BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

NGUYỄN THỊ HỒNG ÁNH

PHƯƠNG TRÌNH HÀM SINH BỞI NHÓM CYCLIC

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

ĐÀ NẴNG - NĂM 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Phản biện 1: TS. Lê Hoàng Trí

Phản biện 2: PGS.TS. Trần Đạo Dõng

Luận văn sẽ được bảo vệ tại hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học họp tại Đà Nẵng vào ngày 17 tháng 8 năm 2011

* *Có thể tìm thấy thông tin luận văn tại:*

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng

- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Lý thuyết các phương trình hàm là một trong những lĩnh vực nghiên cứu quan trọng của Giải tích toán học. Các dạng toán về phương trình hàm rất phong phú và thường rất khó.

Qua nhiều thập kỷ gần đây, phương trình hàm có ảnh hưởng sâu sắc đến tất cả các lĩnh vực toán học. Đặc biệt phương trình hàm nó trở thành mảng quan trọng thường xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic Toán khu vực và quốc tế, Olympic sinh viên giữa các trường Đại học và Cao Đẳng.

Liên quan đến chuyên đề này là các dạng toán về đặc trưng hàm và các tính chất liên quan của hàm số.

Để tổng quan các phương pháp giải các dạng toán trên, cần thiết phải hệ thống hóa các kiến thức cơ bản và nâng cao về các dạng phương trình hàm cũng như các ứng dụng của chúng, đề tài *"Phương trình hàm sinh bởi nhóm cyclic"* nhằm đáp ứng mong muốn của bản thân về một chuyên đề toán sơ cấp phù hợp để sau này có thể phục vụ thiết thực cho việc giảng dạy của mình trong nhà trường phổ thông.

Đề tài này liên quan đến nhiều chuyên đề, trong đó có các vấn đề về đặc trưng của hàm số, các tính chất của dãy số, tính chất của nhóm cyclic, của không gian tuyến tính và nhiều kiến thức cơ bản khác của đại số, hình học và giải tích.

2. Mục đích nghiên cứu

Nhằm hệ thống và tổng quan các bài toán về phương trình hàm và cho các ứng dụng khác nhau trong toán phổ thông.

Nắm được một số kĩ thuật về nhóm, về đặc trưng hàm số, về tính chất cơ bản của hàm thực và các phép biến hình trên trục thực, từ đó có các ứng dụng cụ thể và phù hợp.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu các bài toán về phương trình hàm và xét các ứng dụng liên quan.

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, tủ sách chuyên toán, Tạp chí toán học và tuổi trẻ,...

4. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu lý luận:

- Nghiên cứu gián tiếp qua các trang web.

- Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu của Thầy hướng dẫn, của các đồng nghiệp cũng như các bạn học viên trong lớp.

Phương pháp nghiên cứu thực tiễn:

- Thực nghiệm sư phạm ở các trường trung học phổ thông.

- Dự các buổi hội thảo về chuyên đề này.

- Đặc biệt tiếp thu các ý kiến xây dựng của Thầy hướng dẫn.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng giáo viên và học sinh trung học phổ thông.

Đề tài đóng góp thiết thực cho việc nâng cao chất lượng dạy và học các chuyên đề toán trong trường THPT, đem lại niềm đam mê, sáng tạo những dạng toán mới xuất phát từ những bài toán cơ bản nhất.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn bao gồm phần mở đầu, 3 chương, phần kết luận, và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1.Đặc trưng các biến đổi cyclic
Trong chương này, tác giả trình bày một số định nghĩa và tính chất của hàm phân tuyến tính, của toán tử đối hợp bậc n.

Chương 2. Phương trình hàm sinh bởi phép biến đổi cyclic
Chương này trình bày cách giải và một số ví dụ minh họa dạng phương trình hàm sinh bởi phép biến đổi cyclic ở 3 loại phương trình thường gặp :Phương trình tuyến tính với hệ số hằng; Phương trình tuyến tính với vế phải là hàm số; Phương trình dạng cơ bản không thuần nhất với hệ số biến thiên .

Chương 3. Một số áp dụng
Trình bày một số ví dụ áp dụng về dãy cấp số đặc biệt , dãy số phân tuyến tính và các bài toán liên quan.

Chương 1

ĐẶC TRƯNG CÁC BIẾN ĐỔI CYCLIC

1.1 Phép biến đổi phân tuyến tính

Định nghĩa 1.1. Hàm số có dạng $\omega(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$ được gọi là hàm phân tuyến tính.

- Nếu $c \neq 0$ thì $\omega(x)$ được gọi là hàm phân tuyến tính thực sự.

- Nếu $c = 0$ thì $\omega(x)$ được gọi là hàm bậc nhất .

Nhận xét 1.1. Ý nghĩa hình học của lớp hàm số phân tuyến tính biến số phức $z \in \mathbb{C} \mapsto z' = \dfrac{az+b}{cz+d} := g(z)$

1. $z \mapsto z + a, (a = x + iy \in \mathbb{C})$ là phép tịnh tiến song song với vectơ $\overrightarrow{u}(x; y)$.

2. $z \mapsto rz, (r \in \mathbb{R}^+)$ là phép vị tự tâm $O(0; 0)$, tỉ số r.

3. $z \mapsto -z$ là phép đối xứng tâm $O(0; 0)$.

4. $z \mapsto \overline{z}$ là phép đối xứng trục $x'Ox$.

5. $z \mapsto e_\varphi z, (e_\varphi = cos\varphi + isin\varphi)$ là phép quay tâm $O(0; 0)$ góc φ.

6. $z \mapsto az, (a = |a| .e_{arga} \in \mathbb{C})$ là phép quay rồi vị tự tâm $O(0; 0)$.

7. $z \mapsto az + b = a(z + c), \left(a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0, c = \dfrac{b}{a}\right)$ là phép đồng dạng

8. $z \mapsto \dfrac{k}{z}, (k \in \mathbb{R}^+)$ là phép vị tự .

Với $c \neq 0$, ánh xạ phân tuyến tính $z \mapsto z' = \dfrac{az+b}{cz+d} = p + \dfrac{q}{z+h}$ có thể được thực hiện như sau:

$$z \mapsto z_1 = z+h \mapsto z_2 = \frac{1}{z_1} \mapsto z_3 = qz_2 \mapsto z' = z_3+p = p+\frac{q}{z+h} = \frac{az+b}{cz+d}.$$

1.2 Điều kiện đối hợp của nhóm cyclic bậc n

Định nghĩa 1.2 (xem [3])**.** Cho hàm số $\omega : X \to X$. Ta định nghĩa dãy các hàm số $\omega_n : X \to X$ như sau $\omega_0(x) := x$; $\omega_1(x) = \omega(x)$; $\omega_{n+1}(x) = \omega(\omega_n(x))$, $\forall n \in N$, $\forall x \in X$. Khi đó $\omega_n(x)$ được gọi là hàm lặp bậc (cấp, thứ) n của hàm số ω.

Số $m \in \mathbb{N}^*$ nhỏ nhất thỏa mãn $\omega_m(x) = x$ được gọi là bậc lặp của hàm số $\omega(x)$. Khi đó ta còn gọi hàm $\omega(x)$ là hàm đối hợp bậc m. Trong trường hợp không tồn tại m thỏa mãn đẳng thức như trên thì ta nói hàm $\omega(x)$ bậc lặp vô hạn.

Định nghĩa 1.3. Cho X là không gian các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\omega(x)$ là một hàm thuộc X, cho trước. Với mọi $f \in X$ xét toán tử $(Wf)(x) = f(\omega(x))$. Khi đó W được gọi là toán tử đối hợp bậc n nếu $W^n = I$.

1.2.1 Nhóm cyclic bậc n của toán tử đối hợp

Định lí 1.1. Điều kiện cần và đủ để W là toán tử đối hợp bậc n $(n > 1)$ là

$$\omega_n(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó $\omega_1(x) := \omega(x)$, $\omega_{n+1}(x) = \omega(\omega_n(x)), \ldots ...$

Nhận xét 1.2. Nếu W là toán tử đối hợp bậc n thì hiển nhiên tập hợp $\{I, W, W^2, \ldots, W^{n-1}\}$ lập thành nhóm cyclic bậc n.

1.2.2 Điều kiện đối hợp bậc n của phép biến đổi phân tuyến tính

Định lí 1.2 (xem [3])**.** Giả sử $\omega(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ad - bc = \pm 1$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm phân tuyến tính $\omega(x)$ có tính chất đối hợp bậc n $(n > 1)$ là $|a + d| = \pm 2\cos\dfrac{m\pi}{n}, m = 1, 2, \ldots, n-1$

Mệnh đề 1.1. *Nếu một phép biến hình xạ ảnh "điểm" f trên một đường Δ nào đó là đối hợp bộ n, $(n \geq 3)$ thì nhất thiết nó phải là một phép biến hình xạ ảnh eliptic trên Δ.*

Mệnh đề 1.2. *Một phép biến hình xạ ảnh trên đường thẳng là đối hợp bộ n, $(n \geq 3)$ khi và chỉ khi phép biến đổi phân tuyến tính liên kết với nó là xoay vòng chu kỳ n, cũng tức là hàm phân tuyến tính liên kết là một hàm tuần hoàn chu kỳ n.*

1.3 Điều kiện để biến đổi tuyến tính giao hoán và phản giao hoán với biến đổi đối hợp

Định nghĩa 1.4.

1. Hai hàm số $\omega(x)$ và $g(x)$ được gọi là giao hoán với nhau nếu
$$g(\omega(x)) = \omega(g(x)).$$
2. Hai hàm số $\omega(x)$ và $g(x)$ được gọi là phản giao hoán với nhau nếu
$$g(\omega(x)) = -\omega(g(x)).$$

Định nghĩa 1.5. Giả sử $v(x)$, $\omega(x)$ là các hàm thuộc X cho trước và các toán tử V và W xác định theo công thức $(Vf)(x) = f(v(x))$ và $(Wf)(x) = f(\omega(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}; f \in X$. Khi đó V và W được gọi là giao hoán với nhau nếu
$$VW = WV,$$
hay $v(\omega(x)) \equiv \omega(v(x))$.

1.3.1 Phương trình hàm xác định các hàm phân tuyến tính giao hoán.

Ta xét $\omega(x)$ là hàm phân tuyến tính có dạng $\omega(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Xét toán tử $(Af)(x) = f(\omega(x)),\ \ f \in X$.

Ta đặt các hệ số của hàm $\omega(x)$ tương ứng với ma trận (thường được gọi là simbol của toán tử A)
$$A_\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Khi đó

Tính chất 1.1. Toán tử $(Bf)(x) = f(\varphi(x)), f \in X$ giao hoán với A khi và chỉ khi simbol A_ω giao hoán với simbol A_φ, trong đó

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

là ma trận ứng với hàm phân tuyến tính có dạng $\varphi(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$.

Tính chất 1.2. Điều kiện để $A_\omega B = BA_\omega$ là

$$B = A_\omega X_0 + X_0 A_\omega, \tag{1.10}$$

trong đó ma trận A_ω có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$, X_0 là toán tử tuyến tính tùy ý.

Tính chất 1.3. Giả sử ma trận A_ω cấp m có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = \lambda^2 + \delta\lambda + \gamma$ chỉ có nghiệm đơn. Khi đó $BA_\omega = A_\omega B$ khi và chỉ khi

$$B = A_\omega X_0 + X_0 A_\omega + \delta X_0, \tag{1.11}$$

(với X_0 là một ma trận cấp m tuỳ ý).

1.3.2 Một số áp dụng

Trong phần này ta sẽ sử dụng tính chất 1.2 và 1.3 để giải một số dạng phương trình hàm.

Bài toán 1.1 (xem [3]). Cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{-9}{x-6}$. Tìm tất cả các hàm số$f : \mathbb{R} \setminus \{6\} \to \mathbb{R} \setminus \{6\}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(\omega(x)) = \frac{-9}{f(x) - 6}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{6\}.$$

Bài toán 1.2 (xem [3]). Cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{15}{x+2}$.Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(\omega(x)) = \frac{15}{f(x) + 2}.$$

Bài toán 1.3 (xem [3])**.** Cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. Tìm tất cả các hàm $f:\ \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(\omega(x)) = \frac{f(x)-2}{f(x)-1}.$$

Tóm lại: Gắn mỗi một hàm phân tuyến tính tương ứng với một ma trận simbol và sử dụng tính chất 1.2, 1.3 là một công cụ rất mạnh trong việc giải quyết các bài toán về hàm phân tuyến tính giao hoán.

Tuy nhiên trong chương trình toán ở bậc THPT, vì học sinh chưa được học về ma trận nên cũng sẽ gặp phải nhiều khó khăn. Vì vậy, ở một số bài tập sau, ta trình bày lời giải một số bài sử dụng phép biến đổi phân tuyến tính. Cụ thể là một số bài tập áp dụng về các phương trình hàm có dạng

$$f(\omega(x)) = \omega(f(x)).$$

Bài toán 1.4 (xem [1])**.** Cho các số $b, c \in\ \mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $d \in\ \mathbb{R}$.Tìm các hàm $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+b) = cf(x) + d,\ \ \forall x \in\ \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Bài toán 1.5 (xem [3])**.** Xác định các hàm số $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(ax+b) = af(x) + b \tag{1.16}$$

Bài toán 1.6 (xem [1])**.** Cho các số $a \in\ \mathbb{R}\setminus\{0;1;-1\}, b \in\ \mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $c \in\ \mathbb{R}$. Tìm tất cả các hàm $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(ax) = bf(x) + c,\ \ \forall x \in\ \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

Bài toán 1.7 (xem [3])**.** Cho $a \neq 0, \omega(x) = \dfrac{a}{x}$. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ dương trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\omega(x)) = \frac{a}{f(x)}.$$

Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH HÀM SINH BỞI PHÉP BIẾN ĐỔI CYCLIC

Định lí 2.1. Cho $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ và $b(x)$. Xét phương trình dạng

$$a_0 f(x) + a_1 f(\omega(x)) + \cdots + a_{n-1} f(\omega_{n-1}(x)) = b(x), \tag{2.1}$$

trong đó $\omega_n(x) = x, \omega_k(x) \neq x$ với $1 < k < n, k, n \in \mathbb{N}$.

Ký hiệu $(Wf)(x) = f(\omega(x)),\ f \in X$ thì $W^n = I$ và phương trình (2.1) có dạng

$$a_0 f + a_1 W f + a_2 W^2 f + \cdots + a_{n-1} W^{n-1} f = b. \tag{2.2}$$

Đặt

$$K = a_0 I + a_1 W + a_2 W^2 + \cdots + a_{n-1} W^{n-1}, \tag{2.3}$$

thì phương trình (2.2) trở thành

$$Kf = b. \tag{2.4}$$

Đặt

$$\begin{aligned}
I &= P_1 + P_2 + \cdots + P_n \\
W &= \varepsilon_1 P_1 + \varepsilon_2 P_2 + \cdots + \varepsilon_n P_n \\
W^2 &= \varepsilon_1^2 P_1 + \varepsilon_2^2 P_2 + \cdots + \varepsilon_n^2 P_n \\
&\vdots \\
W^{n-1} &= \varepsilon_1^{n-1} P_1 + \varepsilon_2^{n-1} P_2 + \cdots + \varepsilon_n^{n-1} P_n
\end{aligned}$$

với $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Khi đó $P_i P_j = \delta_{ij} P_j,\ i, j = 1, \ldots, n$ và Khi đó (2.3) trở thành

$$K = a_0\Big(\sum_{k=1}^{n} P_k\Big) + a_1\Big(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k P_k\Big) + a_2\Big(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 P_k\Big) + \cdots + a_{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^{n-1} P_k\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_0 + a_1\varepsilon_k + a_2\varepsilon_k^2 + \cdots + a_{n-1}\varepsilon_k^{n-1}) P_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} Q(\varepsilon_k) P_k$$

với $Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}$.

Thay K vào phương trình (2.4) ta được

$$\sum_{k=1}^{n} Q(\varepsilon_k) P_k f = b$$

$$\Leftrightarrow P_j \sum_{k=1}^{n} Q(\varepsilon_k) P_k f = P_j b, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow Q(\varepsilon_j) P_j f = P_j b, j = 1, 2, \ldots, n$$

- Nếu các $Q(\varepsilon_j) \neq 0$ thì

$$P_j f = [Q(\varepsilon_j)]^{-1} P_j b$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_j f = \sum_{k=1}^{n} [Q(\varepsilon_j)]^{-1} P_j b$$

$$f = \sum_{k=1}^{n} [Q(\varepsilon_j)]^{-1} P_j b$$

- Giả sử tồn tại j để $Q(\varepsilon_j) = 0$ thì từ phương trình $Q(\varepsilon_j) P_j f = P_j b$ ta có $0 = P_j b$.

Do đó điều kiện cần để phương trình $Q(\varepsilon_j) P_j f = P_j b$ có nghiệm là $P_j b = 0$.

Thật vậy, giả sử điều kiện cần thỏa mãn. Khi đó $P_j f$ tùy ý.

Xét $T = \sum\limits_{k=1}^{n} d_j P_j$, với $d_j = \begin{cases} [Q(\varepsilon_j)]^{-1}, & \text{nếu} Q(\varepsilon_j) \neq 0 \\ \lambda_j & \text{tùy ý, khi} Q(\varepsilon_j) = 0. \end{cases}$

Khi đó

$$f = \sum_{k=1}^{n} d_j P_j b \tag{2.5}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (2.1).

2.1 Phương trình tuyến tính với hệ số hằng

Trong mục này ta xét cách giải một số phương trình (2.1) khi vế phải là hằng số (tức $b(x) = const$).

Bài toán tổng quát 1. Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn điều kiện sau

$$f\Big(\frac{\alpha x+\beta}{x+\gamma}\Big) = af(x)+b,\ \ \forall x \in \ \mathbb{R}\setminus\{-\gamma\}, \tag{2.6}$$

trong đó $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ là các hằng số thực, $a \neq 0, \alpha\gamma - \beta \neq 0$.

Ta khảo sát bài toán (2.6) trong ba trường hợp đặc trưng điển hình sau đây

i) Phương trình $\omega(x) = x$ có hai nghiệm thực phân biệt,

ii) Phương trình $\omega(x) = x$ có một nghiệm kép (thực),

iii) Phương trình $\omega(x) = x$ không có nghiệm thực.

Nhận xét 2.1. Phương trình trong trường hợp (iii) tương đương với phương trình $\omega(x) = x$ có hai nghiệm (phức) liên hợp với các số liên hợp phức với nhau.

Ta chuyển bài toán tổng quát 1 về bài toán tổng quát sinh bởi hàm bậc nhất quen biết mà ta đã biết cách giải.

Bài toán tổng quát 2. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(\alpha x+\beta) = af(x)+b,\ \ \forall x \in \ \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

trong đó α, β, a, b là các hằng số thực $a \neq 0, \alpha \neq 0$ hoặc về dạng bài toán tổng quát sinh bởi phép đối hợp bậc n dạng sau đây.

Bài toán tổng quát 3. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f\Big(\frac{\alpha x+\beta}{x+\gamma}\Big) = af(x)+b,\ \ \forall x \in \ \mathbb{R}\setminus\{-\gamma\}, \tag{2.8}$$

trong đó $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ là các hằng số thực $a \neq 0, \alpha\gamma - \beta \neq 0$ và $\omega_k(x) \equiv x, \omega_{k+1}(x) := \omega(\omega_k(x)), \omega_0(x) := x$.

Sau đây ta xét các bài toán cụ thể minh họa cho một số phương pháp trên.

Bài toán 2.1 (xem [3])**.** Cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{1}{2-x}$. Xác định tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{2\} \to\ \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(\omega(x)) = 2f(x) - 1,\ \ \forall x \in\ \mathbb{R}\setminus\{2\}. \tag{2.9}$$

Bài toán 2.2 ([1])**.** Cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{2}{3-x}$. Xác định tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{3\} \to\ \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(\omega(x)) = 2f(x) - 3, \forall x \in\ \mathbb{R}\setminus\{3\}. \tag{2.11}$$

Bài toán 2.3 (xem [1])**.** Cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0, ad - bc \neq 0$ sao cho phương trình $\omega(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to\ \mathbb{R}$ sao cho

$$f(\omega(x)) = 2f(x) - 3,\ \ \forall x \neq -\frac{d}{c}. \tag{2.13}$$

Bài toán 2.4 (xem [1])**.** Cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{-1}{x-2}$. Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{2\} \to\ \mathbb{R}$ sao cho

$$f(\omega(x)) = 2f(x) - 3,\ \ \forall x \in\ \mathbb{R}\setminus\{2\}. \tag{2.14}$$

Bài toán 2.5 (xem [3])**.** Cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{2}{3-x}$. Xác định các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{3\} \to\ \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(\omega(x)) = 3f(x) + 2,\ \ \forall x \in\ \mathbb{R}\setminus\{3\}. \tag{2.15}$$

Bài toán 2.6 (xem [1])**.** Cho $q \in\ \mathbb{R}$ và cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{ax+b}{x-1}, a \neq 1, b = -\dfrac{1}{4}(ax+b)^2$. Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{1\} \to\ \mathbb{R}$ sao cho

$$f(\omega(x)) = -f(x) + q,\ \ \forall x \neq 1. \tag{2.16}$$

Bài toán 2.7 (xem [1])**.** Cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0,\ ad - bc \neq 0$ sao cho phương trình $\omega(x) = x$ có nghiệm kép $x = x_0$. Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{d}{c}\} \to\ \mathbb{R}$ sao cho

$$f(\omega(x)) = -2f(x) + 3,\ \ \forall x \neq \frac{-d}{c}. \tag{2.17}$$

Bài toán 2.8 (xem [1])**.** Cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{2x-5}{x-2}$. Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{2\} \to\ \mathbb{R}$ sao cho

$$f(\omega(x)) + f(x) = 3,\ \ \forall x \neq 2. \tag{2.18}$$

Bài toán 2.9 (xem [3])**.** Cho hàm số $\omega(x) = \dfrac{2}{2-x}$.Xác định các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{2\} \to\ \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(\omega(x)) = 2f(x) + 5, \forall x \in\ \mathbb{R}\setminus\{2\}. \tag{2.19}$$

Bài toán 2.10 (xem [1])**.** Cho hàm số $\omega(x) = -\dfrac{1}{x+1}$. Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{-1,0\} \to\ \mathbb{R}$ sao cho

$$f(\omega(\omega(x)) + f(\omega(x)) + f(x) = 3,\ \ \forall x \neq -1, x \neq 0. \tag{2.22}$$

Bài toán 2.11 (xem [1])**.** Cho hàm số $\omega(x) = -\dfrac{2}{x+1}$. Ký hiệu

$$\begin{aligned}\omega_2(x) &= \omega(\omega(x))\\ \omega_3(x) &= \omega(\omega(\omega(x)))\end{aligned}$$

Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{-1,-3,1\} \to\ \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} f(\omega_3(x)) = f(x) \\ f(\omega_2(x)) + f(\omega(x)) + f(x) = 3,\ \ \forall x \notin \{-1,-3,1\} \end{cases} \tag{2.23}$$

2.2 Phương trình tuyến tính với vế phải là hàm số

Trong mục này ta xét cách giải một số phương trình (2.1) khi vế phải là hàm số xác định .

Bài toán 2.12 (xem [1])**.** Cho các hàm số $h(x),\ \forall x \in\ \mathbb{R}$ và $\omega(x) = \dfrac{2x-5}{x-2}$. Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{2\} \to\ \mathbb{R}$ sao cho

$$f(\omega(x)) = f(x) + h(x),\ \ \forall x \neq 2. \tag{2.25}$$

Bài toán 2.13 (xem [1])**.** Cho hàm số $q(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $\omega(x) = -\dfrac{1}{x+1}$. Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{-1,0\} \to\ \mathbb{R}$ sao cho

$$f(\omega(\omega(x))) + f(\omega(x)) + f(x) = q(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}. \tag{2.27}$$

Bài toán 2.14 (xem [1])**.** Cho hàm số $q(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $\omega(x) = -\dfrac{2}{x+1}$

Ký hiệu $\omega_2(x) = \omega(\omega(x)), \omega_3(x) = \omega(\omega(\omega(x)))$

Tìm tất cả các hàm số $f :\ \mathbb{R} \setminus \{-1, -3, 1\} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} f(\omega_3(x)) = f(x) \\ f(\omega_2(x)) + f(\omega(x)) + f(x) = q(x), \ \ \forall x \notin \{-1, -3, 1\} \end{cases} \tag{2.28}$$

Nhận xét 2.2. Dựa vào các bài tập trên ta nhận thấy một kĩ thuật hay sử dụng để giải các phương trình hàm là tìm một nghiệm riêng của nó. Nghiên cứu các tính chất của nghiệm riêng. Hiển nhiên, nghiệm cần tìm cũng phải có những tính chất ấy. Từ đó ta có được hướng giải phương trình hàm đã cho.

Khi tìm nghiệm riêng nên có một số chú ý sau:

Chú ý 1: (Điều kiện để một hàm số là hàm hằng)

1. $f \equiv C \Leftrightarrow f(x) = f(y), \ \ \forall x, y \in D_f$
2. $f(x) = g(y), \ \ \forall x, y \in D \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) = C \\ g(x) = C, \ (C := const, \ C \in \mathbb{R}), \ \ \forall x \in D \end{cases} \tag{2.29}$$

Phương pháp sử dụng nhận xét này còn được gọi là phương pháp phân ly biến số. Các dạng phương trình $f(x) = f(y)$, $f(x) = g(y)$ còn được gọi là các dạng phương trình có biến số phân ly. Trong bài viết này ta sử dụng kí hiệu $f \equiv C$ thay cho mệnh đề "$f(x) = C, \ \ \forall x \in D_f$".

Chú ý 2: (Điều kiện để một hàm số có đạo hàm là hàm hằng).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, có đạo hàm $f'(x)$ trên $(a; b)$. Khi đó

$$f(x) = C, \ \ \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow f'(x) = 0, \ \ \forall x \in (a, b),$$

trong đó $C = f(x_0)$, với x_0 là một số nào đó thuộc đoạn $[a, b]$.

Chú ý 3: (Điều kiện để một đa thức là hàm hằng)

Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, có bậc không quá $(\leq)n$. Khi đó

1 . Nếu $P(x)$ có nhiều hơn n nghiệm thì $P(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, hay $P \equiv 0$.

2 . Nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ sao cho $P(x+a) = P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ thì $P(x) = C$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hay $P \equiv C$. Sau đây ta xét một số bài toán cụ thể

Bài toán 2.15 (xem [3])**.** Cho a là hằng số thuộc $\mathbb{R}^*$. Tìm các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+a) = f(x) + b,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.30}$$

Bài toán 2.16 (xem [3])**.** Cho $a, b, m \in \mathbb{R}, m \neq 1, am \neq 0$. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+a) = mf(x) + b,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.31}$$

Bài toán 2.17 (xem [3])**.** Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(2x+1) = 3f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.33}$$

2.3 Phương trình dạng cơ bản không thuần nhất với hệ số biến thiên

Cho trước các hàm số $a(x), b(x)$. Xét phương trình dạng

$$f(\omega(x)) = a(x)f(x) + b(x) \tag{2.36}$$

trong đó $\omega_n(x) = x$ với $1 < n \in \mathbb{N}$.

- *Trường hợp 1:* Khi $a(x) = a = const$, phương trình (2.36) trở thành $f(\omega(x)) = af(x) + b(x)$ hay $f(\omega(x)) - af(x) = b(x)$, thì cách giải đã biết ở chương 2, phần 2.

- *Trường hợp 2:* Khi $a(x)$ là hàm số bất biến đối với phép biến đổi $\omega(x)$, tức là $a(\omega(x)) \equiv a(x)$, cách giải tương tự như ở chương 2, phần 2.

- *Trường hợp 3:* Khi $a(x)$ là hàm số liên tục tùy ý. Để ngắn gọn ta viết phương trình (2.36) thành

$$f(\omega) = af + b. \tag{2.37}$$

Ta định nghĩa

$$a_1 := a(\omega(x)); a_2 := a(\omega_2(x)); \cdots ; a_{n-1} := a(\omega_{n-1}(x));$$

$$b_1 := b(\omega(x)); b_2 := b(\omega_2(x)); \cdots ; b_{n-1} := b(\omega_{n-1}(x));$$

Thay x bởi $\omega_{n-1}(x)$ vào phương trìn 2.37 ta được

$$f(x) = a_{n-1}f(\omega_{n-1}) + b_{n-1}$$

Tiếp tục thay x bởi $\omega_{n-2}(x)$ vào phương trình 2.37 ta được

$$f(\omega_{n-1}) = a_{n-2}f(\omega_{n-2}) + b_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f(\omega) = af(x) + b$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_{n-1}[a_{n-2}f(\omega_{n-2}) + b_{n-2}] + b_{n-1}\\
&= a_{n-1}a_{n-2}f(\omega_{n-2}) + a_{n-1}b_{n-2} + b_{n-1}\\
&= a_{n-1}a_{n-2}[a_{n-3}f(\omega_{n-3}) + b_{n-3}] + a_{n-1}b_{n-2} + b_{n-1}\\
&= a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}f(\omega_{n-3}) + a_{n-1}a_{n-2}b_{n-3} + a_{n-1}b_{n-2} + b_{n-1}\\
&\vdots\\
&= (\prod_{j=1}^{n} a_{n-j})f(\omega_x) + \prod_{j=1}^{n} a_{n-j}b_{n-(j+2)} + \prod_{j=1}^{n} a_{n-j}b_{n-(j+1)} + \cdots + b
\end{aligned}$$

Đặt

$$(\prod_{j=1}^{n} a_{n-j})f(\omega_x) = A(x)$$

$$\prod_{j=1}^{n} a_{n-j}b_{n-(j+2)} + \prod_{j=1}^{n} a_{n-j}b_{n-(j+1)} + \cdots + b = B(x)$$

Khi đó 2.36 được viết lại như sau

$$f(x) = A(x)f(x) + B(x) \Leftrightarrow [1 - A(x)]f(x) = B(x) \tag{2.38}$$

\+ Nếu $1 - A(x) \neq 0, \forall x$ thì nghiệm của phương trình (2.38)là $f(x) = \dfrac{B(x)}{1 - A(x)}$ với $A(x), B(x)$ được xác định như trên.

\+ Nếu $1 - A(x) = 0,$ tại$x = x_0$ thì điều kiện cần để phương trình (2.36) có nghiệm là $B(x_0) = 0$.

Bài toán 2.18 (xem [1])**.** Cho các hàm số $a(x)$ và $b(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $\omega(x) = 2 - x$. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$a(x)f(\omega(x)) + f(x) = b(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.39}$$

Bài toán 2.19 (xem [1])**.** Cho các hàm số $a(x)$ và $b(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $\omega(x) = -\dfrac{1}{x}$. Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$a(x)f(\omega(x)) + f(x) = b(x),\ \ \forall x \neq 0. \tag{2.40}$$

Bài toán 2.20 (xem [3])**.** Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$(x-1)f(x) + f\Big(\frac{1}{x}\Big) = x^2 \tag{2.41}$$

với mọi $x \neq 0$

Bài toán 2.21 (xem [3])**.** Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R}\setminus\{0;1\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + (x+1)f\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) = \frac{x^2+1}{x-1}. \tag{2.43}$$

Nhận xét 2.3. Ngoài các cách giải trên đôi khi ta còn bắt gặp dạng bài tập như ví dụ sau:

Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = f\Big(\frac{x}{x-1}\Big). \tag{2.47}$$

Kết quả. Nhận xét rằng hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ là hàm số đối hợp

$$x \mapsto \frac{x}{x-1} \mapsto \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x,\ \forall x \neq 1.$$

Ta thấy ngay hai nghiệm riêng $f(x) = x; f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Nhà toán học người Anh Charles Babbage (1791-1871) đã nghiên cứu mở rộng của bài toán (2.47) và thu được nghiệm tổng quát của phương trình

$$f(x) = f(g(x))$$

trong trường hợp $g(x)$ là hàm đối hợp là

$$f(x) = \tau(x; g(x)),$$

trong đó $\tau(x; g(x))$ là hàm tùy ý đối xứng với $x, g(x)$.

Sau đây thông qua các ví dụ ta xét kĩ thuật giải phương trình hàm bằng sử dụng các tính chất của hàm số liên tục.

Bài toán 2.22 (xem [3]). Tìm $f(x) \in C(\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện

$$2f(2x) = f(x) + x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.48}$$

Bài toán 2.23 (xem [3](Croatia 1996)). Cho $t \in (0; 1)$. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện

$$f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.51}$$

Bài toán 2.24 (xem [3]). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x, \forall x \, \mathbb{R} \tag{2.55}$$

Bài toán 2.25 (xem [3]). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(x) = 1; \\ f(x) + f(y) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}; \\ f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1, \forall x \neq 0 \end{cases} . \tag{2.57}$$

Bài toán 2.26 (xem [3]). Tìm $f(x) \in C(\mathbb{R})$, thỏa mãn điều kiện

$$|f(x+h) - f(x-h)| < h^2, \forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0 \tag{2.58}$$

Chương 3

MỘT SỐ ÁP DỤNG

3.1 Xác định dãy cấp số đặc biệt

Trong phần này sẽ mô tả một số lớp hàm số chuyển đổi các cấp số trong tập số $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$.

3.1.1 Hàm số chuyển đổi từ cấp số cộng

1. *Hàm số chuyển đổi cấp số cộng thành cấp số cộng*

Bổ đề 3.1 (xem [4]). Cho cấp số cộng $\{a_n\}$và hàm số $f:\ \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện $f(\dfrac{x+y}{2}) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2},\ \ \forall x, y > 0$
Khi đó dãy $\{f(a_n)\}$ là một cấp số cộng.

Bài toán 3.1 (xem [4]). Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2},\ \ \forall x, y \in\ \mathbb{R}.$$

2. *Hàm số chuyển đổi cấp số cộng thành cấp số nhân*

Bổ đề 3.2 (xem [4]). Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ và hàm số $f:\ \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \sqrt{f(x)f(y)},\ \ \forall x, y > 0.$$

Khi đó dãy $\{f(a_n)\}$ là một cấp số nhân.

Bài toán 3.2 (xem [4]). Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \sqrt{f(x)f(y)},\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. *Hàm số chuyển đổi cấp số cộng thành cấp số điều hòa*

Bổ đề 3.3 (xem [4]). Cho cấp số cộng $\{u_n\}, u_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ và hàm số $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) = \dfrac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó dãy $\{f(u_n)\}$ là một cấp số điều hòa.

Bài toán 3.3 (xem [4]). Tìm hàm $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)},\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3.1.2 Hàm số chuyển đổi từ cấp số nhân

1. *Hàm số chuyển đổi cấp số nhân thành cấp số cộng*

Bổ đề 3.4 (xem [4]). Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ và hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(\sqrt{xy}) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x, y > 0.$ Khi đó dãy $\{f(a_n)\}$ là một cấp số cộng.

Bài toán 3.4 (xem [4]). Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(\sqrt{xy}) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$

2. *Hàm số chuyển đổi cấp số nhân thành cấp số điều hòa*

Bổ đề 3.5 (xem [4]). Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ và cho hàm số $f:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện: $f(\sqrt{xy}) = \dfrac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}.$

Khi đó dãy $\{f(a_n)\}$ là một cấp số điều hòa.

Bài toán 3.5 (xem [4]). Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

3. *Hàm số chuyển đổi cấp số nhân thành cấp số nhân*

Bổ đề 3.6 (xem [4])**.** Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ và cho hàm số $f:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện $f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
Khi đó dãy số $\{f(a_n)\}$ là một cấp số nhân.

Bài toán 3.6 (xem [4])**.** Tìm hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{3.1}$$

3.1.3 Hàm chuyển đổi từ cấp số điều hòa

1. *Hàm chuyển đổi cấp số điều hòa thành cấp số cộng*

Bổ đề 3.7 (xem [4])**.** Cho cấp số điều hòa $\{u_n\},\ u_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ và hàm số $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{2xy}{x+y}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y, x+y \neq 0.$$

Khi đó dãy $\{f(u_n)\}$ là một cấp số cộng.

Bài toán 3.7 (xem [4])**.** Tìm các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{2xy}{x+y}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y, x+y \neq 0. \tag{3.3}$$

2. *Hàm chuyển đổi cấp số điều hòa thành cấp số nhân*

Bổ đề 3.8 (xem [4])**.** Cho cấp số điều hòa $\{u_n\}, u_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ và hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trong $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{2xy}{x+y}\Big) = \frac{2}{\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(y)}},\ \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y, x+y \neq 0.$$

Khi đó dãy $\{f(u_n)\}$ là một cấp số điều hòa.

Bài toán 3.8 (xem [4])**.** Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trong $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\Big(\frac{2xy}{x+y}\Big) = \frac{2}{\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(y)}},\ \forall x, y \in \mathbb{R}, x, y, x+y \neq 0. \tag{3.4}$$

3.2 Xác định một số dãy số phân tuyến tính

Bài toán 3.9 (xem[3])**.** Cho $a > 2$ và hàm số $a(n):\ \mathbb{N} \Rightarrow\ \mathbb{R}$ xác định như sau

$$a(0) = 1; a(1) = a;\ a(n+1) = \Big(\frac{a^2(n)}{a^2(n-1)} - 2\Big)a(n),\ n \in\ \mathbb{N}^*.$$

Với $k \in\ \mathbb{N}^*$, đặt

$$f(k) = \frac{1}{a(0)} + \frac{1}{a(1)} + \cdots + \frac{1}{a(k)}.$$

Chứng minh rằng

$$\underline{k \in\ \mathbb{N}^*} \sup f(k) = \frac{1}{2}(2 + a - \sqrt{a^2 - 4}).$$

3.3 Một số dạng toán khác

Bài toán 3.10 (xem[3])**.** Tìm tất cả các hàm số $f:\ \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

i) $f(-x) = -f(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$,

ii) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$,

iii) $f\Big(\dfrac{1}{x}\Big) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ với mọi $x \neq 0$.

Bài toán 3.11 (xem[3])**.** Cho f là hàm số không giảm xác định trên đoạn [0,1], thỏa mãn đồng thời các điều kiện

1) $f(0) = 0$;

2) $f(1-x) = 1 - f(x), \forall x \in [0,1]$;

3) $f\Big(\dfrac{x}{3}\Big) = \dfrac{f(x)}{2}, \forall x \in [0,1]$.

Hãy tính $f\Big(\dfrac{1}{13}\Big), f\Big(\dfrac{1}{7}\Big)$.

Trong các bài toán phương trình hàm trên tập số nguyên, các mối liên hệ dạng bất đẳng thức giữa các số cũng có thể là chìa khóa để tìm được giá trị của hàm số tại một điểm.

Bài toán 3.12 (xem[3])**.** Cho hàm số $f:\ \mathbb{N}^* \to\ \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i) $f(2) = 4$,

ii) $f(mn) = f(m)f(n)$ với mọi m, n thuộc $\mathbb{N}^*$,

iii) $f(m) > f(n)$ với mọi $m > n$.

Hãy tìm $f(3)$?

Bài toán 3.13 (xem[7](Romannian Competitions 1998))**.** Tìm tất cả các hàm đơn điệu $f:\ \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n,\ \ \forall x, y \in\ \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

trong đó n là một số nguyên dương cố định.

Bài toán 3.14 (xem [7])**.** (Iranian Competitions-1999) Giả sử $f:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm giảm ngặt thỏa mãn

$$f(x+y)+f(f(x)+f(y)) = f(f(x+f(y))+f(y+f(x))),\ \ \forall x, y \in\ \mathbb{R}^+. \tag{3.10}$$

Bài toán 3.15 (xem[7])**.** Tìm tất cả các hàm $f:\ \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}$ với thuộc tính chẳng hạn $n \geq 1$,

$$f^n(x) = -x,\ \ \forall x \in\ \mathbb{R}.$$

(ở đây f^n có nghĩa là sự hợp thành n lần của f với bản thân nó).

Bài toán 3.16 (xem[7](AMM-1984))**.** Cho α là một số thực khác 0 cố định. Tìm tất cả các hàm liên tục $f:\ \mathbb{R} \to\ \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2x - \frac{f(x)}{\alpha}) = \alpha x,\ \ \forall x \in\ \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Bài toán 3.17 (xem[3])**.** Tìm $f(x) \in F(\ \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(x^2 + f(y)) = y + f^2(x),\ \ \forall x \in\ \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Bài toán 3.18 (xem[3])**.** Tìm tất cả các hàm số $f(x) : (-1; +\infty) \to (-1; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

1. $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + y(f(x)),\ \ \forall x, y \in (-1; +\infty)$ (*)

2. $\dfrac{f(x)}{x}$ là hàm số tăng ngặt trong mỗi khoảng: $(-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

KẾT LUẬN

Các kết quả chính của luận văn *"Phương trình hàm sinh bởi nhóm cyclic"* đó là tập trung nghiên cứu và trình bày một số vấn đề :

Trình bày theo hướng hệ thống các đặc trưng hàm số và các tính chất cơ bản của phép biến đổi phân tuyến tính, điều kiện đối hợp bậc n của nó.

Trình bày cách giải các dạng phương trình hàm với đối số biến đổi dạng cyclic với hệ số hằng và hệ số biến thiên . Vận dụng nó để giải quyết một số bài toán liên quan.

Tiếp theo, xét một số áp dụng trong đại số và giải tích về dãy số.

Tác giả mong muốn luận văn sẽ phục vụ thiết thực cho việc giảng dạy phương trình hàm trong nhà trường hiện nay cũng như trong tương lai.