trong $\mathbf{e}$ nếu X là $\mathbf{G}/\mathbf{B}(\mathbf{e})$ -đo được (tức là $B \in \mathbf{B}(\mathbf{e})$ thì $X^{-1}(B) \in \mathbf{G}$). Phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{F}$ -đo được sẽ được gọi đơn giản là *phần tử ngẫu nhiên*.

Phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong $\mathbb{R}$ còn gọi là *đại lượng ngẫu nhiên*.

Phần tử ngẫu nhiên $X: \Omega \rightarrow \mathbf{e}$ gọi là phần tử ngẫu nhiên *rời rạc* nếu $|X(\Omega)|$ không quá đếm được. Đặc biệt, nếu $|X(\Omega)|$ hữu hạn thì X gọi là phần tử ngẫu nhiên *đơn giản*, ở đây $|X(\Omega)|$ là kí hiệu lực lượng của tập hợp $X(\Omega)$.

Dãy phần tử ngẫu nhiên (X_n) gọi là *hội tụ* đến ánh xạ $X: \Omega \rightarrow \mathbf{e}$ nếu $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ (theo chuẩn) với mọi $\omega \in \Omega$, kí hiệu là $X_n \rightarrow X$.

Dãy phần tử ngẫu nhiên (X_n) gọi là *hội tụ hầu chắc chắn* (h.c.c) đến ánh xạ $X: \Omega \rightarrow \mathbf{e}$ nếu tồn tại tập $N \in \mathbf{F}$, sao cho $\mathbf{p}(N) = 0$, $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ (theo chuẩn), với mọi $\omega \in \Omega \setminus N$. Kí hiệu $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$.

2.1.1 Định lí. Nếu (X_n) là dãy phần tử ngẫu nhiên và $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ thì X là phần tử ngẫu nhiên. Đặc biệt, nếu (X_n) là dãy phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được và $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ thì X là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được.

Chứng minh. Trước hết ta xét trường hợp (X_n) là dãy phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được và $X_n \rightarrow X$. Đặt

$$\mathcal{L} = \left\{ A \in \mathbf{B}(E) : X^{-1}(A) \in \mathbf{G} \right\}.$$

Khi đó, dễ dàng kiểm tra trực tiếp được rằng $\mathcal{L}$ là σ - đại số, hơn nữa $\mathcal{L} = \mathcal{B}(E)$. Để kiểm tra điều đó ta giả sử F là tập đóng trong E . Ta sẽ chứng minh

$$X^{-1}(F) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} X_m^{-1} \left(B \left(F, \frac{1}{k} \right) \right).$$

Thật vậy $\omega \in X^{-1}(F)$ thì $X(\omega) \in F$. Mặt khác

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \Rightarrow \|X_n(\omega) - X(\omega)\| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \forall k, \exists n : \|X_m(\omega) - X(\omega)\| < \frac{1}{k}, \forall m \geq n$$

$$\Rightarrow \forall k, \exists n : d(X_m(\omega), F) < \frac{1}{k}, \forall m \geq n$$

$$\Rightarrow \forall k, \exists n : X_m(\omega) \in B \left(F, \frac{1}{k} \right), \forall m \geq n$$

$$\Rightarrow \forall k, \exists n : \omega \in X_m^{-1} \left(B \left(F, \frac{1}{k} \right) \right), \forall m \geq n$$

$$\Rightarrow \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} X_m^{-1} \left(B \left(F, \frac{1}{k} \right) \right)$$

$$\text{Do đó } X^{-1}(F) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} X_m^{-1} \left(B \left(F, \frac{1}{k} \right) \right).$$

Ngược lại, nếu $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} X_m^{-1} \left(B \left(F, \frac{1}{k} \right) \right)$ thì

$$\forall k, \exists n_1 \text{ sao cho } \forall m \geq n_1 : \omega \in X_m^{-1} \left(B \left(F, \frac{1}{k} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \forall k, \exists n_1 \text{ sao cho } \forall m \geq n_1 : X_m(\omega) \in B \left(F, \frac{1}{k} \right)$$

$$\Rightarrow \forall k, \exists n_1 \text{ sao cho } \forall m \geq n_1 : d(X_m(\omega), F) < \frac{1}{k}.$$

Mặt khác, vì $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ nên $\|X_n(\omega) - X(\omega)\| \rightarrow 0$. Do đó

$$\forall k, \exists n_2 \text{ sao cho } \forall m \geq n_2 : d(X_m(\omega), X(\omega)) < \frac{1}{k}.$$

Mặt khác, vì $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ nên $\|X_n(\omega) - X(\omega)\| \rightarrow 0$. Do đó

$$\forall k, \exists n_2 \text{ sao cho } \forall m \geq n_2 : d(X_m(\omega), X(\omega)) < \frac{1}{k}.$$

Chọn $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, ta được

$$d(X(\omega), F) \leq d(X_m(\omega), X(\omega)) + d(X_m(\omega), F) < \frac{2}{k}, \quad \forall k, \forall m \geq n_0$$

Suy ra $d(X(\omega), F) = 0$. Vì F đóng nên $X(\omega) \in F$ hay $\omega \in X^{-1}(F)$.

Do đó

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} X_m^{-1} \left(B \left(F, \frac{1}{k} \right) \right) \subset X^{-1}(F)$$

Từ đó suy ra $X^{-1}(F) \in \mathbf{F}$ nên $F \in \mathbf{L}$ tức là $\mathbf{L}$ chứa tất cả các tập đóng. Điều đó chứng tỏ $\mathbf{B}(E) \subset \mathbf{L}$. Vậy $\mathbf{L} = \mathbf{B}(E)$. Vì vậy với mọi $B \in \mathbf{B}(E)$ thì $B \in \mathbf{L}$ nên $X^{-1}(B) \in \mathbf{G}$. Do đó X là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được.

Bây giờ giả sử (X_n) là phần tử ngẫu nhiên và $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$. Khi đó tồn tại $n \in \mathbf{F}$ sao cho $p(N) = 0$ và với mọi $\omega \in \Omega \setminus N$ ta có

$$\|X_n(\omega) - X(\omega)\| \rightarrow 0.$$

Đặt

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & , \text{ khi } \omega \in \Omega \setminus N \\ 0 & , \text{ khi } \omega \in N \end{cases};$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & , \text{ khi } \omega \in \Omega \setminus N \\ 0 & , \text{ khi } \omega \in N \end{cases}.$$

Ta có $Y_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. Vì $\{Y_n \neq X_n\} \subset N$, mà $N \in \mathbf{F}$, $p(N) = 0$ và p là độ đo đủ nên suy ra $\{Y_n \neq X_n\} \in \mathbf{F}$. Vì vậy với mọi $B \in \mathbf{B}(E)$ ta có

$$\begin{aligned} Y_n^{-1}(B) &= [Y_n^{-1}(B) \cap \{Y_n = X_n\}] \cup [Y_n^{-1}(B) \cap \{Y_n \neq X_n\}] \\ &= [X_n^{-1}(B) \cap \{Y_n = X_n\}] \cup N_0 \in \mathbf{F}, \end{aligned}$$

trong đó $N_0 = [Y_n^{-1}(B) \cap \{Y_n \neq X_n\}] \subset \{Y_n \neq X_n\} \subset N$, $N_0 \in \mathbf{F}$. Vậy Y_n là phần tử ngẫu nhiên. Do đó theo trường hợp đã chứng minh thì Y là phần tử ngẫu nhiên.

Cuối cùng, vì $\{X \neq Y\} \subset N$ nên $\{X \neq Y\} \in \mathbf{F}$. Từ đó suy ra $\{X = Y\} \in \mathbf{F}$. Do đó với mọi $B \in \mathbf{B}(E)$ ta có

$$X^{-1}(B) = [X^{-1}(B) \cap \{X = Y\}] \cup [X^{-1}(B) \cap \{X \neq Y\}] \in \mathbf{F}.$$

Vậy X là phần tử ngẫu nhiên. $\square$

2.1.2 Định lí. Ánh xạ $X: \Omega \rightarrow \mathbf{e}$ là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được khi và chỉ khi X là giới hạn đều của một dãy phần tử ngẫu nhiên rời rạc $\mathbf{G}$ - đo được, tức là tồn tại dãy phần tử ngẫu nhiên rời rạc (X_n) $\mathbf{G}$ - đo được sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Omega} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| = 0.$$

Chứng minh. Điều kiện đủ là Định lí 2.1.1.

Điều kiện cần: Giả sử $X: \Omega \rightarrow \mathbf{e}$ là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được và (x_n) là dãy trù mật trong $\mathbf{e}$. Với mỗi $n = 1, 2, 3, \dots$ Đặt

$$\begin{aligned}
L_1 &= B\left(x_1, \frac{1}{n}\right); \\
L_2 &= B\left(x_2, \frac{1}{n}\right) \setminus L_1; \\
&\dots\dots\dots \\
L_m &= B\left(x_m, \frac{1}{n}\right) \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} L_k.
\end{aligned}$$

Khi đó với mọi $i \neq j$, $L_i \cap L_j = \emptyset$, $L_m \in \mathbf{B}(\mathfrak{e})$ và do (x_n) trù mật trong $\mathfrak{e}$ nên

$$\mathfrak{e} = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_m.$$

Kí hiệu $J = \{m : L_m \neq \emptyset\}$. Với mỗi $m \in J$ chọn cố định $y_m \in L_m$. Ánh xạ $T_n : \mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{e}$ xác định bởi

$$T_n = \sum_{m \in J} y_m \chi_{L_m}.$$

Khi đó T_n là $\mathbf{B}(\mathfrak{e})/\mathbf{B}(\mathfrak{e}')$ đo được. Thật vậy, với mọi $B \in \mathbf{B}(\mathfrak{e})$ ta có

$$T_n^{-1}(B) = \bigcup_{\{i: y_i \in B\}} L_i \in \mathbf{B}(\mathfrak{e}).$$

Đặt

$$X_n = T_n \circ X : \Omega \xrightarrow{X} \mathfrak{e} \xrightarrow{T_n} \mathfrak{e}.$$

Ta có $|X_n(\Omega)| = |T_n(X(\Omega))| \leq T_n(\mathfrak{e}) = |J|$.

Do $|J|$ không quá đếm được nên $|X_n(\Omega)|$ cũng không quá đếm được.

Ta sẽ chứng minh X_n là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ -đo được. Thật vậy, với mọi $B \in \mathbf{B}(\mathfrak{e})$ ta có

$$X_n^{-1}(B) = (T_n \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}(T_n^{-1}(B)) = X^{-1}(B') \in \mathbf{G}$$

Vì vậy X_n là phần tử ngẫu nhiên rời rạc.

Mặt khác, $\|X_m(\omega) - X(\omega)\| = \|T_n(X(\omega)) - X(\omega)\| < \frac{2}{n}$, $\forall \omega \in \Omega$. Do đó

$$\sup_{\omega} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| < \frac{2}{n} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Định lí được chứng minh. $\square$

2.1.3 Định lí. Ảnh xạ $X : \Omega \rightarrow \mathbf{e}$ là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được khi và chỉ khi X là giới hạn (theo chuẩn) của một dãy (X_n) các phần tử ngẫu nhiên đơn giản $\mathbf{G}$ - đo được và $\|X_n(\omega)\| \leq \|X(\omega)\|$, tức là $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| = 0$ và $\|X_n(\omega)\| \leq \|X(\omega)\|$ với mọi n và mọi $\omega \in \Omega$.

Chứng minh. Điều kiện đủ là Định lí 2.1.1.

Điều kiện cần: Giả sử X là phần tử ngẫu nhiên. Do $\mathbf{e}$ khả li nên tồn tại dãy (y_n) trù mật trong $\mathbf{e}$, $y_0 = 0$.

Với mỗi $n = 1, 2, \dots$ xác định ánh xạ

$$f_n : E \rightarrow \{y_0, \dots, y_n\}, \quad \forall x \in E, f_n(x) = y_l, \quad y_l \in \{y_0, \dots, y_n\} \quad \text{thỏa mãn}$$

$$\|x - y_l\| < \|x - y_m\|; \quad 0 \leq m < l;$$

$$\|x - y_l\| \leq \|x - y_m\|; \quad l \leq m \leq n.$$

Khi đó, với mọi n , f_n là ánh xạ $\mathbf{B}(\mathbf{e}) / \mathbf{B}(\mathbf{e}')$ đo được. Thật vậy

$$\begin{aligned} f_n^{-1}(y_l) &= \{x \in E : \|x - y_l\| < \|x - y_m\|; 0 \leq m < l, \|x - y_l\| \leq \|x - y_m\|; l \leq m \leq n\} \\ &= \bigcap_{m=0}^{l-1} \left\{ x : \|x - y_l\| < \|x - y_m\| \bigcap_{m=l}^n \{x : \|x - y_l\| \leq \|x - y_m\|\} \right\}. \end{aligned}$$

Vì các ánh xạ $f_1 : x \rightarrow x - a$ và $f_2 : x \rightarrow \|x\|$ liên tục, nên ánh xạ $f : x \rightarrow \|x - a\|$ liên tục. Tương tự $g : x \rightarrow \|x - b\|$ liên tục. Do đó $f_{(a;b)}(x) = \|x - a\| - \|x - b\|$ liên tục. Từ đó

$$f_n^{-1}(y_l) = \bigcap_{m=0}^{l-1} f_{(y_l; y_m)}^{-1} [(-\infty; 0)] \bigcap_{m=l}^n f_{(y_l; y_m)}^{-1} [(-\infty; 0)] \in \mathbf{B}(\mathbf{e})$$

với mọi l . Vậy với mọi $B \in \mathbf{B}(\mathbf{e})$ ta có

$$f_n^{-1}(B) = \bigcup_{\{l: y_l \in B\}} f_n^{-1}(y_l) \in \mathbf{B}(\mathbf{e}).$$

Vậy $f_n : e \rightarrow e$ là $\mathbf{B}(e)/\mathbf{B}(e')$ đo được. Mặt khác

$$\|x - f_n(x)\| \leq \min_{0 \leq m \leq n} \|y_m - x\| \leq \|y_0 - x\| = \|x\|$$

$$\text{nên } \|f_n(x)\| \leq 2\|x\|.$$

Đặt $X_n = f_n \circ X$. Khi đó

$$|X_n(\Omega)| = |f_n[X_n(\Omega)]| \leq |f_n(e)| < \infty$$

tức là, X_n chỉ nhận hữu hạn giá trị.

Với mọi $B \in \mathbf{B}(e)$ thì

$$X_n^{-1}(B) = (f_n \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}[f_n^{-1}(B)] = X^{-1}(B') \in \mathbf{G}, \quad B \in \mathbf{B}(e).$$

Do X là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được, nên X_n là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được. Vậy X_n là phần tử ngẫu nhiên đơn giản $\mathbf{G}$ - đo được và

$$\|X_n(\omega)\| = \|f_n[X(\omega)]\| \leq 2\|x\| \text{ với mọi } n \text{ và mọi } \omega \in \Omega.$$

Cuối cùng ta có

$$\begin{aligned} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| &= \|f_n(X(\omega)) - X(\omega)\| \\ &= \|f_n(x) - x\| = \min_{0 \leq m \leq n} \|y_m - x\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ với mọi $\omega \in \Omega$.

Vậy X là giới hạn theo chuẩn của dãy phần tử ngẫu nhiên rời rạc (X_n) .

Định lí được chứng minh. $\square$

2.1.4 Định lí. Cho e_1, e_2 là không gian Banach. $T : e_1 \rightarrow e_2$ là ánh xạ $\mathbf{B}(e_1)/\mathbf{B}(e_2)$ đo được, $X : \Omega \rightarrow e$ là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được. Khi đó ánh xạ $T \circ X : \Omega \rightarrow e_2$ là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được.

Chứng minh. Với mọi $B_2 \in \mathbf{B}(e_2)$ ta có $T^{-1}(B_2) = B_1 \in \mathbf{B}(e_1)$. Do đó

$$(T \circ X)^{-1}(B_2) = X^{-1}(T^{-1}(B_2)) = X^{-1}(B_1) \in \mathbf{G}. \text{ Vậy ánh xạ } T \circ X : \Omega \rightarrow e_2 \text{ là phần tử ngẫu nhiên}$$

$\mathbf{G}$ - đo được. $\square$

2.1.5 Hệ quả. Giả sử ánh xạ $X : \Omega_1 \rightarrow e$ là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được thì ánh xạ $\|X\| : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ là đại lượng ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được.

Chứng minh. Ta có $\|X\| = \|\cdot\| \circ X : \Omega_1 \xrightarrow{X} e \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}$, $\|\cdot\|$ liên tục nên đo được, áp dụng Định lí 2.1.4 ta có điều phải chứng minh. $\square$

2.1.6 Định lí. Ánh xạ $X : \Omega \rightarrow e$ là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được khi và chỉ khi với mọi $f \in e'$ thì $f(X) = f \circ X$ là đại lượng ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được.

Chứng minh. Giả sử X là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được. Khi đó với mọi $f \in e'$, f liên tục nên f là $\mathbf{B}(e) / \mathbf{B}(\mathbb{R})$ đo được. Theo Định lí 2.1.4 ta có $f(X)$ là đại lượng ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được.

Ngược lại, giả sử $f(X)$ là đại lượng ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được với mọi $f \in E'$ cần chứng minh $X^{-1}(B) \in \mathbf{G}$ với mọi $B \in \mathbf{B}(e)$. Đặt

$$\mathbf{L} = \{A \subset \Omega : X^{-1}(A) \in \mathbf{G}\}.$$

Khi đó, $\mathbf{L}$ là σ - đại số. Ta sẽ chứng minh $\mathbf{B}(e) \subset \mathbf{L}$, nhưng $\mathbf{B}(e)$ là σ - đại số sinh bởi các tập trụ nên ta chỉ cần chứng minh $\mathbf{L}$ chứa các tập trụ. Thật vậy, giả sử

$$\hat{A} \subset \mathbb{R}^n,$$

đặt

$$C(\hat{A}) = \{\omega \in \Omega : (f_1(X)(\omega), \dots, f_n(X)(\omega)) \in \hat{A}\},$$

$$L_n = L_n(f_1, \dots, f_n) = \{\hat{A} \in \mathbb{R}^n : C(\hat{A}) \in \mathbf{G}\}.$$

Giả sử $\vec{f}(f_1, \dots, f_n) : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ là ánh xạ xác định bởi

$$x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Do $f_1, \dots, f_n$ liên tục nên $\vec{f}$ liên tục. Vậy $\vec{f}$ là $\mathbf{B}(e) / \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ đo được. Từ đó

$$C(\hat{A}) = [\vec{f}(X)]^{-1}(\hat{A}) = \left\{ [\vec{f}(X)]^{-1}(\hat{A}) \in \mathbf{F} \right\} = \left\{ g^{-1}(\hat{A}) \in \mathbf{F} \right\}$$

với $g = f(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ là ánh xạ $\mathbf{F} / \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ đo được nên suy ra L_n là một σ -đại số các tập con của $\mathbb{R}^n$. Thật vậy

$$(i) \quad g^{-1}(\mathbb{R}^n) = \Omega \in \mathbf{F} \quad \text{suy ra } \mathbb{R}^n \in L_n.$$

$$(ii) \quad \hat{A} \in L_n \text{ suy ra } g^{-1}(\hat{A}) \in \mathbf{F} \quad \text{nên}$$

$$g^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \hat{A}) = g^{-1}(\mathbb{R}^n) \setminus g^{-1}(\hat{A}) = \Omega \setminus g^{-1}(\hat{A}) \in \mathbf{F}.$$

$$(iii) \quad \text{Giả sử } (A_i)_{i=1}^{\infty} \subset L_n \text{ nên } g^{-1}(\hat{A}_1); g^{-1}(\hat{A}_2); \dots \in \mathbf{F} \quad \text{suy ra}$$

$$g^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{A}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(\hat{A}) \in \mathbf{F}.$$

Mặt khác nếu $D = (\alpha_1; \beta_1) \times (\alpha_2; \beta_2) \times \dots \times (\alpha_n; \beta_n) \in B(\mathbb{R}^n)$ thì

$$\begin{aligned} g^{-1}(D) &= (\tilde{f}X)^{-1}(D) = X^{-1}[f^{-1}(D)] = X^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(\alpha_i; \beta_i)\right) \\ &= \bigcap_{i=1}^n [(f_i X)^{-1}(\alpha_i; \beta_i)] = \bigcap_{i=1}^n [(f_i(X))^{-1}(\alpha_i; \beta_i)] \in \mathbf{F} \end{aligned}$$

nên $D \in L_n$ từ đó $\mathbf{B}(\mathbb{R}^n) \subset L_n$. Vậy với $\hat{A} \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ thì $\hat{A} \in L_n$, do đó $C(\hat{A}) \in \mathbf{G}$.

Từ chứng minh trên ta suy ra nếu $\hat{A} \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ thì $C(\hat{A}) \in \mathbf{G}$. Bây giờ giả sử A là tập trụ, khi đó tồn tại $n; f_1, \dots, f_n \in E'; \hat{A} \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$A = \{x \in E : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \hat{A}\}$$

$$X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\}$$

$$= \{\omega : (f_1(X)(\omega), \dots, f_n(X)(\omega)) \in \hat{A}\} = C(\hat{A}) \in \mathbf{F}$$

do đó $A \in L$. Do L chứa các tập trụ nên $L \supset \mathbf{B}(E)$. Điều này kéo theo $B \in \mathbf{B}(E)$ thì $B \in L$ nên $X^{-1}(B) \in \mathbf{G}$. Từ đó X là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ -đo được. Định lí được chứng minh. $\square$

2.1.7 Hệ quả. Cho X, Y là các phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ -đo được, $a, b \in \mathbb{R}$, $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ là đại lượng ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ -đo được. Khi đó $aX + bY, \xi X$ là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ -đo được.

Chứng minh. Ta có

$$(aX + bY)(\omega) = aX(\omega) + bY(\omega) \in \mathfrak{e},$$

$$\xi X(\omega) = \xi(\omega)X(\omega) \in \mathfrak{e}.$$

Do đó, với mọi $f \in \mathfrak{e}'$, thì $f(aX + bY) = af(x) + bf(Y)$ là đại lượng ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được và $f(\xi X) = \xi f(X)$ là đại lượng ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được. Từ đó suy ra $aX + bY, \xi X$ là phần tử ngẫu nhiên $\mathbf{G}$ - đo được. $\square$

Cho $X_t, t \in \Delta$ là họ các phần tử ngẫu nhiên cùng xác định trên không gian $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{p})$ nhận giá trị trong $(\mathfrak{e}, \mathbf{B}(\mathfrak{e}))$. Khi đó, họ $X_t, t \in \Delta$ gọi là *độc lập*, nếu với mọi bộ hữu hạn $t_j \in \Delta$ và $A_j \in \mathbf{B}(E), 1 \leq j \leq n$, ta có

$$\mathbf{p}\left(\bigcap_{j=1}^n X_{t_j}^{-1}(A_j)\right) = \prod_{j=1}^n \mathbf{p}(X_{t_j}^{-1}(A_j)).$$

2.1.8 Định lí. Giả sử $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ là các không gian Banach; $(X_t, t \in \Delta)$ là họ phần tử ngẫu nhiên độc lập nhận giá trị trong $\mathfrak{e}_1$. Khi đó, nếu với mỗi $t \in \Delta, T_t : \mathfrak{e}_1 \rightarrow \mathfrak{e}_2$ là ánh xạ $\mathbf{B}(\mathfrak{e}) / \mathbf{B}(\mathfrak{e}_1)$ - đo được, thì họ $T_t(X_t), t \in \Delta$ là phần tử ngẫu nhiên độc lập nhận giá trị trong $\mathfrak{e}_2$.

Chứng minh. Nếu X là phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong $\mathfrak{e}_1, A \in \mathbf{B}(\mathfrak{e}), T : \mathfrak{e}_1 \rightarrow \mathfrak{e}_2$ là ánh xạ $\mathbf{B}(\mathfrak{e}_1) / \mathbf{B}(\mathfrak{e}_2)$ - đo được thì

$$[T(X)]^{-1}(A) = X^{-1}[T^{-1}(A)] = X^{-1}(A')$$

với $A' \in \mathbf{B}(\mathfrak{e}_1)$.

Chúng ta bỏ qua chứng minh định lí sau

2.1.9 Định lí. Giả sử $X_1, X_2, \dots, X_n$ là các phần tử ngẫu nhiên cùng xác định trên không gian $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{p})$ nhận giá trị trong $(\mathfrak{e}, \mathbf{B}(\mathfrak{e}))$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để $X_1, X_2, \dots, X_n$ độc lập là với mọi $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathfrak{e}'$, các đại lượng ngẫu nhiên $f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_n)$ độc lập.

2.2 CÁC DẠNG HỘI TỤ

Cho $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ là không gian xác suất đầy đủ, E là không gian Banach khả li, $\mathbf{B}(\mathcal{E})$ là σ -đại số Borel của $\mathcal{E}$.

Cho X là phần tử ngẫu nhiên xác định trên không gian $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ nhận giá trị trong $(\mathcal{E}, \mathbf{B}(\mathcal{E}))$. Với mọi $p > 0$ ta kí hiệu

$$\mathbf{E}\|X\|^p = \int_{\Omega} \|X\|^p d\mathbf{P}, \quad \|X\|_p = (\mathbf{E}\|X\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Giả sử (X_n) là dãy phần tử ngẫu nhiên cùng xác định trên không gian $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ nhận giá trị trong $(\mathcal{E}, \mathbf{B}(\mathcal{E}))$.

Ta nói

(X_n) hội tụ đến X hầu chắc chắn nếu $\mathbf{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = 0\right) = 1$,

kí hiệu là $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$.

(X_n) hội tụ đến X theo xác suất nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) = 0$ với mọi $\varepsilon > 0$, kí hiệu là

$X_n \xrightarrow{P} X$.

(X_n) hội tụ đến X theo trung bình cấp p nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\|X_n - X\|^p = 0$,

kí hiệu là $X_n \xrightarrow{L_p} X$.

2.2.1 Định lí. $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sup_{m \geq n} \|X_m - X\| > \varepsilon\right) = 0.$$

Chứng minh. Với mỗi $\varepsilon > 0$ và mỗi $n = 1, 2, \dots$ Đặt

$$D_n(\varepsilon) = \left(\sup_{m > n} \|X_m - X\| > \varepsilon\right) = \bigcup_{m=n}^{\infty} (\|X_m - X\| > \varepsilon).$$

Ta có $D_n(\varepsilon)$ giảm khi n tăng và $D_n^c(\varepsilon) = \bigcap_{m=n}^{\infty} (\|X_m - X\| \leq \varepsilon)$.

$$\text{Ta có } \omega \in \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n : \|X_m(\omega) - X(\omega)\| \leq \varepsilon, \forall m \geq n$$

$$\Leftrightarrow \forall k, \exists n : \|X_m(\omega) - X(\omega)\| \leq \frac{1}{k}, \forall m \geq n$$

$$\Leftrightarrow \forall k, \exists n : \omega \in D_n^c\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^c\left(\frac{1}{k}\right).$$

Do đó

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = 0 \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^c\left(\frac{1}{k}\right).$$

Từ đó

$$X_n \xrightarrow{h.c.c} X \Leftrightarrow \mathbf{p}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = 0\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{p}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^c\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{p}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^c\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 1, \forall k = 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{p}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 0, \forall k = 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}\left(D_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 0, \forall k = 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}\left(D_n(\varepsilon)\right) = 0, \text{ vì } D_n(\varepsilon) \text{ giảm khi } n \rightarrow \infty.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

2.2.2 Định lí.

Nếu $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ hoặc $X_n \xrightarrow{L_p} X$ thì $X_n \xrightarrow{p} X$.

Chứng minh. Nếu $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ thì $X_n \xrightarrow{p} X$. Thật vậy, ta có với mọi $\varepsilon > 0$

$$0 \leq p(\|X_n - X\| > \varepsilon) \leq p\left(\sup_{m \geq n} \|X_m - X\| > \varepsilon\right).$$

Mặt khác $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ theo Định lí 2.2.1 với mọi $\varepsilon > 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\left(\sup_{m \geq n} \|X_m - X\| > \varepsilon\right) = 0.$$

Vậy $X_n \xrightarrow{p} X$.

Nếu $X_n \xrightarrow{L_p} X$ thì $X_n \xrightarrow{p} X$. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Markov cho đại lượng ngẫu nhiên $\|X_n - X\|^p$, ta có với mọi $\varepsilon > 0$

$$(\|X_n - X\| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} e\|X_n - X\|^p \rightarrow 0$$

do $e\|X_n - X\|^p \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Vậy $X_n \xrightarrow{p} X$. Định lí được chứng minh. $\square$

Ta nói dãy phân tử ngẫu nhiên

(X_n) là dãy cơ bản hầu chắc chắn (h.c.c) nếu $p\left(\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|X_n - X_m\| = 0\right) = 1$;

(X_n) là dãy cơ bản theo xác suất

nếu $\lim_{m,n \rightarrow \infty} p(\|X_n - X_m\| \geq \varepsilon) = 0$ với mọi $\varepsilon > 0$;

(X_n) là dãy cơ bản theo trung bình cấp $p > 0$ nếu $\lim_{m,n \rightarrow \infty} e\|X_m - X_n\|^p = 0$.

2.2.3 Định lí.

Dãy (X_n) là dãy cơ bản h.c.c khi và chỉ khi dãy (X_n) hội tụ h.c.c.

Chứng minh. Đặt $\Omega_1 = \{\omega : (X_n(\omega)) \text{ hội tụ}\}$,

$$\Omega_2 = \{\omega : (X_n(\omega)) \text{ cơ bản}\}.$$

Vì E là không gian Banach nên $\Omega_1 = \Omega_2$. Do đó

$$\begin{aligned} (X_n) \text{ hội tụ h.c.c} &\Leftrightarrow p(\Omega_1) = 1 \\ &\Leftrightarrow p(\Omega_2) = 1 \\ &\Leftrightarrow (X_n) \text{ cơ bản h.c.c.} \end{aligned}$$

Định lí được chứng minh. $\square$

2.2.4 Định lí. Dãy (X_n) là cơ bản h.c.c khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau thỏa mãn:

$$\begin{aligned} (i) \lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\sup_{k, l \rightarrow \infty} \|X_k - X_l\|\right) &= 0, \forall \varepsilon > 0; \\ (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\sup_{k \geq n} \|X_k - X_n\| > \varepsilon\right) &= 0, \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Chứng minh. Ta có $\|X_k - X_l\| \leq \|X_k - X_n\| + \|X_l - X_n\|$. Suy ra $\left(\sup_{k \geq n} \|X_k - X_n\| > \varepsilon\right) \subset$

$$\left(\sup_{k, l \geq n} \|X_k - X_l\| > \varepsilon\right) \subset \left(\sup_{k \geq n} \|X_k - X_n\| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Do đó (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Ta sẽ chứng minh (X_n) là dãy cơ bản h.c.c khi và chỉ khi thỏa mãn (i). Đặt

$$\Delta_n(\varepsilon) = \bigcup_{k, l = n}^{\infty} (\|X_k - X_l\| > \varepsilon) = \left(\sup_{k, l \geq n} \|X_k - X_l\| > \varepsilon\right).$$

Khi đó $(\Delta_n(\varepsilon))$ là dãy giảm nên tương tự chứng minh Định lí 2.2.3, ta có

$$\left\{\lim_{k, l \rightarrow \infty} \|X_k - X_l\| = 0\right\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\left(\frac{1}{m}\right)} = 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} (X_n) \text{ cơ bản h.c.c} &\Leftrightarrow \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\left(\frac{1}{m}\right)}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow p\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n\left(\frac{1}{m}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n\left(\frac{1}{m}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\Delta_n\left(\frac{1}{m}\right)\right) = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\Delta_n(\varepsilon)\right) = 0, \text{ với mọi } \varepsilon > 0.$$

Định lí được chứng minh. $\square$

2.2.5 Bổ đề. Cho E là không gian Banach và dãy $(x_n) \subset E$. Khi đó nếu $\|x_{n+1} - x_n\| < \frac{1}{2^n}$ với mọi $n \geq n_0$ thì (x_n) là dãy cơ bản và do đó hội tụ.

Chứng minh. Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại n_1 sao cho $2^{\frac{1}{n_1-1}} < \varepsilon$. Lấy $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Khi đó với mọi $n > n_2$, với mọi $p > 0$

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &< 2^{\frac{1}{n+p-1}} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy (x_n) là dãy cơ bản. $\square$

2.2.6 Định lí. Nếu dãy (X_n) cơ bản theo xác suất thì tồn tại dãy con $(X_{n_k}) \subset (X_n)$ sao cho (X_{n_k}) hội tụ h.c.c.

Chứng minh. (X_n) cơ bản theo xác suất nên với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\|X_m - X_n\| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Từ đó với $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ chọn n_1 sao cho mọi $m, n \geq n_1$ thì $p\left(\|X_m - X_n\| \geq \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}, \dots$, với $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ chọn

$n_k > n_{k-1}$ sao cho mọi $m, n \geq n_k$ thì $p\left(\|X_m - X_n\| \geq \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k}, \dots$. Từ đó ta có dãy con (X_{n_k}) thỏa

mãn $p\left(\|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\| \geq \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k}$. Đặt

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \left(\|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\| \geq \frac{1}{2^k} \right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} (A_k).$$

Ta có $p(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} p\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{\infty} p(A_k) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) = 0$. Do đó

$$p(A^c) = 1; \quad A^c = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} \left(\|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \right).$$

Từ đó với mọi $\omega \in A^c$ tồn tại m_0 sao cho

$$\omega \in \bigcap_{k=m_0}^{\infty} \left(\|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \right).$$

Suy ra $\|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)\| < \frac{1}{2^k}$ với mọi $k \geq m_0$.

Theo Bổ đề 2.2.5 dãy $(X_{n_k}(\omega)) \subset E$ hội tụ nên $A^c \subset \{\omega : X_{n_k}(\omega) \text{ hội tụ}\}$. Từ đó suy ra p . Do đó (X_{n_k}) hội tụ h.c.c. Định lí được chứng minh. $\square$

2.2.7 Định lí. Dãy (X_n) hội tụ theo xác suất khi và chỉ khi dãy (X_n) cơ bản theo xác suất.

Chứng minh. Giả sử (X_n) hội tụ theo xác suất. Với mọi $\omega \in \Omega$

$$\text{ta có } \|X_m(\omega) - X_n(\omega)\| \leq \|X_m(\omega) - X(\omega)\| + \|X_n(\omega) - X(\omega)\|.$$

$$\text{Do đó } (\|X_m - X_n\| \geq \varepsilon) \subseteq \left(\|X_m - X\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \cup \left(\|X_n - X\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

$$\text{Suy ra } \mathbf{p}\left(\|X_m - X_n\| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbf{p}\left(\|X_m - X\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{p}\left(\|X_n - X\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Do (X_n) hội tụ theo xác suất nên $\mathbf{p}\left(\|X_m - X_n\| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$ khi $m, n \rightarrow \infty$. Vậy (X_n) là dãy cơ bản theo xác suất.

Ngược lại, giả sử (X_n) là dãy cơ bản theo xác suất. Theo Định lý 2.2.6 tồn tại $(X_{n_k}) \subset (X_n)$,

$$X_{n_k} \xrightarrow{h.c.c} X \quad (k \rightarrow \infty). \text{ Với mọi } \varepsilon > 0,$$

$$0 \leq \mathbf{p}\left(\|X_n - X\| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbf{p}\left(\|X_n - X_{n_k}\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{p}\left(\|X_{n_k} - X\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \rightarrow 0.$$

Vậy $X_n \xrightarrow{p} X$ khi $n \rightarrow \infty$. Định lý được chứng minh. $\square$

2.2.8 Định lý. Dãy (X_n) hội tụ theo trung bình cấp $p \geq 1$ khi và chỉ khi dãy (X_n) cơ bản theo trung bình cấp p .

Chứng minh. Giả sử $X_n \xrightarrow{L_p} X$. Khi đó $\mathbf{e}\|X_n - X\|^p \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}\|X_m - X_n\|^p)^{\frac{1}{p}} &= \|X_m - X_n\|_p \leq \|X_m - X\|_p + \|X_n - X\|_p \\ &= (\mathbf{e}\|X_m - X\|^p)^{\frac{1}{p}} + (\mathbf{e}\|X_n - X\|^p)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

khi $m, n \rightarrow \infty$. Vậy $\mathbf{e}\|X_m - X_n\|^p \rightarrow 0$ khi $m, n \rightarrow \infty$. Do đó (X_n) cơ bản theo trung bình cấp p .

Ngược lại, giả sử (X_n) cơ bản theo trung bình cấp p , ta có

$$(\mathbf{e}\|X_m - X_n\|^p)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \text{ khi } m, n \rightarrow \infty.$$

$$\begin{aligned} \text{Vi } (\mathbf{e}\|X_n\|^p)^{\frac{1}{p}} &= \|X_n\|_p = \|(X_n - X_m) + X_m\|_p \leq \|X_n - X_m\|_p + \|X_m\|_p \\ &= (\mathbf{e}\|X_m - X_n\|^p)^{\frac{1}{p}} + (\mathbf{e}\|X_m\|^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

nên $|\mathbf{e}\|X_n\| - \mathbf{e}\|X_m\|| \leq (\mathbf{e}\|X_m - X_n\|^p)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$ khi $m, n \rightarrow \infty$.

Dãy số $(\mathbf{e}\|X_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$ là dãy cơ bản trong $\mathbb{R}$ nên hội tụ và do đó bị chặn. Vậy $\sup\|X_n\|^p < \infty$ theo đẳng thức Mackop ta có

$$\mathbf{p}(\|X_n - X_m\| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \mathbf{e}\|X_n - X_m\|^p \rightarrow 0 \text{ khi } m, n \rightarrow \infty.$$

Suy ra (X_n) cơ bản theo xác suất nên tồn tại $(X_{n_k}) \subset (X_n)$, $X_{n_k} \xrightarrow{h.c.c} X$ khi $k \rightarrow \infty$. Mặt khác do (X_n) cơ bản theo trung bình cấp p nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $N(\varepsilon)$ sao cho

$$\mathbf{e}\|X_m - X_n\|^p < \varepsilon \text{ với mọi } m, n \geq N(\varepsilon).$$

Từ đó mọi $n_k \geq N(\varepsilon)$ sử dụng Bô đê Fatou

$$\mathbf{e}\|X_{n_k} - X\|^p = \mathbf{e} \lim_{m \rightarrow \infty} \|X_{n_k} - X_{n_m}\|^p \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{e}\|X_{n_k} - X_{n_m}\|^p \leq \varepsilon.$$

Do $\mathbf{e}\|X_{n_k} - X\|^p \leq \varepsilon$ với mọi $\varepsilon > 0$ nên $\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} \mathbf{e}\|X_{n_k} - X\|^p \leq \varepsilon$ với mọi $\varepsilon > 0$. Vậy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}\|X_{n_k} - X\|^p = 0 \text{ nên } X_{n_k} \xrightarrow{L_p} X.$$

Ta có $(\mathbf{e}\|X_m - X\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbf{e}\|X_m - X_{n_k}\|^p)^{\frac{1}{p}} + (\mathbf{e}\|X_{n_k} - X\|^p)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ nên $X_n \xrightarrow{L_p} X$.

Định lí được chứng minh. $\square$

2.3 CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA PHẦN TỬ NGẪU NHIÊN

2.3.1 Kỳ vọng của phần tử ngẫu nhiên

Giả sử $X: \Omega \rightarrow E$ là phần tử ngẫu nhiên, phần tử $\mathbf{e}X \in \mathbf{e}$ gọi là kỳ vọng của X nếu với mọi $f \in \mathbf{e}'$ ta có $f(\mathbf{e}X) = \mathbf{e}(f(X)) \in \mathbb{R}$.

2.3.2 Định lí. Giả sử X, Y là các phần tử ngẫu nhiên, ξ là đại lượng ngẫu nhiên cùng xác định trên $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{p})$, $a \in R, \alpha \in E$. Khi đó nếu tồn tại $\mathbf{e}X, \mathbf{e}Y, \mathbf{e}\xi$ thì

1. Tồn tại $\mathbf{e}(X + Y)$ và $\mathbf{e}(X + Y) = \mathbf{e}X + \mathbf{e}Y$;

2. Tồn tại $\mathbf{e}(aX)$ và $\mathbf{e}(aX) = a\mathbf{e}X$;

3. Tồn tại $e(\alpha\xi)$ và $e(\alpha\xi) = \alpha e\xi$;

4. Nếu $P(X=a)=1$ thì $eX=a$;

5. Nếu ξ và $f(X)$ độc lập với mọi $f \in E'$ thì tồn tại $e(\xi X)$ và $e(\xi X) = e\xi \cdot eX$;

6. Với mọi ánh xạ tuyến tính $T:E \rightarrow F$, F là không gian Banach khả li, tồn tại $e[T(X)]$ và $e[T(X)] = T[e(X)]$.

Chứng minh.

1. Đặt $m = eX + eY$. Khi đó, với mọi $f \in E'$ ta có

$$\begin{aligned} e[f(X+Y)] &= e[f(X) + f(Y)] = e[f(X)] + e[f(Y)] \\ &= f(eX) + f(eY) = f(eX + eY) = f(m). \end{aligned}$$

Do đó theo hệ quả của định lý Hahn-Banach, $m = e(X+Y)$.

2. Đặt $m = a eX$. Khi đó, với mọi $f \in E'$ ta có

$$\begin{aligned} e[f(aX)] &= e[af(X)] = a e f(X) \\ &= af(eX) + f(a eX) = f(m). \end{aligned}$$

Do đó $m = e(aX)$.

3. Ta có $f(\alpha\xi)(\omega) = f(\alpha\xi(\omega)) = \xi(\omega)f(\alpha) = [\xi f(\alpha)](\omega)$ với mọi $\omega \in \Omega$. Suy ra $f(\alpha\xi) = \xi f(\alpha)$. Đặt $m = \alpha e\xi$. Khi đó, với mọi $f \in E'$ ta có

$$f(\alpha\xi) = e(\xi f(\alpha)) = f(\alpha) e\xi = f(e\xi) = f(m).$$

Do đó $m = e(\alpha\xi)$.

4. Ta có $(X=a) \subset (f(X)=f(a))$ mà $e(X=a)=1$ nên $e(f(X)) = f(a)=1$. Suy ra $e(f(X)) = e f(a) = f(a)$.

Do đó $a = eX$.

5. Ta có $f(\xi X)(\omega) = f(\xi(\omega)X(\omega)) = \xi(\omega)f(X(\omega)) = \xi f(X)(\omega)$ suy ra $f(\xi X) = \xi f(X)$.

Đặt $m = e\xi \cdot eX$, ta có

$$\begin{aligned} e[f(\xi X)] &= e[\xi f(X)] = e\xi \cdot e f(X) \\ e\xi f(eX) &= f(e\xi \cdot eX) = f(m). \end{aligned}$$

Do đó $m = e(\xi X)$.

6. Đặt $m = T(eX)$. Khi đó, với mọi $f \in E'$ ta có

$$e[f(TX)] = e[(fT)(X)] = (fT)(eX) = f(TeX) = f(m).$$

Do đó $m = e(TX)$. $\square$

2.3.3 Định lí. Nếu $e\|X\| < \infty$ thì tồn tại eX và $e\|X\| \geq \|eX\|$.

Chứng minh.

(i) Trường hợp X là phân tử ngẫu nhiên rời rạc

$$X = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{A_j},$$

trong đó $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega$; $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), $A_j \in F$, $A_i \in E$ Khi đó

$$\|X\|(\omega) = \|a_j\| \text{ nếu } \omega \in A_j.$$

Suy ra $\|X\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\| \chi_{A_j}$. Do đó $e\|X\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\| \chi(A_j) < \infty$.

Đặt $X_n = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$, ta có

$$\mathbf{e} X_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{e} (a_j \chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^n a_j (A_j) \in E.$$

Với mọi $m > n$ ta có

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e} X_m - \mathbf{e} X_n\| &= \left\| \sum_{j=n+1}^m a_j \mathbf{P}(A_j) \right\| \leq \sum_{j=n+1}^m \|a_j\| \mathbf{P}(A_j) \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|a_j\| \mathbf{P}(A_j) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

khí $m, n \rightarrow \infty$, chứng tỏ (EX_n) là dãy cơ bản trong E do đó tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{e} X_n = m \in E$.

Ta sẽ chứng minh $m = \mathbf{e} X$. Thật vậy, với mọi $f \in E'$, ta có

$$f(m) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{e} X_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{e} X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{e} (f(X_n)) \quad (*).$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} |\mathbf{e} [f(X_n)] - \mathbf{e} f(X)| &= |\mathbf{e} f(X_n - X)| \leq \mathbf{e} |f(X_n - X)| \\ &\leq \mathbf{e} [\|f\| \|X_n - X\|] = \|f\| \mathbf{e} \|X_n - X\| \\ &= \|f\| \mathbf{e} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \|a_j\| \chi_{A_j} \right) \\ &= \|f\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \|a_j\| \mathbf{e} (A_j) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

khí $n \rightarrow \infty$. Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{e} f(X_n) = \mathbf{e} f(X) \quad (**).$$

Từ (*) và (**) suy ra $f(m) = \mathbf{e} f(X)$ với mọi $f \in E'$. Do đó $m = \mathbf{e} X$.

Vậy $\mathbf{e} X = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{e} X_n$.

(ii) Trường hợp X bất kì. Trường hợp này tồn tại dãy phần tử ngẫu nhiên (X_n) rời rạc sao

cho $\sup_{\omega} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$. Do đó

$$e\|X_n - X\| \leq e\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

khi $n \rightarrow \infty$. Xét dãy (eX_n) , ta có

$$\|EX_n - EX_m\| \leq \|EX_n - EX\| + \|EX_m - EX\| \rightarrow 0$$

khi $m, n \rightarrow \infty$ nên (eX_n) là dãy cơ bản trong E . Do đó tồn tại

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e$$

$$X_n = m \in E.$$

Ta sẽ chứng minh $m = eX$. Thật vậy, với mọi $f \in E'$, ta có

$$f(m) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} eX_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(eX_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e(f(X_n)) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } |e[f(X_n)] - e f(X)| \leq |e f(X_n - X)| \leq \|f\| e\|X_n - X\| \rightarrow 0$$

$$\text{nên } \lim_{n \rightarrow \infty} e f(X_n) = e f(X) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(m) = e f(X)$ với mọi $f \in E'$. Do đó $m = eX$.

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} e X_n = eX.$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\|eX\| \leq e\|X\|$. Thật vậy, nếu X là phần tử ngẫu nhiên đơn giản

$$X = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j} \quad \text{thì}$$

$$\|X\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j P(A_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n \|a_j\| P(A_j) = e\|X\|.$$

Nếu X là phần tử ngẫu nhiên rời rạc thì tồn tại dãy phần tử ngẫu nhiên đơn giản (X_n) sao cho e

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} e X_n. \text{ Khi đó}$$

$$\|eX\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|EX_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E\|X_n\| \leq e\|X\|.$$

Cuối cùng, nếu X là phần tử ngẫu nhiên bất kì thì tồn tại dãy phần tử ngẫu nhiên rời rạc (X_n) sao cho $eX = \lim_{n \rightarrow \infty} eX_n$. Bằng lập luận như đối với phần tử ngẫu nhiên rời rạc, ta cũng có bất đẳng

$$\text{thức } \|eX\| \leq e\|X\|$$

Định lí được chứng minh. $\square$

Ta nói ánh xạ $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi nếu $\varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y)$

với mọi $\alpha \in [0;1]$, $x, y \in E$.

2.3.4 Bổ đề. Nếu y là hàm lồi $\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ thì

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(x_i) \text{ với mọi } x_i \in E.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa hàm lồi ta có

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2), \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Vậy với $n = 2$, bổ đề đúng.

Giả sử bổ đề đúng đến $n = k$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, giả sử $\alpha_i \geq 0; (i = 1, 2, \dots, k + 1), \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$, không mất tính tổng quát, có thể giả thiết

$\alpha_{k+1} \neq 0, \alpha_{k+1} \neq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i\right) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \alpha_{k+1} x_{k+1}\right) \\ &= \varphi\left[\left(1 - \alpha_{k+1}\right) \cdot \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} \cdot x_i + \alpha_{k+1} x_{k+1}\right] \\ &\leq \left(1 - \alpha_{k+1}\right) \cdot \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} \cdot \varphi(x_i) + \alpha_{k+1} \cdot \varphi(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \varphi(x_i) + \alpha_{k+1} \cdot \varphi(x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \varphi(x_i) \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$. $\square$

2.3.5 Định lý. (Bất đẳng thức Jensen). Nếu $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, liên tục. $X: \Omega \rightarrow e$ là phần tử ngẫu nhiên và $e\|X\| < \infty$ thì $\varphi(eX) \leq e\varphi(X)$.

Chứng minh. Giả sử X là phần tử ngẫu nhiên rời rạc, $X = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{A_j}$ với

$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega$, $A_j \cap A_i = \emptyset$, $(i \neq j)$, $a_j \in E$, $A_i \in \mathbf{F}$. Khi đó $\varphi(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(a_j) \chi_{A_j}$. Đặt

$X_n = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$. Ta có $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ và

$$e X_n = \sum_{j=1}^n a_j p(A_j), \quad e \varphi(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(a_j) p(A_j).$$

Vì $\sum_{j=1}^{\infty} p(A_j) = 1$ nên $C_n = \sum_{i=1}^n p(A_i) \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \text{Bởi vì } \varphi\left(\frac{1}{C_n} e X_n\right) &= \varphi\left(\frac{1}{C_n} \sum_{j=1}^n a_j p(A_j)\right) \\ &= \varphi\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{C_n} p(A_j) a_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_n} p(A_j) \varphi(a_j) \\ &= \frac{1}{C_n} \sum_{j=1}^n p(A_j) \varphi(a_j) \rightarrow e \varphi(X) \text{ khi } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{1}{C_n} E X_n\right) \leq e \varphi(X).$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{1}{C_n} E X_n\right) &= \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{C_n} E X_n\right)\right) \\ &= \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{C_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e X_n\right) = \varphi(e X), \end{aligned}$$

suy ra $\varphi(e X) \leq e \varphi(X)$. $\square$

2.3.6 Phương sai của phần tử ngẫu nhiên

Cho X là phần tử ngẫu nhiên, khi đó ta gọi $DX = \|X - e X\|^2$ (nếu tồn tại) là *phương sai* của X .

2.3.7. Định lý. Giả sử X là phần tử ngẫu nhiên, ξ là đại lượng ngẫu nhiên cùng xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathbf{F}, p)$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in E$. Khi đó

1. $D(aX) = a^2 DX$;
2. $D(\alpha\xi) = \|\alpha\|^2 D\xi$;
3. $DX = 0$ khi và chỉ khi $X = \mathbf{e} X$ (h.c.c).

Chứng minh.

1. $D(aX) = \mathbb{E} \|aX - \mathbf{e}(aX)\|^2 = a^2 \mathbb{E} \|X - \mathbf{e} X\|^2 = a^2 DX$.
2. $\mathbb{E}(\alpha\xi) = \alpha \mathbb{E} \xi$ nên $D(\alpha\xi) = \mathbb{E} \|\alpha\xi - \alpha\mathbb{E}\xi\|^2 = \mathbb{E} \|\alpha(\xi - \mathbb{E}\xi)\|^2$,
 $\mathbb{E} (\|\alpha\|^2 \|\xi - \mathbb{E}\xi\|^2) = \|\alpha\|^2 D\xi$.
3. $DX = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E} \|X - \mathbf{e} X\|^2 = 0$
 $\Leftrightarrow \|X - \mathbf{e} X\|^2 = 0 \text{ h.c.c}$
 $\Leftrightarrow \|X - \mathbf{e} X\| = 0 \text{ h.c.c}$
 $\Leftrightarrow X - \mathbf{e} X = 0 \text{ h.c.c}$
 $\Leftrightarrow X = \mathbb{E} X \text{ h.c.c} \quad \square$

CHƯƠNG III

SỰ HỘI TỤ YẾU CỦA ĐỘ ĐO XÁC SUẤT

3.1 ĐỘ ĐO CHÍNH QUY VÀ ĐỘ ĐO RADON

3.1.1 Độ đo chính quy

Cho X là không gian tô pô, μ là độ đo trên $\mathbf{B}(X)$.

Khi đó μ gọi là *chính quy trong* nếu với mọi $A \in \mathbf{B}(E)$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F = \bar{F} \subset A\};$$

μ gọi là *chính quy ngoài* nếu với mọi $A \in \mathbf{B}(X)$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G = \text{int } G \supset A\};$$

μ gọi là *chính quy* nếu μ chính quy trong và chính quy ngoài.

3.1.2 Định lý. Nếu μ là độ đo xác suất, thì ba điều kiện sau tương đương

- (i) μ chính quy trong.
- (ii) μ chính quy ngoài.
- (iii) μ chính quy.

Chứng minh. Giả sử μ chính quy trong và $A \in \mathbf{B}(X)$. Khi đó với $\forall \varepsilon > 0$, tồn tại F_ε đóng,

$F_\varepsilon \subset A^c$ sao cho $\mu(F_\varepsilon) \geq \mu(A^c) - \varepsilon$. Đặt $G_\varepsilon = X \setminus F_\varepsilon$ thì G_ε mở, $G_\varepsilon \supset A$ và

$$\mu(G_\varepsilon) = 1 - \mu(F_\varepsilon) \leq 1 - \mu(A^c) + \varepsilon = \mu(A) + \varepsilon.$$

Do đó $\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G = \text{int } G \supset A\}$, nên μ chính quy ngoài.

Ngược lại, giả sử μ chính quy ngoài, tương tự như trên ta chứng minh được μ chính quy trong. $\square$

3.1.3 Định lý. Nếu μ là độ đo xác suất thì μ chính qui khi và chỉ khi

$\forall A \in \mathbf{B}(X), \forall \varepsilon > 0, \exists F_\varepsilon$ đóng, G_ε mở sao cho $F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon, \mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Chứng minh.

Ta có μ chính quy $\Leftrightarrow \mu$ chính quy trong và μ chính quy ngoài

$\Leftrightarrow \forall A \in \mathbf{B}(X), \forall \varepsilon > 0, \exists F_\varepsilon$ đóng, $F_\varepsilon \subset A$ sao cho: $\mu(F_\varepsilon) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ và tồn tại G_ε mở,

$G_\varepsilon \supset A$ sao cho $\mu(G_\varepsilon) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\Leftrightarrow$ Với mọi $\forall A \in \mathbf{B}(X), \forall \varepsilon > 0, \exists F_\varepsilon$ đóng, G_ε mở, $F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$, sao cho:

$$\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \mu(G_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} - \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \square$$

3.1.4 Định lí. Cho X là không gian tôpô sao cho mọi tập con đóng của nó đều có tính chất G_σ .

Khi đó, mọi độ đo xác suất trên $\mathbf{B}(X)$ là chính quy.

Chứng minh. Đặt

$$\wp = \left\{ A \in \mathbf{B}(X) : \mu(A) = \sup \{ \mu(F) : F = \bar{F} \subset A \} = \inf \{ \mu(G) : G = \text{int } G \supset A \} \right\}.$$

Từ chứng minh của Định lí 3.1.2 ta thấy

$$A \in \wp \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists F_\varepsilon \text{ đóng, } G_\varepsilon \text{ mở, } F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon : \mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Do đó

với $A \neq \emptyset$ thì $\emptyset \subset A \subset \emptyset : \mu(\emptyset \setminus \emptyset) = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, nên $A = \emptyset \in \wp$.

với $A = X$ thì $X \subset A \subset X : \mu(X \setminus X) = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, , nên $A = X \in \wp$.

Giả sử $A \in \wp$ thì với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại F_ε đóng, G_ε mở, $F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$ sao cho

$\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Khi đó G_ε^c đóng, F_ε^c mở, $F_\varepsilon^c \subset A^c \subset G_\varepsilon^c$, và

$$\mu(F_\varepsilon^c \setminus G_\varepsilon^c) = \mu(F_\varepsilon^c) - \mu(G_\varepsilon^c) = 1 - \mu(F_\varepsilon) - 1 + \mu(G_\varepsilon) = \mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Do đó $A^c \in \wp$

Giả sử $A_n \in \mathcal{O}, \forall n \in \mathbb{N}$ và $\varepsilon > 0$ bất kì. Khi đó với mỗi n , tồn tại F_ε^n đóng, G_ε^n mở,

$F_\varepsilon^n \subset A_n \subset G_\varepsilon^n$, sao cho $\mu(G_\varepsilon^n \setminus F_\varepsilon^n) < \frac{\varepsilon}{3^n}$. Đặt

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_\varepsilon^n, \quad G_k = \bigcup_{n=1}^k G_\varepsilon^n.$$

Vì $G_k \uparrow F$ nên theo tính liên tục của μ thì tồn tại $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G_k) = \mu(F)$. Do đó tồn tại

k_0 để $\mu(F) - \mu(G_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall k \geq k_0$. Đặc biệt ta có $\mu(F \setminus G_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Đặt $F_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{k_0} F_\varepsilon^n = G_{k_0}$, $G_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_\varepsilon^n$. Khi đó F_ε đóng, G_ε mở, $F_\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset G_\varepsilon$ và

$$\begin{aligned} \mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) &\leq \mu(G_\varepsilon \setminus F) + \mu(F \setminus F_\varepsilon) \leq \mu\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_\varepsilon^n \setminus F_\varepsilon^n)\right] + \mu(F \setminus G_{k_0}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_\varepsilon^n \setminus F_\varepsilon^n) + \mu(F \setminus G_{k_0}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3^n} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Do đó $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{O}$. Vậy $\mathcal{O}$ là σ -đại số.

Bây giờ giả sử F là tập đóng bất kì trong X . Khi đó, theo giả thiết, F có tính chất G_σ ,

nên $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, với G_n mở.

Đặt $D_k = \bigcap_{n=1}^k G_n$ thì vì $D_k \downarrow F$ nên tồn tại $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(D_k) = \mu(F)$. Do đó với mọi $\varepsilon > 0$, tồn

tại k_0 để $\mu(D_{k_0}) - \mu(F) < \varepsilon, \forall k \geq k_0$ lúc này ta có $\mu(D_{k_0} \setminus F) < \varepsilon$.

Đặt $F_\varepsilon = F$; $G_\varepsilon = D_{k_0}$. Khi đó F_ε đóng, G_ε mở, $F_\varepsilon \subset F \subset G_\varepsilon$ và

$$\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \mu(D_{k_0} \setminus F) < \varepsilon.$$

Do đó: $F \in \mathcal{O}$, tức là $\mathcal{O}$ chứa các tập đóng. Từ các chứng minh trên suy ra $\mathcal{O} = \mathbf{B}(X)$. Vậy μ là độ đo chính quy. $\square$

3.1.5 Hệ quả. Mọi độ đo Borel xác suất trong không gian mêtric đều là độ đo chính quy.

3.1.6 Độ đo Radon

Cho X là không gian tôpô và μ là độ đo xác định trên $\mathbf{B}(X)$. Khi đó, μ được gọi là độ đo Radon nếu

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact} \subset A\}, \forall A \in \mathbf{B}(X).$$

3.1.7 Định lý. Giả sử μ là độ đo xác suất. Khi đó μ là độ đo Radon khi và chỉ khi μ chính quy và với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại K_ε compact sao cho $\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Chứng minh. Giả sử độ đo xác suất μ là độ đo Radon. Khi đó μ là độ đo xác suất nên μ chính quy. Vì $X \in \mathbf{B}(X)$, μ là độ đo Radon, nên

$$\mu(X) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact}\}.$$

Do đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại K_ε compact sao cho $\mu(X) < \mu(K_\varepsilon) + \varepsilon$, hay $\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Ngược lại, giả sử μ chính quy và μ thỏa mãn: mọi $\varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon$ compact sao cho $\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$. Khi đó, vì μ chính quy nên với $\forall A \in \mathbf{B}(X)$, mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại F_ε đóng trong A sao cho $\mu(A \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Với ε nói ở trên, theo giả thiết tồn tại K_ε compact sao cho

$\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Đặt $K = F_\varepsilon \cap K_\varepsilon$ thì vì K đóng trong K_ε nên K compact. Ta có $K \subset A$ và

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus K) &= \mu[A \setminus (F_\varepsilon \cap K_\varepsilon)] \\ &= \mu[(A \setminus F_\varepsilon) \cup (A \setminus K_\varepsilon)] \\ &\leq \mu(A \setminus F_\varepsilon) + \mu(A \setminus K_\varepsilon) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \text{Từ đó } \mu(A) < \mu(K) + \varepsilon \end{aligned}$$

. Do đó $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact} \subset A\}$.

Vậy μ là độ đo Radon. $\square$

3.1.8 Định lí. *Mỗi độ đo Borel xác suất trong không gian mêtric đầy đủ và khả li đều là độ đo Radon.*

Chứng minh. Giả sử X là không gian mêtric đầy đủ và khả li còn μ là độ đo xác suất trên $B(X)$. Khi đó, vì μ là độ đo xác suất nên μ chính quy.

Giả sử $\varepsilon > 0$ bất kì. Vì X khả li nên với mỗi $n = 1, 2, \dots$ ta có $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{B}_{nj}$, trong đó là $\bar{B}_{nj}$

hình cầu đóng bán kính $\frac{1}{n}$.

Vì $C_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{B}_{nj} \uparrow X$ và μ liên tục nên tồn tại $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(C_k) = \mu(X)$, hay $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(X \setminus C_k) = 0$.

Do đó, với mỗi $n = 1, 2, \dots$ tồn tại k_n sao cho $\mu\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{k_n} \bar{B}_{nj}\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Đặt $X_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} \bar{B}_{nj}$; $K_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Khi đó X_n, K_ε đóng. Hơn nữa, với mọi $\delta > 0$, tồn tại n_0 sao cho

$\frac{1}{n_0} < \delta$. Ta có $K_\varepsilon \subset X_{n_0}$, với X_{n_0} bị phủ bởi k_{n_0} hình cầu đóng bán kính bé hơn δ , nên K_ε hoàn

toàn bị chặn. Do đó K_ε compact. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}\mu(X \setminus K_\varepsilon) &= \mu\left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus X_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X \setminus X_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{k_n} [B_{nj}]\right) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Vậy μ là độ đo Radon. $\square$

3.2 SỰ HỘI TỤ YẾU CỦA ĐỘ ĐO

3.2.1 Hội tụ yếu

Trong đoạn này ta kí hiệu

(X, ρ) là không gian mêtric khả li,

$\mathbf{P}(X)$ là tập hợp các độ đo xác suất trên $\mathbf{B}(X)$,

$C_b(X)$ là tập hợp các hàm thực, liên tục, bị chặn trên X ,

$U(X)$ là tập hợp các hàm liên tục đều, bị chặn trên X .

Giả sử $\mu_n, \mu \in \mathbf{P}(X)$. Ta nói μ_n hội tụ yếu đến μ khi $n \rightarrow \infty$, kí hiệu là $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu, \quad \forall f \in C_b(X).$$

Cho $X: (\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{B}(E)$ là phần tử ngẫu nhiên. Đặt

$\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(B)) \text{ với mọi } B \in \mathbf{B}(E),$$

ta có $\mathbf{P}_X$ là một độ đo xác suất trên $\mathbf{B}(E)$.

Dãy phần tử ngẫu nhiên (X_n) , $X_n: (\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{B}(E)$ gọi hội tụ yếu hay hội tụ theo phân phối đến X nếu $\mathbf{P}_{X_n} \xrightarrow{w} \mathbf{P}_X$, kí hiệu là $X_n \xrightarrow{w} X$.

Chúng ta cần bổ đề sau

3.2.2 Bổ đề. Nếu $\mu: \mathbf{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ là độ đo hữu hạn thì trên X có không quá đếm được điểm có độ đo dương.

Chứng minh. Đặt

$$A = \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\},$$

$$A_n = \left\{ x \in X : \mu(\{x\}) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

ta có $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Giả sử tồn tại n_0 sao cho A_{n_0} là tập vô hạn. Khi đó, tồn tại dãy $(x_k) \subset A_{n_0}$ sao cho

$x_i \neq x_j$. Lúc này ta có

$$\mu(A_{n_0}) \geq \mu(\{x_k : k \in \mathbb{N}\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{x_k\}) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_0} = \infty.$$

Ta gặp mâu thuẫn. Do đó A_n là tập hữu hạn với mọi n và A không quá đếm được. $\square$

Bây giờ ta chứng minh định lí quan trọng sau

3.2.3 Định lí. Các điều kiện sau là tương đương

- (i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$;
- (ii) $\forall f \in U(X) : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu$;
- (iii) $\forall F$ đóng trong $X : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$;
- (iv) $\forall G$ mở trong $X : \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$;
- (v) $\forall A \in \mathbf{B}(X), \mu(\partial A) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

Chứng minh.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Nếu $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu, \forall f \in C_b(X)$, mà $U(X) \subset C_b(X)$

nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu, \forall f \in U(X)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f du$, $\forall f \in U(X)$ và F là tập đóng trong X . Vì X là

không gian metric nên theo Định lí 1.1.4, F có tính chất G_δ , tức là $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, với G_n mở trong X

. Ta có thể xem $G_n \downarrow F$ (vì nếu không thì thay G_n bởi $G'_n = \bigcap_{k=1}^n G_k$). Đặt

$$f_n(x) = \frac{\rho(x, G_n^c)}{\rho(x, G_n^c) + \rho(x, F)}.$$

Ta có $f_n \in U(X)$. Kí hiệu χ_A là hàm đặc trưng của tập A . Vì $\chi_F \leq f_n \leq \chi_{G_n}$, $\forall n$, nên

$$\mu_n(F) = \int_X \chi_F d\mu_n \leq \int_X f_n d\mu_n, \forall n. \text{ Từ đó ta có}$$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu_n \\ &\leq \int_X \chi_{G_k} d\mu = \mu(G_k), \forall k. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(G_k) = \mu(F).$$

(iii) $\Rightarrow$ (vi). Giả sử có (iii) và G là tập mở bất kì trong X . Khi đó ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G^c) \leq \mu(G^c)$

. Do đó

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1 - \mu_n(G^c)) \\ &= 1 + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-\mu_n(G^c)) = 1 - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G^c) \\ &\geq 1 - \mu(G^c) = \mu(G). \end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (v). Giả sử có (iv) và A bất kì thuộc $\mathbf{B}(X)$ sao cho $\mu(\partial A) = 0$. Khi đó vì

$$\text{int } A \subset A \subset \overline{A} = \text{int } A \cup \partial A,$$

$$\text{nên } \mu(\text{int } A) = \mu(A) = \mu(\overline{A}).$$

$$\text{Do đó } \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\text{int } A) \geq \mu(\text{int } A) = \mu(A);$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\bar{A}) \leq \mu(\bar{A}) = \mu(A).$$

Như vậy $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \geq \mu(A) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$.

Mặt khác, ta luôn có $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$,

Nên $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

Do đó tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

(v) $\Rightarrow$ (i). Giả sử có (v) và f tùy ý thuộc $C_b(X)$. Xét hàm tập

$$\nu = f(\mu): \mathbf{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

xác định bởi

$$\nu(B) = f(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \mu(\{x \in X : f(x) \in B\})$$

với mọi $B \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$. Ta có ν là độ đo xác suất. Thật vậy, vì $f \in C_b(X)$ nên f bị chặn nên tồn tại khoảng (a, b) hữu hạn sao cho $f(X) \subset (a, b)$. Do đó

$$\nu((a, b)) = \mu(f^{-1}(a, b)) = \mu(X) = 1.$$

Giả sử $\varepsilon > 0$ tùy ý. Ta chia đoạn $[a, b]$ thành $m = \left\lceil \frac{2(b-a)+1}{\varepsilon} \right\rceil$ khoảng bằng nhau

$\Delta_1, \dots, \Delta_m$ với độ dài bé hơn $\frac{\varepsilon}{2}$. Vậy tồn tại $t_j \in \Delta_j$ sao cho $\nu(t_j) = 0$, $j = 1, \dots, m$. Khi đó $t_1, \dots, t_m$

thỏa mãn

1. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$;
2. $a < f(x) < b$, $\forall x \in X$;
3. $t_j - t_{j-1} < \varepsilon$, $j = 1, \dots, m$
4. $\nu(t_j) = 0$, $j = 1, \dots, m$.

Đặt $A_j = \{x \in X : t_{j-1} \leq f(x) < t_j\}$, $j = 1, \dots, m$. Khi đó

$$X = \bigcup_{j=1}^m A_j \quad \text{và} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ nếu } i \neq j.$$

Mặt khác $\{x \in X : t_{j-1} \leq f(x) \leq t_j\}$ đóng và chứa A_j , còn $\{x \in X : t_{j-1} < f(x) < t_j\}$ mở trong A_j nên

$$\bar{A}_j \subset \{x \in X : t_{j-1} \leq f(x) \leq t_j\}, \quad \text{int } A_j \supset \{x \in X : t_{j-1} < f(x) < t_j\}.$$

Từ đó suy ra

$$\bar{A}_j \setminus A_j^0 \subset \{x \in X : f(x) = t_{j-1}\} \cup \{x \in X : f(x) = t_j\}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \mu(\partial A_j) &= \mu(\bar{A}_j \setminus A_j^0) \\ &\leq \mu(x : f(x) = t_{j-1}) + \mu(x : f(x) = t_j) \\ &= \nu(t_{j-1}) + \nu(t_j) = 0. \end{aligned}$$

Từ đó áp dụng (v), ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_j) = \mu(A_j).$$

Đặt $f^* = \sum_{j=1}^m t_{j-1} \chi_{A_j}$ ta có

$$|f^*(x) - f(x)| = f(x) - t_{j-1} \leq t_j - t_{j-1} < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu_n - \int_X f d\mu \right| &= \left| \int_X (f - f^*) d\mu_n + \int_X (f^* - f) d\mu + \int_X f^* d\mu_n - \int_X f d\mu_n \right| \\ &\leq \int_X |f - f^*| d\mu_n + \int_X |f^* - f| d\mu + \left| \int_X f^* d\mu_n - \int_X f d\mu_n \right| \\ &\leq 2\varepsilon + \left| \sum_{j=1}^m t_{j-1} \cdot [\mu_n(A_j) - \mu(A_j)] \right| \\ &\leq 2\varepsilon + \sum_{j=1}^m |t_{j-1}| \cdot |\mu_n(A_j) - \mu(A_j)|. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \left| \int_X f d\mu_n - \int_X f d\mu \right| \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0, \forall f \in C_b(X).$$

Vì vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu$ và $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. $\square$

3.3 π -HỆ THỐNG

Trong đoạn này ta kí hiệu X là không gian metric.

Tập con A của không gian xác suất $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{p})$ gọi là $\mathbf{p}$ -liên tục nếu $\mathbf{p}(\partial A) = 0$.

Họ các tập hợp $\mathbf{A}$ gọi là một π -hệ thống nếu $A, B \in \mathbf{A}$ thì $A \cap B \in \mathbf{A}$.

3.3.1 Định lí. Cho $(\mathbf{p}_n)$ là dãy các độ đo xác suất trên $(X, \mathbf{B}(X), \mathbf{p})$, $\mathbf{A}$ là một π -hệ thống trong $\mathbf{B}(X)$ sao cho mọi tập con mở của X đều viết được dưới dạng hợp của một dãy các tập thuộc $\mathbf{A}$. Khi đó nếu $\mathbf{p}_n(A) \rightarrow \mathbf{p}(A)$ với mọi $A \in \mathbf{A}$ thì $\mathbf{p}_n \xrightarrow{w} \mathbf{p}$.

Chứng minh. Với mọi $A_1, \dots, A_n \in \mathbf{A}$ ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_n\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) &= \sum_i \mathbf{p}_n(A_i) - \sum_{i < j} \mathbf{p}_n(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} \mathbf{p}_n(A_i A_j A_k) - \dots \sqrt{b^2 - 4ac} \\ &\rightarrow \sum_i \mathbf{p}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbf{p}(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} \mathbf{p}(A_i A_j A_k) - \dots \sqrt{b^2 - 4ac} \\ &= \mathbf{p}\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right). \end{aligned}$$

Giả sử G mở, $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ với $(A_i) \subset \mathbf{A}$. Với $\varepsilon > 0$ tùy ý, chọn r sao cho

$$\mathbf{p}\left(\bigcup_{i \leq r} A_i\right) \geq \mathbf{p}(G) - \varepsilon.$$

Từ đó $\mathbf{p}(G) - \varepsilon \leq \mathbf{p}\left(\bigcup_{i \leq r} A_i\right) \leq \lim_n \mathbf{p}_n\left(\bigcup_{i \leq r} A_i\right) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}_n(G).$

Do $\varepsilon > 0$ tùy ý nên. Theo (iv) của Định lí 3.2.2 ta có khẳng định của định lí. $\square$

3.3.2 Định lí. Cho (p_n) là dãy các độ đo xác suất trên $(X, \mathbf{B}(X), p)$, X là không gian metric khả li, $\mathbf{A}$ là một π -hệ thống trong $\mathbf{B}(X)$ có tính chất: mọi $x \in X$, mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $A \in \mathbf{A}$ sao cho

$$x \in \text{int } A \subset A \subset B(x, \varepsilon).$$

Khi đó nếu $p_n(A) \rightarrow p(A)$ với mọi $A \in \mathbf{A}$ thì $p_n \xrightarrow{w} p$.

Chứng minh. Theo giả thiết, mọi x thuộc tập mở G tồn tại $A_x \in \mathbf{A}$ sao cho $x \in \text{int } A_x \subset A_x \subset G$. Vì X khả li nên theo tính chất Lindelof, tồn tại họ đếm được $(\text{int } A_{x_i})$ của họ $(\text{int } A_x)_{x \in G}$ phủ G . Do đó $G = \bigcup_i A_{x_i}$. Vậy giả thiết của Định lí 3.3.1 được thỏa mãn và có kết luận của định lí. $\square$

Một họ con $\mathbf{A}$ của $\mathbf{B}(X)$ gọi là *họ hội tụ xác định* nếu mọi độ đo xác suất p và mọi dãy (p_n) các độ đo xác suất trên $\mathbf{B}(X)$, $p_n(A) \rightarrow p(A)$ với mọi tập p -liên tục $A \in \mathbf{A}$ thì $p_n \xrightarrow{w} p$. Với mỗi $x \in X$ đặt

$$\mathbf{A}_{x,\varepsilon} = \{A \in \mathbf{A} : x \in \text{int } A \subset A \subset B(x, \varepsilon)\}, \text{ Cho } \mathbf{A} \subset \mathbf{B}(X) \text{ là}$$

$$\partial \mathbf{A}_{x,\varepsilon} = \{\partial A : A \in \mathbf{A}_{x,\varepsilon}\}.$$

3.3.3 Định lí. Cho X là không gian metric khả li, $\mathbf{A}$ là một π -hệ thống trong $\mathbf{B}(X)$. Khi đó nếu mọi $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $\partial \mathbf{A}_{x,\varepsilon}$ chứa tập rỗng hoặc chứa quá đếm được các tập rời nhau thì $\mathbf{A}$ một họ hội tụ xác định.

Chứng minh. Cố định p và kí hiệu $\mathbf{A}_p$ là họ các tập p -liên tục trong $\mathbf{A}$. Với mọi $A, B \in \mathbf{A}_p$ ta có

$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cap \partial B$$

$$\text{nên } p(\partial(A \cap B)) \leq p(\partial A) + p(\partial B) = 0.$$

Do đó $\mathbf{A}_p$ là một π -hệ thống. Giả sử $p_n(A) \rightarrow p(A)$ với mọi $A \in \mathbf{A}_p$.

Nếu $\partial \mathbf{A}_{x,\varepsilon}$ chứa rỗng thì tồn tại $x \in \mathbf{A}_{x,\varepsilon}$ có $\partial A = \emptyset$ nên $p(\partial A) = 0$. Do đó $A \in \mathbf{A}_p$.

Nếu $\partial \mathbf{A}_{x,\varepsilon}$ không chứa rỗng thì theo giả thiết $\partial \mathbf{A}_{x,\varepsilon}$ quá đếm được các tập rời nhau nên phải tồn tại $A \in \mathbf{A}_{x,\varepsilon}$ để $p(\partial A) = 0$. Từ đó $A \in \mathbf{A}_p$.

Vậy mọi trường hợp mọi họ $\mathbf{A}_{x,\varepsilon}$ đều chứa một tập của $\mathbf{A}_p$. Do giả thiết của Định lí 3.2.2 thỏa mãn nên ta có $p_n \xrightarrow{w} p$. $\square$

KẾT LUẬN

Luận văn đã đạt được một số kết quả sau:

Đã hệ thống những kiến thức cơ bản, cần thiết về không gian mêtric và không gian tôpô, một số khái niệm và tính chất của độ đo.

Đã nêu được các tính chất của độ đo trong không gian mêtric

Đã nêu được các tính chất của phần tử ngẫu nhiên và sự hội tụ yếu của độ đo xác suất trong không gian mêtric và sự hội tụ theo phân phối của dãy các phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian mêtric.

Vấn đề về phần tử ngẫu nhiên và sự hội tụ yếu của độ đo xác suất trên không gian mêtric là vấn đề rộng lớn. Kết quả của luận văn chỉ là một phần trong vấn đề rộng lớn đó. Hy vọng rằng sau luận văn này, tôi có điều kiện tốt hơn để quan tâm nghiên cứu vấn đề này. Vì thời gian và kiến thức có hạn, chắc chắn luận văn không tránh khỏi những sai sót. Tác giả chân thành mong các thầy cô giáo và các bạn góp ý kiến giúp đỡ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đâu Thế Cấp, *Tôpô đại cương*, NXB Giáo dục, 2008.
- [2] Đâu Thế Cấp, *Độ đo và tích phân*, NXB Giáo dục, 2009.
- [3] Đâu Thế Cấp, *Giải tích hàm*, NXB Giáo dục, 2009
- [4] Y.S. Cho, H.Teicher, *Probability theory: Independence, Interchangeability, Martingale*, Springer-Verlag, New York, 1997
- [5] M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Springer-Verlag, New York, 1991
- [6] K.R. Parthasathy, *Probability measures on metric spaces*, New York, London, 1967
- [7] Nguyễn Văn Quảng, *Phân phối xác suất trên không gian Banach*, Đại học Vinh, 2007
- [8] Nguyễn Duy Tiến, Vũ Việt Yên, *Lý thuyết xác suất*, NXB Giáo dục, 2001
- [9] N.N. Vakhania, V.I. Tarieladze, S.A. Chobanyan, *Probability Distributions on Banach Space*, D.Reidel Publishing Company, Holland.