

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu

Phản biện 1: PGS. TS. Nguyễn Gia Định

Phản biện 2: TS. Hoàng Quang Tuyền

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn
tốt nghiệp thạc sĩ Toán học họp tại Đại học Đà Nẵng
vào ngày 29 tháng 5 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG**

NGUYỄN THỊ QUỲNH

**PHƯƠNG TRÌNH HÀM
VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM
TRONG ĐA THỨC**

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2011

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Đa thức là một chuyên đề cơ bản của đại số. Đa thức có vị trí rất quan trọng vì nó không những là một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của Đại số mà còn là một công cụ đắc lực của Giải tích trong Lý thuyết xấp xỉ, Lý thuyết biểu diễn, Lý thuyết nội suy,... Các kì thi học sinh giỏi toán quốc gia và Olympic toán khu vực và quốc tế thì các bài toán về đa thức cũng thường được đề cập đến và được xem như những bài toán khó và rất khó của bậc phổ thông.

Chúng ta đã làm quen với những phương trình đại số một hay nhiều biến số. Giải phương trình hàm cũng giống như giải phương trình đại số là đi tìm ẩn số, tuy nhiên ẩn ở đây là một hàm số. Việc giải các bài toán này cần nắm vững các tính chất và các đặc trưng cơ bản của đa thức.

2. Mục đích nghiên cứu

Trình bày phương pháp giải một số dạng phương trình hàm, bất phương trình hàm mà nghiệm là đa thức với hệ số thực.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Trên cơ sở nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS - TSKH Nguyễn Văn Mậu và các sách chuyên đề về đa thức, phương trình hàm, các bài toán nội suy, các bài báo toán học viết về đa thức.

4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu lý luận: đọc tài liệu, sách tham khảo, sách chuyên khảo, tạp chí toán học về các bài toán phương trình

hàm, bất phương trình hàm.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Giải một lớp các phương trình hàm, bất phương trình hàm có ẩn là đa thức. Đề tài đóng góp thiết thực cho việc dạy và học đa thức, phương trình, bất phương trình trong trường THPT.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn gồm 3 chương.

Chương 1. Trình bày tóm tắt các khái niệm, một số định lý dùng trong chương 2, chương 3.

Chương 2. Khảo sát một số dạng phương trình hàm có nghiệm là đa thức có dạng xác định.

Chương 3. Trình bày phương pháp giải bất phương trình hàm với cặp biến tự do. Xác định đa thức theo các đặc trưng cơ bản của chúng.

CHƯƠNG 1. ĐA THỨC VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Trong chương này ta nhắc lại các kiến thức cơ bản có liên quan đến đa thức: các định nghĩa, tính chất, phép tính, nghiệm của đa thức và một số bài toán được trích dẫn.

1.1. Định nghĩa và các tính chất

Định nghĩa 1.1 Cho vành giao hoán $\mathcal{A}$ có đơn vị. Đa thức (trên $\mathcal{A}$) ẩn số x bậc n là tổng hình thức có dạng

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

Trong đó $a_i \in \mathcal{A}, \forall i = \overline{1, n}$ gọi là các hệ số, n gọi là bậc của đa thức, a_n gọi là hệ số bậc cao nhất, a_0 gọi là hệ số tự do của đa thức $P_n(x)$.

Nếu $P(x) = a_0, a_0 \neq 0$ thì ta định nghĩa bậc của đa thức $P(x)$ bằng 0.

Nếu $P(x) = 0$ thì ta định nghĩa bậc của đa thức $P(x)$ bằng $-\infty$ và gọi $P(x)$ là đa thức 0.

Tập hợp tất cả các đa thức với hệ số thuộc vành $\mathcal{A}$ được ký hiệu là $\mathcal{A}[x]$.

Khi $\mathcal{A}$ là một trường thì vành đa thức $\mathcal{A}[x]$ là một vành giao hoán có đơn vị. Ta thường xét các vành đa thức $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

Trong luận văn này ta thường xét các đa thức với hệ số thuộc vành $\mathbb{R}[x]$ và $\mathbb{C}[x]$.

Định lý 1.1 Giả sử $\mathcal{A}$ là một trường, $f(x)$ và $g(x) \neq 0$ là hai đa thức của vành $\mathcal{A}[x]$. Khi đó, luôn tồn tại hai đa thức duy

nhất $q(x)$ và $r(x)$ thuộc $\mathcal{A}[x]$ sao cho $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ với bậc của $r(x)$ nhỏ thua bậc của $g(x)$.

Nếu $r(x) = 0$ ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Định lý 1.2 Giả sử $\mathcal{A}$ là một trường, $a \in \mathcal{A}$, $f(x) \in \mathcal{A}[x]$. Số dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x - a$ chính là $f(a)$.

Định lý 1.3 Số a là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho đa thức $(x - a)$. Khi $\mathcal{A}$ là một trường, $a \in \mathcal{A}$, $f(x) \in \mathcal{A}[x]$ và m là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1. Khi đó a là một nghiệm bội cấp m của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x - a)^{m+1}$. Trong trường hợp $m = 1$ thì ta gọi a là một nghiệm đơn còn khi $m = 2$ thì ta gọi a là nghiệm kép. Số nghiệm của một đa thức là tổng số nghiệm của đa thức đó kể cả bội của các nghiệm (nếu có). Vì vậy, người ta coi một đa thức có một nghiệm bội cấp m như một đa thức có m nghiệm trùng nhau.

Định lý 1.4 Mỗi đa thức hệ số thực bậc $n \in \mathbb{N}^*$ đều có không quá n nghiệm thực.

Hệ quả 1.1 Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không.

Hệ quả 1.2 Đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n mà nhận cùng một giá trị tại $n + 1$ điểm thì đa thức đó là đa thức hằng.

Hệ quả 1.3 Hai đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n mà nhận $n+1$ giá trị bằng nhau tại $n+1$ giá trị khác nhau của đối số thì hai đa thức đó bằng nhau.

Định lý 1.5 Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ bậc n có đúng n nghiệm (tính cả bội của nghiệm).

Định lý 1.6 Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc n có hệ số dẫn đầu $a_n \neq 0$ đều có thể phân tích duy nhất thành nhân tử

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^m (x - d_i) \prod_{k=1}^s (x^2 + b_k x + c_k)$$

với $d_i, b_k, c_k \in \mathbb{R}, 2s + m = n, b_k^2 - 4c_k < 0, m, n \in \mathbb{N}^*$.

Định lý 1.7 (Định lý Bezout) Đa thức $P(x)$ có nghiệm x_0 khi và chỉ khi $P(x)$ chia hết cho $x - x_0$.

Định lý 1.8 (Định lý Rolle) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại điểm $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f'(x_0) = 0$.

1.2. Xấp xỉ hàm số bởi đa thức

Trong số các hàm số một biến thực thì đa thức được coi là hàm số đơn giản nhất về nhiều phương diện, nhất là về mặt tính toán. Bởi vậy, một vấn đề được chúng ta quan tâm nhiều hơn cả là bài toán xấp xỉ một hàm số cho trước bởi một đa thức, đặc biệt là tìm điều kiện (cần và đủ) để một hàm số cho trước có thể xấp xỉ được bởi một đa thức.

Giả sử hàm số $f(x)$ được xấp xỉ bởi một đa thức $P_n(x)$ ($P_n(x)$ là đa thức đại số hoặc đa thức lượng giác hoặc là các đa thức đặc biệt khác). Gọi $R[f, P, n] = |f(x) - P_n(x)|$ là độ lệch của phép xấp xỉ. Ta cần xác định $P(x)$ và n sao cho $R[f, P, n]$ nhỏ nhất trên một đoạn $[a; b]$ cho trước. Khi đó $P_n(x)$ được gọi là đa thức xấp xỉ tốt nhất của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ đó và được ký hiệu là $f(x) \approx P_n(x)$.

Nếu hàm số $f(x)$ khả vi $(n+1)$ lần thì có thể sử dụng công thức khai triển Taylor tại $x = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R(x, n)$$

với phần dư là $R(x, n) = o(x^n)$. Như vậy

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Tuy nhiên lớp các hàm khả vi $(n+1)$ lần dùng để xấp xỉ bởi đa thức là quá hẹp. Song đối với các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ vẫn có các định lý tương tự về xấp xỉ chúng bởi đa thức. Ta sẽ chủ yếu quan tâm đến hai vấn đề sau.

Một là xây dựng các đa thức xấp xỉ thông qua các công thức nội suy và hai là xây dựng công thức tính độ lệch sai đối với các xấp xỉ đó.

1.3. Phép tính trên đa thức

Bài toán 1.1 Xét $f : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$f(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1 f(P_1) + \alpha_2 f(P_2), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x], \quad (1.1)$$

$$f(P_1 P_2) = f(P_1) P_2 \left(\frac{1}{2} \right) + P_1 \left(\frac{1}{2} \right) f(P_2), \forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]. \quad (1.2)$$

Chứng minh rằng $\exists C \in \mathbb{R}$ sao cho $\forall P \in \mathbb{R}[x]$ ta luôn có

$$f(P) = C P' \left(\frac{1}{2} \right).$$

Giải. Với $f(x) \equiv C$ thì theo giả thiết của bài toán ta có

$$f(x^2) = f(x) \frac{1}{2} + f(x) \frac{1}{2} = C,$$

$$f(x^3) = f(x^2) \frac{1}{2} + f(x) \frac{1}{4} = \frac{3}{2^2} C.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học và sử dụng giả thiết (1.2) ta dễ dàng chứng minh được

$$f(x^k) = \frac{k}{2^{k-1}} C, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Với mọi $P \in \mathbb{R}[x]$ dạng

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

theo điều kiện (1.1) của bài toán ta được:

$$\begin{aligned} f(P) &= f \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^n a_k f(x^k) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{k}{2^{k-1}} C \\ &= C \sum_{k=0}^n k a_k \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = C P' \left(\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

đó chính là điều phải chứng minh.

Chương 2. PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRONG ĐA THỨC

2.1. Một số dạng hàm số cần tìm

2.1.1. Dạng hàm số cần tìm $f(x) \equiv C$

Bài toán 2.2 Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right), \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Từ giả thiết ta có f là hàm số chẵn.

Cho $x_1 \geq 0$, ta xét hai trường hợp:

Với $0 \leq x_1 < \frac{1}{2}$ ta xét dãy số $\{x_n\}$ định bởi $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}, \forall n \geq 1$.

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $0 \leq x_n < \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$ và $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + \frac{1}{4} = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 > 0, \forall n \geq 1$, nên $\{x_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên nên có giới hạn.

Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$ thì $\alpha = \alpha^2 + \frac{1}{4} \iff \alpha = \frac{1}{2}$.

Hơn nữa, do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Mà $f(x_{n+1}) = f\left(x_n^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x_n), \forall n \geq 1$ nên $f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Do đó

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right), \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right). \quad (2.1)$$

Với $x_1 > \frac{1}{2}$ ta xét dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_n = x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n > \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$ và $x_n - x_{n+1} = x_{n+1}^2 + \frac{1}{4} - x_{n+1} = \left(x_{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 > 0, \forall n \geq 1$.

Nên $\{x_n\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn.

Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha \Rightarrow \alpha = \alpha^2 + \frac{1}{4} \iff \alpha = \frac{1}{2}$.

Hơn nữa, do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Mà $f(x_{n+1}) = f\left(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x_n), \forall n \geq 1$, nên $f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Do đó

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right), \forall x > \frac{1}{2}. \quad (2.2)$$

Từ (2.1) và (2.2), ta suy ra $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right), \forall x \geq 0$ hay $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$ (vì f là hàm số chẵn). Vậy $f(x) = c = \text{const}, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.1.2. *Dạng hàm số cần tìm có dạng $f(x) = ax + b$*

Bài toán 2.3 Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(30.f(y) + 4x) = 19x + 75y + 2010, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Giải. Ta chứng f là một đơn ánh:

Thật vậy, xét $f(x) = f(y)$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tức là $f(30.f(y) + 4x) = f(30.f(x) + 4x) \iff 19x + 75y + 2010 = 19x + 75x + 2010$. Suy ra $x = y$. Do đó f là một đơn ánh.

Cho $x = 0, y = 0$ ta được $f(30.f(0)) = 2010$.

Với $x = -\frac{75y}{19}$ ta thu được $f\left(30f(y) - \frac{4.75y}{19}\right) = 2010 = f(30f(0))$. Vì f đơn ánh nên $30f(y) - \frac{4.75}{19}y = 30f(0)$. Hay là $f(y) = f(0) + \frac{4.75}{19.30}y$.

Mặt khác, cho $y = 0, x = -\frac{30f(0)}{4}$ ta được

$$f(0) = \frac{-19.30f(0)}{4} + 2010. \text{ Suy ra } f(0) = \frac{8040}{574} = \frac{4020}{287}.$$

$$\text{Vậy } f(y) = \frac{40}{19}y + \frac{4020}{287}.$$

Thử lại ta thấy $f(x) = \frac{10}{19}x + \frac{4020}{287}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2.1.3. Dạng hàm số cần tìm có dạng $f(x) \equiv P(x)$ với $P(x)$ là đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 2

Bài toán 2.4 Cho k là số nguyên dương. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$(x - 2010)^k \cdot P(x) = (x - 2011)^k \cdot P(x + 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Giả sử đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện bài toán

Từ giả thiết ta thấy $x = 2011$ là một nghiệm bội của $P(x)$ với bậc lớn hơn hoặc bằng k .

Đặt $P(x) = (x - 2011)^k \cdot Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Thay $P(x)$ vào điều kiện đề bài ta được

$(x - 2010)^k \cdot (x - 2011)^k \cdot Q(x) = (x - 2011)^k (x - 2010)^k \cdot Q(x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $Q(x) = Q(x + 1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2010, 2011\}$. Do đó $Q(x) = c = \text{const}, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $P(x) = c(x - 2011)^k, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy đa thức $P(x) = c(x - 2011)^k$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

2.1.4. Dạng hàm số cần tìm $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 3, $Q(x)$ có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2

Bài toán 2.5 Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hai điều kiện

$$f(2010) = 2009, \quad (2.4)$$

$$f(x) \cdot f_4(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

Trong đó, $f_n(x) = f(f \dots (f(x))), n$ lần f . Hãy tìm $f(2008)$.

Giải. Đặt $D_f = f(R)$ thì $\forall x \in D_f$ ta có $xf_3(x) = 1$. Từ (2.4) cho ta biết được $2009 \in D_f$.

Trong (2.5) lấy $x = 2010$ thì $f_4(2010) = \frac{1}{2009}$ hay $\frac{1}{2009} \in D_f$. Mặt khác, f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $D = \left[\frac{1}{2009}; 2009 \right] \subset D_f$.

Do đó $f_3(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D$. Suy ra f là đơn ánh trên D .

Hơn nữa, f liên tục trên D nên f đơn điệu giảm trên D .

Bây giờ giả sử tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) > \frac{1}{x_0}$.

Sử dụng tính chất đơn điệu giảm của hàm f , ta có

$$f(x_0) > \frac{1}{x_0} \Rightarrow f_2(x_0) < f\left(\frac{1}{x_0}\right). \quad (2.6)$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{x_0} = f_3(x_0) > f_2\left(\frac{1}{x_0}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x_0}\right) < f_3\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0 \quad (2.7)$$

Từ (2.6) và (2.7) ta được $x_0 > f_2(x_0)$ hay $f(x_0) < f_3(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

Mâu thuẫn với điều ta giả sử $f(x_0) > \frac{1}{x_0}$.

Chứng minh tương tự cũng không tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) < \frac{1}{x_0}$. Vậy $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in D$.

Hiển nhiên rằng $2008 \in D$ nên $f(2008) = \frac{1}{2008}$.

2.1.5. *Dạng hàm số cần tìm* $f(x) = p.a^{\alpha x + \beta} + q.b^{\gamma x + \delta}$

Bài toán 2.6 Tìm hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn cả hai điều kiện sau: đây:

$$f(x) \geq e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

$$f(x+y) \geq f(x).f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Giải. Ta có $f(x) \geq e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\ln f(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$. Mặt khác, $f(x+y) \geq f(x).f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ nên $\ln f(x+y) \geq \ln f(x) + \ln f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Đặt $h(x) = \ln f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$h(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

$$h(x+y) \geq h(x) + h(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Từ (2.10) suy ra $h(0) \geq 0$ và từ (2.11) suy ra

$$h(0) \geq 2h(0). \text{ Do đó } h(0) = 0 \quad (2.12)$$

Trong bất đẳng thức (2.10) thay x bởi $-x$ ta được

$$h(-x) \geq -x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Từ (2.10) và (2.13) ta suy ra

$$h(x) + h(-x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Thay x bởi $-x$ vào (2.11) ta được

$$0 = h(0) \geq h(x) + h(-x), \forall x \in \mathbb{R} \text{ hay } h(x) + h(-x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Từ (2.14) và (2.15) ta suy ra

$$h(x) + h(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Từ (2.10), (2.13) và (2.16) ta suy ra được $h(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hay $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

2.2. Đa thức xác định bởi phép biến đổi đối số

2.2.1. Một số bài toán xác định đa thức đơn giản

Bài toán 2.7 Cho $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện

$$xP(x-a) = (x-b)P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Giải. Khi $a \neq 0, b = 0$ ta được $P(x-a) = P(x)$, tức là $P(x)$ là đa thức hằng.

Khi $a \neq 0, b \neq 0$, ta xét các trường hợp sau:

Nếu $\frac{b}{a} \notin \mathbb{N}$ thì $x = b-a, x = b-2a, \dots, x = b-na$ đều là nghiệm của đa thức. Vậy $P(x)$ có vô số nghiệm nên $P(x) \equiv 0$.

Nếu $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$ thì $P(x)$ có các nghiệm $x = a, x = 2a, \dots, x = (n-1)a$. Do vậy

$$P(x) = (x-a)(x-2a) \cdots (x-(n-1)a)Q(x).$$

Thay vào (2.17) ta được $Q(x-a) = Q(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó $Q(x) = c = \text{const}$. Vậy trong trường hợp này, ta thu được

$$P(x) = c(x-a)(x-2a) \cdots (x-(n-1)a), \quad c \in \mathbb{R}.$$

2.2.2. Phép biến đổi vi phân - hàm

Bài toán 2.8 Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn điều kiện sau:

$$(1-x^2)[P'(x)]^2 = n^2[1-P^2(x)], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ($a_n \neq 0$). Từ các đặc trưng của hàm $\cos t$ ta thấy hai đa thức

$$P(x) = \pm \cos(n \arccos x)$$

thỏa mãn điều kiện bài ra. Ta chứng minh rằng ngoài ra không còn nghiệm nào khác nữa. Thật vậy, thay $x = 1$ vào điều kiện đề bài ta được $P^2(1) = 1$. Mặt khác, $[(1-x^2)(P'(x))^2]' = n^2 [1-P^2(x)]'$ hay

$$P'(x) [n^2 P(x) - xP'(x) + (1-x^2)P''(x)] = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì đa thức $P'(x)$ chỉ có thể có hữu hạn nghiệm nên suy ra

$$n^2 P(x) - xP'(x) + (1-x^2)P''(x) \equiv 0.$$

So sánh các hệ số trong đẳng thức trên, ta được $a_{n-1} = 0$ và

$$k(k-2n)a_{n-k} = (n-k+2)(n-k+1)a_{n-k+2}.$$

Do vậy, theo công thức truy hồi ta được

$$a_{n-1} = a_{n-3} = a_{n-5} = \dots = 0.$$

Các hệ số $a_{n-2}, a_{n-4}, \dots$ được xác định một cách duy nhất theo a_n . Mà $P(1) = \pm 1$ nên chỉ có hai giá trị ứng với a_n .

2.2.3. Phương trình dạng $P(f)P(g) = P(h)$

Bài toán tổng quát. Giả sử $f(x), g(x)$ và $h(x)$ là các đa thức thuộc $\mathbb{R}[x]$ đã cho thỏa mãn điều kiện $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thuộc $\mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P(f(x))P(g(x)) = P(h(x)) \quad (2.18)$$

với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Nghiệm của phương trình hàm (2.18) có nhiều tính chất đặc biệt giúp chúng ta có thể xây dựng được tất cả các nghiệm của nó từ các nghiệm bậc nhỏ.

Tính chất 2.1 Nếu P, Q là nghiệm của (2.18) thì $P.Q$ cũng là nghiệm của (2.18).

Hệ quả 2.4 Nếu $P(x)$ là nghiệm của (2.18) thì $P^n(x)$ cũng là nghiệm của (2.18).

Trong khá nhiều trường hợp, hệ quả 2.4 cho phép chúng ta mô tả hết các nghiệm của (2.18). Để làm điều này, ta có định lý quan trọng sau đây:

Định lý 2.9 Nếu f, g, h là các đa thức với hệ số thực thỏa mãn điều kiện $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$ và thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

1. $\deg(f) \neq \deg(g)$.
2. $\deg(f) = \deg(g)$ và $f^* + g^* \neq 0$, trong đó f^*, g^* là hệ số cao nhất của các đa thức f và g tương ứng.

Khi đó với mọi số nguyên dương n tồn tại nhiều nhất một đa thức $P(x)$ có bậc n và thỏa mãn phương trình (2.18).

Áp dụng định lý 2.9 và hệ quả 2.4, ta thấy rằng nếu $P_0(x)$ là một đa thức bậc nhất thỏa mãn phương trình (2.18) với f, g, h

là các đa thức thỏa mãn điều kiện của định lý 2.9 thì tất cả các nghiệm của (2.18) sẽ có dạng:

$$P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 1, P(x) \equiv (P_0(x))^n$$

2.2.4. *Phương trình dạng* $P(f)P(g) = P(h) + Q$

Bây giờ chúng ta xét đến phương trình dạng

$$P(f)P(g) = P(h) + Q \quad (2.19)$$

trong đó f, g, h, Q là các đa thức đã cho, $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$.

Với phương trình (2.19), nếu Q không đồng nhất bằng 0 thì ta sẽ không còn tính chất như tính chất 2.1 và hệ quả 2.4. Vì thế, việc xây dựng nghiệm trở nên khó khăn hơn. Đây chính là khác biệt cơ bản của (2.19) với dạng (2.18). Tuy nhiên, ta có thể chứng minh được định lý duy nhất nghiệm, được phát biểu như sau:

Định lý 2.10 Cho f, g, h là các đa thức không hằng thỏa mãn điều kiện $\deg(f) + \deg(g) = \deg(h)$, Q là một đa thức cho trước, ngoài ra $\deg(f) \neq \deg(g)$ hoặc $\deg(f) = \deg(g)$ và $f^* + g^* \neq 0$. Khi đó, với mỗi số nguyên dương n và số thực a , tồn tại nhiều nhất một đa thức P thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$\deg(P) = n$$

$$P^* = a$$

$$P(f)P(g) = P(h) + Q$$

2.3. một số bài toán tổng hợp

Bài toán 2.9 Tìm mọi đa thức $P(x) \neq 0$, thỏa mãn điều kiện:

$$xP(x-1) = (x-3)P(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Giải. Giả sử $P(x)$ là đa thức thỏa mãn điều kiện bài toán 2.9. Ta thay $x = 0, x = 1, x = 2$ vào đẳng thức (2.20) ta được $-3P(0) = 0, P(0) = -2P(1), 2P(1) = -P(2)$ hay $P(0) = 0, P(1) = 0, P(2) = 0$. Do đó $P(x)$ nhận $x = 0; x = 1; x = 2$ là nghiệm của $P(x)$. Theo định lí Bezout thì $P(x)$ có dạng $P(x) = x(x-1)(x-2)Q(x)$. Với $Q(x)$ là đa thức nào đó.

Từ đó thay $P(x)$ vào đẳng thức (2.20) ta được

$$x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x-1) = (x-3)x(x-1)(x-2)Q(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow Q(x-1) = Q(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

Hệ thức (2.21) chứng tỏ rằng $Q(x)$ là hàm tuần hoàn. $Q(x)$ là đa thức mà lại là hàm tuần hoàn, nên suy ra $Q(x) \equiv C$, với $C = \text{const}$.

Như vậy

$$P(x) = Cx(x-1)(x-2) \quad (2.22)$$

Thử lại, ta thấy $P(x)$ xác định bởi công thức (2.22) thỏa mãn đề bài, đó chính là lớp các đa thức cần tìm.

Nếu cho thêm một điều kiện phụ, chẳng hạn $P(3) = 6$, thì từ công thức (2.22) ta có $P(3) = 6 = C.3.2.1 \Rightarrow C = 1$.

Lúc này chỉ có duy nhất một đa thức $P(x) = x(x-1)(x-2)$ thỏa mãn yêu cầu.

Chương 3.

BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM VÀ XÁC ĐỊNH ĐA THỨC THEO CÁC ĐẶC TRƯNG

3.1. Một số dạng bất phương trình hàm liên quan đến đa thức

3.1.1. Bất phương trình hàm với cặp biến tự do

Trong phần này ta xét một số ví dụ về bất phương trình hàm với cặp biến tự do. Dựa vào một số đặc trưng cơ bản của hàm số, ta khảo sát một số bất phương trình hàm sơ cấp thường gặp trong các đề thi Olympic toán học. Đây là các ví dụ liên quan đến việc xác định lớp hàm số có dạng đa thức trong các ràng buộc dưới dạng hệ bất đẳng thức.

Ví dụ 3.1 Xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$f(x+y) \geq f(x).f(y) \geq 2010^{x+y}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Giải. • Cho $x = y = 0$ ta được $f(0) \geq [f(0)]^2 \geq 1$ hay

$$\begin{cases} f(0) \geq 1 \\ 0 \leq f(0) \leq 1 \end{cases} \quad \text{suy ra } f(0) = 1$$

• Cho $y = -x$ ta được $1 \geq f(x).f(-x) \geq 1$ hay $f(x).f(-x) = 1$.

• Cho $y = 0$ ta được $f(x) \geq 2010^x$. Do đó $f(-x) \geq 2010^{-x}$. Theo chứng minh trên: $f(x).f(-x) = 1$ nên $f(x) = \frac{1}{f(-x)} \leq \frac{1}{2010^{-x}} = 2010^x$. Vì thế $f(x) = 2010^x$. Ngược lại, xét

hàm số $f(x) = 2010^x$ ta thấy nó thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = 2010^x$.

3.1.2. Một số bài toán về bất phương trình hàm liên quan đến đa thức

Bài toán 3.10 Xác định hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(x) \geq 2010x$ và

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Giải. Dễ thấy hàm số $f(x) = 2010x$ là một hàm số thỏa mãn (3.1).

Đặt $g(x) = f(x) - 2010x$ và thay vào (3.1) ta được

$$g(x) \geq 0, \quad (3.2)$$

$$g(x+y) \geq g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

• Thay $x = y = 0$ vào (3.3) ta được $g(0) \leq 0$, kết hợp với (3.2) ta được $g(0) = 0$.

• Thay x bởi $-y$ vào (3.3) ta được $g(0) \geq g(x) + g(-x)$, theo (3.2) ta có $g(x) \geq 0, g(-x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $g(x) = g(-x) = 0$. Do đó, $f(x) = 2010x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, hàm số $f(x) = 2010x$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = 2010x$.

Bài toán 3.11 Cho $P(x)$ là đa thức có hệ số thực và thỏa mãn các điều kiện:

$$0 < 2P^2(xy) \leq P(x)P(y^3) + P(x^3)P(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

$$P(2010) > 0. \quad (3.5)$$

Chúng minh rằng $P(2011) > 0$.

Giải. Giả sử đa thức $P(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Thay y bởi x vào trong (3.4) ta được

$$0 < 2P^2(x^2) \leq 2P(x)P(x^3), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Từ (3.6) suy ra $P(x)$ và $P(x^3)$ cùng dấu với mọi x .

Thay $x = 0$ vào bất đẳng thức (3.4) ta được $0 < 2P^2(0) \leq P(0)P(y^3) + P(0)P(y)$. Hay

$$P(0) [2P(0) - P(y) - P(y^3)] \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Chỉ có một trong 3 khả năng sau xảy ra:

1. Nếu $P(x) < 0$ thì

$$0 > 2P(0) \geq P(y) + P(y^3), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Theo (3.6) thì $P(y)$ và $P(y^3)$ cùng dấu với mọi y , vậy từ (3.8) suy ra

$$P(y) < 0, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Từ (3.9) suy ra vô lí, vì theo (3.5), ta có $P(2010) > 0$.

Vậy trường hợp này không xảy ra.

2. Nếu $P(x) > 0$ thì

$$0 < 2P(0) \leq P(y) + P(y^3), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Hơn nữa, $P(y)$ và $P(y^3)$ cùng dấu nên $P(y) > 0, \forall y \in \mathbb{R}$.

Nói riêng ta có $P(2011) > 0$.

3. Nếu $P(0) = 0$ thì $P(x)$ không phải là đa thức hằng số (do $P(0) = 0, P(2010) > 0$). Mặt khác theo định lí Bezout suy

ra $P(x) = xQ(x)$ với $Q(x)$ là đa thức. Như vậy ắt phải tồn tại số nguyên dương n và đa thức $G(x)$ sao cho $P(x) = x^n G(x)$ với $G(0) \neq 0$.

Theo trên $P(x)$ và $P(x^3)$ cùng dấu $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó x^n và $(x^n)^3$ cũng cùng dấu $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $G(x)$ và $G(x^3)$ cũng cùng dấu $\forall x \in \mathbb{R}$. Lúc này (3.4), (3.5) có dạng

$$0 < 2x^{2n}G^2(xy) \leq x^n G(x)y^{3n}G(y^3) + x^{3n}G(x^3)y^n G(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ và } 2010^n G(2010) > 0.$$

Bằng cách chứng minh như trên suy ra $G(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow G(2011) > 0$.

Ta có $P(2011) = 2011^n G(2011) > 0$ (do $n > 0$ và $G(2011) > 0$).

Tóm lại ta đã chứng minh được $P(2011) > 0$.

3.2. Xác định đa thức theo các đặc trưng của chúng

3.2.1. Xác định đa thức theo các đặc trưng nghiệm

Bài toán 3.12 Xác định đa thức bậc 4 dạng

$$P(x) = x^4 + bx^2 + c, (b, c > 0) \quad (3.11)$$

sao cho phương trình $P(x) = x^2$ không có nghiệm thực còn phương trình

$$P(P(x)) = x^4 \quad (3.12)$$

thì có nghiệm thực.

Giải. Để ý rằng $P(x) > 0$ và $P(-x) = P(x), \forall x \in \mathbb{R}$ và $Q(x) = P(P(x))$ cũng có tính chất $Q(-x) = Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta chỉ cần xét $x \geq 0$. Theo giả thiết thì phương trình $P(x) = x^2$ vô nghiệm

và vì

$$P(x) - x^2 = x^4 + (b-1)x^2 + c$$

nên $P(x) > x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $P(P(x)) > [P(x)]^2 > x^4$.

Vậy phương trình (1) vô nghiệm. Từ đó suy ra không tồn tại đa thức dạng (3.11) thỏa mãn điều kiện đề bài.

3.2.2. *Xác định đa thức theo các đặc trưng nội suy*

Bài toán 3.13 Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ mà $f(2011) = 2012$ và $f(2009) = 2009$.

Giải. Giả sử $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, a_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Khi đó ta có $f(2011) - f(2009) = a_n(2011^n - 2009^n) + a_{n-1}(2011^{n-1} - 2009^{n-1}) + \dots + a_1(2011 - 2009)$ chia hết cho 2. Mặt khác, $f(2011) - f(2009) = 2012 - 2009 = 3$ không chia hết cho 2. Vậy không tồn tại đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

3.2.3. *Xác định đa thức theo các đặc trưng số học*

Bài toán 3.14 Tồn tại hay không tồn tại một đa thức $P(x)$ bậc 2010 thỏa mãn điều kiện $P(x^2 - 2009) \vdots P(x)$

Giải. Giả sử $P(x) = (x+a)^{2010}$. Khi đó

$$\begin{aligned} P(x^2 - 2009) &= (x^2 + a - 2009)^{2010} \\ &= [(x+a)^2 - 2a(x+a) + a^2 + a - 2009]^{2010}. \end{aligned}$$

$$\text{Nếu ta chọn } a \text{ sao cho } a^2 + a - 2009 = 0 \left(a = \frac{-1 \pm \sqrt{8037}}{2} \right)$$

thì $P(x^2 - 2009) = (x+a)^{2010}(x-a)^{2010}$ chia hết cho $P(x)$. Vậy có hai đa thức bậc 2010 thỏa mãn điều kiện đề bài là $P(x) = (x+a)^{2010}$ với a là nghiệm của phương trình $a^2 + a - 2009 = 0$.

KẾT LUẬN

Luận văn "Phương trình hàm và bất phương trình hàm trong đa thức" đã được tác giả nỗ lực nghiên cứu dưới sự hướng dẫn khoa học, nhiệt tình và nghiêm khắc của GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu.

Một số kết quả đã đạt được:

Chương 1. Luận văn đã trình bày một số kiến thức về khái niệm, định lý về đa thức sẽ được sử dụng trong các chương 2, chương 3 của luận văn.

Chương 2. Luận văn đã trình bày phương pháp giải một số dạng phương trình hàm thường gặp: nghiệm là hằng số, đa thức bậc nhất, một số đa thức có bậc lớn hơn hoặc bằng 2, phân thức hữu tỉ với bậc của tử thức nhỏ hơn hoặc bằng 3 còn bậc của mẫu thức nhỏ hơn hoặc bằng 2, tổng của hàm số mũ và một số bài toán tổng hợp.

Chương 3. Trình bày phương pháp giải bất phương trình hàm với cặp biến tự do, một số dạng bất phương trình hàm có nghiệm là đa thức và xác định được đa thức theo các đặc trưng của nó.

Mỗi phương pháp đều có các ví dụ hoặc bài toán minh họa cho phương pháp giải phương trình hàm, bất phương trình hàm.

Một số tồn tại: phương trình hàm, bất phương trình hàm là một đề tài rất rộng, nhiều dạng bài tập nên luận văn chỉ hệ thống được phương pháp giải một số dạng, chưa tìm được phương pháp giải cho tất cả các dạng bài toán. Đặc biệt thời gian và khả năng có hạn nên luận văn chưa trình bày các lời giải khác nhau của cùng một bài toán. Tác giả sẽ tiếp tục nghiên cứu để giải quyết các tồn tại này của luận văn.