

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG**

ĐÀU THANH PHONG

PHƯƠNG TRÌNH HÀM VỚI MỘT BIẾN SỐ

**Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40**

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **TS. Lê Hoàng Trí**

Phản biện 1: **TS. Nguyễn Ngọc Châu**

Phản biện 2: **PGS. TS. Nguyễn Gia Định**

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 28 tháng 05 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin – Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Phương trình hàm là một lĩnh vực quan trọng của giải tích. Bài toán giải phương trình hàm có lẽ là một trong những bài toán lâu đời nhất của giải tích. Nhu cầu giải phương trình hàm xuất hiện ngay khi bắt đầu có lý thuyết hàm số. Nhiều phương trình hàm xuất phát từ nhu cầu thực tế của Toán học hoặc của các ngành khoa học khác.

Phương trình hàm cũng là một chuyên đề quan trọng thuộc chương trình chuyên toán trong các trường THPT chuyên. Trong các kỳ thi olympic toán quốc gia và quốc tế, olympic toán khu vực, thường xuất hiện các dạng toán khác nhau có liên quan đến phương trình hàm. Tuy nhiên, cho đến nay, học sinh các lớp chuyên, lớp chọn còn biết rất ít các phương pháp chính thống để giải các phương trình hàm. Đặc biệt, hiện nay còn rất ít các cuốn sách về chuyên đề phương trình hàm và ứng dụng của chúng [4].

Các dạng toán về phương trình hàm rất phong phú và đa dạng, bao gồm các loại phương trình tuyến tính và phi tuyến tính, phương trình một ẩn hàm và phương trình nhiều ẩn hàm, phương trình hàm với một biến số và phương trình hàm với hai hoặc nhiều biến số,...

Các bài toán về phương trình hàm nói chung là các bài toán khó, phương trình hàm với một biến nói riêng lại càng khó hơn. Việc giải quyết các phương trình hàm với một biến số phức tạp hơn việc giải quyết các phương trình hàm có nhiều biến số gấp nhiều lần. Do đó, để việc tiếp cận các phương trình hàm một biến được đơn giản hơn, tôi chọn đề tài: **“Phương trình hàm với một biến số”** nhằm nêu ra một số kỹ thuật và phương pháp cơ bản thường được sử dụng để giải quyết các bài toán phương trình hàm một biến số.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Luận văn tập trung nghiên cứu một số phương trình hàm một biến đơn giản và phương pháp để giải quyết chúng.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Đối tượng nghiên cứu của luận văn là phương trình hàm một biến số.

Phạm vi nghiên cứu của luận văn là một số phương trình hàm một biến cơ bản cùng với các phương pháp giải thông thường.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Luận văn cơ bản sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết, nghiên cứu các tài liệu liên quan để sưu tầm, chọn lọc, phân loại và nêu phương pháp giải và sáng tác bài toán liên quan.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Luận văn cung cấp một tài liệu cơ bản về lý thuyết phương trình hàm một biến và một số bài tập cơ bản cũng như cách giải quyết, cho ta nhìn nhận nhất quán về các bài toán phương trình hàm một biến số.

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Luận văn gồm phần mở đầu, 3 chương, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1. Lịch sử phát triển phương trình hàm.

Chương 2. Kiến thức cơ bản.

Chương 3. Phương trình hàm với một biến số.

Chương 1 - LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN PHƯƠNG TRÌNH HÀM

1.1. Giới thiệu

Trong đại số ở trường trung học, chúng ta tìm hiểu về phương trình đại số liên quan đến một hoặc nhiều ẩn là các số thực chưa biết. Phương trình hàm cũng giống như phương trình đại số, tuy nhiên ẩn là một hoặc vài hàm số. Bài toán về phương trình hàm xuất hiện khá thường xuyên trong các cuộc thi toán. Vì vậy, luận văn này hi vọng sẽ là một tài liệu hữu ích cho những học sinh, sinh viên muốn giải quyết một số vấn đề liên quan đến phương trình hàm ở bậc phổ thông và đại học. Trong chương này, ta chủ yếu xem xét đôi nét về lịch sử phát triển của phương trình hàm trong sự phát triển chung của Toán học.

1.2. Nicole Oresme

Các nhà toán học đã làm việc với các phương trình hàm từ rất sớm. Ngay từ thế kỉ XIV, nhà toán học Nicole Oresme (1323 - 1382) đã xác định hàm số bậc nhất như một nghiệm của phương trình hàm. Cụ thể, theo ngôn ngữ của toán học hiện đại, ông đã đặt bài toán tìm hàm số $f(x)$ thỏa mãn với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$, đôi một phân biệt, phương trình hàm sau

$$\frac{y-x}{z-y} = \frac{f(y)-f(x)}{f(z)-f(y)} \quad (1.1)$$

Oresme đã tìm được nghiệm $f(x) = ax + b$ (1.2)

với a, b là hằng số thực [4].

1.3. Gregory của Saint-Vincent

Trong vài trăm năm tiếp theo, phương trình hàm đã được biết đến nhiều hơn nhưng không có lý thuyết chung cho những phương trình loại đó. Đáng chú ý trong số đó, nhà toán học Gregory of Saint-Vincent (1584-1667), người đi tiên phong về lý thuyết Logarithm đã xét bài toán tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = \frac{1}{x}; \quad x = 1; \quad x = t; \quad t > 0$$

Ông đã kí hiệu diện tích đó là $f(t)$ và chứng tỏ $f(t)$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x) + f(y) = f(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Ngày nay thì ta biết đó là hàm $f(x) = \log_a x$ với $a > 0, a \neq 1$. Tuy nhiên, việc giải và nghiên cứu nghiệm của phương trình $f(x) + f(y) = f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ thì phải chờ đến gần 200 năm sau, nhờ công của Augustin-Louis Cauchy (1789-1954) [4].

1.4. Augustin-Louis Cauchy

Mặc dù định nghĩa của Nicole Oresme về tuyến tính có thể được hiểu như là một ví dụ đầu tiên về một phương trình hàm, nó không đại diện cho một điểm khởi đầu cho lý thuyết về phương trình hàm. Các chủ đề của phương trình hàm được đánh dấu một cách chính xác hơn từ công việc của Augustin-Louis Cauchy. Một trong những phương trình hàm nổi tiếng mà ta hay gọi là phương trình Cauchy có dạng

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Nghiệm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ của phương trình (1.3) có dạng $f(x) = ax$. Nghiệm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và thỏa mãn thêm một số điều kiện phụ nữa cũng có dạng $f(x) = ax$. Phương trình (1.3) trước đó cũng đã được Carl Friedrich Gauss (1777-1855) và Legendre nghiên cứu khi tìm ra định lý cơ bản của hình học xạ ảnh và khi nghiên cứu định luật Gauss về phân bố xác suất. G. Darboux cũng đã nghiên cứu phương trình (1.3) và chỉ ra rằng chỉ cần $f(x)$ hoặc liên tục tại một điểm, hoặc bị chặn trên (hoặc dưới) trên một khoảng đủ nhỏ thì nghiệm của phương trình (1.3) vẫn là $f(x) = kx$. Sau đó các nhà toán học còn đưa ra nhiều hạn chế nữa, nhưng việc chỉ ra hàm số không liên tục và thỏa điều kiện (1.3) mãi đến năm 1905 mới được thực hiện bởi nhà toán học người Đức Georg Hamel (1877-1954) với việc đưa ra hệ cơ sở Hamel của tập số thực $\mathbb{R}$.

Thật bất ngờ là một trong những phương trình hàm cơ bản lại có liên quan chặt chẽ đến nhị thức Newton [4].

Từ hàng thế kỷ trước Newton, các nhà toán học đã biết đến công thức

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n \quad (1.4)$$

đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$ và với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong đó các tổ hợp C_n^k được xác định từ tam giác Pascal và được tính theo công thức

$$C_n^i = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{i!}. \quad (1.5)$$

1.5. Việc tính toán

Những người đọc biết một số tính toán có thể tự hỏi tại sao phương trình hàm Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ không thể được giải quyết bằng cách sử dụng phép lấy vi phân?

Thay $y = c$, một hằng số, và lấy vi phân đối với x , ta được

$$f'(x+c) = f'(x)$$

với mọi số thực c . Suy ra f' là một hàm hằng và do đó f là một hàm tuyến tính có dạng $f(x) = ax + b$. Đây là một kết quả đúng.

Tuy nhiên, một vấn đề lớn đặt ra là ta phải giả định rằng hàm f có thể lấy vi phân. Mặc dù có rất nhiều người đã sử dụng giả định này như một điều tất nhiên, và ta sẽ chứng minh kết quả này. Cũng có các hàm số mà không có đạo hàm tại một vài điểm, chẳng hạn hàm số $f(x) = |x|$ có đạo hàm tại mọi điểm nhưng không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$. Trong toán cao cấp, không có gì là bất bình thường nếu ta xét các hàm số mà không có đạo hàm tại bất kì giá trị x nào. Một ví dụ điển hình cho điều này là hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{khi } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{khi } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Hàm số này không liên tục tại bất kỳ giá trị x nào. Vì vậy, nó cũng không tồn tại đạo hàm tại bất kỳ giá trị nào của x . Ta thậm chí còn có thể xây dựng được các hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm tại bất kỳ giá trị nào của x .

Điểm có ích của vấn đề này là chúng ta không cần loại bỏ các hàm số mà ta có thể tự động giả định rằng ta có thể lấy vi phân đối với hàm số $f(x)$. Chúng ta có lí do để cho rằng các đạo hàm tồn tại trong phương trình hàm tiếp theo. Tuy nhiên, các giả định như vậy nên được thực hiện ít nhằm loại bỏ chúng nếu chúng không thực sự cần thiết cho việc chứng minh các kết quả.

1.6. Jean d'Alembert

Trong lịch sử, Jean d'Alembert (1717-1783) có thể được là tiền bối của Augustin-Louis Cauchy. Tuy nhiên, trong vấn đề về phương trình hàm, nó có vẻ tự nhiên hơn khi xem xét đóng góp của ông sau Cauchy.

Năm 1769, khi nghiên cứu định luật tổng hợp lực theo quy tắc hình bình hành, ông đã xét phương trình

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y) \quad (1.6)$$

với $0 \leq y \leq x \leq \pi/2$. Phương trình (1.6) là bây giờ được gọi là phương trình d'Alembert. Yêu cầu được đưa ra là tìm tất cả các hàm số g : $\rightarrow$ thỏa mãn phương trình (1.6).

Ở đây, chúng ta gặp phải một khó khăn lớn hơn trong việc phân tích tìm lời giải so với phương trình Cauchy. Phương trình này làm ta liên tưởng đến các tính chất của hàm số lượng giác. Xét các hàm số lượng giác đơn giản ta thấy hàm số $g(x) = \cos(x)$ thỏa mãn nhưng hàm số $g(x) = \sin(x)$ thì lại không thỏa. Câu hỏi đặt ra là liệu có còn các nghiệm khác không? Và người ta đã chỉ ra các nghiệm đó có dạng

$$g(x) = b \cos ax$$

với việc chọn các hằng số a, b phù hợp. Tuy nhiên, thay $x = y = 0$ vào phương trình (1.6) ta được $g(0) = g^2(0)$, suy ra $g(0) = 0$ hoặc $g(0) = 1$ lần lượt tương ứng với trường hợp $b = 0$ và $b = 1$. Với a là một hằng số tùy ý, nếu $g(x)$ là một nghiệm bất kì của phương trình (1.6) thì $g(ax)$ cũng là một nghiệm.

Như vậy, nghiệm ban đầu có thể mở rộng thành

$$g(x) = \cos ax \quad ; \quad g(x) = 0$$

Người ta lại tự hỏi, ngoài các nghiệm trên thì có nghiệm nào khác không? Câu trả lời là có. Năm 1821, Cauchy đã giải được phương trình hàm trên với điều kiện $g(x)$ là hàm liên tục và được nghiệm là

$$g(x) = 0 \quad ; \quad g(x) = \cos ax \quad ; \quad g(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \quad (1.7)$$

1.7. Charles Babbage

Một đặc tính mà cả hai phương trình hàm Cauchy và d'Alembert's có chung là trong phương trình có mặt hai biến, kí hiệu là x và y . Lớp các phương trình hàm chứa một biến số đã được nhà toán học người Anh Charles Babbage (1791-1871) nghiên cứu và đạt được nhiều kết quả to lớn. Năm 1815, trong bản báo cáo trình bày trước Hội Hoàng Gia London (Royal Society of London) Charles Babbage đã xây dựng

và nghiên cứu bài toán xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$F[x, f(x), f(\alpha_1(x)), f(\alpha_2(x)), \dots, f(\alpha_n(x))] = 0 \quad (1.8)$$

trong đó $F, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ là các hàm số cho trước. Charles Babbage đã xét một số trường hợp đặc biệt của các hàm số $F, \alpha_i(x)$. Trường hợp đầu tiên được xét đến là bài toán xác định tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn phương trình

$$f(x) = f[\alpha(x)] \quad (1.9)$$

với $\alpha(x)$ là hàm số đã cho.

Charles Babbage đã chỉ ra rằng đối với một số dạng của hàm số f, α phương trình hàm (1.9) có thể có vô số nghiệm. Ngoài ra, nếu f_0 là một nghiệm riêng của phương trình (1.9) thì tất cả các hàm số có dạng

$$f(x) = \sigma[f_0(x)] \quad (1.10)$$

trong đó σ là hàm số tùy ý, cũng thỏa mãn điều kiện (1.9). Tuy nhiên, đó chưa phải là tất cả các nghiệm của phương trình (1.9).

Chú ý rằng hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số đối hợp khi và chỉ khi $f \equiv f^{-1}$ hay $f(f(x)) = x$ với mọi $x \in D_f$. Ví dụ đơn giản nhất về hàm số đối hợp là $x \mapsto -x$ và $x \mapsto x^{-1}$.

Họ nghiệm tổng quát của phương trình (1.9) trong trường hợp $\alpha(x)$ là hàm đối hợp là $f(x) = \tau[x, \alpha(x)]$

$$(1.12)$$

trong đó $\tau(u, v)$ là hàm số đối xứng đối với u, v tùy ý. (Có nghĩa là $\tau(u, v) = \tau(v, u)$ với mọi $(u, v) \in D_\tau$).

Mở rộng của bài toán này là tìm nghiệm của hai hoặc nhiều hơn hai phương trình hàm cùng lúc, chẳng hạn

$$f(x) = f[\alpha(x)], \quad f(x) = f[\beta(x)] \quad (1.13)$$

trong đó các hàm số $\alpha(x), \beta(x)$ cho trước.

Charles Babbage cũng đã nghiên cứu phương trình hàm đối hợp bậc n , đó là phương trình hàm có dạng

$$F[x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)] = 0 \quad (1.14)$$

trong đó, F là hàm số cho trước, f là hàm số cần tìm, và

$$f^2(x) = f[f(x)], \quad f^3(x) = f[f^2(x)], \dots$$

Trong trường hợp này, F đã biết, ta cần tìm tất cả các hàm số f sao cho phương trình (1.14) thỏa mãn với mọi số thực x . Chẳng hạn, một nghiệm $f(x)$ của phương trình $f^n(x) = x$ là một nghiệm lặp bậc n của hàm số đồng nhất $x \mapsto x$. Trong trường hợp riêng, ta nhận thấy rằng một nghiệm lặp bậc hai của hàm số đồng nhất là một lũy thừa. Babbage chú ý rằng, nếu $\tau(u, v)$ là một hàm số phản đối xứng bất kì của u, v thì bất kì lũy thừa nào của $f(x)$ đều thỏa mãn phương trình $\tau[x, f(x)] = 0$ (1.15)

Sử dụng cách như vậy, Babbage nhận thấy một phương pháp có thể tổng quát cho các trường hợp khác.

Nếu $f(x)$ là một hàm đối hợp thì $g(x) = \phi^{-1}\{f[\phi(x)]\}$ (1.16)

cũng sẽ là hàm đối hợp với bất kì song ánh ϕ nào.

Bài tập 12 trong báo cáo của Babbage yêu cầu giải phương trình

$$f^2(x) = \alpha(x) \quad (1.17)$$

với $\alpha(x)$ là hàm số bất kì cho trước. Giả sử ta tìm được nghiệm của phương trình có dạng $f(x) = \phi^{-1}\{\beta[\phi(x)]\}$

Trong đó β là một hàm số bất kì cho trước mà không phải là hàm đối hợp trừ khi $\alpha(x) = x$ và $\phi(x)$ là một song ánh đã được xác định. Khi đó

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= f^2(x) \\ &= \phi^{-1}\{\beta^2[\phi(x)]\} \end{aligned}$$

Điều này suy ra $\phi(x)$ là một nghiệm của phương trình hàm

$$\phi[\alpha(x)] = \beta^2[\phi(x)] \quad (1.18)$$

Loại phương trình này được gọi là *phương trình liên hợp*.

1.8. Các cuộc thi toán và giải trí toán học

Chủ đề về phương trình hàm cũng thường được tìm thấy trong các cuộc thi toán cũng như trong các câu đố trong giải trí Toán học.

Ví dụ 1.6. (Cuộc thi Putnam lần thứ 4, bài tập B14(i)). Hãy chỉ ra các nghiệm $f(t)$ của phương trình

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 + [f(y)]^2 - 1$$

(x và y là các số thực) sao cho $f''(t) = \pm m^2 f(t)$, với $m \geq 0$ là một hằng số. Ta giả sử rằng đạo hàm cấp hai của hàm số tồn tại và liên tục.

Ví dụ 1.7. (Cuộc thi Putnam lần thứ 7, bài toán A2). Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn phương trình sau với mọi số thực

$$x, y: f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x)f(y). \text{ Chứng minh rằng: } f(x) = [f(1)]^{x^2}$$

Ví dụ 1.8. (Cuộc thi Olympic toán quốc tế năm 1972, câu hỏi số 5).

Cho f, g là hai hàm thực xác định với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, thỏa mãn phương trình $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$ (1.21)

với mọi x, y . Chứng minh rằng, nếu $f \neq 0$ và nếu $|f(x)| \leq 1, \forall x$ thì $|g(y)| \leq 1, \forall y$.

Các phương trình hàm (1.21) và (1.6) là trường hợp đặc biệt của phương trình hàm có dạng tổng quát

$$f(x+y) + f(x-y) = g(x)h(y) \quad (1.22)$$

Những phương trình loại này đã được các nhà toán học áp dụng từ thế kỉ thứ XVIII.

Nhiều phương trình hàm liên quan đến phép lặp căn bậc hai có quan hệ mật thiết đến phép lặp đệ quy. Chẳng hạn ta xét phương trình hàm sau

$$f[f(x)] = x + f(x) \quad (1.24)$$

Bắt đầu với giá trị x bất kì, ta xây dựng dãy số $x, f(x), f[f(x)], \dots$. Đặt f_i là giá trị thứ i của dãy số, ta thấy f_i thỏa mãn phép đệ quy $f_{i+2} = f_i + f_{i+1}$ (1.25)

Đặc biệt, dãy số Fibonacci nổi tiếng

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, \dots$$

thỏa mãn công thức đệ quy trên. Tuy nhiên các dãy số khác thỏa mãn (1.25) có thể chọn bằng cách chỉ cụ thể f_1 và f_2 .

Người ta đã chứng minh được dạng tổng quát nghiệm của (1.25) là

$$f_i = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i \quad (1.26)$$

với các hằng số a, b được chọn ngẫu nhiên để xác định các giá trị ban đầu f_1 và f_2 . Chẳng hạn ta có công thức Binet cho dãy số Fibonacci bằng cách chọn $a = \frac{1}{\sqrt{5}}, b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\text{Con số } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (1.27)$$

được gọi là tỉ số vàng, và ta nhận được như là giới hạn của tỉ lệ của các số hạng liên tiếp của dãy số Fibonacci. Khi $\Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ thì công thức cho f_i có thể được viết là $f_i = a \Phi^i + b(-\Phi)^{-i}$.

Từ (1.26) ta có thể thấy một nghiệm của (1.25), và ngay lập tức ta có $f(x) = \Phi x$ là một nghiệm của phương trình hàm. Tuy nhiên nghiệm này không duy nhất. Một nghiệm khác có dạng $f(x) = -\Phi^{-1}x$. Vấn đề là liệu còn các nghiệm khác nữa hay không?

1.9. Một đóng góp của Ramanujan

Lý thuyết các căn lồng nhau có quan hệ mật thiết với lý thuyết về đệ quy. Do đó sẽ chẳng có gì là bất ngờ khi thấy rằng các bài toán về lý thuyết các căn lồng nhau được nghiên cứu bằng cách sử dụng hệ phương pháp của phương trình hàm. Trong chương này ta sẽ xem một ví dụ nổi tiếng của Ramanujan. Bài toán liên quan đến căn lồng nhau đôi khi cũng xuất hiện trong các tạp chí toán học hay các kì thi toán.

Như cái tên của nó cũng nói lên rằng căn lồng nhau là một biểu thức mà trong đó một căn bậc hai sẽ chứa trong nó một hay nhiều các căn bậc hai khác. Một trong những biểu thức nổi tiếng nhất trong số đó phải kể tới công thức của Fracois Viète

$$\pi = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots \quad (1.31)$$

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} \quad (1.32)$$

Ý tưởng này xuất phát từ Ramannujan, một nhà toán học huyền thoại người Ấn Độ. Năm 1911, Ramanujan đưa ra bài toán tính giá trị của biểu thức

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\dots}}}} \quad (1.33)$$

Bây giờ ta sẽ tổng quát hóa công thức (1.33) thành bài toán hãy tính

$$f(x) = \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{\dots}}} \quad (1.34)$$

Để thấy sau khi bình phương hai vế, ta thu được phương trình hàm

$$[f(x)]^2 = 1 + x f(x+1) \quad (1.35)$$

Kiểm tra được $f(x) = x + 1$ là một nghiệm của phương trình này. Ta không những thu được kết quả của bài toán (1.34) mà còn có thể xây dựng được nhiều công thức khác. Tương tự, từ công thức của Ramanujan

$$x + n + a = \sqrt{ax + (n+a)^2 + x\sqrt{a(x+n) + (n+a)^2 + (x+n\sqrt{\dots})}} \quad (1.36)$$

ta thu được phương trình hàm

$$[f(x)]^2 = ax + (n+a)^2 + x f(x+n)$$

có nghiệm là

$$f(x) = x + n + a \quad [4].$$

Chương 2 - KIẾN THỨC CƠ BẢN

2.1. Các khái niệm cơ bản

2.1.1. Giải phương trình hàm

Giải phương trình hàm là xác định hàm số chưa biết trong phương trình hàm đã cho.

2.1.2. Hàm số chẵn và hàm số lẻ

Hàm số chẵn: Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên M với $M \subset D(f)$ ($D(f)$ là tập xác định của hàm số $f(x)$) nếu:

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow -x \in M \\ f(-x) = f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Hàm số lẻ: Hàm $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên $M, M \subset D(f)$ nếu:

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow -x \in M \\ f(-x) = -f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

2.1.3. Hàm số đồng biến và hàm số nghịch biến

Hàm số đồng biến: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên khoảng (a, b) , nếu với mọi điểm x_1 và x_2 thuộc khoảng (a, b) mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số nghịch biến: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số nghịch biến trên khoảng (a, b) nếu với mọi điểm x_1 và x_2 thuộc khoảng (a, b) mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

2.1.4. Hàm số liên tục

Định nghĩa hàm số liên tục

Giả sử hàm số $y = f(x)$ được xác định trong một lân cận của điểm $x = x_0$. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Nếu đẳng thức trên không xảy ra thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = x_0$.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng đó.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) và liên tục phải tại a , liên tục trái tại b thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$.

Định lý Bolzano – Cauchy thứ nhất

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

2.1.5. Đạo hàm của hàm số

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong lân cận của x_0 . Ta nói hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tồn tại và hữu hạn; Giới hạn này được kí hiệu là $f'(x_0)$ và được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 .

2.1.6. Hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính

Hàm tuần hoàn cộng tính: Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $a (a > 0)$ trên M nếu $M \subset D(f)$, ($D(f)$ là tập hợp xác định của hàm số $f(x)$) và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm a \in M \\ f(x+a) = f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Cho $f(x)$ là hàm tuần hoàn trên M . Khi đó $T (T > 0)$ được gọi là chu kỳ cơ sở của $f(x)$ nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T mà không tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn T .

Hàm phản tuần hoàn cộng tính: Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn chu kỳ $b (b > 0)$ trên $M \subset D(f)$ ($D(f)$ là tập xác định của hàm số $f(x)$) và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow x \pm b \in M \\ f(x+b) = -f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ b trên M mà không là hàm phản tuần hoàn với bất kỳ chu kỳ nào bé hơn b trên M thì b được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm phản tuần hoàn $f(x)$ trên M .

2.1.7. Hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính

Hàm tuần hoàn nhân tính: Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a ($a \notin \{0, 1, -1\}$) trên M nếu $M \subset D(f)$; $D(f)$ là tập xác định của hàm số $f(x)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Hàm phản tuần hoàn nhân tính: Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ a ($a \notin \{0, 1, -1\}$) trên M nếu $M \subset D(f)$ (với $D(f)$ là tập xác định của hàm số $f(x)$) và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = -f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

2.1.8. Đặc trưng hàm của một số hàm số sơ cấp

Trong phần này sẽ đưa ra những đặc trưng hàm của một số hàm số sơ cấp được xét trong chương trình phổ thông. Nhờ các đặc trưng hàm này mà ta có thể dự đoán đáp số của một số bài toán phương trình hàm cũng như có thể sáng tác ra bài tập tương ứng với các đặc trưng đó.

Các hàm số được nói đến trong phần này là những hàm số liên tục trên toàn tập xác định. Nếu hàm số thỏa mãn các đặc trưng hàm đã cho mà không liên tục hoặc được xác định trên các tập rời rạc thì biểu thức hàm có thể hoàn toàn khác.

2.1.9. Một số kĩ thuật cơ bản khi giải bài toán phương trình hàm

Không có những định lí cũng như các thuật toán chung để giải phương trình hàm tương tự như thuật toán giải phương trình đại số bậc hai. Tuy nhiên, ta sẽ đưa ra một vài kĩ thuật cơ bản trong khi giải các bài toán về phương trình hàm.

Kỹ thuật 1. Tìm các nghiệm riêng đơn giản như hàm hằng, hàm bậc nhất, đa thức,... Dựa vào các nghiệm riêng, chúng ta sẽ hiểu biết hơn về hàm cần tìm và có thể có được hướng giải phương trình hàm đã cho

Kỹ thuật 2. Tính các giá trị đặc biệt của $f(x)$ như $f(0)$, $f(\pm 1)$, $f(2)$,.... Đôi khi, nếu $f(0)$ hoặc $f(1)$ không tính được, ta có thể đặt chúng bằng các chữ (tham số).

Kỹ thuật 3. Nghiên cứu các tính chất đặc biệt của hàm cần tìm như đơn ánh, toàn ánh, song ánh, chẵn, lẻ, tuần hoàn, đơn điệu, liên tục, dấu,...

Kỹ thuật 4. Khai thác tính đối xứng trong phương trình hàm đã cho.

Chú ý. Lời giải của bài toán giải phương trình hàm thường được bắt đầu bằng mệnh đề “Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn các yêu cầu bài ra”. Khi tìm được biểu thức của hàm số nghiệm, ta phải kiểm tra vào phương trình đã cho rồi mới được kết luận nghiệm.

2.2. Một số bài toán cơ bản

2.3. Một số phương pháp giải phương trình hàm

2.3.1. Phương pháp thế biến

2.3.2. Phương pháp hệ số bất định

2.3.3. Phương pháp sử dụng tính chất nghiệm của một đa thức

2.3.4. Phương pháp sử dụng sai phân

2.3.5. Phương pháp đối biến

2.3.6. Phương pháp tìm nghiệm riêng

2.3.7. Phương pháp giải bằng cách lập phương trình

2.3.8. Phương pháp chuyển qua giới hạn

Chương 3 - PHƯƠNG TRÌNH HÀM VỚI MỘT BIẾN SỐ

3.1. Giới thiệu

Trong chương này, chúng ta xét các phương trình hàm một biến. Ta đã làm quen các phương trình này trong chương 1, trong phần của Charles Babbage. Chương này ta sẽ nghiên cứu chi tiết hơn về một số bài toán và phương pháp giải đơn giản của loại bài này. Bắt đầu bằng việc xét một kỹ thuật rất hữu ích được gọi là tuyến tính, phương pháp mà Babbage sử dụng cho trường hợp nghiệm kép. Sau đó ta sẽ xem xét một số ví dụ về phương trình liên hợp mà cũng phát sinh từ việc tuyến tính hàm.

3.2. Tuyến tính hóa

Kỹ thuật *tuyến tính hóa* thường được sử dụng để biến một số phương trình hàm phức tạp trở nên đơn giản và dễ giải hơn.

Để tuyến tính hóa một phương trình ta thay một hàm f bởi một hàm F , sao cho

$$\rho(F[\phi(x)]) = f(x) \quad (3.6)$$

Trong đó các hàm số ρ và ϕ được chọn tùy vào sự tuyến tính đối với từng phương trình cụ thể. Tuy nhiên, không phải phương trình nào ta cũng có thể dễ dàng đơn giản bằng kỹ thuật tuyến tính hóa ngay được mà ta cần biến đổi hoặc phải qua vài bước đặt.

3.3. Một số họ phương trình hàm cơ bản

Một trong những phương trình hàm một biến đơn giản nhất là phương trình có dạng $f(x) = f[\alpha(x)]$ (3.17)

với mọi số thực x và $\alpha: \rightarrow$ cho trước, $f(x)$ là hàm cần tìm.

Nếu không có giả thiết f là hàm số liên tục thì ta dễ dàng suy ra họ nghiệm của phương trình trên. Trước hết, ta viết

$$\alpha^1(x) = \alpha(x) \quad \text{và} \quad \alpha^{n+1}(x) = \alpha[\alpha^n(x)] \quad (3.18)$$

với $n = 1, 2, \dots$. Để cho thuận lợi, ta định nghĩa α^0 là hàm số xác định bởi $\alpha^0(x) = x$. Ta gọi dãy số

$$\alpha(x), \alpha^2(x), \alpha^3(x), \dots \quad (3.19)$$

là chu trình của x . Áp dụng liên tiếp đẳng thức (3.17) n lần ta được

$$f(x) = f[\alpha^n(x)] \quad (3.20)$$

khi đó, hàm số f là một hằng số trên chu trình của x .

Ta nói hai số thực x và y tương đương với nhau trong phép lặp của hàm số α nếu tồn tại hai số nguyên $n, m \geq 0$ sao cho

$$\alpha^n(x) = \alpha^m(y)$$

và kí hiệu là $x \sim_\alpha y$. Dễ dàng kiểm tra được $\sim_\alpha$ xác định một quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

Với mọi số thực x , ta xác định tập $A_\alpha(x)$ là tập các số thực y sao cho $y \sim_\alpha x$. Đó là: $A_\alpha(x) = \{y \in \mathbb{R} : y \sim_\alpha x\}$.

Tập $A_\alpha(x)$ là lớp tương đương theo quan hệ tương đương $\sim_\alpha$ và còn thường được gọi là “quỹ đạo” của α . Theo (3.20) ta thấy rằng hàm số f là một hằng số trên mỗi quỹ đạo của α . Như vậy, nghiệm của phương trình hàm (3.17) là $f(x) = g[A_\alpha(x)]$, trong đó g là hàm nhận giá trị thực, xác định trên tập các quỹ đạo.

Nếu f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thì thường phương trình (3.17) có nghiệm là một hằng số $f \equiv C$.

Nhận xét rằng nếu $x_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha^n(x)$ và $\alpha(x)$ là hàm số liên tục thì x_0 là điểm cố định của $\alpha(x)$.

Điều ngược lại không đúng. Sự tồn tại điểm cố định của $\alpha(x)$ chưa chắc dẫn đến sự hội tụ của dãy $\alpha^n(x)$ [4].

Bao đóng của mỗi quỹ đạo $A_\alpha(x)$ của $\alpha(x)$ là tập gồm các số thực $x \in \mathbb{R}$ sao cho tồn tại các dãy (x_n) mà $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Nếu f là hàm liên tục và thỏa mãn phương trình (3.17) thì f không những là một hằng số trên quỹ đạo $A_\alpha(x)$ của mỗi giá trị x mà còn là một hằng số trên bao đóng của mỗi quỹ đạo này. Từ đó suy ra rằng, nếu f là hàm liên tục và thỏa mãn phương trình (3.17) và với mọi

$x, y \in \mathbb{R}$, bao đóng của $A_\alpha(x)$ và $A_\alpha(y)$ có điểm chung thì f là một hằng số với mọi $x \in \mathbb{R}$.

3.4. Một số dạng đặc biệt của phương trình liên hợp

$$\text{Phương trình } f[\alpha(x)] = s f(x) \quad (3.24)$$

được gọi là phương trình Schroder. Trong đó $\alpha(x)$ là hàm đã cho, ta cần tìm các hàm f và số thực $s \neq 1$ thỏa mãn phương trình (3.24).

Một loại phương trình ngược của phương trình Schroder là phương trình có dạng $g(sx) = \alpha[g(x)]$ (3.25)

Phương trình (3.25) được gọi là phương trình Poincaré.

$$\text{Phương trình } f[\alpha(x)] = f(x) + a \quad (3.26)$$

được gọi là phương trình Abel. Số thực $a \neq 0$ cho trước hoặc được xác định cùng với hàm số f .

$$\text{Phương trình } f[\alpha(x)] = [f(x)]^p \quad (3.27)$$

với $p \neq 1$ được gọi là phương trình Bottcher. Với phương trình này ta cần lưu ý hàm $f(x)$ phải không âm.

Một loại phương trình đáng chú ý khác là là phương trình giao hoán có dạng $f[\alpha(x)] = \alpha[f(x)]$ (3.28)

Tất cả các phương trình mà ta xét ở trên là trường hợp đặc biệt của một họ các phương trình mà ta gọi là phương trình liên hợp:

$$f[\alpha(x)] = \beta[f(x)] \quad (3.29)$$

với việc chọn các hàm số α và β phù hợp.

Ví dụ: Khi $\beta(x) = sx$ ta có phương trình Schroder.

Khi $\alpha(x) = sx$ ta có phương trình Poincaré.

Khi $\beta(x) = x + a$ ta có phương trình Abel.

Khi $\beta(x) = x^p$ ta có phương trình Bottcher.

Khi $\alpha = \beta$ ta có phương trình giao hoán.

Không thể giải các phương trình liên hợp một cách tổng quát mà ta sẽ tìm cách giải một vài trường hợp đặc biệt của phương trình loại này.

3.5. Tìm phương pháp giải cho phương trình liên hợp

3.5.1. Thuật toán Koenig tìm nghiệm phương trình Schroder

Trước hết cần chú ý rằng nếu $f(x)$ là một nghiệm bất kì của phương trình Schroder $f[\alpha(x)] = s f(x)$, thì bất kì bội số nào của $f(x)$ cũng là nghiệm.

Nếu chu trình của α biểu diễn xấp xỉ như một dãy hình học thì có thể tìm được nghiệm của phương trình. Chu trình $\alpha^n(x)$ được gọi là một *xấp xỉ hình học* nếu tồn tại một số $s \in (0,1)$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n(x)}{s^n}$ tồn tại, hữu hạn và khác không. Trong trường hợp này, ta nói rằng chu trình có hệ số s .

Trên miền xác định của giá trị x mà chu trình của x là một nghiệm xấp xỉ hình học với hệ số s không phụ thuộc vào x , một nghiệm của phương trình Schroder (3.24) là $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n(x)}{s^n}$

Ta có thể dễ dàng kiểm tra điều này bằng cách thay trực tiếp vào phương trình Schroder. Có thể tổng quát cách giải này.

3.5.2. Thuật toán Lévy giải phương trình Abel

Trường hợp đặc biệt của phương trình Abel khi $a=1$, khi đó ta có

$$f[\alpha(x)] = f(x) + 1$$

Chú ý rằng, nếu $f(x)$ là một nghiệm bất kì của phương trình Abel (3.26) thì $f(x) + c$ cũng là nghiệm với c là một hằng số bất kì.

Nếu hàm số $\alpha(x)$ là một xấp xỉ hình học, khi đó dễ dàng chuyển phương trình Abel thành phương trình Schroder và tìm được nghiệm chính của nó. Hoặc ta có thể thấy rằng, hàm $\alpha(x)$ có thể thay bằng hàm $x \mapsto x + a$. Tuy nhiên, giả sử tồn tại một số x_0 sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}(x_0) - a^n(x_0)}{a^{n+1}(x) - a^n(x)} = 1 \quad (3.34)$$

với mọi x . Khi đó, nếu giới hạn

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n(x_0) - a^n(x)}{a^{n+1}(x) - a^n(x)} \quad (3.35)$$

tồn tại, nó sẽ là 1 nghiệm của phương trình Abel $f[\alpha(x)] = f(x) + 1$.

3.5.3. Một thuật toán giải phương trình Bottcher

Nếu $f(x)$ là một nghiệm bất kì của phương trình Bottcher thì hàm số $[f(x)]^q$ cũng là nghiệm. Phương trình Bottcher có thể là một cách tự nhiên cho việc trình bày một cách có hệ thống một phương trình tuyến tính khi hàm số $\alpha(x)$ xấp xỉ một hàm lũy thừa.

Một nghiệm của phương trình Bottcher được tìm ra nếu giới hạn

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha^n(x)]^{p^{-n}} \quad (3.36)$$

tồn tại. Ta có thể kiểm tra bằng cách thế vào phương trình (3.27).

3.5.4. Phương pháp giải phương trình giao hoán

Dễ thấy rằng hàm số $f_n(x) = \alpha^n(x)$ thỏa mãn phương trình giao hoán

$$f[\alpha(x)] = \alpha[f(x)]$$

với $n = 0, 1, 2, \dots$. Tuy nhiên, có thể có nhiều nghiệm khác nữa. Một trong những cách thường dùng để giải phương trình giao hoán là đưa về phương trình Schroder, Abel hoặc Bottcher.

Nói tóm lại, nếu f là một nghiệm của phương trình liên hợp $f[\alpha(x)] = \beta[f(x)]$ thì ta có thể tìm nghiệm của phương trình giao hoán $f[\alpha(x)] = \alpha[f(x)]$ bằng cách mở rộng hàm β .

3.6. Tổng quát hóa phương trình Abel và phương trình Schroder

Trong phần này ta xem xét trường hợp tổng quát của phương trình Abel và phương trình Schroder, những trường hợp không liên quan đến phương trình liên hợp.

$$\text{Phương trình } f[\alpha(x)] = f(x) + h(x) \quad (3.40)$$

với $h(x)$ là một hàm cho trước, là trường hợp tổng quát của phương trình Abel. Giống như phương trình Abel, ta có thể thêm vào một hằng số bất kì trong bất kì nghiệm nào của phương trình để được một nghiệm khác. Ta có thể kiểm tra được, với mọi x_0 , hàm số

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{h[\alpha^n(x_0)] - h[\alpha^n(x)]\} \quad (3.41)$$

là 1 nghiệm của phương trình này với điều kiện tổng vô hạn trên hội tụ

$$\text{Phương trình } f[\alpha(x)] = g(x) f(x) \quad (3.44)$$

với $g(x)$ là hàm số cho trước, là trường hợp tổng quát của phương trình Schroder. Ta có thể kiểm tra với bất kì x_0 nào,

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{g[\alpha^n(x_0)]}{g[\alpha^n(x)]} \right\} \quad (3.45)$$

là một nghiệm của phương trình với điều kiện tích vô hạn trên hội tụ.

3.7. Các tính chất của các nghiệm lặp

Trong phần này, ta trở lại vấn đề các nghiệm lặp của một hàm số mà Babbage đề cập đến trong chương 1. Ta sẽ nghiên cứu một số tính chất chung của khái niệm các nghiệm lặp và xem làm sao dựa vào phương trình liên hợp của Abel và Schroder có thể tìm ngay được các nghiệm lặp.

Đầu tiên ta điểm sơ lại một số định nghĩa cơ bản. Cho trước hàm số $h(x)$. Bất kì nghiệm $f(x)$ nào của phương trình

$$f[f(x)] = h(x) \quad (3.50)$$

được gọi là nghiệm lặp của hàm số $h(x)$.

Định nghĩa

$$f^1(x) = f(x) \quad \text{và} \quad f^{n+1}(x) = f[f^n(x)] \quad (3.51)$$

với $n \geq 1$. Ta gọi một nghiệm của phương trình

$$f^n(x) = h(x) \quad (3.52)$$

là một nghiệm lặp bậc n của hàm số $h(x)$. Trường hợp $h(x) = x$ với mọi x ta nói phương trình (3.52) là phương trình Babbage. Khi

f là một nghiệm của phương trình Babbage với $n = 2$ thì ta nói f là một lũy thừa.

Nói chung, phương trình hàm (3.52) có thể vô nghiệm, có thể có nghiệm duy nhất hoặc cũng có thể có vô số nghiệm tùy theo dạng của hàm số $h(x)$ cũng như theo tập giá trị của đối số x mà trên đó xác định hàm số $f(x)$ cần tìm.

Định lý 3.8 Cho hàm số liên tục h là một song ánh

1. Giả sử n là số chẵn và tồn tại cặp số thực x, y sao cho $x < y$ nhưng $h(x) > h(y)$ thì không tồn tại nghiệm lặp bậc n liên tục của h .
2. Giả sử n là số lẻ và f là nghiệm lặp bậc n liên tục của h thì h cũng phải liên tục và có cùng tính đơn điệu với f .

Có nhiều cách tìm nghiệm lặp của một hàm số đã cho. Chẳng hạn

1. Nếu $g(x)$ là nghiệm song ánh của phương trình hàm Abel $g[h(x)] = g(x) + 1$ đối với hàm số $h(x)$ đã cho thì hàm số

$$f(x) = g^{-1}\left[g(x) + \frac{1}{n}\right] \quad (3.55)$$

là nghiệm lặp bậc n của $h(x)$.

2. Nếu $g(x)$ là nghiệm song ánh của phương trình hàm Schrodinger $g[h(x)] = s g(x)$, ($s \neq 1$) đối với hàm số $h(x)$ đã cho thì hàm số

$$f(x) = g^{-1}\left[s^{1/n} g(x)\right] \quad (3.56)$$

là nghiệm lặp bậc n của hàm số $h(x)$.

3. Có thể tìm nghiệm lặp bậc n của $h(x)$ bằng cách lấy f hai vế của phương trình $f^n(x) = h(x)$ ta được

$$f[h(x)] = f[f^n(x)] = f^n[f(x)] = h[f(x)] \quad (3.57)$$

Phương trình (3.57) chính là phương trình giao hoán ta đã xét ở trên.

Cách làm như vậy còn có thể áp dụng cho trường hợp hai hay nhiều hàm số khác nhau.

3.8. Phương trình hàm và lý thuyết các căn lồng nhau

Chúng ta quay trở lại vấn đề các căn lồng nhau được đề xuất bởi Rumanujan đã trình bày trong chương 1. Hãy tính

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\dots}}}} \quad (3.62)$$

Ta tổng quát hóa bài này bằng cách tính

$$f(x) = \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{\dots}}} \quad (3.63)$$

Bình phương hai vế, ta thấy $f(x)$ phải thỏa mãn phương trình

$$[f(x)]^2 = 1 + x f(x+1) \quad (3.64)$$

với $f(x) \geq 0$. Cho $x=0$ ta được $f(0)=1$. Tuy nhiên ta không thể tính $f(1)$ tương tự như vậy.

Phương trình này không giống bất kì phương trình nào trước đây. Làm thế nào để tìm ra nghiệm và làm sao ta có thể bất kì nghiệm nào mà ta tìm ra thì đúng yêu cầu bài toán? Ta có thể dự đoán nghiệm và thử. Ta tìm một đa thức $f(x)$ để giải bài này. Nếu $f(x)$ là một đa thức bậc n thì vế trái của phương trình trên là một đa thức có bậc $2n$ và vế phải của phương trình là một đa thức có bậc $n+1$. Vì vậy, đa thức ta cần tìm phải có bậc một. Cho $f(x) = ax + b$ ta có

$$(ax+b)^2 = 1 + x(ax+a+b) \quad (3.65)$$

hoặc

$$a^2x^2 + (2ab)x + b^2 = ax^2 + (a+b)x + 1 \quad (3.66)$$

Nếu phương trình này đúng với mọi x thì hệ số tương ứng của mỗi vế của phương trình phải bằng nhau. Từ đó suy ra $a=1$ và $b=1$.

Vì vậy $f(x) = x+1$ là một nghiệm. Nhưng nó có thỏa phương trình ban đầu hay không? Tức là

$$x+1 = \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{\dots}}} \quad (3.67)$$

có đúng hay không?

Ta có thể chứng minh điều này là đúng.

3.9. Bài tập

KẾT LUẬN

Luận văn “Phương trình hàm với một biến số” đã đạt được các kết quả sau:

1. Luận văn đã trình bày một cách khái quát lịch sử phát triển của phương trình hàm nói riêng trong sự phát triển chung của Toán học.
 2. Luận văn cũng đã nêu lên một số khái niệm liên quan đến các bài toán về phương trình hàm; Nêu một số kỹ thuật giải phương trình hàm và một số bài toán cơ bản cùng với cách phân tích đề bài để tìm lời giải.
 3. Luận văn trình bày một số phương pháp thường dùng trong việc giải bài toán phương trình hàm, từ đó có thể giúp sáng tác ra các bài tập giải phương trình hàm khác.
 4. Luận văn đã trình bày một vài phương pháp và kỹ thuật giải quyết các bài toán phương trình hàm một biến cơ bản như: phương trình hàm Schroder, phương trình hàm Poincaré, phương trình hàm Abel, phương trình hàm Bottcher hay phương trình hàm giao hoán.
 5. Ngoài ra luận văn còn giới thiệu một số bài toán trong các kì thi toán quốc gia, quốc tế cùng với hướng dẫn giải.
- Tuy nhiên, do khuôn khổ của một luận văn thạc sĩ, vẫn còn nhiều vấn đề mà tác giả chưa nghiên cứu.