BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

TRẦN VIẾT TƯỜNG

PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA ẨN

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - 2011.

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

Phản biện 1: TS. Nguyễn Duy Thái Sơn

Phản biện 2: TS. Hoàng Quang Tuyến

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 22 tháng 10 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong toán học phổ thông các bài toán về phương trình hàm là các loại toán thường mới và rất khó, thường xuyên xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic Toán khu vực và Quốc tế, Olympic sinh viên giữa các trường Đại học và cao đẳng. Liên quan đến các dạng toán này là các bài toán về các đặc trưng khác nhau của hàm số và các tính chất liên quan với chúng.

Để hệ thống các phương trình hàm, cần thiết phải hệ thống hóa các kiến thức cơ bản và nâng cao về các dạng phương trình hàm cũng như các ứng dụng của chúng. Đề tài **"Phương trình hàm đa ẩn"** nhằm đáp ứng mong muốn của bản thân về một đề tài phù hợp mà sau này có thể phục vụ thiết thực cho việc giảng dạy của mình trong nhà trường phổ thông.

Đề tài liên quan đến nhiều chuyên đề, trong đó có các đặc trưng tính chất của hàm số, các tính chất của dãy số, các tính chất của không gian tuyến tính và nhiều kiến thức cơ bản của đại số, hình học và giải tích.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Nhằm hệ thống các bài toán về phương trình hàm với nhiều ẩn hàm trong các lớp hàm cụ thể: liên tục, khả vi, tuần hoàn, lồi lõm,v.v. . .

Nắm được một số kĩ thuật về biến đổi hàm số, khảo sát các tính chất cơ bản của hàm thực và các phép biến hình trên trục thực.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu các các bài toán về lớp phương trình hàm nhiều ẩn hàm.

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS - TSKH Nguyễn Văn Mậu, các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, tủ sách chuyên toán, Tạp chí toán học và tuổi trẻ,...

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông.

Đề tài đóng góp thiết thực cho việc dạy và học các chuyên đề toán trong trường THPT, đem lại niềm đam mê sáng tạo từ những bài toán cơ bản nhất.

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Luận văn bao gồm phần mở đầu, 3 chương, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1. Một số đặc trưng hàm cơ bản và phương trình hàm Cauchy.

Trong chương này, tác giả trình bày một số đặc trưng hàm cơ bản, tập trù mật, điểm tụ của tập hợp và phương trình hàm Cauchy trong lớp hàm liên tục.

Chương 2. Phương trình đa ẩn hàm cơ bản.

Chương này trình bày một số bài tập về phương trình hàm song ẩn, phương trình hàm Pexider và các dạng toán liên quan, phương trình hàm Vincze và các dạng toán liên quan.

Chương 3. Một số dạng phương trình đa ẩn hàm khác.

Chương này trình bày phương trình hàm sinh bởi phi đẳng thức $a^2 + b^2 \not\equiv g(a+b)h(a-b)$, phương trình hàm sinh bởi đẳng thức $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ và một số phương trình đa ẩn hàm khác.

Chương 1

MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG HÀM CƠ BẢN VÀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY

1.1 Một số đặc trưng hàm cơ bản

Khi giải một phương trình hàm, ta có thể dựa vào đặc trưng của hàm số tương ứng để dự đoán được đáp án và cũng như có thể sáng tạo ra các bài tập tương ứng với đặc trưng của nó. Phần này sẽ đưa đặc trưng của một số hàm số thường gặp trong chương trình toán phổ thông, liên tục trên toàn miền xác định của nó.

1. Hàm bậc nhất $f(x) = ax + b$ (với $a, b \neq 0$)có đặc trưng hàm là

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Hàm tuyến tính $f(x) = ax$ (với $a \neq 0$) có đặc trưng hàm là

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Hàm mũ $f(x) = a^x$ (với $a > 0; a \neq 1$) có đặc trưng là

$$f(x+y) = f(x).f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4. Hàm logarit $f(x) = \log_a |x|$ (với $a > 0; a \neq 1$) có đặc trưng hàm là

$$f(x.y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^*.$$

5. Hàm sin $f(x) = \sin x$ có đặc trưng hàm là

$$f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

6. Hàm cosin $f(x) = \cos x$ có đặc trưng hàm là

$$f(2x) = 2f^2(x) - 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

7. Hàm tang $f(x) = tanx$ có đặc trưng hàm là

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

8. Hàm cotang $f(x) = cotx$ có đặc trưng hàm là

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y) - 1}{f(x) + f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

9. Hàm lũy thừa $f(x) = x^a$ (với $a \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}^+$) có đặc trưng hàm là

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

10. Hàm lượng giác ngược $f(x) = \arcsin x$ có đặc trưng hàm là

$$f(x) + f(y) = f(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad \forall x, y \in [-1; 1].$$

11. Hàm lượng giác ngược $f(x) = \arccos x$ có đặc trưng hàm là

$$f(x) + f(y) = f(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}) \quad \forall x, y \in [-1; 1].$$

12. Hàm lượng giác ngược $f(x) = \arctan x$ có đặc trưng hàm là

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; xy \neq 1.$$

13. Hàm lượng giác ngược $f(x) = arccotx$ có đặc trưng hàm là

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{xy-1}{x+y}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; x + y \neq 0.$$

14. Hàm sin hyperbolic $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) := \sinh x$ có đặc trưng hàm là

$$f(3x) = 3f(x) + 4f^3(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

15. Hàm cos hyperbolic $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) := \cosh x$ có đặc trưng hàm là

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

16. Hàm tan hyperbolic $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} := \tanh x$ có đặc trưng hàm là

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

17. Hàm cotang hyperbolic $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} := \coth x = \dfrac{1}{thx}$ có đặc trưng hàm là

$$f(x+y) = \frac{1 + f(x)f(y)}{f(x) + f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

18. Hàm $f(x) = \tan x$ có đặc trưng hàm là

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

19. Hàm $f(x) = \cot x$ có đặc trưng hàm là

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y) - 1}{f(x) + f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

20. Hàm $f(x) = ae^cx^2$ có đặc trưng hàm là

$$af(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

21. Hàm $f(x) = (1 + cx)^a$ có đặc trưng hàm là

$$f(x + y + cxy) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

22. Hàm $f(x) = cx^n$ có đặc trưng hàm là

$$f(\sqrt[n]{x^n + y^n}) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \geq 0.$$

23. Hàm $f(x) = c(x^2+1)$ có đặc trưng hàm là

$$f(\sqrt{x^2+y^2+1}) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

24. Hàm $f(x) = cx^2$ có đặc trưng hàm là

$$f(x+y) - f(x-y) = 4\sqrt{f(x)f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

25. Hàm $f(x) = cx^2$ có đặc trưng hàm là

$$f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)] \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1.2 Tập trù mật, điểm tụ của tập hợp

1.2.1. Định nghĩa tập trù mật

1. Tập $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ được gọi là tập trù mật trong $\mathbb{R}$, kí hiệu là $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$, nếu với mọi $x, y \in \mathbb{R}; x < y$ tồn tại $a \in \mathcal{A}$ sao cho $x < a < y$.

2. Tập $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ được gọi là tập trù mật trong $\mathbb{R}$, kí hiệu là $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$, nếu với mọi $x \in \mathbb{R}$ tồn tại dãy số $(a_n) \subseteq \mathcal{A}$, sao cho $a_n \to x$ khi $n \to +\infty$.

3. Cho tập $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$. Nếu với mọi $x \in \mathcal{B}$, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $y \in \mathcal{A}$, sao cho $|x - y| < \varepsilon$ thì $\mathcal{A}$ được gọi là trù mật trong $\mathcal{B}$, kí hiệu là $[\mathcal{A}] = \mathcal{B}$.

1.2.2. Định nghĩa điểm tụ

Cho tập $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$. Điểm $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là điểm tụ của tập $\mathcal{X}$ nếu tồn tại dãy số $x_n \subset \mathcal{X}, x_n \neq a$ với $n \in \mathbb{N}$ và (x_n) hội tụ về a.

Tập tất cả các điểm tụ của $\mathcal{X}$ kí hiệu là $\mathfrak{H}(X)$.

1.2.3. Các định lý về tập trù mật

Định lý 1. Nếu $[\mathcal{A}] = \mathcal{B}$ và $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ thì $[\mathcal{C}] = \mathcal{B}$.

Định lý 2 (Định lý Cronecker). Tập $\{m\alpha + n|\ m, n \in \mathbb{Z}; \alpha \in \mathfrak{T}\}$ trong đó $\mathfrak{T}$ là tập các số vô tỷ, là trù mật trong $\mathbb{R}$.

1.2.4. Một số tập trù mật trên $\mathbb{R}$ thường gặp

1. Với $\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỷ thì $[\mathbb{Q}] = \mathbb{R}$.

2. Với $\mathfrak{T}$ là tập các số vô tỷ thì $[\mathfrak{T}] = \mathbb{R}$.

3. Với $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$, tập $\{a + r|\ a \in \mathcal{A}; r \in \mathbb{R}^*$ cho trước$\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

4. Với $[\mathcal{A}] = \mathbb{R}$, tập $\{a.r|\ a \in \mathcal{A}; r \in \mathbb{R}^*$ cho trước$\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

5. Tập $\{\frac{m}{2^n}|\ n \in \mathbb{Z}^+; m \in \mathbb{Z}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

6. Tập $\{m\alpha - n|\ m, n \in \mathbb{N}; \alpha \in \mathfrak{T}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

1.3 Phương trình hàm Cauchy trong lớp hàm liên tục

Bài toán 1.3.1 (Phương trình hàm Cauchy). Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số : $f(x) = ax$ với $x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}$.

Bài toán 1.3.2. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục tại điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số : $f(x) = ax$ với $a \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. Nếu ta thay điều kiện $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ bởi $f(x)$ liên tục trên $[\alpha, +\infty)$ hoặc $(-\infty, \beta]$ thì nghiệm của bài toán 1.3.1 không thay đổi.

Bài toán 1.3.3. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x)f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số : $f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) = a^x$ với $a > 0$.

Bài toán 1.3.4. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = f(x).f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Đáp số : $f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) = x^{\alpha}$, $\forall x \in \mathbb{R}^{+}; \alpha \in \mathbb{R}$.

Bài toán 1.3.5. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Đáp số :$f(x) = a\ln|x|$.

Bài toán 1.3.6. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Bài toán 1.3.7. Tìm tất cả các hàm số f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \sqrt{f(x).f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số : $f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) = c.d^{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}; c, d \in \mathbb{R}^{+}$.

Bài toán 1.3.8. Tìm tất cả các hàm số f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^{+}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \sqrt{f(x)f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{+}.$$

Đáp số :$f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) = cx^{a}$ với $c > 0$.

Bài toán 1.3.9. Tìm tất cả các hàm số f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^{+}$ thỏa điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{+}.$$

Đáp số :$f(x) = a\ln x + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Bài toán 1.3.10. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = a^x - 1$.

Bài toán 1.3.11 (Singapor - 2002). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(1) = 2003 \quad \text{và} \quad f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Đáp số :$f(x) = x^2 + 2002$.

Bài toán 1.3.12. Tìm tất cả các số $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ sao cho f liên tục trên $\mathbb{R}^*$ và thỏa mãn điều kiện

$$(x+y)f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = xf(x) + yf(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^*.$$

Đáp số :$f(x) = a + \dfrac{b}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Bài toán 1.3.13. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$2e^{x+y} f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = e^{\frac{3x+y}{2}} f(x) + e^{\frac{x+3y}{2}} f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = \dfrac{ax+b}{e^x}$.

Bài toán 1.3.14 (Olympic toán sinh viên - 2010). Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(1) = 2010, f(x+y) = 2010^x f(y) + 2010^y f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = x.2010^x$.

Bài toán 1.3.15. Tìm tất cả các số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ sao cho f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 - y^2) = \frac{f(x^2)}{f(y^2)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}; a > 0$.

Bài 1.3.16 (IMO 2002). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa điều kiện

$$[f(x)+f(z)][f(y)+f(t)] = f(xy-zt)+f(xt+yz) \quad \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}.$$

Đáp số : $f(x) \equiv 0; f(x) \equiv 2; f(x) = x^2$.

Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH ĐA ẨN HÀM CƠ BẢN

2.1 Phương trình hàm song ẩn

Bài toán 2.1.1. Tìm các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = g(x) + g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số : $f(x) = mx + 2a; g(x) = mx + a$.

Bài toán 2.1.2. Tìm các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = g(x).g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số : $\begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ g(x) \text{ liên tục tùy ý và } g(0) = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x) = a^2.m^x \\ g(x) = a.m^x \end{cases}$

Bài toán 2.1.3. Tìm các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x.y) = g(x) + g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Đáp số :
$f(x) = m \ln|x| + 2a; g(x) = m \ln|x| + a, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bài toán 2.1.4. Tìm các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số : $f(x) = mx + b; g(x) = mx + b$ với $m, b \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.1.5. Tìm các hàm số dương f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \sqrt{g(x).g(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số : $f(x) = a.n^x; g(x) = a.n^x$ với $a, n > 0$ tùy ý.

Bài toán 2.1.6. Tìm tất cả các hàm số $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ xác định và liên tục thỏa điều kiện

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{2g(x)g(y)}{g(x)+g(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; g(x) + g(y) \neq 0.$$

Đáp số :$f(x) = \dfrac{1}{b}; g(x) = \dfrac{1}{b}$ với $b > 0$.

Bài toán 2.1.7. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \sqrt{\frac{[g(x)]^2 + [g(y)]^2}{2}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$\begin{cases} f(x) = \sqrt{b} \\ g(x) = \sqrt{b} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x) = \sqrt{b} \\ g(x) = -\sqrt{b} \end{cases}$ với $b \geq 0$.

Bài toán 2.1.8. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \sqrt{g(x).g(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Đáp số :$f(x) = a.x^\alpha; g(x) = a.x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}; a, x \in \mathbb{R}^+$.

Bài toán 2.1.9. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{g(x) + g(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Đáp số :

$f(x) = a\ln x + b; g(x) = a\ln x + b$ với $a, b \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}^+$

Bài toán 2.1.10. Tìm tất cả các hàm số dương f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{2}{\dfrac{1}{g(x)} + \dfrac{1}{g(y)}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Đáp số :$f(x) = c; g(x) = c$ với $c > 0$.

Bài toán 2.1.11. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \sqrt{\frac{[g(x)]^2 + [g(y)]^2}{2}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Đáp số :$f(x) = \sqrt{b}; g(x) = \sqrt{b}$ với $b > 0$.

Bài toán 2.1.12. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}\Big) = \frac{2}{\dfrac{1}{g(x)} + \dfrac{1}{g(y)}} \quad \forall x, y, x + y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Đáp số : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{a} \text{ với } a \neq 0 \\ g(x) = \dfrac{x}{a} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b} \text{ với } b \neq 0 \\ g(x) = \dfrac{1}{b} \end{cases}$

Bài toán 2.1.13. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa điều kiện

$$f\Big(\frac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}\Big) = \frac{g(x) + g(y)}{2} \quad \forall x, y, x + y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Đáp số : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{a}{x} \text{ với } a \neq 0 \\ g(x) = \dfrac{a}{x} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x) = b \text{ với } b \neq 0 \\ g(x) = b \end{cases}$

Bài toán 2.1.14. Tìm tất cả các hàm số $f, g \geq 0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}\Big) = \sqrt{g(x)g(y)} \quad \forall x, y, x+y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Đáp số : $\begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ g(x) \equiv 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x) = a.b^{\frac{1}{x}} \\ g(x) = a.b^{\frac{1}{x}} \end{cases}$ với $a, b > 0$.

Bài toán 2.1.15. Tìm tất cả các hàm số $f, g \geq 0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}\Big) = \sqrt{\frac{[g(x)]^2+[g(y)]^2}{2}} \quad \forall x, y, x+y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Đáp số :$f(x) = \sqrt{b}; g(x) = \sqrt{b}$ với $b \geq 0$.

Bài toán 2.1.16. Tìm tất cả các hàm số $f, g \geq 0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\Big) = \sqrt{\frac{[g(x)]^2+[g(y)]^2}{2}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :
$f(x) = \sqrt{ax^2+b}; g(x) = \sqrt{ax^2+b}$ với $x \in \mathbb{R}; a \geq 0, b \geq 0$.

Bài toán 2.1.17. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\Big) = \frac{g(x)+g(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = ax^2+b; g(x) = ax^2+b$ với $x \in \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.1.18. Tìm tất cả các hàm số $f, g \neq 0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\Big) = \frac{2}{\dfrac{1}{g(x)}+\dfrac{1}{g(y)}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = \dfrac{1}{ax^2+b}; g(x) = \dfrac{1}{ax^2+b}$ với $a.b \geq 0, b \neq 0.$

2.2 Phương trình hàm Pexider và các dạng toán liên quan

Bài toán 2.2.1 (Phương trình hàm Pexider). Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = g(x) + h(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số : $f(x) = cx + a + b; g(x) = cx + b; h(x) = cx + a.$

Bài toán 2.2.2. Tìm tất cả các hàm f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = g(x)(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = abe^cx; g(x) = ae^cx; h(x) = be^cx$

hoặc $f \equiv 0; g \equiv 0; h$ là hàm số tùy ý liên tục trên $\mathbb{R}$.

hoặc $f \equiv 0; h \equiv 0; g$ là hàm số tùy ý liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 2.2.3. Xác định tất cả các hàm số f, g, h liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = g(x) + h(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Đáp số :

$f(x) = m\ln x + a + b; g(x) = m\ln x + a; h(x) = m\ln x + b$

Bài toán 2.2.4. Tìm tất cả các hàm số dương f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \sqrt{g(x).h(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Đáp số :$f(x) = x^m; g(x) = a.x^m; h(x) = b.x^m$

Bài toán 2.2.5. Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{g(x) + h(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Đáp số :
$f(x) = m\ln x; g(x) = m\ln x + a; h(x) = m\ln x + b$. với $x \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.2.6. Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{2}{\dfrac{1}{g(x)} + \dfrac{1}{h(y)}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Đáp số :
$f(x) = \dfrac{2}{a+b}; g(x) = \dfrac{1}{a}; h(x) = \dfrac{1}{b}$ với $x \in \mathbb{R}^+; a > 0, b > 0$.

2.3 Phương trình hàm Vincze và các dạng toán liên quan

Bài toán 2.3.1 (Phương trình hàm Vincze). Xác định tất cả các hàm số f, g, h, k xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x+y) = g(x)k(y) + h(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :

$$\begin{cases} f(x) = mx + c \\ k(x) = a \\ h(x) = mx + b \\ g(x) = \dfrac{1}{a}(mx + c - b). \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} f(x) = n(m^x - 1) + c \\ g(x) = \dfrac{1}{a}[n(m^x - 1) + c - b] \\ h(x) = (c - n) + (n - c + b)m^x \\ k(x) = am^x \end{cases}$$

với $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.2. Xác định tất cả các hàm số f, g, h, k xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) = g(x-y)k(y) + h(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :

$$\begin{cases} f(x) = mx + c \\ k(x) = a \\ h(x) = mx + b \\ g(x) = \dfrac{1}{a}(mx + c - b). \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} f(x) = n(m^x - 1) + c \\ g(x) = \dfrac{1}{a}[n(m^x - 1) + c - b] \\ h(x) = (c - n) + (n - c + b)m^x \\ k(x) = am^x \end{cases}$$

với $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.3. Xác định tất cả các hàm số f, g, h, k xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x + y) = g(x)k(x - y) + h(x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :

$$\begin{cases} f(x) = mx + c \\ k(x) = a \\ h(x) = -mx + b \\ g(x) = \dfrac{1}{a}(2mx + c - b) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} f(x) = n(m^{-x} - 1) + c \\ g(x) = \dfrac{1}{a}[n(m^{-2x} - 1) + c - b] \\ h(x) = (c - n) + (n - c + b)m^x \\ k(x) = am^x \end{cases}$$

với $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.4. Xác định tất cả các hàm số f, g, h, k xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x - y) = g(x)k(y) + h(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :

$$\begin{cases} f(x) = mx + c \\ g(x) = a \\ h(x) = mx + b \\ k(x) = \dfrac{1}{a}(-mx + c - b). \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} f(x) = n(m^x - 1) + c \\ k(x) = \dfrac{1}{a}[n(m^{-x} - 1) + c - b] \\ h(x) = (c - n) + (n - c + b)m^x \\ g(x) = am^x \end{cases}$$

với $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 2.3.5. Xác định tất cả các hàm số f, g, h, k xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f(2x + y) = g(x + 2y)k(x - y) + h(x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :

$$\begin{cases} f(x) = mx + c \\ k(x) = a \\ h(x) = mx + b \\ g(x) = \dfrac{1}{a}(mx + c - b) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} f(x) = n(m^{-x} - 1) + c \\ g(x) = \dfrac{1}{a}[n(m^{-2x} - 1) + c - b] \\ h(x) = (c - n) + (n - c + b)m^{x} \\ k(x) = am^{x} \end{cases}$$

với $x \in \mathbb{R}$.

Chương 3

MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH ĐA ẨN HÀM KHÁC

3.1 Phương trình hàm sinh bởi phi đẳng thức $a^2 + b^2 \not\equiv g(a+b)h(a-b)$

Bài toán 3.1.1. Tìm các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + y^2) = g(x+y).h(x-y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ với } x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \text{ với } q(x) \text{ liên tục tùy ý trong } (-\infty; 0] \text{ và } q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) \equiv 0 \\ h(x) \text{ là hàm liên tục tùy ý} \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ với } x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \text{ với } q(x) \text{ liên tục tùy ý trong } (-\infty; 0] \text{ và } q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) \text{ là hàm số liên tục tùy ý và } g(0) = 0 \\ h(x) \equiv 0 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ với } x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \text{ với } q(x) \text{ liên tục tùy ý trong } (-\infty; 0] \text{ và } q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) \text{ là hàm liên tục tùy ý} \\ h(x) \equiv 0 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ với } x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \text{ với } q(x) \text{ liên tục tùy ý trong } (-\infty; 0] \text{ và } q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) \equiv 0 \\ h(x) \text{ là hàm liên tục tùy ý với } h(0) = 0 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = b.a^x \text{ với } x \geq 0; a > 0; b \neq 0 \\ f(x) = q(x) \text{ với } q(x) \text{ liên tục tùy ý trong } (-\infty; 0] \text{ và } q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) = m.a^{\frac{x^2}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) = n.a^{\frac{x^2}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Bài toán 3.1.2. Tìm các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + y^2) = g(x + y) + h(x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = ax + b + c \text{ với } x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \text{ với } q(x) \text{ liên tục tùy ý trong } (-\infty; 0] \text{ và } q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) = a\dfrac{x^2}{2} + b, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) = a\dfrac{x^2}{2} + c, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

với $b = g(0); c = h(0)$

Bài toán 3.1.3. Tìm các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + y^2) = g(x^2) - h(y^2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = ax + b \text{ với } x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \text{ với } q(x) \text{ liên tục tùy ý trong } (-\infty; 0] \text{ và } q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) = ax + c, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) = -ax - d, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3.2 Phương trình hàm sinh bởi đẳng thức $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Bài toán 3.2.1. Tìm các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 - y^2) = (x + y)g(x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = ax; g(x) = ax$

Bài toán 3.2.2. Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 - y^2) = g(x - y) + h(x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = a; g(x) = b; h(x) = c, \ \forall x \in \mathbb{R}$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}; a = b + c.$

Bài toán 3.2.3. Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 - y^2) = g^2(x) - h^2(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :

$$\begin{cases} f(x) = mx + a - b, & \forall x \in \mathbb{R}; a, b, m \geq 0 \\ g(x) = \sqrt{mx^2 + a} \\ h(x) = \sqrt{mx^2 + b} \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} f(x) = mx + a - b, & \forall x \in \mathbb{R}; a, b, m \geq 0 \\ g(x) = \sqrt{mx^2 + a} \\ h(x) = -\sqrt{mx^2 + b} \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} f(x) = mx + a - b, & \forall x \in \mathbb{R}; a, b, m \geq 0 \\ g(x) = -\sqrt{mx^2 + a} \\ h(x) = \sqrt{mx^2 + b} \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} f(x) = mx + a - b, & \forall x \in \mathbb{R}; a, b, m \geq 0 \\ g(x) = -\sqrt{mx^2 + a} \\ h(x) = -\sqrt{mx^2 + b} \end{cases}$$

3.3 Một số bài toán phương trình đa ẩn hàm khác

Bài toán 3.3.1. Tìm các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) - g(y) = xh(y) - yh(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = g(x) = ax + b; h(x) = cx + a$

Bài toán 3.3.2. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) - f(y) = (x + y)g(x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Đáp số :} \begin{cases} f(x) = ax^2 + b \\ g(x) = ax \end{cases} \quad \text{với mọi } a, b \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 3.3.3. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + f(y) + 2xy = (x + y)g(x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :$f(x) = x^2 + ax$ và $g(x) = \begin{cases} x + a & \text{với } x \neq 0 \\ c & \text{với } x = 0 \end{cases}$.

Bài toán 3.3.4. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x).g(y) = x^2 - y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số : Không tồn tại các hàm f, g thỏa mãn bài toán.

Bài toán 3.3.5. Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) + g(x - y) = h(xy) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :
$f(x) = \dfrac{mx^2}{4} + b; g(x) = -\dfrac{mx^2}{4} + a; h(x) = mx + a + b, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Bài toán 3.3.6. Tìm tất cả các hàm số dương f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y).g(x - y) = h(xy) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :
$f(x) = e^{\frac{mx^2}{4} + b}; g(x) = e^{-\frac{mx^2}{4} + a}; h(x) = e^{mx + a + b}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Bài toán 3.3.7. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + g(x) + f(y) - g(y) = \sin x - \cos y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số :
$f(x) = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x); g(x) = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x) + a, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

KẾT LUẬN

Bản luận văn "Phương trình hàm đa ẩn" đã đưa ra các dạng phương trình hàm đa ẩn như: Phương trình hàm Pexider, phương trình hàm Vincze và các dạng toán liên quan. Tiếp theo, xây dựng lớp các phương trình hàm đa ẩn sinh bởi các hằng đẳng thức và phi hằng đẳng thức đại số...

Việc xây dựng các phương pháp và sáng tạo ra các dạng phương trình hàm đa ẩn khác đòi hỏi sự nghiên cứu, tìm tòi sâu hơn. Đó cũng là hướng nghiên cứu cần thiết của tác giả trong thời gian tới.