

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

HUỲNH TÔN GIANG TUYÊN

PHƯƠNG PHÁP TỐI ƯU HÓA GIẢI
BÀI TOÁN CÂN BẰNG THÔNG QUA
BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG, 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **TS. HOÀNG QUANG TUYẾN**

Phản biện 1: **TS. Lê Hải Trung**

Phản biện 2: **GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu**

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp Thạc sĩ Khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 28 tháng 5 năm 2011.

* Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức biến phân nói riêng có vai trò quan trọng trong toán học, đặc biệt là trong toán tối ưu. Những nghiên cứu đầu tiên về bất đẳng thức biến phân đều liên quan tới việc giải các bài toán biến phân, bài toán điều khiển tối ưu và các bài toán biên có dạng của phương trình đạo hàm riêng.

Năm 1979 Michael J. Smith đưa ra bài toán cân bằng mạng giao thông và năm 1980 Defermos chỉ ra rằng: Điểm cân bằng của bài toán này là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân. Từ đó bài toán bất đẳng thức biến phân được phát triển và trở thành công cụ hữu hiệu để nghiên cứu và giải các bài toán cân bằng trong kinh tế, vận tải, lý thuyết trò chơi và nhiều bài toán khác.

Gần đây, bài toán bất đẳng thức biến phân, sự tồn tại và duy nhất nghiệm và ứng dụng của bất đẳng thức biến phân giải các bài toán cân bằng, cũng là một đề tài được nhiều người quan tâm nghiên cứu vì vai trò của nó trong lý thuyết toán học và trong các ứng dụng thực tế.

Bởi những lý do trên mà tôi chọn đề tài: *Phương pháp tối ưu hóa giải bài toán cân bằng thông qua bất đẳng thức biến phân.*

2. Mục đích nghiên cứu

Tìm hiểu, nghiên cứu một số mô hình cân bằng, bất đẳng thức biến phân, sự tồn tại và duy nhất nghiệm, phương pháp giải cơ bản

và ứng dụng của bất đẳng thức biến phân trong giải bài toán cân bằng.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Chúng ta xem xét một số lý thuyết về Bất đẳng thức biến phân, và một số bài toán tiêu biểu áp dụng bất đẳng thức biến phân như mô hình cân bằng kinh tế Cassel - Wald, mô hình thị trường cạnh tranh không hoàn hảo, mô hình cân bằng mạng và cân bằng di trú.

4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu các tài liệu từ giáo viên hướng dẫn. Tìm tòi, thu thập tài liệu, sách từ thư viện, Internet ... từ đó khảo cứu, sắp xếp hình thành nội dung đề tài.

5. Ý nghĩa khoa học

Đề tài sẽ là một tài liệu tham khảo bổ ích cho những ai muốn tìm hiểu về các dạng mô hình cân bằng tuyến tính và phi tuyến, bất đẳng thức biến phân và một số phương pháp tìm điểm cân bằng.

6. Cấu trúc luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn được chia thành 3 chương

Chương 1: Các mô hình cân bằng.

Trình bày sơ lược về các mô hình cân bằng như: mô hình cân

bằng tuyến tính, mô hình cân bằng tuyến tính động, mô hình cân bằng kinh tế Cassel - Wald, mô hình thị trường cạnh tranh không hoàn hảo, mô hình cân bằng mạng và cân bằng di trú. Ngoài ra để làm cơ sở cho các chương sau, các định lý, bổ đề thường dùng cũng được giới thiệu trong chương này.

Chương 2: Bất đẳng thức biến phân và một số bài toán ứng dụng.

Trình bày các kiến thức cơ bản về bất đẳng thức biến phân, một số định lý về sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân và cách chuyển các mô hình cân bằng ở chương 1 sang dạng bất đẳng thức biến phân.

Chương 3: Các phương pháp tối ưu hóa tìm điểm cân bằng.

Trình bày phương pháp chiếu tìm điểm cân bằng cho một số bài toán bất đẳng thức biến phân ở chương 2, phương pháp chuẩn hóa và phương pháp lặp trực tiếp cho bất đẳng thức biến phân đơn điệu.

Chương 1

Các mô hình cân bằng

1.1. Mô hình cân bằng tuyến tính

1.1.1. Mô hình cân bằng tuyến tính

Phân tích mô hình đầu vào - đầu ra là việc nghiên cứu quan hệ về lượng giữa các thành phần khác nhau của một nền kinh tế. Mô hình đầu vào - đầu ra thường dùng để tính toán và lập kế hoạch phát triển kinh tế quốc gia. Theo cách tiếp cận này, nền kinh tế được chia ra làm n khu vực sản xuất, mỗi khu vực sản xuất một mặt hàng nhất định. Trong một thời gian xác định, nếu khu vực thứ i sản xuất x_i đơn vị mặt hàng, thì khu vực thứ j sử dụng y_{ij} đơn vị của x_i để làm nguyên liệu cho một đơn vị sản phẩm thứ j và y_i đơn vị còn lại được dùng như là mặt hàng tiêu dùng (không dùng làm nguyên liệu) cho chính khu vực i . Do đó, chúng ta có thể đưa ra phương trình cân bằng đơn giản trong một khoảng thời gian xác định cho mỗi mặt hàng:

$$x_i = \sum_{j=1}^n y_{ij} + y_i, i = 1, \dots, n.$$

Chia đầu vào bởi đầu ra, chúng ta có được hệ số đầu vào - đầu ra:

$$a_{ij} = \frac{y_{ij}}{x_j}$$

biểu thị tỷ trọng số lượng các mặt hàng thứ i được dùng để sản xuất một đơn vị sản phẩm mặt hàng thứ j . Vấn đề hạn chế của mô hình phân tích đầu vào - đầu ra này là việc giả thiết hệ số a_{ij} không đổi, nghĩa là không tính đến các cải tiến kỹ thuật trong kinh tế. Những hệ số này được dùng để dự báo và đưa ra kế hoạch trong khoảng thời gian tiếp theo.

Giả sử số lượng y_i hàng tiêu dùng (không dùng làm nguyên liệu cho mặt hàng khác) của khu vực i là biết được và được mô tả bởi vectơ $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ và hệ số a_{ij} không đổi. Bài toán đặt ra là phải tìm giá trị số lượng đầu ra $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ của n khu vực sản xuất thỏa yêu cầu tiêu dùng mỗi khu vực, tức là phải tìm $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho:

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = y_i \quad \text{và} \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

Tương đương với

$$(I - A)x = y, \quad x \geq 0 \quad (1.2)$$

trong đó I là ma trận đơn vị vuông cấp n , A là ma trận hệ số a_{ij} , vuông cấp n .

Phương trình (1.2) thể hiện sự cân bằng tuyến tính trong sản xuất và tiêu dùng. Chúng ta thu được hệ các phương trình tuyến tính với các ràng buộc không âm. Các phương trình tuyến tính trong (1.1) có thể được xem như là điều kiện cân bằng giữa sự cung cấp x_i và yêu cầu $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i$ cho mỗi mặt hàng thứ i .

1.1.2. Mô hình cân bằng tuyến tính động

Trong phần trước, chúng ta xem xét mô hình kinh tế trong một thời kì nhất định. Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể kiểm tra được cách hoạt động của nền kinh tế trong một thời gian tương đối dài, nó

phù hợp cho một mô hình với vô hạn các thời kì. Để đơn giản hóa, ta chọn mô hình với thời gian riêng biệt. Một lần nữa, chúng ta tìm điều kiện đưa đến một nền lao động ổn định hoặc cân bằng cho cả hệ thống. Đầu tiên chúng ta xem xét sự mở rộng của mô hình đầu vào - đầu ra được mô tả trong phần 1.1.1.

Trong mô hình, nền kinh tế được chia thành n khu vực sản phẩm thực sự, mỗi khu vực sản xuất một mặt hàng đồng nhất. Ta vẫn gọi a_{ij} là số lượng mặt hàng thứ i để sản xuất một đơn vị mặt hàng thứ j , và hệ số này là không đổi. Nghĩa là không có sự thay đổi đáng kể trong kỹ thuật sản xuất. Mô hình tĩnh đầu vào - đầu ra được đưa ra trong (1.1) và được viết lại như sau: Với $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ là nhu cầu tiêu dùng cuối, tìm vectơ đầu ra $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ sao cho

$$(I - A)x = y, \quad x \geq 0 \quad (1.10)$$

với I là ma trận đơn vị cấp n , $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Trong phần 1.1.1, một số điều kiện đủ, cho ta sự tồn tại nghiệm không tầm thường của hệ này cho một giá trị không âm tùy ý của nhu cầu tiêu dùng cuối. Trong mô hình động, chúng ta xét bài toán tồn tại ở một mức độ của đầu ra, nó bao gồm cả yêu cầu công nghiệp thay cho (1.10). Nói cách khác, bài toán phù hợp để tìm một vectơ đầu ra x sao cho:

$$(I - A)x \geq 0, \quad x \geq 0 \quad (1.11)$$

1.2. Mô hình cân bằng phi tuyến

1.2.1. Mô hình cân bằng kinh tế Cassel - Wald

Mô hình cân bằng kinh tế Cassel - Wald là mô hình mô tả hệ thống kinh tế, phân phối n mặt hàng và m nhân tố thực sự (nguyên liệu chính) của sản phẩm. Trong đó, c_k là đơn giá của mặt hàng thứ

k , b_i là tổng lượng hàng của nhân tố thứ i và a_{ij} là lượng tiêu thụ mặt hàng thứ i theo yêu cầu để sản xuất một đơn vị mặt hàng thứ j .

Ta đặt $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, $b = (b_1, \dots, b_m)^T$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Với x_j là đầu ra của mặt hàng thứ j , p_i là đơn giá của nhân tố thứ i , $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ và $p = (p_1, \dots, p_m)^T$. Vectơ b là cố định, nhưng vectơ c thì không cố định, nghĩa là tồn tại ánh xạ $c : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$. Điều này có nghĩa là giá cả là độc lập với đầu ra.

Cặp (x^*, p^*) là cân bằng nếu thỏa mãn các mối quan hệ sau:

$$\begin{aligned} x^* &\geq 0, & p^* &\geq 0; \\ A^T p^* - c(x^*) &\geq 0, & b - Ax^* &\geq 0; \\ (x^*)^T [A^T p^* - c(x^*)] &= 0, & (p^*)^T [b - Ax^*] &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.2.2. Mô hình thị trường cạnh tranh không hoàn hảo

Bây giờ chúng ta xét bài toán tìm thị trường cân bằng cho trường hợp của một số ít hãng sản xuất. Nghĩa là hoạt động của mỗi hãng riêng lẻ có thể làm thay đổi trạng thái của cả hệ thống.

Trong mô hình thị trường độc quyền cổ điển, thừa nhận rằng có n hãng cung cấp cùng một loại sản phẩm và đơn giá p phụ thuộc vào số lượng σ , nghĩa là $p = p(\sigma)$ là hàm ngược của nhu cầu. Nói cách khác, $p(\sigma)$ là đơn giá mà người tiêu dùng sẽ mua một số lượng σ . Chi phí $h_i(x_i)$ tương ứng với tổng chi phí công ty thứ i cho x_i sản phẩm. Nếu mỗi hãng thứ i cung cấp x_i đơn vị sản phẩm, thì tổng số cung cấp cho thị trường được xác định như sau:

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^n x_i$$

và lợi nhuận của công ty thứ i được xác định bởi

$$f_i(x) = x_i p(\sigma_x) - h_i(x_i)$$

với $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Dĩ nhiên, mỗi mức đầu ra là không âm, nghĩa là $x_i \geq 0$ với $i = 1, \dots, n$. Mỗi công ty luôn cố kiếm được lợi nhuận lớn nhất bằng cách lựa chọn mức độ sản xuất tương ứng. Tuy nhiên, lợi nhuận của mỗi công ty là độc lập với đầu ra của tất cả các công ty, lợi nhuận của chúng có thể khác nhau. Chúng ta có thể xét bài toán này như một trò chơi bất hợp tác của n người chơi, với người chơi thứ i có tập chiến lược $\mathbb{R}_+$ và hàm lợi ích $f_i(x)$. Do đó, để định nghĩa nghiệm cho cấu trúc thị trường này, chúng ta sử dụng khái niệm cân bằng Nash cho trò chơi bất hợp tác. Theo định nghĩa, một vectơ mức đầu ra không âm $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ được gọi là một giải pháp cân bằng Nash cho thị trường độc quyền, x_i^* tối đa hóa hàm lợi nhuận f_i của công ty thứ i , trong khi các công ty khác sản xuất số lượng x_j^* , $j \neq i$, với $i = 1, \dots, n$.

Điều này có nghĩa là nếu $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ là một nghiệm cân bằng Nash, thì x_i^* phải là một nghiệm tối ưu của bài toán

$$\max_{x_i \geq 0} \rightarrow \{x_i p(x_i + \sigma_i^*) - h_i(x_i)\}, \quad (1.16)$$

$$\text{với } \sigma_i^* = \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j^* \quad \text{với } i = 1, \dots, n.$$

1.2.3 Mô hình cân bằng mạng

Các bài toán cân bằng luồng trong giao thông và truyền thông tuy tương đối mới nhưng là lĩnh vực phát triển rất nhanh các ứng dụng bất đẳng thức biến phân. Bản chất của các bài toán này chủ yếu được xác định trên đồ thị được định hướng, mỗi cung của nó được liên kết với một số luồng (ví dụ như luồng giao thông) và một số loại phí tổn (như thời gian di chuyển, thời gian trì hoãn, hoặc chi

phí ...) phụ thuộc vào trị giá của cung luồng. Người ta kỳ vọng rằng việc làm tăng trị giá của luồng cho một cung sẽ làm tăng phí tổn cung đó và có lẽ cho cả một số cung lân cận. Từ đó có thể phân phối lại các luồng sao cho đạt được một số trạng thái cân bằng. Nghĩa là chúng gần với mô hình cân bằng giá từng phần.

Mô hình được xác định trên một mạng giao thông được cho bởi một tập hợp nút N và tập các cung A . Gọi D là tập các nút đến (đích), $D \subseteq N$. Biến x_a^l là luồng trên cung a với nút đến $l \in D$, từ đó ta có:

$$x^l = (x_a^l)_{a \in A} \quad \text{và} \quad x = (x^l)_{l \in D}.$$

Tương tự, biến t_i^l là chi phí thấp nhất để tới nút đến l từ điểm nút i , từ đó ta có

$$t^l = (t_i^l)_{i \in N} \quad \text{và} \quad t = (t^l)_{l \in D}.$$

Với mỗi cặp $(l, i) \in D \times N$, ta kí hiệu d_i^l là nhu cầu luồng, tức là nhu cầu tối thiểu để di chuyển từ điểm i đến điểm l , giả sử rằng d_i^l là cố định. Với mỗi $i \in N$, A_i^+ và A_i^- là tập hợp các cung đi và các cung đến tại i . Với mỗi cung a , c_a là chi phí luồng trên cung này, nó độc lập với vectơ luồng

$$f = \sum_{l \in D} x^l.$$

Cặp $(\tilde{x}, \tilde{t})$ được gọi là cân bằng nếu thỏa điều kiện sau:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_e^l &\geq 0, \quad \tilde{t}_i^l \geq 0; \\ \tilde{t}_j^l - \tilde{t}_i^l + c_e(\tilde{f}) &\geq 0, \quad \sum_{a \in A_i^+} \tilde{x}_a^l - \sum_{a \in A_i^-} \tilde{x}_a^l - d_i^l \geq 0; \\ \tilde{x}_e^l [\tilde{t}_j^l - \tilde{t}_i^l + c_e(\tilde{f})] &= 0, \quad \tilde{t}_i^l \left[\sum_{a \in A_i^+} \tilde{x}_a^l - \sum_{a \in A_i^-} \tilde{x}_a^l - d_i^l \right] = 0; \end{aligned} \quad (1.20)$$

với mọi $e = (i, j) \in A$, $l \in D$, với mọi $i \in N, l \in D, \tilde{f} = \sum_{l \in D} \tilde{x}^l$.

Cặp đầu tiên của các quan hệ này thể hiện luồng và chi phí không

âm. Cặp thứ hai của bất đẳng thức trong (1.20) nghĩa là sự khác nhau của chi phí thấp nhất tại hai điểm không thể vượt quá chi phí luồng trên cung tương ứng và nhu cầu luồng tối thiểu không thể vượt quá sự chênh lệch giữa luồng ra và luồng vào. Cặp thứ ba của các quan hệ trong (1.20) nghĩa là luồng dương trên mỗi cung (tương ứng, chi phí dương nhỏ nhất tại mỗi nút) suy ra đẳng thức trong chuỗi các điều kiện phía trên. Do đó, nếu cần phải cân bằng luồng tại mỗi nút:

$$\sum_{a \in A_i^+} \tilde{x}_a^l - \sum_{a \in A_i^-} \tilde{x}_a^l = d_i^l,$$

thì người ta phải đảm bảo ổn định chi phí vận chuyển.

1.2.4. Mô hình cân bằng di trú

Bây giờ ta xét một mô hình cân bằng di trú. Mô hình này bao gồm một tập các điểm $\mathbf{N}$, với mỗi $i \in \mathbf{N}$, b_i là mật độ ban đầu cố định tại vị trí i . Với h_{ij} là trọng số của dòng di trú từ vị trí đầu i đến đích j , và đặt x_i là mật độ hiện tại tại vị trí i . Chúng ta có thể liên kết với mỗi vị trí i tính tiện ích u_i và với mỗi cặp vị trí i, j chi phí c_{ij} . Đặt $\mathbf{x} = \{x_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ và $\mathbf{h} = \{h_{ij} \mid i, j \in \mathbf{N}, i \neq j\}$, thì tập hợp có thể định nghĩa như sau:

$$H = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{h}) \mid \mathbf{h} \geq 0, \sum_{j \neq i} h_{ij} \leq b_i, \right. \\ \left. x_i = b_i + \sum_{j \neq i} h_{ji} - \sum_{j \neq i} h_{ij}, \forall i \in \mathbf{N} \right\}. \quad (1.28)$$

Ta thấy H bị chặn. Thật vậy, từ ràng buộc

$$\mathbf{h} \geq 0, \sum_{j \neq i} h_{ij} \leq b_i,$$

những luồng $\mathbf{h}$ là bị chặn. Do đó, mật độ

$$x_i = b_i + \sum_{j \neq i} h_{ji} - \sum_{j \neq i} h_{ij}, \quad i \in \mathbf{N},$$

là bị chặn nên H bị chặn.

Quy luật trong (1.28) phản ánh sự bảo toàn của các dòng và ngăn cản chuỗi di trú. Rõ ràng, dòng di trú là không âm.

Điều kiện không âm cho mô hình di trú vô hướng là phức tạp hơn mô hình cân bằng mạng. Giả sử rằng tính tiện ích phụ thuộc vào mật độ, nghĩa là $u_i = u_i(\mathbf{x})$, và chi phí di trú phụ thuộc vào dòng di trú, nghĩa là $c_{ij} = c_{ij}(\mathbf{h})$. Chúng ta nói rằng cặp $(\mathbf{x}^*, \mathbf{h}^*) \in H$ là cân bằng nếu

$$u_i(\mathbf{x}^*) - u_j(\mathbf{x}^*) + c_{ij}(\mathbf{h}^*) + \mu_i \begin{cases} = 0 & \text{nếu } h_{ij}^* > 0, \\ \geq 0 & \text{nếu } h_{ij}^* = 0; \end{cases} \quad (1.29)$$

$\forall i, j \in \mathbf{N}$ và

$$\mu_i \begin{cases} \geq 0 & \text{nếu } \sum_{s \neq i} h_{is}^* = b_i, \\ = 0 & \text{nếu } \sum_{s \neq i} h_{is}^* < b_i, \end{cases} \quad (1.30)$$

với mỗi $i \in \mathbf{N}$.

Tập các điều kiện cân bằng (1.29), (1.30) có thể được viết lại tương đương với bất đẳng thức biến phân: Tìm một cặp $(\mathbf{x}^*, \mathbf{h}^*)$ sao cho

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbf{N}} (x_i^* - x_i) u_i(\mathbf{x}^*) \\ & + \sum_{i, j \in \mathbf{N}, i \neq j} (h_{ij} - h_{ij}^*) c_{ij}(\mathbf{h}^*) \geq 0, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{h}) \in H. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Chương 2

Bất đẳng thức biến phân và một số bài toán áp dụng

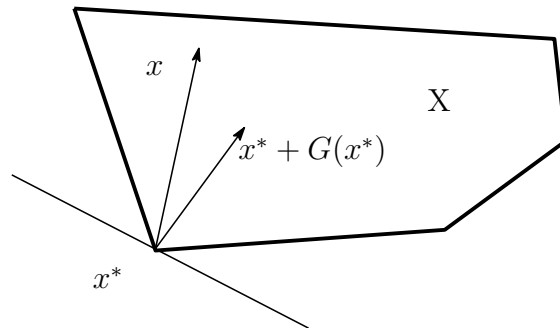
2.1. Lý thuyết cơ sở

2.1.1 Bất đẳng thức biến phân

Cho X khác rỗng, là tập con, đóng, lồi của không gian Euclide E hữu hạn chiều, cho ánh xạ liên tục $G : X \rightarrow E$. Bài toán bất đẳng thức biến phân là bài toán tìm một điểm $x^* \in X$ thỏa mãn:

$$(x - x^*)^T G(x^*) \geq 0, \forall x \in X \quad (2.1)$$

xem Hình 2.1. Đặt X^* là tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân.



Hình 2.1: Hình minh họa định nghĩa bất đẳng thức biến phân

2.1.2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Hầu hết các kết quả tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đều được giải quyết bằng cách sử dụng lý thuyết điểm bất động.

Mệnh đề 2.1.5 ([6]) *Cho X là tập lồi, compact và khác rỗng. Mọi ánh xạ liên tục T đi từ X đến chính nó đều có điểm bất động.*

Bây giờ, ta xét một số tính chất của ánh xạ chiếu. Cho một điểm x và tập X là tập con của E , gọi $\pi_X(x)$ là hình chiếu của x trên X :

$$\pi_X(x) \in X, \|x - \pi_X(x)\| = \min_{y \in X} \|x - y\|.$$

Mệnh đề 2.1.6 ([4]) *Giả sử Y là một tập khác rỗng, đóng, lồi, trong E , và x là một điểm tùy ý trong E . Thì:*

- (i) *Tồn tại duy nhất hình chiếu $p = \pi_Y(x)$ của x trên tập Y .*
- (ii) *Một điểm $p \in Y$ là hình chiếu của x trên Y nếu và chỉ nếu*

$$(p - x)^T(y - p) \geq 0 \quad \forall y \in Y. \quad (2.6)$$

- (iii) *Một ánh xạ chiếu $\pi_Y(\cdot)$ là không mở rộng và*

$$\begin{aligned} & (x'' - x')^T[\pi_Y(x'') - \pi_Y(x')] \\ & \geq \|\pi_Y(x'') - \pi_Y(x')\|^2 \quad \forall x', x'' \in E. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Mệnh đề 2.1.7 ([4]) *Cho X khác rỗng, là tập con đóng và lồi của không gian Euclide hữu hạn chiều E . Một điểm $x^* \in X$ là nghiệm của bất đẳng thức biến phân (2.1) nếu và chỉ nếu*

$$x^* = \pi_X[x^* - \theta G(x^*)] \quad (2.8)$$

với $\theta > 0$. Bây giờ ta thiết lập sự tồn tại nghiệm cho bất đẳng thức biến phân (2.1).

Định lý 2.1.2 ([4]) *Cho X khác rỗng, là tập con lồi và compact của không gian Euclide hữu hạn chiều E và $G : X \rightarrow E$ là ánh xạ liên tục, khi đó bất đẳng thức biến phân (2.1) có nghiệm.*

Để có sự tồn tại nghiệm trên tập không bị chặn, ta sử dụng các thêm một số điều kiện.

Định lý 2.1.3 ([4]) *Cho X khác rỗng, là tập con lồi và đóng của không gian Euclide hữu hạn chiều E và $G : X \rightarrow E$ là ánh xạ liên tục. Giả sử rằng tồn tại một tập con bị chặn, khác rỗng Y của X sao cho với mọi $x \in X \setminus Y$, có $y \in Y$ với*

$$(x - y)^T G(x) > 0.$$

Khi đó bất đẳng thức biến phân (2.1) có nghiệm.

Trong trường hợp tổng quát, bất đẳng thức biến phân có thể có nhiều hơn một nghiệm. Bây giờ ta xét điều kiện để bất đẳng thức biến phân có duy nhất nghiệm.

Mệnh đề 2.1.8 ([4]) *Nếu G là đơn điệu chặt, thì bất đẳng thức biến phân (2.1) có nhiều nhất một nghiệm.*

Ta xét tính đơn điệu mạnh cho sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bất đẳng thức biến phân (2.1).

Định lý 2.1.4 ([4]) *Cho X khác rỗng, là tập con lồi và đóng của không gian Euclide hữu hạn chiều E và $G : X \rightarrow E$ là ánh xạ liên tục và đơn điệu mạnh. Thì bất đẳng thức biến phân (2.1) có một nghiệm duy nhất.*

Theo Định lý 2.1.1 và Mệnh đề 2.1.3, tính chất trên đưa ra điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm cho bài toán tối ưu (2.5) với f khả vi và lồi chặt (mạnh). Bây giờ ta xét trường hợp f không khả vi.

Mệnh đề 2.1.9 ([4]) *Cho X khác rỗng, là tập con lồi và đóng của không gian Euclide hữu hạn chiều E .*

(i) Nếu $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là lồi chặt, thì (2.5) có nhiều nhất một nghiệm.

(ii) Nếu $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là lồi mạnh và liên tục, thì (2.5) có duy nhất nghiệm.

2.2. Chuyển các mô hình cân bằng sang dạng bất đẳng thức biến phân

2.2.1. Mô hình cân bằng Cassel - Wald

Ta xét mô hình cân bằng Cassel - Wald đã được mô tả trong phần 1.2.1. Hệ thống kinh tế phân phối n mặt hàng và m loại nguyên liệu chính (nhân tố thực sự của sản phẩm).

Trong đó, c_k là đơn giá của mặt hàng thứ k , b_i là tổng lượng hàng thứ i và a_{ij} là tỉ giá tiêu thụ mặt hàng thứ i theo yêu cầu để sản xuất một đơn vị mặt hàng thứ j , x_j là đầu ra của mặt hàng thứ j .

Ta đặt $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $b = (b_1, \dots, b_m)^T$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, và thừa nhận giá cả độc lập với đầu ra nghĩa là tồn tại ánh xạ $c : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$. Khi đó (xem (2.4)), điểm cân bằng của bài toán bất đẳng thức biến phân là: Tìm $x^* \in D$ sao cho

$$(x^* - x)^T c(x^*) \geq 0, \forall x \in D; \quad (2.9)$$

với

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq 0\};$$

Nghĩa là đầu ra tối ưu mang lại lợi nhuận lớn nhất thỏa mãn các điều kiện tài nguyên khi giá cả là cố định với các đầu ra. Ta thấy, (2.9) là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức biến phân (2.1). Ngoài ra D là tập lồi và đóng. Nên D khác rỗng nếu A và b chỉ chứa các giá trị không âm.

Nếu A và b chỉ gồm các giá trị không âm và có một cột khác không thì D bị chặn. Thật vậy, ta có $D = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq 0\}$,

với mỗi j có i sao cho $a_{ij} > 0$. Nên

$$0 \leq x_j \leq \frac{1}{a_{ij}} \left(b_i - \sum_{k \neq j} a_{ik} x_k \right) \leq \frac{b_i}{a_{ij}}$$

do đó D bị chặn. Lúc đó D là tập khác rỗng, lồi và compact. Theo Định lý 2.1.1, bất đẳng thức biến phân (2.1) là giải được nếu c liên tục.

Chúng ta có thể viết lại điều kiện tối ưu cho (2.9) dưới dạng một hệ các bất đẳng thức biến phân:

Tìm $x^* \geq 0$ và $p^* \geq 0$ sao cho

$$(x^* - x)^T c(x^*) + (Ax - Ax^*)^T p^* \geq 0 \quad \forall x \geq 0; \quad (2.10)$$

$$(p - p^*)^T (b - Ax^*) \geq 0 \quad \forall p \geq 0$$

với $p = (p_1, \dots, p_m)^T$ là vectơ đơn giá.

2.2.2. Mô hình thị trường cạnh tranh không hoàn hảo

Ta xét mô hình thị trường cạnh tranh không hoàn hảo đã được nói đến trong phần 1.2.2. Nó mô tả thị trường độc quyền bao gồm n công ty cung cấp một loại sản phẩm đồng nhất và đưa ra một trò chơi bất hợp tác, với người chơi thứ i có tập chiến lược $\mathbb{R}_+$ và hàm lợi nhuận

$$f_i(x) = x_i p(\sigma_x) - h_i(x_i), \quad (2.11)$$

với $x = (x_1, \dots, x_n)$, x_i là sự cung cấp của công ty thứ i , $h_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm chi phí, $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đơn giá của thị trường, và $\sigma_x = \sum_{i=1}^n x_i$ là tổng cung cấp cho thị trường.

Bài toán này được quy về bài toán bất đẳng thức biến phân tương đương với giả thuyết tổng quát. Nếu hàm lợi nhuận f_i của công ty thứ i là lõm theo x_i với $i = 1, \dots, n$. Để thỏa mãn điều kiện này ta giả sử rằng hàm chi phí h_i là lồi, hàm đơn giá p không tăng, và hàm

lợi tức công nghiệp $\mu(\sigma) = \sigma p(\sigma)$ lõm trên $\mathbb{R}_+$. Với những điều kiện khả vi trên hàm p và h_i , bất đẳng thức biến phân (2.1) có ánh xạ chi phí $G : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ được xác định như sau

$$G_i(x) = h'(x_i) - p(\sigma_x) - x_i p'(\sigma_x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm khác cho bài toán cân bằng độc quyền được xác định bởi tính chất đơn điệu của ánh xạ G . Nếu tồn tại cận trên và cận dưới của mức đầu ra, thì tập chiến lược của mỗi người chơi thứ i là đoạn $[\alpha_i, \beta_i]$ với $0 \leq \alpha_i < \beta_i \leq +\infty$ với $i = 1, \dots, n$, bài toán cân bằng tương đương với bất đẳng thức biến phân (2.1).

2.2.3. Mô hình cân bằng mạng

Bây giờ ta xét các ứng dụng của bất đẳng thức biến phân cho mô hình cân bằng mạng đã được mô tả ở phần 1.2.3.

Theo định nghĩa, nghiệm $x^* \in X$ xác định bất đẳng thức biến phân:

$$\sum_{l \in A} F_l(f^*)(f_l - f_l^*) \geq 0, \quad f = Bx, \quad \forall x \in X, \quad (2.13)$$

với $f^* = Bx^*$,

$$X = \prod_{w \in W} X_w, \quad X_w = \left\{ x \mid \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, x_p \geq 0, \quad p \in P_w, \quad w \in W \right\}, \quad (2.14)$$

$f = (f_l)_l \in A$ là vectơ giá trị luồng, $x = (x_p)_{p \in P_w, w \in W}$ là vectơ các luồng đường, B là ma trận liên thông cung đường, A là tập các cung trong mạng giao thông, W là tập các cặp điểm đầu - điểm đích, P_w là tập các đường nối cặp w , $d_w \geq 0$ là yêu cầu giao thông cho cặp này. F_l xác định chi phí cho cung l , nó phụ thuộc vào sự phân bố

của các luồng. Thì (2.13) có thể được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} & \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} G_p(x^*)(x_p - x_p^*) \\ &= (x - x^*)^T [B^T F(Bx^*)] \geq 0 \quad \forall x \in X. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.2.4 Mô hình cân bằng di trú

Bây giờ, ta xét mô hình cân bằng di trú (1.28). Mô hình di trú (1.28), (1.31) cũng là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức biến phân (2.1). Ngoài ra, tập X của nó là khác rỗng, lồi và đóng nhưng bị chặn. Khi đó sự tồn tại nghiệm của bài toán này có thể được suy ra từ Định lý 2.1.2 với tính liên tục của hàm lợi nhuận và hàm chi phí di trú.

Bây giờ ta chỉ ra sự tương đương giữa (1.28), (1.31) và (1.28) - (1.30) từ Mệnh đề 2.1.7. Ta viết lại (1.28), (1.31) như sau: Tìm một cặp $(\mathbf{x}^*, \mathbf{h}^*) \in H$ sao cho

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbf{N}} (x_i^* - x_i) u_i(\mathbf{x}^*) \\ &+ \sum_{i, j \in \mathbf{N}, i \neq j} (h_{ij} - h_{ij}^*) c_{ij}(\mathbf{h}^*) \geq 0, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{h}) \in H, \end{aligned}$$

với

$$H = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{h}) \left| \begin{aligned} & \mathbf{h} \geq 0, \quad \sum_{j \neq i} h_{ij} \leq b_i, \\ & x_i = b_i + \sum_{j \neq i} h_{ji} - \sum_{j \neq i} h_{ij}, \quad \forall i \in \mathbf{N} \end{aligned} \right. \right\}.$$

$\mathbf{x} = \{x_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ và $\mathbf{h} = \{h_{ij} \mid i, j \in \mathbf{N}, i \neq j\}$, và $\mathbf{N}$ là tập các điểm.

Chương 3

Các phương pháp tối ưu hóa tìm điểm cân bằng

3.1. Phương pháp chiếu

Chúng ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân (2.1) với X khác rỗng, là tập con, đóng, lồi của không gian Euclide hữu hạn chiều E , cho ánh xạ liên tục

$$G : X \rightarrow E$$

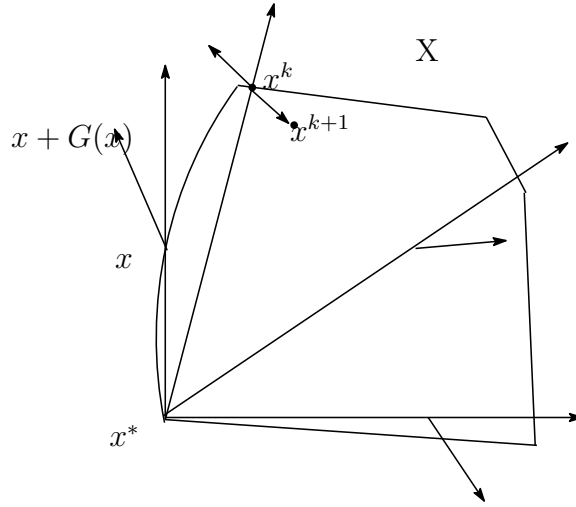
Như trước đây, ta đặt X^* là tập nghiệm của bài toán. Theo phương pháp chiếu thông thường, dãy lặp được xây dựng trong sự tương quan với quy luật:

$$x^{k+1} = \pi_X[x^k - \lambda_k G(x^k)], \quad \lambda_k > 0 \quad (3.1)$$

với x^k là điểm lặp hiện hành, $x^0 \in X$ và $\pi_X(.)$ là ánh xạ chiếu trên X . Theo Mệnh đề 2.1.6 thì dãy lặp (3.1) là xác định tốt, ngoài ra, x^{k+1} là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân sau:

Tìm $x^{k+1} \in X$ sao cho

$$(x - x^{k+1})^T [G(x^k) + \lambda_k^{-1}(x^{k+1} - x^k)] \geq 0, \quad \forall x \in X \quad (3.2)$$



Hình 3.1: Hình minh họa phương pháp chiếu

Ứng dụng của phương pháp chiếu đến bất đẳng thức biến phân

Chúng ta xét mô hình bài toán bất đẳng thức biến phân: Tìm $x^* \in X$ sao cho

$$(x - x^*)^T G(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X, \quad (3.9)$$

với X khác rỗng, là tập con, đóng, lồi trong $\mathbb{R}^n$, $G : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ là ánh xạ liên tục. Ta xét phép chiếu trên X . Các mô hình mô hình cân bằng như mô hình Cassel - Wald (1.14), mô hình thị trường độc quyền bên bán (1.10), mô hình cân bằng mạng (1.21) và mô hình cân bằng di trú (1.29), đều quy về bài toán bất đẳng thức biến phân (3.9). Ngoài ra, ánh xạ chi phí G có tính đơn điệu. Do đó, chúng ta có thể ứng dụng phương pháp chiếu (3.1) để tìm nghiệm của chúng.

Ta xét mô hình Cassel - Wald (1.14), với x là vectơ đầu ra của hàng hóa, và $G(x) = -c(x)$, $c(x)$ là vectơ đơn giá tại x . Do đó, tính đơn điệu của $-c(x)$ cho ta sự hội tụ của phương pháp chiếu. Từ đó tập X được định nghĩa với ràng buộc tuyến tính

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\},$$

Định lý về sự hội tụ của phương pháp chiếu cần tính chất đơn điệu mạnh của G . Trong trường hợp tổng quát, nếu G chỉ đơn điệu, chúng ta nên dùng phương pháp khác được mô tả ở phần sau. Theo Định lý 3.1.4, tính đơn điệu có thể được thay bởi tính khả tích. Chẳng hạn, nếu G chéo, nghĩa là,

$$G(x) = (G(x_1), G(x_2), \dots, G(x_n))^T, \quad (3.10)$$

hoặc G là ánh xạ affine với ma trận đối xứng, nghĩa là

$$G(x) = Ax + b, \quad \text{với } A \text{ là ma trận vuông đối xứng cấp } n \quad (3.11)$$

Chúng ta xét công thức luồng đường của mô hình cân bằng mạng (2.13), (2.14). Nó có thể được viết lại tương đương với bất đẳng thức biến phân (3.9), với

$$G(x) = B^T F(Bx), \quad (3.12)$$

trong đó B là ma trận liên thuộc cung - đường, x là vectơ luồng đường, $F(y)$ là vectơ giá trị của dòng chi phí phụ thuộc vào các cung luồng y , X là khác rỗng, lồi, compact.

3.2. Phương pháp chuẩn hóa

Trong phần 3.1, phương pháp chiếu không đảm bảo sự hội tụ cho nghiệm của bất đẳng thức biến phân khi ánh xạ chi phí chỉ có tính đơn điệu, nhưng không có tính đơn điệu mạnh, nên không thỏa trong một số mô hình cân bằng. Ngoài ra, ánh xạ chi phí tương ứng không khả tích. Do đó, chúng ta đưa ra một phương pháp lặp cho trường hợp đơn điệu tổng quát.

Chúng ta xét bất đẳng thức biến phân sau: Tìm một điểm $x^* \in X$ sao cho:

$$(x - x^*)^T G(x^*) \geq 0, \quad \forall x \in X \quad (3.13)$$

với X khác rỗng, là tập con, đóng, lồi trong $\mathbb{R}^n$, $G : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ là ánh xạ đơn điệu liên tục. Như trước đây, ta đặt X^* là tập nghiệm của bài toán.

Trước tiên, chúng ta xét phương pháp chuẩn hóa, phương pháp này sẽ thay bất đẳng thức biến phân đơn điệu ban đầu bởi một dãy các bất đẳng thức biến phân phụ với tính đơn điệu mạnh. Phương pháp chuẩn hóa phổ biến và đơn giản nhất do A.N.Tikhonov xây dựng. Phương pháp này bao gồm việc thay thế bất đẳng thức biến phân (3.13) bởi một dãy các bất đẳng thức biến phân phụ của nó có dạng: Tìm $x^\varepsilon \in X$ sao cho:

$$(x - x^\varepsilon)^T [G(x^\varepsilon) + \varepsilon x^\varepsilon] \geq 0, \quad \forall x \in X \quad (3.14)$$

với $\varepsilon > 0$ là tham số.

3.3. Phương pháp lặp trực tiếp

Trong phần này, chúng ta xét phương pháp lặp nghiệm cho bất đẳng thức biến phân (3.13) với ánh xạ chi phí G đơn điệu và liên tục. Phương pháp này dựa trên sự thay đổi phương pháp tìm trực tiếp. Để giải quyết bài toán bất đẳng thức biến phân dạng (3.13) ta có một phương pháp khác gọi là phương pháp ngoại suy. Dãy lặp của nó được cho như sau:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \pi_X[x^k - \lambda_k G(y^k)], \\ y^k &= \pi_X[x^k - \lambda_k G(x^k)], \quad \lambda_k > 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Tính chất hội tụ của phương pháp (3.16) cho bất đẳng thức biến phân đơn điệu (3.13) dựa trên góc giữa $-G(y^k)$ và $x^* - x^k$ có thể nhọn với một số $x^* \in X^*$, từ đó phương pháp lặp (3.16), với sự lựa chọn cỡ bước λ_k phù hợp, thì hội tụ đến một nghiệm của bất đẳng

thức biến phân (3.13). Phương pháp gradient mở rộng gồm những cỡ bước giống nhau cho các bước trong (3.16). Chẳng hạn, ta có thể đặt $\lambda_k = \lambda \in (0, 1/L)$, với L là hằng số Lipschitz của G .

Bây giờ chúng ta xét cách khác đưa đến sự hội tụ gọi là phương pháp nổi lỏng. Trong phương pháp này, phần đầu tiên của mỗi bước là tìm tham số của siêu phẳng tách chặt sự lậ này và tập nghiệm X^* , phần hai bao gồm thực hiện phép chiếu trên siêu phẳng và trên tập thực hiện được, nếu cần. Kết quả, chúng ta thu được sự đơn điệu giảm khoảng cách đến các nghiệm. Phần đầu của bước lặp có thể là cơ sở chính cho bước lặp của phương pháp nổi lỏng nhất, nhưng bây giờ chúng ta xét bước lặp hình chiếu cơ sở đơn giản nhất.

Thuật toán nổi lỏng miền chấp nhận. Chọn một điểm $x^0 \in X$, số $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$, $\gamma \in (0, 2)$, $\lambda > 0$, và đặt $k = 0$.

Bước 1 (bước phụ): Tính $z^k = \pi_X[x^k - G(x^k)]$ và đặt $p^k = z^k - x^k$.

Nếu $p^k = 0$, dừng.

Nếu $p^k \neq 0$, tìm số nguyên nhỏ nhất, không âm m sao cho:

$$(p^k)^T G(x^k + \beta^m p^k) \leq \alpha (p^k)^T G(x^k) \quad (3.17)$$

đặt $\theta_k = \beta^m$, $y^k = x^k + \theta_k p^k$. Nếu $G(y^k) = 0$, dừng.

Bước 2 (bước lặp chính): Đặt

$$\begin{aligned} g^k &= G(y^k), \quad w_k = (g^k)^T (x^k - y^k), \\ x^{k+1} &= \pi_X[x^k - \gamma(w_k/\|g^k\|^2)g^k], \end{aligned} \quad (3.18)$$

$k = k + 1$ và quay trở lại bước 1.

Theo sự mô tả này, thuật toán tìm một nghiệm của bất đẳng thức biến phân trong trường hợp kết thúc hữu hạn.

Kết luận

Luận văn "*Phương pháp tối ưu hóa giải bài toán cân bằng thông qua bất đẳng thức biến phân*" đã thực hiện được các vấn đề sau:

- Đưa ra một số mô hình cân bằng như: mô hình cân bằng bằng tuyến tính, mô hình cân bằng tuyến tính động, mô hình cân bằng kinh tế Cassel - Wald, mô hình thị trường cạnh tranh không hoàn hảo, mô hình cân bằng mạng và cân bằng di trú.

- Lý thuyết về bất đẳng thức biến phân, sự tồn tại và duy nhất nghiệm.

- Đưa ra một số phương pháp tối ưu hóa tìm điểm cân bằng: phương pháp chiếu, phương pháp chuẩn hóa, phương pháp lặp trực tiếp.

Trong quá trình thực hiện đề tài, chúng tôi còn nhận thấy một số hướng mở cần nghiên cứu tiếp như sau:

- Nghiên cứu bài toán bù phi tuyến, là một trường hợp đặc biệt của bài toán bất đẳng thức biến phân.

- Áp dụng phương pháp chiếu cho hệ các bất đẳng thức biến phân.

Những vấn đề trong luận văn xuất hiện vào những năm gần đây nên đối với tác giả vẫn còn là những vấn đề rất mới mẻ. Do đó, trong quá trình thực hiện luận văn này, chúng tôi chủ yếu thực hiện việc đọc hiểu, trình bày sắp xếp lại các kết quả đã có theo từng chương mục từ cơ bản đến chuyên sâu. Có thể nói luận văn là bước khởi đầu để tác giả làm quen với các kiến thức chuyên ngành của lĩnh vực toán tối ưu. Cho nên trong thời gian tới, nếu có điều kiện, tác giả xin tiếp tục tiếp cận và nghiên cứu đề tài này một cách sâu hơn.