

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

PHẠM THỊ LƯƠNG

**PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANTE:
LÝ THUYẾT VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP**

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Số học là một trong những lĩnh vực cổ xưa nhất của toán học và cũng là lĩnh vực tồn tại nhiều nhất những bài toán khó, những giả thuyết chưa có câu trả lời. Trên con đường tìm kiếm lời giải cho những giả thuyết đó, nhiều tư tưởng lớn, nhiều lý thuyết lớn của toán học đã nảy sinh. Vì thế, việc trang bị những kiến thức cơ bản về số học cho học sinh ngay từ trường phổ thông là hết sức cần thiết. Tuy nhiên, trong chương trình số học ở trường phổ thông hiện nay, môn số học chưa được giành nhiều thời gian, vì thế mà học sinh thường tỏ ra lúng túng khi giải các bài toán số học, đặc biệt là các bài toán trong các kỳ thi học sinh giỏi. Một trong số các bài toán về số học thường gặp ở trường phổ thông là: Phương trình Diophante (Phương trình vô định) - là phương trình đại số (một hay nhiều ẩn số) với hệ số nguyên, nghiệm của nó được tìm trong một tập hợp số nào đó như tập số nguyên, tập số nguyên dương, tập số hữu tỷ. Một cách ngắn gọn, phương trình Diophante có dạng tổng quát:

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$

trong đó P là một đa thức nhiều biến với hệ số nguyên.

Tác giả chọn đề tài: “Phương trình Diophante: Lý thuyết và các phương pháp” với mong muốn tìm hiểu về lý thuyết của phương trình Diophante và các phương pháp để giải phương trình Diophante. Trong khuôn khổ của luận văn, tác giả sẽ cố gắng trình bày lý thuyết một cách đầy đủ, súc tích, dễ hiểu (đối với đa số học sinh THPT chuyên) và đưa ra các phương pháp để có thể vận dụng giải được các dạng phương trình Diophante thường gặp. Tác giả hy vọng luận văn sẽ được sử dụng như một tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên và học sinh ở các trường THPT.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Trình bày cô đọng một số kiến thức có liên quan.

Nêu một cách tổng quát về các dạng phương trình Diophante.

Xây dựng các phương pháp giải phương trình Diophante.

Tuyển chọn và xây dựng một hệ thống các bài toán (theo mức độ khó dễ khác nhau) phù hợp với từng phương pháp.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

3.1. Đối tượng nghiên cứu: Phương trình Diophante.

3.2. Phạm vi nghiên cứu: Lý thuyết và các phương pháp giải phương trình Diophante.

4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu và thu thập tài liệu có liên quan đến đề tài của luận văn để phân tích, giải thích, đánh giá, tổng hợp các kết quả có trong các tài liệu khoa học đã sưu tập được.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Luận văn là một tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên và học sinh chuyên toán, nhằm mục đích phát huy tính tích cực, sáng tạo của học sinh và giáo viên trong quá trình dạy học toán.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn được xây dựng gồm các nội dung chính sau:

Mở đầu

Chương 1: Những kiến thức liên quan

Chương 2: Tổng quan về phương trình Diophante

Chương 3: Phương pháp và các bài toán

Kết luận

CHƯƠNG 1

NHỮNG KIẾN THỨC LIÊN QUAN

1.1. Nhắc lại một số khái niệm và kí hiệu

1.1.1. Số tự nhiên

1.1.2. Số nguyên

1.1.3. Các phép tính số nguyên: Cộng, trừ, nhân, chia.

1.1.4. Định nghĩa 1.4: Nếu a và b là các số nguyên thì tổ hợp tuyến tính với hệ số nguyên của a và b là một tổng có dạng $ma + nb$; trong đó, m, n là các số nguyên (được gọi là các hệ số của tổ hợp tuyến tính).

1.2. Phép chia hết và phép chia có dư

1.2.1. Định nghĩa 1.5: Cho a, b là các số nguyên và $b \neq 0$. Ta nói: a chia hết cho b nếu có số nguyên q sao cho $a = bq$.

Kí hiệu $a : b$ hay $b | a$.

Khi $a : b$ ta cũng nói b là ước của a . Ta còn nói b chia hết a .

1.2.2. Thuật toán chia: Cho a, b là các số nguyên và $b > 0$. Khi đó, tồn tại duy nhất các số nguyên q và r sao cho $a = bq + r$ với $0 \leq r < b$. Ta gọi a là số bị chia, b là số chia, q là thương số và r là phần dư trong phép chia a cho b . Như vậy, $a : b \Leftrightarrow r = 0$

1.2.3. Các định lý về chia hết

1.2.3.1. Định lý 1.6: Nếu các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ cùng chia hết cho b thì tổng $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ chia hết cho b .

1.2.3.2. *Định lý 1.7:* Nếu hai số a và b đều chia hết cho c thì hiệu $a - b$ và $b - a$ đều chia hết cho c .

1.2.3.3. *Định lý 1.8:* Nếu mỗi số a_i chia hết cho b_i ($1 \leq i \leq n$) thì tích $a_1 a_2 \dots a_n$ chia hết cho tích $b_1 b_2 \dots b_n$.

1.2.3.4. *Hệ quả 1.9:* Nếu a chia hết cho b thì a^n chia hết cho b^n với mọi $n \in \mathbb{N}$.

1.2.4. Các tính chất

1.2.4.1. *Tính chất 1.10:* Nếu $a : b$ và $b : c$ thì $a : c$.

1.2.4.2. *Tính chất 1.11:* Nếu $a : c$ và $b : c$ thì $ma + nb : c$ với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$.

1.2.4.3. *Tính chất 1.12:* Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n ($n \neq 0$).

1.2.5. Vận dụng

1.3. Ước số chung lớn nhất

1.3.1. Các định nghĩa

1.3.1.1. *Định nghĩa 1.15:* Một số nguyên c được gọi là một ước chung của hai số nguyên a và b không đồng thời bằng 0 nếu c chia hết a và c chia hết b ($c | a$ và $c | b$).

1.3.1.2. *Định nghĩa 1.16:* Một ước chung d của hai số nguyên a và b không đồng thời bằng 0 được gọi là ước chung lớn nhất của a và b nếu mọi ước chung c của a và b đều là ước của d . Ước chung lớn nhất của a và b được kí hiệu là (a, b) .

1.3.1.3. *Định nghĩa 1.17:* Một số nguyên b được gọi là một ước số chung của n số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ không đồng thời bằng 0 nếu b

chia hết mỗi số đó nghĩa là $b | a_i$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1.3.1.4. *Định nghĩa 1.18:* Một ước chung d của n số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ không đồng thời bằng 0 được gọi là ước chung lớn nhất của $a_1, a_2, \dots, a_n$ nếu mọi ước chung b của các số đó đều là ước của d . Ước chung lớn nhất của n số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ được ký hiệu là $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

1.3.2. Các tính chất

1.3.2.1. *Tính chất 1.21:* Cho a, b, q, r là các số nguyên, $a^2 + b^2 \neq 0$. Nếu $a = bq + r$ thì $(a, b) = (b, r)$.

1.3.2.2. *Tính chất 1.22:* Cho a, b là các số nguyên, $d = (a, b)$.

$$\text{Khi đó, ta có: } d = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} d | a \\ d | b \\ \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right) = 1. \end{cases}$$

1.3.2.3. *Định lý 1.23:* Cho a, b là các số nguyên không đồng thời bằng 0. Khi đó, nếu $d = (a, b)$ thì tồn tại $m, n \in \mathbb{Z}$ sao cho $d = am + bn$.

1.3.2.4. *Hệ quả 1.26:* $(a, b) = 1$ khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên m và n sao cho $ma + nb = 1$.

1.3.3. Thuật toán O-clit

(Thuật toán tìm ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương).

Giả sử: $r_0 = a, r_1 = b$ là các số nguyên, $b > 0$. Ta áp dụng liên tiếp thuật toán chia: $r_j = r_{j+1} q_{j+1} + r_{j+2}$ với $0 \leq r_{j+2} < r_{j+1}$ và nhận được

các phần dư $r_1 > r_2 > \dots$ đến khi lần đầu tiên nhận được phần dư $r_n = 0$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$; $0 < r_{j+2} < r_{j+1}$ nếu $0 \leq j < n-2$). Khi đó, $(a, b) = r_{n-1}$ (phần dư khác 0 cuối cùng trong dãy các phép chia của thuật toán).

1.4. Số nguyên tố

1.4.1. Các định nghĩa

1.4.1.1. Định nghĩa 1.32: Số nguyên tố là số nguyên dương lớn hơn 1 và chỉ có hai ước số dương là 1 và chính nó.

1.4.1.2. Định nghĩa 1.34: Hợp số là số lớn hơn 1 và có nhiều hơn hai ước số.

1.4.1.3. Định nghĩa 1.36: Các số nguyên a và b được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu $(a, b) = 1$.

1.4.2. Các tính chất

1.4.2.1. Tính chất 1.38: Nếu p là một số nguyên tố, a là một số nguyên bất kỳ thì hoặc a chia hết cho p hoặc a nguyên tố với p .

1.4.2.2. Tính chất 1.39: Nếu một số nguyên tố p chia hết một tích của nhiều số thì p chia hết ít nhất một trong các thừa số của tích đó.

1.4.2.3. Tính chất 1.40: Nếu a, b, c là các số nguyên dương và $(a, b) = 1, a \mid bc$ thì $a \mid c$.

1.4.3. Các định lý

1.4.3.1. Định lý 1.41: Ước nhỏ nhất lớn hơn 1 của một số tự nhiên lớn hơn 1 là một số nguyên tố.

1.4.3.2. Định lý 1.42: Tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

1.4.3.3. Định lý 1.43: (Định lý cơ bản của số học)

Mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng tích các thừa số nguyên tố, trong đó các thừa số nguyên tố được viết theo thứ tự không giảm.

1.4.3.4. Dạng phân tích chính tắc

Định nghĩa 1.46: Một số tự nhiên $a > 1$ được viết dưới dạng:

$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$, trong đó $p_1, p_2, \dots, p_n$ là các số nguyên tố phân biệt và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số tự nhiên lớn hơn 0 được gọi là dạng phân tích chính tắc của số tự nhiên a .

1.4.3.5. Vận dụng

1.5. Quan hệ đồng dư

1.5.1. Đồng dư thức

1.5.1.1. Định nghĩa 1.56: Cho số nguyên $m > 0$. Nếu hai số nguyên a và b có cùng số dư khi chia cho m thì ta nói a đồng dư với b theo modun m , kí hiệu $a \equiv b \pmod{m}$.

1.5.1.2. Định lý 1.57: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b : m$.

1.5.1.3. Các phép toán về đồng dư thức:

a) Phép cộng: Nếu $a_i \equiv b_i \pmod{m}$ ($1 \leq i \leq n$) thì $\sum_{i=1}^n a_i \equiv \sum_{i=1}^n b_i \pmod{m}$.

b) Phép trừ: Nếu $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ thì $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

c) Phép nhân:

Nếu $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, a_2 \equiv b_2 \pmod{m}, \dots, a_i \equiv b_i \pmod{m}, \dots, a_n \equiv b_n \pmod{m}$

thì $a_1 a_2 \dots a_n \equiv b_1 b_2 \dots b_n \pmod{m}, \forall n \geq 2$.

d) Phép nâng lũy thừa:

Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $\forall n \in \mathbb{N}_+$ ta có $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

1.5.2. Vận dụng

1.5.2.1. Ví dụ 1.61: Chứng minh rằng nếu n không chia hết cho 3 thì $3^{2n} + 3^n + 1 \vdots 13$.

1.5.2.2. Ví dụ 1.62: (Đề thi vô địch toán quốc tế năm 1964)

a) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^n - 1 \vdots 7$.

b) Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}$, $2^n + 1$ không chia hết cho 7.

1.6. Liên phân số

1.6.1. Nhắc lại số hữu tỷ và số vô tỷ

1.6.1.1. Định nghĩa 1.63: Số thực α được gọi là số hữu tỷ nếu $\alpha = \frac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên, $b \neq 0$. Nếu α không phải là số hữu tỷ thì ta nói α số vô tỷ.

1.6.1.2. Định lý 1.64: Nếu α, β là các số hữu tỷ thì $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha\beta, \frac{\alpha}{\beta} (\beta \neq 0)$ là số hữu tỷ.

1.6.2. Liên phân số hữu hạn

1.6.2.1. Định nghĩa 1.65: Liên phân số hữu hạn có độ dài $n (n \in \mathbb{N})$ là biểu thức có dạng:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

trong đó, $(a_k)_{k=0}^n \subset \mathbb{N}$, $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$. Liên phân số trên được

kí hiệu là: $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$. Khi $n = 0$, ta có $[a_0] = a_0$ (liên phân số độ dài 0). Liên phân số $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ được gọi là đơn nếu $(a_k)_{k=0}^n \subset \mathbb{N}$.

1.6.2.2. Định lý 1.66: Mỗi số hữu tỉ đều được biểu diễn dưới dạng một liên phân số đơn hữu hạn.

1.6.3. Giản phân

1.6.3.1. Định nghĩa 1.69: Liên phân số $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$, với k là số nguyên không âm không vượt quá n , được gọi là giản phân thứ k của liên phân số $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, được kí hiệu bởi C_k . Công thức tính giản phân được cho bởi định lý sau:

1.6.3.2. Định lý 1.70: Cho liên phân số hữu hạn $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, xét hai dãy $(p_k)_{k=0}^n$ và $(q_k)_{k=0}^n$ được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 & q_0 &= 1 \\ p_1 &= a_0 a_1 + 1 & q_1 &= a_1 \\ &\dots & & \end{aligned}$$

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

Khi đó, giản phân thứ k của liên phân số $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ là

$C_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ được tính bởi: $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ ($0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}$).

1.6.3.3. Định lý 1.72: Cho C_k là giản phân thứ k của $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ với $(1 \leq k \leq n)$ và p_k, q_k được định nghĩa như ở định lý 1.37. Khi đó $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$ với $1 \leq k \leq n$. Từ đó suy ra $(p_k, q_k) = 1$.

1.6.3.4. *Hệ quả 1.74*: Cho $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ là giản phân thứ k của liên phân

số $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$. Khi đó:

$$C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}} \text{ với } 1 \leq k \leq n, \quad C_k - C_{k-2} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}} \text{ với } 2 \leq k \leq n.$$

1.6.3.5. *Định lí 1.75*: Cho C_k là giản phân thứ k của liên phân số $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$. Khi đó:

$C_1 > C_3 > C_5 > \dots$ và $C_0 < C_2 < C_4 < \dots$ đồng thời mỗi giản phân chỉ số lẻ thì lớn hơn mọi giản phân chỉ số chẵn.

1.6.4. Liên phân số vô hạn

1.6.4.1. *Định lí 1.76*: Cho $a_0, a_1, a_2, \dots$ là dãy các số nguyên trong đó $a_1, a_2, \dots$ là các số dương. Với mỗi số nguyên k , đặt $C_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$. Khi đó, tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = \alpha$.

Vậy, $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

1.6.4.2. *Định lí 1.77*: Cho $a_0, a_1, a_2, \dots$ là dãy các số nguyên trong đó $a_1, a_2, \dots$ là các số dương. Khi đó $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ là một số vô tỉ.

1.6.4.3. *Nhận xét 1.78*: Mỗi số vô tỉ đều có thể biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng một liên phân số vô hạn.

CHƯƠNG 2

TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANTE

2.1. Phương trình Diophante bậc nhất

2.1.1. Phương trình Diophante bậc nhất hai ẩn (Phương trình Diophante tuyến tính)

2.1.1.1. Định nghĩa 2.1:

Phương trình Diophante bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng: $ax + by = c$ (2.1)

với a, b, c là các số nguyên; x, y là hai ẩn số nguyên của phương trình.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ thỏa mãn đẳng thức (2.1) được gọi là một nghiệm của phương trình (2.1).

Giải phương trình (2.1) tức là tìm các cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn đẳng thức (2.1).

2.1.1.2. *Định lý 2.2*: Giả sử $a^2 + b^2 \neq 0, d = (a, b)$. Điều kiện cần và đủ để phương trình (2.1) có nghiệm nguyên là d chia hết c .

2.1.1.3. *Định lý 2.5*: (Nghiệm nguyên của phương trình bậc nhất hai ẩn): Nếu trong phương trình (2.1) các hệ số a, b nguyên tố cùng nhau và $(x_0; y_0)$ là một nghiệm thì tất cả nghiệm của phương trình có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z}) \quad (2.5)$$

2.1.2. Phương trình Diophante bậc nhất nhiều ẩn

2.1.2.1. Định nghĩa 2.11

Phương trình Diophante bậc nhất nhiều ẩn là phương trình có dạng:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c, \quad a_i \in \mathbf{Z}, \quad a_i \neq 0 \quad i = \overline{1, n} \quad (2.11)$$

2.1.2.2. **Định lý 2.12:** Điều kiện cần và đủ để phương trình (2.11) có ít nhất một nghiệm nguyên là $(a_1, a_2, \dots, a_n) | c$.

2.1.2.2. **Cách giải phương trình (2.11)**

Đưa phương trình (2.11) về một trong hai dạng sau:

a) Có một hệ số của một ẩn bằng 1: Giả sử $a_1 = 1$, khi đó:

$$x_1 = c - a_2x_2 - a_3x_3 - \dots - a_nx_n; \quad x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbf{Z}$$

Nghiệm của phương trình (2.11) là:

$$(c - a_2x_2 - a_3x_3 - \dots - a_nx_n, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \text{với} \quad x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbf{Z}$$

b) Có hai hệ số nguyên tố cùng nhau: Giả sử $(a_1, a_2) = 1$. Khi đó:

$$(2.11) \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 = c - a_3x_3 - \dots - a_nx_n$$

Giải phương trình theo hai ẩn x_1, x_2 .

2.2. Phương trình Diophante bậc hai (hai ẩn số)

2.2.1. **Định nghĩa 2.14:** Dạng chung của phương trình Diophante bậc hai, hai ẩn số x và y là: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ (2.14)

Trong đó a, b, c, d, e, f là những số nguyên và ít nhất một trong các số a, b, c khác không. Còn các hệ số trước xy, x, y là những số chẵn không ảnh hưởng đến tính tổng quát của phương trình mà chỉ để thuận tiện cho việc biến đổi.

2.2.1.1. **Nhận xét 2.15:** Khi $b^2 - ac \neq 0$ phương trình (2.14) có thể đưa về dạng đơn giản: $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$ (2.18). Trong luận văn này ta chủ yếu xét phương trình dạng (2.18).

2.2.1.2. **Phương trình dạng:** $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$ (2.18)

Cách giải: Khi giải ta xét hai trường hợp $b^2 - ac = 0$ và $b^2 - ac \neq 0$

2.2.2. **Phương trình dạng:** $x^2 - dy^2 = n$ (2.22)

2.2.2.1. **Nhận xét 2.23**

a) Khi $d < 0$ và $n < 0$, phương trình (2.22) vô nghiệm.

b) Khi $d < 0$ và $n > 0$, phương trình (2.22) chỉ có thể có hữu hạn nghiệm.

c) Khi $d > 0$ ta xét 2 trường hợp của d : d chính phương và d không chính phương. Khi d không là số chính phương ta có định lý sau:

2.2.2.2. **Định lý 2.25:** Cho n là số nguyên, d là số nguyên dương không chính phương và $|n| < \sqrt{d}$. Khi đó, nếu $x^2 - dy^2 = n$ và $x, y \in \mathbf{Z}$ thì $\frac{x}{y}$ là một giản phân của $\sqrt{d}$.

2.2.2.3. **Định lý 2.27:** Cho d là số nguyên dương không chính phương. Đặt: $\alpha_k = (P_k + \sqrt{d}) / Q_k$

$$a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor$$

$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k$$

$$Q_{k+1} = (d - P_{k+1}^2) / Q_k \quad \text{với} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{trong đó} \quad \alpha_0 = \sqrt{d}.$$

Giả sử $\frac{p_k}{q_k}$ là giản phân thứ k của dạng liên phân số của $\sqrt{d}$.

$$\text{Khi đó: } p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k-1} Q_{k+1}, \quad Q_{kn} = Q_0 = 1$$

trong đó n là chu kỳ của dạng liên phân số của $\sqrt{d}$.

2.2.2.4. **Bổ đề 2.28:** Cho $r + s\sqrt{d} = t + u\sqrt{d}$ với r, s, t, u là các số hữu tỉ và d là số nguyên dương không chính phương. Khi đó $r = t$ và $s = u$.

* *Chú ý 2.30:* Khi $n=1$ phương trình $x^2 - dy^2 = n$ trở thành $x^2 - dy^2 = 1$ và gọi là phương trình Pell loại 1. Khi $n=-1$ phương trình $x^2 - dy^2 = n$ trở thành $x^2 - dy^2 = -1$ và gọi là phương trình Pell loại 2.

2.3. Phương trình Diophante phi tuyến

2.3.1. Phương trình Pythagoras

2.3.1.1. Các bộ số Pitago

a) *Định nghĩa 2.31:* Bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$ được gọi là một bộ số Pitago. Như vậy, một bộ ba số nguyên dương (x, y, z) là một bộ số Pitago khi và chỉ khi tồn tại tam giác vuông có số đo các cạnh góc vuông là x và y , số đo cạnh huyền là z . Rõ ràng, nếu (x, y, z) là một bộ số Pitago thì với mọi $d \in \mathbb{N}^*$, (dx, dy, dz) cũng là một bộ số Pitago. Do đó, ta chỉ cần xét bộ số Pitago (x, y, z) với $\gcd(x, y, z) = 1$.

b) *Định nghĩa 2.33:* Bộ số Pitago (x, y, z) được gọi là nguyên thủy nếu $\gcd(x, y, z) = 1$.

c) *Bổ đề 2.36:* Nếu (x, y, z) là một bộ số Pitago nguyên thủy thì $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$ hơn nữa x, y không cùng tính chẵn lẻ và z lẻ.

d) *Định lý 2.37:* Bộ ba số nguyên dương (x, y, z) là một bộ số Pitago nguyên thủy với y chẵn nếu và chỉ nếu tồn tại các số nguyên dương m, n với $m > n$, $\gcd(m, n) = 1$ và m, n không cùng tính chẵn lẻ sao cho:

$$\begin{aligned}x &= m^2 - n^2 \\y &= 2mn \\z &= m^2 + n^2\end{aligned}$$

2.3.1.2. Phương trình Pythagoras

Phương trình Pythagoras là phương trình có dạng: $x^2 + y^2 = z^2$

Nghiệm (x, y, z) của phương trình là một bộ số Pitago

Tìm nghiệm của phương trình là tìm bộ số Pitago (x, y, z) .

2.3.2. Phương trình Fermat

Phương trình $x^n + y^n = z^n$ được gọi là phương trình Fermat với $x, y, z \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

2.3.2.1. Định lý lớn Fermat

Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên dương khi $n \geq 3$.

2.3.2.2. *Định lý 2.40:* Phương trình $x^4 + y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

2.3.2.3. *Nhận xét 2.43:* Tương tự ta cũng chứng minh được phương trình $x^4 - y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

2.3.2.4. Phương trình kiểu Fermat

Phương trình kiểu Fermat là phương trình có dạng $x^n + y^n = 2z^n$, $n \geq 2$

Tìm nghiệm của phương trình là tìm các số nguyên dương (x_0, y_0, z_0) phân biệt sao cho x_0^n, y_0^n, z_0^n là một cấp số cộng.

2.4. Phương trình bậc cao

Ở các phần trước ta xét chi tiết cách giải phương trình vô định bậc nhất và bậc hai. Nhưng với phương trình vô định bậc ba và bậc cao hơn thì rất khó và kết quả nghiên cứu cách giải những phương trình như vậy rất ít. Trong khuôn khổ của luận văn này, tác giả chỉ đề cập đến một số bài toán cơ bản và được trình bày ở chương 3.

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG PHÁP VÀ CÁC BÀI TOÁN

3.1. Phương pháp số học

3.1.1. Sử dụng tính chẵn lẻ

Bài toán 3.1.1. Giải các phương trình sau trên tập số nguyên tố:

a) $x^2 - 2y^2 = 1$

b) $x^y + 1 = z$

Bài toán 3.1.2

a) Chứng minh rằng phương trình $2x^2 + y^2 = 2011$ không có nghiệm nguyên.

b) Chứng minh rằng phương trình $x^2 - y^2 = k$ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $k \neq 4t + 2$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 3.1.3

a) Chứng minh rằng phương trình $x^4 - 4y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

b) Chứng minh rằng phương trình $x^4 + 4y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

3.1.2. Sử dụng tính chất nguyên tố

3.1.2.1. *Định lý Fermat nhỏ:* Cho p là một số nguyên tố và a là một số nguyên dương không chia hết cho p . Khi đó, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

3.1.2.2. *Định nghĩa số chính phương (mod n):*

Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Số nguyên a được gọi là số chính phương (mod n) nếu tồn tại $x \in \mathbb{Z}$ sao cho $x^2 \equiv a \pmod{n}$.

Định lý 3.5: Cho số nguyên tố p

Nếu $p = 2$ thì mọi số lẻ a đều là số chính phương (mod 2).

Nếu $p > 2$ thì a là số chính phương (mod n) khi và chỉ khi $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Còn a là số không chính phương (mod n) khi và chỉ khi $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

3.1.2.3. Hai tính chất đặc trưng

a) *Tính chất 3.6:* Với mọi số nguyên a , số $a^2 + 1$ không có ước nguyên tố dạng $4k + 3$.

b) *Tính chất 3.9:* Cho p là số nguyên tố dạng $4k + 3$; a, b là số nguyên. Nếu $a^2 + b^2 \vdots p$ thì $a \vdots p$ và $b \vdots p$

3.1.2.3. Vận dụng

Bài toán 3.1.4. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình sau

a) $4xy - x - y = z^2$

b) $x^2 - y^3 = 7$

Bài toán 3.1.5. (*Olympic Serbia năm 2007*).

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, n) thỏa mãn $x^3 + 2x + 1 = 2^n$.

3.1.3. Dùng chia hết và chia có dư

3.1.3.1. *Phương pháp:* Thông thường ta dùng phương pháp này để chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên.

Chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên bằng cách chứng minh hai vế khi chia cho cùng một số, có số dư khác nhau.

3.1.3.2. Vận dụng

Bài toán 3.1.6. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

- a) $x^2 - 2y^2 = 5$
- b) $x^2 - 5y^2 = 17$
- c) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_7^4 = 2008$

Bài toán 3.1.7

- a) Chứng minh rằng tổng bình phương của 3 số nguyên trong phép chia cho 8 không thể có số dư là 7. Từ đó suy ra phương trình $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 71$ không có nghiệm nguyên.
- b) Tìm các chữ số x, y, z thỏa $\overline{xyz} + \overline{xzy} = \overline{zzz}$
- c) Chứng minh rằng phương trình $15x^2 - 7y^2 = 9$ không có nghiệm nguyên.
- d) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên dương n sao cho $n^7 + 7$ là bình phương của một số nguyên dương (*Đề chọn đội tuyển Hoa Kỳ thi IMO năm 2008*).

3.2. Phương pháp phân tích

3.2.1. Phương pháp: Khi giải phương trình vô định bằng phương pháp phân tích ta thường biến đổi phương trình bằng cách đặt nhân tử chung để đưa phương trình về dạng: Một vế là tích của các biểu thức chứa ẩn, một vế là hằng số.

3.2.2. Vận dụng

Bài toán 3.2.1. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình sau

- a) $x + y = xy$
- b) $2x^2 + xy - y^2 = 9$

Bài toán 3.2.2

- a) Tìm tất cả các tam giác vuông có các cạnh là số nguyên và số đo diện tích bằng số đo chu vi.
- b) Tìm số có 2 chữ số mà số ấy là bội của tích 2 chữ số của chính nó.
- c) Tìm số nguyên x sao cho $x^2 + x + 6$ là số chính phương.

3.3. Phương pháp sử dụng tính đối xứng

3.3.1. Phương pháp: Thường sử dụng cho phương trình đối xứng, vì vai trò các ẩn như nhau nên có thể giả thiết $1 \leq x \leq y \leq z \leq \dots$

3.3.2. Vận dụng

Bài toán 3.3.1. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình:

- a) $x + y + z = xyz$
- b) $x^3 + 7y = y^3 + 7x$

Bài toán 3.3.2. Một tam giác có số đo của đường cao là những số nguyên dương và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Chứng minh tam giác đó đều.

Bài toán 3.3.3. Tìm ba số tự nhiên biết tổng nghịch đảo của chúng bằng 1.

3.4. Phương pháp loại trừ

3.4.1. Phương pháp: Ta thường dùng phương pháp loại trừ để giải các phương trình Diophante bậc cao. Đặc trưng của phương pháp này là dựa vào đặc điểm của phương trình để đoán ra nghiệm rồi chứng minh nghiệm đó là duy nhất. Hoặc biến đổi đưa về phương trình mà hai vế là một lũy thừa và dựa vào điều kiện của ẩn để loại trừ các trường hợp, dẫn đến loại nghiệm không thỏa mãn điều kiện.

3.4.2. Vận dụng

Bài toán 3.4.1. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

a) $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$

b) $(x+2)^4 - x^4 = y^3$

3.5. Phương pháp xuống thang

3.5.1. Phương pháp: Cơ sở của phương pháp xuống thang là tính sắp thứ tự tốt của $\mathbb{Z}$. Mọi tập con không rỗng của $\mathbb{Z}$ đều có phần tử bé nhất.

3.5.2. Vận dụng

Bài toán 3.5.1. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

a) $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$

3.6. Phương pháp dùng liên phân số

Ta áp dụng phương pháp liên phân số để giải các dạng phương trình sau:

3.6.1. Phương trình bậc nhất hai ẩn dạng: $ax + by = c$

Bài toán 3.6.1. Giải các phương trình sau

a) $75x + 17y = 2$

b) $114x - 41y = 5$

Bài toán 3.6.2. (Đề thi học sinh giỏi miền Bắc 1974). Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho

a) $n:9$ và $n+1:25$

b) $n:21$ và $n+1:165$

3.6.2. Phương trình dạng: $x^2 - dy^2 = \pm 1$

3.6.2.1. Tính chất 3.23: Giả sử d là số nguyên dương không chính

phương, $\frac{p_k}{q_k}$ là giản phân thứ k trong biểu diễn liên phân số vô hạn

của $\sqrt{d}$ ($k=1,2,3,\dots$) và n là chu kỳ của liên phân số này. Khi đó:

i) Nếu n chẵn thì các nghiệm nguyên dương của $x^2 - dy^2 = 1$ là $x = p_{jn-1}, y = q_{jn-1}$ ($j=1,2,3,\dots$) và $x^2 - dy^2 = -1$ vô nghiệm.

ii) Nếu n lẻ thì các nghiệm nguyên dương của $x^2 - dy^2 = 1$ là $x = p_{2jn-1}, y = q_{2jn-1}$ ($j=1,2,3,\dots$) và các nghiệm nguyên dương của $x^2 - dy^2 = -1$ là $x = p_{(2j-1)n-1}, y = q_{(2j-1)n-1}$ ($j=1,2,3,\dots$).

3.6.2.2. Tính chất 3.24: Giả sử (x_1, y_1) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell $x^2 - dy^2 = 1$, trong đó d là một số nguyên dương không chính phương. Khi đó mọi nghiệm của phương trình là (x_k, y_k) được xác định bởi: $x_k + y_k \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^k$ với $k=1,2,3,\dots$

3.6.2.3. Tính chất 3.25: (Công thức nghiệm). Giả sử (a, b) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell: $x^2 - dy^2 = 1$

(b là số nguyên dương nhỏ nhất để $1+db^2$ là số chính phương). Xét hai dãy (x_n) , (y_n) được xác định bởi hệ thức truy hồi sau:

$$\begin{aligned}x_0 &= 1, x_1 = a, x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n \\ y_0 &= 0, y_1 = b, y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_n.\end{aligned}$$

Khi đó, dãy $(x_n, y_n)_{n=1}^\infty$ là tất cả các nghiệm của phương trình Pell.

3.6.2.4. Tính chất 3.26: (Điều kiện để phương trình Pell loại 2 có nghiệm). Gọi (a, b) là nghiệm nhỏ nhất của phương trình Pell loại 2 liên kết với phương trình Pell loại 1. Khi đó, phương trình Pell loại 2 có nghiệm khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} a = x^2 + dy^2 \\ b = 2xy \end{cases}$ có nghiệm nguyên dương.

3.6.2.5. Tính chất 3.27: (Công thức nghiệm). Giả sử hệ $\begin{cases} a = x^2 + dy^2 \\ b = 2xy \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (u, v) . Xét các dãy (x_n) , (y_n) được cho bởi hệ thức truy hồi:

$$\begin{aligned}x_0 &= u, x_1 = u^3 + 3duv^2, x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n \\ y_0 &= v, y_1 = dv^3 + 3u^2v, y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_n.\end{aligned}$$

Khi đó, dãy (x_n, y_n) là tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình Pell loại 2.

Bài toán 3.6.4. Giải các phương trình sau

a) $x^2 - 13y^2 = 1$

b) $x^2 - 10y^2 = -1$

Bài toán 3.6.5. Chứng minh rằng phương trình $x^2 - 34y^2 = -1$ vô nghiệm.

Bài toán 3.6.6. Chứng minh rằng phương trình: $a^2 + b^3 = c^4$ có vô hạn nghiệm nguyên dương.

3.7. Bài tập tham khảo

Bài toán 1. (England 1992). Cho p là một số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất những số nguyên dương m, n sao cho $m^2 = n(n+p)$. Hãy tìm m, n như biểu thức của p .

Bài toán 2. (Ireland 1995). Tìm tất cả số nguyên n sao cho phương trình $x^2 + nxy + y^2 = 1$ có vô hạn nghiệm nguyên khác nhau.

Bài toán 3. (Korea 1988). Tìm bộ bốn số (a, b, c, d) nguyên không âm thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 b^2 c^2$.

Bài toán 4. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên không âm m, n thỏa mãn: $m! + 48 = 48(m+1)^n$.

Bài toán 5. (Serbia 2008). Tìm tất cả các nghiệm nguyên không âm của phương trình $12^x + y^4 = 2008^z$

Bài toán 6. Giả sử a, b, n là các số nguyên dương và $a > b, n > b$. Chứng minh rằng nếu $c > 0$ thỏa mãn $a^n + b^n = c^n$ thì c không phải là số nguyên.

Bài toán 7. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn nghiệm nguyên dương của phương trình: $2x^2 - 3x + 1 = 3y^2 + y$.

Bài toán 8. (Romani 2003). Cho m, n là hai số nguyên và $m, n > 1$. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x^n + y^n = 2^m$.

Bài toán 9. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.

KẾT LUẬN

1) Về mặt lý luận: Luận văn đã nghiên cứu khá đầy đủ lý thuyết của phương trình Diophante và nêu được một số phương pháp để giải các dạng phương trình Diophante. Tuy nhiên, các phương pháp mà tác giả trình bày trong luận văn có thể chưa nhiều nhưng tác giả hy vọng đó là các phương pháp tối ưu nhất để vận dụng giải các dạng phương trình Diophante.

2) Về mặt thực tiễn: Luận văn đã đề cập đến nhiều dạng toán trong các đề thi học sinh giỏi của quốc gia và quốc tế mà có liên quan đến phương trình Diophante.

3) Hướng mở rộng đề tài: Phương trình Diophante là mảng kiến thức thường xuyên có mặt trong các kì thi toán quốc gia và quốc tế nên hàng năm lượng kiến thức về phương trình Diophante sẽ tăng lên. Trong luận văn này, tác giả chưa đề cập nhiều đến phương trình Diophante phi tuyến và phương trình Diophante bậc cao. Tác giả sẽ tiếp tục nghiên cứu trong thời gian tới.