



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM

NGUYỄN QUANG TRÀ

**PHƯƠNG TRÌNH SÓNG TUYẾN TÍNH MÔ TẢ
DAO ĐỘNG CỦA THANH ĐÀN HỒI NHỚT**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Toán Giải Tích**

Mã số: **60. 46. 01**

Thành phố HCM

2010

Chương 1

PHẦN TỔNG QUAN

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm trong nhiều bài toán về phương trình sóng tuyến tính là đề tài được quan tâm bởi nhiều tác giả, chẳng hạn như trong [1,2, 5 – 12] và các tài liệu tham khảo trong đó. Trong luận văn này, chúng tôi khảo sát phương trình sóng tuyến tính mô tả dao động của thanh đàn hồi nhớt liên kết với điều kiện biên hỗn hợp sau đây.

Tìm hàm cặp hàm (u, P) thỏa phương trình sóng tuyến tính với điều kiện biên hỗn hợp có dạng

$$u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda u_t = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (1.1)$$

với điều kiện biên

$$u(1, t) = 0, \quad \mu(t)u_x(0, t) = P(t), \quad (1.2)$$

và điều kiện đầu

$$u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad (1.3)$$

trong đó $P(t)$ chưa biết và các giá trị biên $u(0, t)$ và $u_t(0, t)$ liên hệ bởi

$$P(t) = g(t) + K_1(t)u(0, t) + \lambda_1(t)u_t(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \quad (1.4)$$

trong đó $K > 0$, $\lambda > 0$ là các hằng số cho trước; μ , f , $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$, g , K_1 , λ_1 , k là các hàm cho trước thỏa các điều kiện sẽ đặt ra sau.

Bài toán (1.1) – (1.4) và các dạng tương tự với các điều kiện biên khác nhau đã được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều tác giả (xem [1,2, 5 – 12]) và các tài liệu tham khảo trong đó.

Trong trường hợp $\mu(t) \equiv 1$, các tác giả Nguyễn Thúc An và Nguyễn Đình Triều [1] đã xét bài toán (1.1), (1.3), với

$$f(x, t) = 0, \quad \tilde{u}_0 = \tilde{u}_1 = 0, \quad (1.5)$$

trong đó điều kiện biên (1.2) được thay thế bởi

$$u_x(0, t) = P(t), \quad u(1, t) = 0, \quad (1.6)$$

với K_1 là hằng số không âm và $\lambda_1(t) \equiv 0$.

Trong trường hợp này, bài toán (1.1), (1.3), (1.5), (1.6) mô tả dao động của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt tựa trên nền cứng.

Trong [2], Bergounioux, Long, Đình đã nghiên cứu bài toán (1.1) – (1.4), với

$$\mu(t) \equiv 1, \quad (1.7)$$

trong đó điều kiện biên (1.2) được thay thế bởi

$$\begin{cases} u_x(0, t) = P(t), \\ -u_x(1, t) = \lambda_1 u_t(1, t) + K_1 u(1, t), \end{cases} \quad (1.8)$$

với các hằng số cho trước $\lambda_1 > 0$, $K_1 \geq 0$.

Trong [5], Nguyễn Thành Long, Lê Văn Út và Nguyễn Thị Thảo Trúc đã nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm cũng như tính chính quy, tính ổn định và khai triển tiệm cận nghiệm theo hai tham số bé K, λ của bài toán

$$u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda u_t = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (1.9)$$

với điều kiện biên

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ -\mu(t)u_x(1, t) = K_1(t)u(1, t) + \lambda_1(t)u_t(1, t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1, s)ds, \end{cases} \quad (1.10)$$

và điều kiện đầu

$$u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad (1.11)$$

trong đó K, λ là các hằng số, và $\mu, f, K_1, \lambda_1, g, k, u_0, u_1$ là các hàm cho trước.

Nội dung của luận văn bao gồm các chương sau:

Chương 1. Nêu tổng quan về bài toán khảo sát trong luận văn và điểm qua các kết quả đã có trước đó, đồng thời nêu bố cục luận văn.

Chương 2. Trình bày một số kết quả chuẩn bị bao gồm việc nhắc lại một số không gian hàm, một số kết quả về phép nhúng liên tục và phép nhúng compact giữa các không gian hàm.

Chương 3. Bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin liên hệ với các đánh giá tiên nghiệm, phương pháp compact yếu và phương pháp toán tử đơn điệu, chúng tôi chứng minh bài toán (1.1) – (1.4) tồn tại và duy nhất nghiệm yếu.

Chương 4. Với các giả thiết tăng thêm chúng tôi khảo sát tính trơn của nghiệm yếu bài toán (1.1) – (1.4), nghĩa là dữ kiện đầu vào tăng lên thì nghiệm yếu thu được cũng tăng tính trơn lên.

Chương 5. Chúng tôi khảo sát tính ổn định của nghiệm yếu phụ thuộc vào dữ kiện đầu vào của bài toán, tức là chúng tôi chỉ ra sự phụ thuộc liên tục của nghiệm yếu vào dữ kiện đầu vào của bài toán.

Chương 6. Trong chương này nghiên cứu bài toán nhiễu theo ba tham số bé (K, λ, K_1)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} = -Ku - \lambda u_t + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(1, t) = 0, \quad \mu(t)u_x(0, t) = P(t), \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \\ P(t) = g(t) + Ku(0, t) + \lambda_1(t)u'(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds. \end{array} \right. \quad (\tilde{Q}_\varepsilon)$$

trong đó các tham số $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu, \lambda_1, f, g, k)$ cho trước. Chúng tôi thu được các kết quả sau:

a/ Dạng điều kiện cận của nghiệm yếu $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ của bài toán $(\tilde{Q}_\varepsilon)$ khi $(K, \lambda, K_1) \rightarrow (0_+, 0_+, 0_+)$.

b/ Khai triển tiệm cận của nghiệm yếu $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ của bài toán $(\tilde{Q}_\varepsilon)$ theo ba tham số bé K, λ, K_1 . có nghĩa là có thể xấp xỉ nghiệm $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ bởi một đa thức theo ba biến K, λ, K_1 .

$$u_\varepsilon \approx \sum_{|\gamma| \leq N} u_\gamma \varepsilon^\gamma, \quad P_\varepsilon \approx \sum_{|\gamma| \leq N} P_\gamma \varepsilon^\gamma,$$

theo nghĩa cần phải chỉ ra các hàm (u_γ, P_γ) và thiết lập đánh giá

$$\begin{aligned} & \left\| u - \sum_{|\gamma| \leq N} u_\gamma \varepsilon^\gamma \right\|_* + \left\| u'(0, \cdot) - \sum_{|\gamma| \leq N} u'_\gamma(0, \cdot) \varepsilon^\gamma \right\|_* \\ & + \left\| P - \sum_{|\gamma| \leq N} P_\gamma \varepsilon^\gamma \right\|_* \leq \tilde{C}_N^* \|\varepsilon\|^{N+1}, \end{aligned}$$

theo một chuẩn thích hợp $\|\cdot\|_*$, với các tham số dương $(K, \lambda, K_1) \in \mathbb{R}_+^3$ đủ bé và hằng số $\tilde{C}_N^*$ độc lập đối với các tham số bé này.

Chương 7. Chúng tôi xét một ví dụ cụ thể minh họa phương pháp tìm nghiệm tiệm cận đã trình bày ở phần 2 của chương 6.

Kế đến là Phần kết luận, nhằm tóm tắt kết quả thực hiện trong luận văn và cuối cùng là danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 2

MỘT SỐ CÔNG CỤ CHUẨN BỊ

2.1. Các không gian hàm

Đầu tiên, ta đặt các ký hiệu $\Omega = (0, 1)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$. Ta bỏ qua định nghĩa các không gian hàm thông dụng như: $C^m(\Omega)$, $L^p(\Omega) = L^p$, $H^m(\Omega) = H^m$, $W^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}$. Ta có thể xem trong các quyển sách [1, 2]. Ta định nghĩa $H = L^2(\Omega)$ là không gian Hilbert đối với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L^2(\Omega). \quad (2.1)$$

Ký hiệu $\|\cdot\|$ chuẩn sinh bởi tích vô hướng này, nghĩa là

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \left(\int_0^1 u^2(x)dx \right)^{1/2}, \quad u \in L^2(\Omega). \quad (2.2)$$

Ta định nghĩa

$$H^1 = \{v \in L^2 : v_x \in L^2\}, \quad (2.3)$$

và

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle + \langle u_x, v_x \rangle. \quad (2.4)$$

H^1 là không gian Hilbert đối với tích vô hướng (2.4). Ta ký hiệu $\|v\|_{H^1} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{H^1}}$

là chuẩn trong H^1 . Ta có bổ đề sau.

Bổ đề 2.1. *Phép nhúng $H^1 \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ là compact và*

$$\|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \sqrt{2} \|v\|_{H^1}, \quad \forall v \in H^1. \quad (2.5)$$

Chúng minh bổ đề 2.1 có thể tìm trong [2].

Bổ đề 2.2. *Đồng nhất H với H' (đối ngẫu của H). Khi đó ta có $H^1 \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow (H^1)'$, với các phép nhúng liên tục và nằm trù mật.*

Chú thích 1.1. Từ bổ đề 2.2 ta dùng ký hiệu tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ trong L^2 để chỉ cặp tích đối ngẫu giữa H^1 và $(H^1)'$.

Ta cũng ký hiệu $\|\cdot\|_X$ để chỉ chuẩn trong một không gian Banach X và gọi X' là không gian đối ngẫu của X .

2.2. Không gian hàm $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$

Ký hiệu $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, để chỉ không gian Banach các hàm thực $u : (0, T) \rightarrow X$ đo được, sao cho $\|u\|_{L^p(0, T; X)} < +\infty$ với

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{khi } 1 \leq p < +\infty, \\ \text{ess sup}_{0 < t < T} \|u(t)\|_X, & \text{khi } p = \infty. \end{cases} \quad (2.6)$$

Khi đó ta có các bổ đề sau đây mà chứng minh của chúng có thể tìm thấy trong Lions [4].

Bổ đề 2.3. $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq +\infty$ là không gian Banach.

Bổ đề 2.4. Gọi X' là đối ngẫu của X . Khi đó $L^{p'}(0, T; X')$ với

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 < p < \infty$, là đối ngẫu của $L^p(0, T; X)$. Hơn nữa, nếu X phản xạ thì

$L^p(0, T; X)$ cũng phản xạ.

Bổ đề 2.5. $\left(L^1(0, T; X) \right)' = L^\infty(0, T; X')$. Hơn nữa, các không gian $L^1(0, T; X)$, $L^\infty(0, T; X')$ không phản xạ.

Bổ đề 2.6. Ta có $L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q_T)$, $1 \leq p < \infty$, trong đó $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

2.3. Phân bố có giá trị vector

Định nghĩa 2.1. Cho X là không gian Banach thực. Một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $D((0, T))$ vào X gọi là một (hàm suy rộng) phân bố có giá trị trong X . Tập các phân bố có giá trị trong X ký hiệu là

$$D'(0, T; X) = L(D((0, T); X)) = \{ f : D(0, T) \rightarrow X, f \text{ tuyến tính, liên tục} \}.$$

Chú thích 2.2. Ta ký hiệu $D(0, T)$ thay cho $D((0, T))$ hoặc $C_c^\infty((0, T))$ để chỉ không gian các hàm số thực khả vi vô hạn có giá compact trong $(0, T)$.

Định nghĩa 2.2. Cho $f \in D'(0, T; X)$. Ta định nghĩa đạo hàm $\frac{df}{dt}$ theo nghĩa phân bố của f bởi công thức

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \forall \varphi \in D(0, T). \quad (2.8)$$

Các tính chất

i / Cho $v \in L^p(0, T; X)$, ta làm tương ứng nó bởi ánh xạ như sau:

$$T_v : D(0, T) \rightarrow X, \quad \left\langle T_v, \varphi \right\rangle = \int_0^T v(t) \varphi(t) dt, \forall \varphi \in D(0, T). \quad (2.9)$$

Ta có thể nghiệm lại rằng $T_v \in D'(0, T; X)$. Thật vậy,

j) Ánh xạ $T_v : D(0, T) \rightarrow X$ là tuyến tính.

jj) Ta nghiệm lại ánh xạ $T_v : D(0, T) \rightarrow X$ là liên tục.

Giả sử $\{\varphi_j\} \subset D(0, T)$, sao cho $\varphi_j \rightarrow 0$ trong $D(0, T)$. Ta có

$$\begin{aligned} \left\| \left\langle T_v, \varphi_j \right\rangle \right\|_X &= \left\| \int_0^T v(t) \varphi_j(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|v(t) \varphi_j(t)\|_X dt \\ &\leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T |\varphi_j(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \rightarrow 0, \text{ khi } j \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Do đó $\left\langle T_v, \varphi_j \right\rangle \rightarrow 0$ trong X khi $j \rightarrow +\infty$. Vậy $T_v \in D'(0, T; X)$.

ii/ Ánh xạ $v \mapsto T_v$ là một đơn ánh, tuyến tính từ $L^p(0, T; X)$ vào $D'(0, T; X)$. Do đó, ta có thể đồng nhất $T_v = v$. Khi đó ta có kết quả sau đây mà chứng minh của chúng có thể tìm thấy trong Lions [4].

Bổ đề 2.7. $L^p(0, T; X) \hookrightarrow D'(0, T; X)$ với phép nhúng liên tục.

2.4. Đạo hàm trong $L^p(0, T; X)$

Do bổ đề 2.7, phần tử $f \in L^p(0, T; X)$ ta có thể coi f và do đó $\frac{df}{dt}$ là các phần tử của $D'(0, T; X)$. Ta có các kết quả sau đây mà chứng minh của chúng có thể tìm thấy trong Lions [4].

Bổ đề 2.8. *Nếu $f \in L^p(0, T; X)$ và $f' \in L^p(0, T; X)$, thì f bằng hầu hết với một hàm liên tục từ $[0, T] \rightarrow X$.*

2.5. Bổ đề về tính compact của Lions

Cho ba không gian Banach X_0, X_1, X với $X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$ sao cho:

$$X_0, X_1 \text{ là phản xạ.} \quad (2.11)$$

$$\text{Phép nhúng } X_0 \hookrightarrow X \text{ là compact, } X \hookrightarrow X_1 \text{ liên tục.} \quad (2.12)$$

Với $0 < T < +\infty, 1 \leq p_i \leq +\infty, i = 0, 1$.

Ta đặt

$$W(0, T) = \{v \in L^{p_0}(0, T; X_0) : v' \in L^{p_1}(0, T; X_1)\}. \quad (2.13)$$

Ta trang bị $W(0, T)$ bởi chuẩn

$$\|v\|_{W(0, T)} = \|v\|_{L^{p_0}(0, T; X_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; X_1)}. \quad (2.14)$$

Khi đó $W(0, T)$ là một không gian Banach.

Hiển nhiên ta có $W(0, T) \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; X)$.

Ta cũng có kết quả sau đây liên quan đến phép nhúng compact.

Bổ đề 2.9. (Bổ đề về tính compact của Lions).

Với giả thiết (2.11), (2.12) và nếu $1 < p_i < +\infty, i = 1, 2$, thì phép nhúng

$$W(0, T) \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; X) \text{ là compact.}$$

Chứng minh bổ đề 2.10 có thể tìm thấy trong Lions [4].

2.6. Bổ đề về sự hội tụ yếu trong $L^p(Q)$

Bổ đề sau đây liên quan đến sự hội tụ yếu trong $L^p(Q)$.

Bổ đề 2.10. (Xem Lions [4]).

Cho Q là tập mở bị chặn của $\mathbb{R}^N$ và $G_m, G \in L^p(Q)$, $1 < p < \infty$, sao cho:

$$\|G_m\|_{L^p(Q)} \leq C, \text{ trong đó } C \text{ là hằng số độc lập với } m,$$

và

$$G_m \rightarrow G \text{ a.e., trong } Q.$$

Khi đó ta có: $G_m \rightarrow G$ trong $L^p(Q)$ yếu.

2.7. Bổ đề Gronwall

Cho f là hàm khả tích, không âm trên $[0, T]$ và thỏa bất đẳng thức

$$f(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t f(s) ds, \text{ hầu hết } t \in [0, T],$$

trong đó C_1, C_2 là các hàm số không âm. Khi đó

$$f(t) \leq C_1 \exp(C_2 t), \text{ hầu hết } t \in [0, T].$$

Hơn nữa, nếu $C_1 = 0$ thì $f(t) \equiv 0$ hầu hết $t \in [0, T]$.

Trong luận văn này để tiện cho việc trình bày ta sẽ dùng các ký hiệu sau

$$u(t), \quad u'(t) = u_t(t), \quad u''(t) = u_{tt}(t), \quad u_x(t) = \nabla u(t), \quad u_{xx}(t) = \Delta u(t),$$

lần lượt thay cho

$$u(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Chương 3

SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM

3.1. Giới thiệu

Trong chương này, chúng tôi trình bày sự tồn tại và duy nhất của nghiệm yếu toàn cục cho bài toán: Tìm cặp hàm (u, P) thỏa

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + F(u, u_t) = f(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(1, t) = 0, \quad \mu(t)u_x(0, t) = P(t), \\ P(t) = g(t) + K_1(t)u(0, t) + \lambda_1(t)u_t(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \\ F(u, u_t) = Ku + \lambda u_t, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó, $K > 0$, $\lambda > 0$ là các hằng số cho trước và $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, f, \mu, g, K_1, \lambda_1, k$ là các hàm cho trước thỏa các điều kiện sẽ đặt ra sau.

Chúng minh được dựa vào phương pháp Galerkin liên hệ với các đánh giá tiên nghiệm, từ đó rút ra các dãy con hội tụ yếu trong các không gian hàm thích hợp nhờ một số phép nhúng compact. Trong phần này, định lý ánh xạ co được sử dụng trong việc chứng minh tồn tại nghiệm xấp xỉ Galerkin.

Nghiệm yếu của bài toán (3.1) được thành lập từ bài toán biến phân sau. Tìm cặp hàm (u, P) thỏa

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle u_t, v \rangle + \mu(t) \langle u_x, v_x \rangle + P(t)v(0) + \langle F(u, u_t), v \rangle = \langle f(t), v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ P(t) = g(t) + K_1(t)u(0, t) + \lambda_1(t)u_t(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

trong đó $F(u, u_t) = Ku + \lambda u_t$ và $V = \{v \in H^1 : v(1) = 0\}$.

3.2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Ta thành lập các giả thiết sau:

$$(A_1) \quad (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) \in V \times L^2, \quad V = \{v \in H^1 : v(1) = 0\},$$

$$(A_2) \quad g, K_1, \lambda_1, k \in H^1(0, T), \quad K_1(t) \geq 0, \quad \lambda_1(t) \geq \lambda_0 > 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(A_3) \quad \mu \in W^{1,1}(0, T), \quad \mu(t) \geq \mu_0 > 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(A_4) \quad f \in L^2(0, T; L^2),$$

$$(A_5) \quad K, \lambda \geq 0.$$

Khi đó, ta có định lý sau

Định lý 3.1. Cho $T > 0$. Giả sử, các giả thiết $(A_1) - (A_5)$ đúng. Khi đó, bài toán (3.1) tồn tại và duy nhất nghiệm yếu (u, P) sao cho

$$u \in L^\infty(0, T; V), \quad u_t \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u(0, \cdot) \in H^1(0, T), \quad P \in L^2(0, T). \quad (3.3)$$

Chứng minh: Chứng minh gồm 4 bước.

Bước 1. Xấp xỉ Galerkin

Chọn $\{w_j\}$ là cơ sở đếm được của V . Ta đi tìm nghiệm yếu xấp xỉ của bài toán

(3.1) dưới dạng

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m c_{mj}(t)w_j, \quad (3.4)$$

trong đó, các hàm hệ số c_{mj} thỏa hệ phương trình vi tích phân sau

$$\begin{cases} \langle u_m''(t), w_j \rangle + \mu(t) \langle u_m(t), w_{jx} \rangle + P_m(t)w_j(0) \\ \quad + \langle F(u_m(t), u_m'(t)), w_j \rangle = \langle f(t), w_j \rangle, \quad j = \overline{1, m}, \\ P_m(t) = g(t) + K_1(t)u_m(0, t) + \lambda_1(t)u_m'(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_m(0, s)ds, \\ F(u_m(t), u_m'(t)) = Ku_m(t) + \lambda u_m'(t), \end{cases} \quad (3.5)$$

với

$$u_m(x, 0) \equiv u_{0m} = \sum_{j=1}^m c_{mj}(0)w_j \equiv \sum_{j=1}^m \alpha_{mj}w_j \rightarrow \tilde{u}_0 \text{ mạnh trong } V, \quad (3.6)$$

$$u'_m(x, 0) \equiv u_{1m} = \sum_{j=1}^m c'_{mj}(0)w_j \equiv \sum_{j=1}^m \beta_{mj}w_j \rightarrow \tilde{u}_1 \text{ mạnh trong } L^2. \quad (3.7)$$

Hệ phương trình (3.5) – (3.7) được viết lại dưới dạng

$$\left\{ \begin{aligned} & c''_{mj}(t) + \mu(t) \sum_{i=1}^m c_{mi}(t) \langle w_{ix}, w_{jx} \rangle + g(t)w_j(0) + K_1(t)w_j(0) \sum_{i=1}^m c_{mi}(t)w_i(0) \\ & + \lambda_1(t)w_j(0) \sum_{i=1}^m c'_{mi}(t)w_i(0) + w_j(0) \sum_{i=1}^m w_i(0) \int_0^t k(t-s) c_{mi}(s) ds \\ & + Kc_{mj}(t) + \lambda c'_{mj}(t) = \langle f(t), w_j \rangle, \\ & c_{mj}(0) = \alpha_{mj}, \quad c_{mj}(0) = \beta_{mj}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \right. \quad (3.8)$$

Bỏ qua chỉ số m , ta viết lại $c_m(t) = (c_{m1}(t), \dots, c_{mm}(t))$ dưới dạng

$$c(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t)).$$

Hệ phương trình (3.8) được viết lại như sau

$$\left\{ \begin{aligned} & c''_j(t) = -\lambda c'_j(t) - \frac{\lambda_1(t)}{\|w_j\|^2} w_j(0) \sum_{i=1}^m c'_i(t)w_i(0) - Kc_j(t) - \frac{\mu(t)}{\|w_j\|^2} c_j(t) \\ & - \frac{K_1(t)}{\|w_j\|^2} w_j(0) \sum_{i=1}^m c_i(t)w_i(0) - \frac{w_j(0)}{\|w_j\|^2} \int_0^t k(t-s) \sum_{i=1}^m c_i(s)w_i(0) ds \\ & - \frac{g(t)}{\|w_j\|^2} w_j(0) + \frac{1}{\|w_j\|^2} \langle f(t), w_j \rangle, \\ & c_j(0) = \alpha_j, \quad c_j(0) = \beta_j, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \right. \quad (3.9)$$

Với mỗi $T > 0$, ta đặt $Y = C^0([0, T]; \mathbb{R}^m)$ là không gian Banach đối với chuẩn $\|\cdot\|_Y$

như sau:

$$\|c\|_Y = \|c\|_0, \quad \|c\|_0 = \sup_{0 < t < T} |c(t)|_1, \quad |c(t)|_1 = \sum_{j=1}^m |c_j(t)|,$$

với $c = (c_1, \dots, c_m) \in Y$.

Hệ (3.9) tương đương với phương trình điểm bất động

$$c(t) = U[c](t) \equiv H[c](t) + G(t), \quad c \in Y, \quad (3.10)$$

trong đó,

$$\begin{cases} c(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t)), \quad U[c](t) = (U_1[c](t), \dots, U_m[c](t)), \\ U_j[c](t) = H_j[c](t) + G_j(t), \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} H_j[c](t) = \int_0^t F_{1j}(s, c'(s)) ds + \int_0^t d\tau \int_0^\tau F_{2j}(s, c'(s)) ds \\ \quad + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \int_0^r k(t-s) F_{3j}(c(s)) ds, \\ G_j(t) = \alpha_j + \left[\beta_j + \lambda \alpha_j + \frac{w_j(0)}{\|w_j\|^2} \lambda_1(0) \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i(0) \right] t \\ \quad - \int_0^t d\tau \int_0^\tau \left(\frac{g(s)}{\|w_j\|^2} w_j(0) - \frac{1}{\|w_j\|^2} \langle f(s), w_j \rangle \right) ds, \end{cases} \quad (3.11)$$

với $F_{1j}, F_{2j} : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $F_{3j} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, được xác định như sau

$$F_{1j}(t, c(t)) = -\lambda c_j(t) - \frac{\lambda_1(t)}{\|w_j\|^2} w_j(0) \sum_{i=1}^m c_i(t) w_i(0), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} F_{2j}(t, c(t)) &= \frac{\lambda'_1(t)}{\|w_j\|^2} w_j(0) \sum_{i=1}^m c_i(t) w_i(0) - K c_j(t) - \frac{\mu(t)}{\|w_j\|^2} c_j(t) \\ &\quad - \frac{K_1(t)}{\|w_j\|^2} w_j(0) \sum_{i=1}^m c_i(t) w_i(0), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$F_{3j}(c(t)) = \frac{w_j(0)}{\|w_j\|^2} \sum_{i=1}^m c_i(t) w_i(0). \quad (3.14)$$

Bổ đề 3.1. *Giả sử, các giả thiết $(A_1) - (A_5)$ đúng. Khi đó, tồn tại $T > 0$ sao cho hệ (3.10) có duy nhất nghiệm $c(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t))$ trên khoảng $[0, T]$.*

Chứng minh.

Sự tồn tại nghiệm $u_m(t)$ trên đoạn $[0, T]$ sẽ được suy ra từ sự tồn tại nghiệm $c \in Y$ thỏa mãn phương trình điểm bất động (3.10). Như vậy ta cần chứng minh toán tử $U : Y \rightarrow Y$ có điểm bất động.

Ta có $|U^n[c] - U^n[d]| = |H^n[c] - H^n[d]|, \forall c, d \in Y, \forall n \in \mathbb{N}$. Nên để chứng minh U có điểm bất động. Ta chứng minh H có điểm bất động. Mặt khác, do H tuyến tính theo c , nên chúng ta chỉ cần chứng minh tồn tại $n \in \mathbb{N}$ và $k \in [0, 1)$ sao cho $\|H^n[c]\|_Y \leq k\|c\|_Y, \forall c \in Y$.

Ta bắt đầu bởi việc chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng với $c \in Y$, bất đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$|H^n[c](t)|_1 \leq \bar{M}^n \bar{T}^n \frac{t^n}{n!} \|c\|_Y, \quad (3.15)$$

trong đó,

$$\begin{cases} M = \sup_{0 \leq t \leq T} \{|\mu(t)| + |K_1(t)| + |\lambda_1(t)| + |\lambda_1'(t)|\}, \quad \bar{T} = 1 + T + T^2, \\ M_1 = \lambda + 2mM(1 + \lambda_m^2), \quad M_2 = M(4m + 1)(1 + \lambda_m^2) + K, \\ M_3 = 2m(1 + \lambda_m^2)\|k\|_{L^\infty(0, T)}, \quad \bar{M} = M_1 + M_2 + M_3. \end{cases}$$

Chứng minh (3.15) như sau

Với $n = 1$, từ (3.12) – (3.14) ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned} |F_{1j}(t, c(t))| &\leq \lambda |c_j(t)| + 2M(1 + \lambda_m^2) \sum_{i=1}^m |c_i(t)| \\ &\leq \lambda |c_j(t)| + 2M(1 + \lambda_m^2) \|c(t)\|_1 \end{aligned}$$

hay

$$|F_1(t, c(t))|_1 \leq [\lambda + 2mM(1 + \lambda_m^2)] \|c(t)\|_1 = M_1 \|c(t)\|_1. \quad (3.16)$$

Tương tự ta cũng có

$$|F_2(t, c(t))|_1 \leq [M(4m + 1)(1 + \lambda_m^2) + K] \|c(t)\|_1 = M_2 \|c(t)\|_1, \quad (3.17)$$

và

$$|F_3(c(t))|_1 \leq 2m(1 + \lambda_m^2)|c(t)|_1, \quad (3.18)$$

Từ (3.11)₁, (3.16) - (3.18) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} |H[c](t)|_1 &\leq \int_0^t |F_1(s, c(s))|_1 ds + \int_0^t d\tau \int_0^\tau |F_2(s, c(s))|_1 ds \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_0^\tau dr \int_0^r |k(r-s)|_1 |F_3(c(s))|_1 ds \\ &\leq M_1 \int_0^t |c(s)|_1 ds + M_2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c(s)|_1 ds + M_3 \int_0^t d\tau \int_0^\tau dr \int_0^r |c(s)|_1 ds \\ &\leq M_1 \|c\|_Y t + M_2 \|c\|_Y \frac{t^2}{2!} + M_3 \|c\|_Y \frac{t^3}{3!} \\ &\leq (M_1 + M_2 T + M_3 T^2) \|c\|_Y t \\ &\leq (M_1 + M_2 + M_3) \bar{T} \|c\|_Y t \leq \bar{M} \bar{T} \|c\|_Y t, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Từ (3.19) ta suy ra rằng (3.15) đúng với $n = 1$.

Giả sử (3.15) đúng với $n \geq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} |H[H^n[c]](t)|_1 &\leq M_1 \int_0^t |H^n[c](s)|_1 ds + M_2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |(H^n[c](s))|_1 ds \\ &\quad + M_3 \int_0^t d\tau \int_0^\tau dr \int_0^r |H^n[c](s)|_1 ds \\ &\leq \frac{M_1 \bar{M}^n \bar{T}^n}{n!} \|c\|_Y \int_0^t s^n ds + \frac{M_2 \bar{M}^n \bar{T}^n}{n!} \|c\|_Y \int_0^t d\tau \int_0^\tau s^n ds \\ &\quad + \frac{M_3 \bar{M}^n \bar{T}^n}{n!} \|c\|_Y \int_0^t d\tau \int_0^\tau dr \int_0^r s^n ds \\ &\leq \frac{M_1 \bar{M}^n \bar{T}^n}{(n+1)!} \|c\|_Y t^{n+1} + \frac{M_2 \bar{M}^n \bar{T}^n}{(n+2)!} \|c\|_Y t^{n+2} + \frac{M_3 \bar{M}^n \bar{T}^n}{(n+3)!} \|c\|_Y t^{n+3} \\ &\leq \left(\frac{M_1 \bar{M}^n \bar{T}^n}{(n+1)!} + \frac{M_2 \bar{M}^n \bar{T}^n T}{(n+1)!} + \frac{M_3 \bar{M}^n \bar{T}^n T^2}{(n+1)!} \right) \|c\|_Y t^{n+1} \\ &\leq (M_1 T + M_2 + M_3 T^2) \frac{\bar{M}^n \bar{T}^n}{(n+1)!} \|c\|_Y t^{n+1} \end{aligned}$$

$$\leq (M_1 + M_2 + M_3) \frac{\bar{M}^n \bar{T}^{n+1}}{(n+1)!} \|c\|_Y t^{n+1} \leq \frac{\bar{M}^{n+1} \bar{T}^{n+1}}{(n+1)!} \|c\|_Y t^{n+1}. \quad (3.20)$$

Từ (3.19), (3.20) suy ra (3.15) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. Điều này dẫn đến

$$\|H^n[c]\|_0 \leq \frac{\bar{M}^n \bar{T}^n}{n!} \|c\|_Y. \quad (3.21)$$

Suy ra

$$\|U^n[c]\|_Y \leq \frac{(\bar{M}\bar{T})^n}{n!} \|c\|_Y. \quad (3.22)$$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\bar{M}\bar{T})^n}{n!} = 0$, nên tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$0 < k = \frac{(\bar{M}\bar{T})^n}{n!} < 1. \quad (3.23)$$

Vậy, toán tử $H^n : Y \rightarrow Y$ là co, nên theo nguyên lý ánh xạ co, suy ra H^n có điểm bất động duy nhất trong Y . Từ đó ta cũng suy ra được rằng H cũng có điểm bất động duy nhất trong Y . Bổ đề 3.1 được chứng minh ■

Dùng bổ đề 3.1, với $T > 0$ cố định, (3.10) có nghiệm $c \in S$ sao cho $U[c] = c$, do đó hệ (3.5) – (3.7) có nghiệm (u_m, P_m) trên một khoảng $[0, T_m] \subset [0, T]$.

Bước 2. Đánh giá tiên nghiệm

Nhân (3.5)₁ với $c'_{mj}(t)$ sau đó lấy tổng theo j , ta được

$$\begin{aligned} \langle u''_m(t), u'_m(t) \rangle + \mu(t) \langle u_{mx}(t), u'_{mx}(t) \rangle + P_m(t) u'_m(0, t) \\ + \langle F(u_m(t), u'_m(t)), u'_m(t) \rangle = \langle f(t), u'_m(t) \rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Lấy tích phân (3.24) theo biến thời gian từ 0 đến t , ta thu được

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \langle u''_m(s), u'_m(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \mu(s) \langle u_{mx}(s), u'_{mx}(s) \rangle ds + 2 \int_0^t P_m(s) u'_m(0, s) ds \\ + 2 \int_0^t \langle F(u_m(s), u'_m(s)), u'_m(s) \rangle ds = 2 \int_0^t \langle f(s), u'_m(s) \rangle ds, \end{aligned} \quad (3.25)$$

Tính các tích phân ở vế trái của (3.25)

$$I_1 = 2 \int_0^t \langle u''_m(s), u'_m(s) \rangle ds = \int_0^t \frac{d}{ds} \|u'_m(s)\|^2 ds = \|u'_m(t)\|^2 - \|u'_{1m}\|^2. \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2 \int_0^t \mu(s) \langle u_{mx}(s), u'_{mx}(s) \rangle ds = \int_0^t \mu(s) \frac{d}{ds} \|u_{mx}(s)\|^2 ds \\
&= \mu(t) \|u_{mx}(t)\|^2 - \mu(0) \|u_{0mx}\|^2 - \int_0^t \mu'(s) \|u_{mx}(s)\|^2 ds
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= 2 \int_0^t P_m(s) u'_m(0, s) ds \\
&= 2 \int_0^t g(s) u'_m(0, s) ds + \int_0^t K_1(s) \frac{d}{ds} u_m^2(0, s) ds + 2 \int_0^t \lambda_1(s) |u'_m(0, s)|^2 ds \\
&\quad - 2 \int_0^t u'_m(0, \tau) \int_0^\tau k(\tau - s) u_m(0, s) ds d\tau \\
&= I_{31} + I_{32} + I_{33} + I_{34},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$I_{31} = 2 \int_0^t g(s) u'_m(0, s) ds = 2g(t) u_m(0, t) - 2g(0) u_{0m}(0) - 2 \int_0^t g'(s) u_m(0, s) ds$$

$$I_{32} = K_1(t) u_m^2(0, t) - K_1(0) u_{0m}^2(0) - \int_0^t K_1'(s) u_m^2(0, s) ds,$$

$$\begin{aligned}
I_{34} &= -2 u_m(0, \tau) \int_0^\tau k(\tau - s) u_m(0, s) ds \Big|_0^t \\
&\quad + 2 \int_0^t u_m(0, \tau) \frac{d}{d\tau} \left(\int_0^\tau k(\tau - s) u_m(0, s) ds \right) d\tau \\
&= -2 u_m(0, t) \int_0^t k(t - s) u_m(0, s) ds \\
&\quad + 2 \int_0^t u_m(0, \tau) \left(k(0) u_m(0, \tau) + \int_0^\tau k'(\tau - s) u_m(0, s) ds \right) d\tau \\
&= -2 u_m(0, t) \int_0^t k(t - s) u_m(0, s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2k(0) \int_0^t u_m^2(0, s) ds + 2 \int_0^t u_m(0, t) \int_0^\tau k'(\tau - s) u_m(0, s) ds d\tau \\
I_4 &= 2 \int_0^t \langle F(u_m(s), u'_m(s)), u'_m(s) \rangle ds = 2 \int_0^t \langle Ku_m(s) + \lambda u'_m(s), u'_m(s) \rangle ds \\
&= K \|u_m(t)\|^2 - K \|u_{0m}\|^2 + 2\lambda \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Tổ hợp (3.25) – (3.29), ta thu được

$$\begin{aligned}
S_m(t) &= S_m(0) + 2g(0)u_{0m}(0) + \int_0^t \mu'(s) \|u_{mx}(s)\|^2 ds + \int_0^t [K'_1(s) - 2k(0)] u_m^2(0, s) ds \\
&+ 2u_m(0, t) \int_0^t k(t - s) u_m(0, s) ds - 2g(t)u_m(0, t) \\
&+ 2 \int_0^t g'(s) u_m(0, s) ds - 2 \int_0^t u_m(0, \tau) \int_0^\tau k'(\tau - s) u_m(0, s) ds d\tau \\
&+ 2 \int_0^t \langle f(s), u'_m(s) \rangle ds,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

trong đó,

$$\begin{aligned}
S_m(t) &\equiv \|u'_m(t)\|^2 + \mu(t) \|u_{mx}(t)\|^2 + K_1(t) u_m^2(0, t) + 2 \int_0^t \lambda_1(s) |u'_m(0, s)|^2 ds \\
&+ K \|u_m(t)\|^2 + 2\lambda \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

hay

$$\begin{aligned}
S_m(t) &= S_m(0) + 2g(0)u_{0m}(0) + \int_0^t \mu'(s) \|u_{mx}(s)\|^2 ds \\
&+ \int_0^t [K'_1(s) - 2k(0)] u_m^2(0, s) ds + 2 \int_0^t g'(s) u_m(0, s) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2u_m(0,t) \int_0^t k(t-s)u_m(0,s)ds - 2g(t)u_m(0,t) \\
& -2 \int_0^t u_m(0,\tau) \int_0^\tau k'(\tau-s)u_m(0,s)ds d\tau + 2 \int_0^t \langle f(s), u_m'(s) \rangle ds, \\
& \leq S_m(0) + 2g(0)u_{0m}(0) + \sum_{i=1}^7 J_i.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{3.33}$$

và dựa vào kết quả của các bất đẳng thức

$$S_m(t) \geq \|u_m'(t)\|^2 + \mu_0 \|u_{mx}(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u_m'(0,s)|^2 ds, \tag{3.34}$$

$$|u_m(0,t)| \leq \|u_m(t)\|_{C^0([0,T])} \leq \|u_{mx}(t)\| \leq \sqrt{\frac{S_m(t)}{\mu_0}}, \tag{3.35}$$

chúng ta sẽ lần lượt đánh giá các tích phân ở vế phải của (3.32)

$$J_1 \leq \int_0^t |\mu'(s)| \|u_{mx}(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\mu_0} \int_0^t |\mu'(s)| S_m(s) ds. \tag{3.36}$$

$$J_2 \leq \int_0^t |K_1'(s) - 2k(0)| u_m^2(0,s) ds \leq \frac{1}{\mu_0} \int_0^t |K_1'(s) - 2k(0)| S_m(s) ds. \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
J_3 & \leq 2 \int_0^t |g'(s)| u_m(0,s) ds \leq \int_0^t S_m(s) ds + \frac{1}{\mu_0} \int_0^t |g'(s)|^2 ds \\
& \leq \int_0^t S_m(s) ds + \frac{\|g'\|_{L^2(0,T)}^2}{\mu_0} \leq \int_0^t S_m(s) ds + C_T.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$J_4 \leq 2|u_m(0,t)| \int_0^t |k(t-s)u_m(0,s)| ds \leq 2\sqrt{S_m(t)} \frac{1}{\mu_0} \int_0^t |k(t-s)| \sqrt{S_m(s)} ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon S_m(t) + \frac{1}{\varepsilon \mu_0^2} \int_0^t k^2(\theta) d\theta \int_0^t S_m(s) ds \\
&\leq \varepsilon S_m(t) + \frac{\|k\|_{L^2(0,T)}^2}{\varepsilon \mu_0^2} \int_0^t S_m(s) ds \leq \varepsilon S_m(t) + \frac{1}{\varepsilon} C_T \int_0^t S_m(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$J_5 \leq 2 \left| g(t) u_m(0, s) \right| \leq \varepsilon S_m(t) + \frac{1}{\varepsilon \mu_0} g^2(t) \leq \varepsilon S_m(t) + \frac{1}{\varepsilon} C_T. \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
J_6 &\leq 2 \left| \int_0^t u_m(0, \tau) d\tau \int_0^\tau k'(\tau - s) u_m(0, s) ds \right| \\
&\leq \int_0^t S_m(s) ds + \frac{T}{\mu_0^2} \int_0^t |k'(\theta)|^2 d\theta \int_0^t S_m(s) ds \\
&\leq \left(1 + \frac{T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2}{\mu_0^2} \right) \int_0^t S_m(s) ds \leq C_T \int_0^t S_m(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
J_7 &\leq 2 \int_0^t \langle f(s), u'_m(s) \rangle ds \leq \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \int_0^t S_m(s) ds \\
&\leq \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \int_0^t S_m(s) ds \leq C_T + \int_0^t S_m(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Từ (3.32), (3.36) – (3.42) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}
S_m(t) &\leq S_m(0) + 2|g(0)u_{0m}(0)| + 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)C_T + 2\varepsilon S_m(t) \\
&\quad + \int_0^t \left[2 + C_T + \frac{1}{\mu_0} (|\mu'(s)| + |K_1'(s) - 2k(0)|) \right] S_m(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Chọn $\varepsilon = \frac{1}{4}$ từ (3.43) ta được

$$\begin{aligned}
S_m(t) &\leq 2S_m(0) + 4|g(0)u_{0m}(0)| + 4\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)C_T \\
&\quad + 2 \int_0^t \left[2 + C_T + \frac{1}{\mu_0} (|\mu'(s)| + |K_1'(s) - 2k(0)|) \right] S_m(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Sử dụng giả thiết $(A_1) - (A_3)$, (A_5) và (3.6) – (3.7), ta có

$$\begin{aligned} 2S_m(0) + 4|g(0)u_{0m}(0)| &= ||u_{1m}||^2 + \mu(0)||u_{0mx}||^2 \\ &+ K_1(0)u_{0m}^2(0) + K||u_{0m}||^2 + 4|g(0)u_{0m}(0)| \leq C_1, \quad \forall m, \end{aligned} \quad (3.45)$$

với C_1 là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào $\mu(0), K_1(0), g(0), K, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$.

Từ (3.45) ta viết lại (3.44) như sau

$$S_m(t) \leq D_1(T, \varepsilon) + \int_0^t D_2(T, s) S_m(s) ds, \quad (3.46)$$

trong đó

$$\begin{cases} D_1(T, \varepsilon) = C_1 + 4\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)C_T, \\ D_2(T, s) = 2\left[2 + C_T + \frac{1}{\mu_0}(|\mu'(s)| + |K_1'(s) - 2k(0)|)\right]. \end{cases} \quad (3.47)$$

Dùng bổ đề Gronwall, ta thu được từ (3.46), rằng

$$S_m(t) \leq D_1(T, \varepsilon) e^{\int_0^t D_2(T, s) ds} \leq C_T^{(1)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T > 0, \quad (3.48)$$

trong đó $C_T^{(1)}$ hằng số chỉ phụ thuộc vào $T, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu, f, g, k, K_1, \lambda_1, K, \lambda$.

Từ (3.5)₂, (3.35), (3.48) và giả thiết (A_2) , ta thu được đánh giá sau

$$\begin{aligned} |P_m(t)| &\leq |g(t)| + |K_1(t)| \sqrt{\frac{C_T^{(1)}}{\mu_0}} + |\lambda_1(t)| \cdot |u'_m(0, t)| + \sqrt{\frac{C_T^{(1)}}{\mu_0}} \int_0^t |k(t-s)| ds \\ &\leq |g(t)| + \left[|K_1(t)| + \int_0^t |k(\theta)| d\theta \right] \sqrt{\frac{C_T^{(1)}}{\mu_0}} + |\lambda_1(t)| \cdot |u'_m(0, t)|. \end{aligned}$$

Do đó

$$||P_m||_{L^2(0, T)} \leq \tilde{C}_T^{(1)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.49)$$

Từ (3.31) và (3.48) – (3.49) ta suy ra rằng trích được dãy con của dãy $\{u_m\}$ mà vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

$$u_m \rightarrow u \text{ trong } L^\infty(0, T; V) \text{ yếu } *, \quad (3.50)$$

$$u'_m \rightarrow u' \text{ trong } L^\infty(0, T; L^2) \text{ yếu } *, \quad (3.51)$$

$$u_m(0, \cdot) \rightarrow u(0, \cdot) \text{ trong } H^1(0, T) \text{ yếu}, \quad (3.52)$$

$$P_m \rightarrow \tilde{P} \text{ trong } L^2(0, T) \text{ yếu}. \quad (3.53)$$

Hơn nữa, sử dụng bổ đề nhúng compact của Lions [4] ta suy từ (3.50) và (3.51) rằng tồn tại một dãy con của $\{u_m\}$, mà ta vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$, sao cho

$$u_m \rightarrow u \text{ trong } L^2(0, T; L^2) \equiv L^2(Q_T) \text{ mạnh và a.e. } Q_T. \quad (3.54)$$

Do $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$ là compact, nên từ (3.52) ta suy ra rằng

$$u_m(0, \cdot) \rightarrow u(0, \cdot) \text{ trong } C([0, T]) \text{ mạnh}. \quad (3.55)$$

Qua giới hạn (3.5) và nhờ vào (3.51), (3.54) – (3.55) ta được (u, P) thỏa bài toán sau

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle u'(t), v \rangle + \mu(t) \langle u_x(t), v_x \rangle + P(t)v(0) + \langle F(u, u'), v \rangle = \langle f(t), v \rangle, \forall v \in V, \\ P(t) = g(t) + K_1(t)u(0, t) + \lambda_1(t)u'(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \\ F(u, u') = Ku + \lambda u', \\ u(0) = \tilde{u}_0, \quad u'(0) = \tilde{u}_1. \end{cases} \quad (3.56)$$

Vậy, sự tồn tại nghiệm yếu (u, P) của bài toán (3.1) trong định lý 3.1 đã được chứng minh.

Bây giờ, ta tiếp tục chứng minh tính duy nhất của nghiệm yếu.

Bước 4: Sự duy nhất nghiệm

Để chứng minh tính duy nhất của nghiệm yếu, ta cần bổ đề sau

Bổ đề 3.2. *Giả sử u là nghiệm yếu của bài toán sau*

$$\begin{cases} u'' - \mu(t)u_{xx} + F_1 = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(1, t) = 0, \quad \mu(t)u_x(0, t) = P(t), \\ u(x, 0) = u'(x, 0) = 0, \\ u \in L^\infty(0, T; V), \quad u' \in L^\infty(0, T; L^2), \quad u(0, \cdot) \in H^1(0, T). \end{cases} \quad (3.57)$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \mu(t) \|u_x(t)\|^2 + \int_0^t P(s) u'(0, s) ds + \int_0^t \langle F_1(s), u'(s) \rangle ds \\ = \frac{1}{2} \int_0^t \mu'(s) \|u_x(s)\|^2 ds, \quad \text{a.e. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Chúng minh bổ đề trên có thể tham khảo cách chứng minh **định lý 1.5** trong ([4] Lions trang 22).

Giả sử $(u_1, P_1), (u_2, P_2)$ là hai nghiệm yếu của bài toán (3.1) sao cho

$$\begin{cases} u_i \in L^\infty(0, T; V), \quad u'_i \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u_i(0, \cdot) \in H^1(0, T), \quad P_i \in L^2(0, T), \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (3.59)$$

Thì (u, P) với $u = u_1 - u_2$ và $P = P_1 - P_2$ là nghiệm yếu của bài toán sau:

$$\begin{cases} u''(t) - \mu(t)u_{xx}(t) + Ku(t) + \lambda u'(t) = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(1, t) = 0, \quad \mu(t)u_x(0, t) = P(t), \\ P(t) = K_1(t)u(0, t) + \lambda_1(t)u'(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.60)$$

Áp dụng bổ đề 3.2 với $F_1 = Ku + \lambda u'$, và

$$P(t) = K_1(t)u(0, t) + \lambda_1(t)u_t(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds,$$

ta được

$$\begin{aligned}
& \|u'(t)\|^2 + \mu(t) \|u_x(t)\|^2 + K_1(t)u^2(0,t) + K \|u(t)\|^2 + 2 \int_0^t \lambda_1(s) |u'(0,s)|^2 ds \\
&= \int_0^t \mu'(s) \|u_x(s)\|^2 ds + \int_0^t K_1'(s)u^2(0,s)ds \\
&+ 2 \int_0^t u'(0,\tau) \int_0^\tau k(\tau-s)u(0,s)dsd\tau.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Từ các giả thiết (A₂), (A₃), (A₅) ta suy ra từ (3.61) rằng

$$\sigma(t) \leq \int_0^t \mu'(s) \|u_x(s)\|^2 ds + \int_0^t K_1'(s)u^2(0,s)ds + 2 \int_0^t u'(0,\tau) \int_0^\tau k(\tau-s)u(0,s)dsd\tau. \tag{3.62}$$

trong đó

$$\sigma(t) = \|u'(t)\|^2 + \mu(t) \|u_x(t)\|^2 + K_1(t)u^2(0,t) + 2 \int_0^t \lambda_1(s) |u'(0,s)|^2 ds. \tag{3.63}$$

Chú ý rằng

$$|u(0,t)| \leq \|u(t)\|_{C^0([0,1])} \leq \|u_x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\sigma(t)}{\mu_0}}. \tag{3.64}$$

Bây giờ, ta đánh giá các tích phân ở vế phải của (6.62) ta được

$$|I_1| \leq \int_0^t |\mu'(s)| \|u_x(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\mu_0} \int_0^t |\mu'(s)| \sigma(s) ds, \tag{3.65}$$

$$|I_2| \leq \int_0^t |K_1'(s)| |u(0,s)|^2 ds \leq \frac{1}{\mu_0} \int_0^t |K_1'(s)| \sigma(s) ds, \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq 2 \int_0^t |u'(0,\tau)| \int_0^\tau |k(\tau-s)| |u(0,s)| dsd\tau \\
&\leq \varepsilon \int_0^t |u'(0,\tau)|^2 d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_0^\tau |k(\tau-s)| |u(0,s)| ds \right)^2 d\tau
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\lambda_0} \sigma(t) + \frac{T}{\varepsilon\mu_0} \int_0^T k^2(\theta) d\theta \int_0^t \sigma(s) ds. \quad (3.67)$$

Chọn $\varepsilon = \lambda_0$ và từ (3.62), (3.65) – (3.67) ta được

$$\sigma(t) \leq \frac{1}{\mu_0} \int_0^t (|\mu'(s)| + |K_1'(s)|) \sigma(s) ds + \frac{T}{\lambda_0\mu_0} \int_0^T k^2(\theta) d\theta \int_0^t \sigma(s) ds + \frac{1}{2} S(t),$$

hay

$$\sigma(t) \leq \int_0^t \gamma(s) \sigma(s) ds, \quad (3.68)$$

trong đó

$$\gamma(s) = \frac{2}{\mu_0} (|\mu'(s)| + |K_1'(s)|) + \frac{T}{\alpha_0\mu_0} \int_0^T k^2(\theta) d\theta \in L^1(0, T).$$

Bằng cách sử dụng bổ đề Gronwall vào (3.68), ta suy ra rằng $\sigma \equiv 0$ hay $u_1 = u_2$.

Định lý 3.1 được chứng minh đầy đủ ■

Chương 4

TÍNH TRƠN CỦA NGHIỆM

Ta thành lập các giả thiết

- (H₁) $\tilde{u}_0 \in V \cap H^2$ và $\tilde{u}_1 \in V$,
- (H₂) $g, K_1, \lambda_1, k \in H^1(0, T), K_1(t) \geq 0, \lambda_1(t) \geq \lambda_0 > 0, \forall t \in [0, T]$
- (H₃) $\mu \in H^2(0, T), \mu(t) \geq \mu_0 > 0, \forall t \in [0, T]$,
- (H₄) $f, f' \in L^2(Q_T), Q_T = (0, 1) \times (0, T)$,
- (H₅) $K, \lambda \geq 0$.

Khi đó, ta có định lý sau:

Định lý 4.1. *Cho $T > 0$. Giả sử (H₁) - (H₅) đúng. Khi đó, bài toán (3.1) tồn tại duy nhất nghiệm yếu u thỏa:*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T; V \cap H^2), u' \in L^\infty(0, T; V), u'' \in L^\infty(0, T; L^2) \\ u(0, \cdot) \in H^2(0, T), P \in H^1(0, T). \end{cases} \quad (4.1)$$

Chứng minh định lý 4.1.

Bước 1. Xấp xỉ Galerkin

Chọn $\{w_j\}$ là một cơ sở đặc biệt của $V \cap H^2$. Ta tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán (3.3) dưới dạng

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m c_{mj}(t)w_j,$$

trong đó $c_{mj}(t)$ là nghiệm của hệ phương trình vi phân phi tuyến sau

$$\begin{cases} \langle u_m''(t), w_j \rangle + \mu(t) \langle u_{mx}(t), w_{jx} \rangle + P_m(t)w_j(0) \\ \quad + \langle F(u_m(t), u_m'(t)), w_j \rangle = \langle f(t), w_j \rangle, \quad j = \overline{1, m}, \\ P_m(t) = g(t) + K_1(t)u_m(0, t) + \lambda_1(t)u_m'(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_m(0, s)ds, \\ F(u_m(t), u_m'(t)) = Ku_m(t) + \lambda u_m'(t), \end{cases} \quad (4.2)$$

với

$$u_m(0) \equiv u_{0m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{mj} w_j \rightarrow \tilde{u}_0 \text{ mạnh trong } V \cap H^2, \quad (4.3)$$

$$u'_m(0) \equiv u_{1m} = \sum_{j=1}^m \beta_{mj} w_j \rightarrow \tilde{u}_1 \text{ mạnh trong } H^1. \quad (4.4)$$

Từ giả thiết (H₁) – (H₅) thì hệ (4.2) – (4.4) có nghiệm u_m trên khoảng $[0, T_m] \subset [0, T]$. Đánh giá tiên nghiệm sau cho phép lấy $T_m = T$, với mọi m .

Bước 2. Đánh giá tiên nghiệm

Đánh giá tiên nghiệm I

Tương tự như khi chứng minh định lý 3.1, từ các giả thiết (H₁) – (H₅) ta cũng thu được đánh giá

$$S_m(t) \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall T > 0. \quad (4.5)$$

trong đó

$$S_m(t) \equiv \|u'_m(t)\|^2 + \mu(t)\|u_{mx}(t)\|^2 + K_1(t)u_m^2(0, t) + 2 \int_0^t \lambda_1(s) |u'_m(0, s)|^2 ds, \quad (4.6)$$

với C_T là hằng số chỉ phụ thuộc vào $\mu, K_1, g, k, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, K, \lambda$.

Đánh giá tiên nghiệm II

Lấy đạo hàm theo t , trong (4.2)₁ ta được

$$\begin{aligned} \langle u_m'''(t), w_j \rangle + \mu'(t) \langle u_{mx}(t), w_{jx} \rangle + \mu(t) \langle u'_{mx}(t), w_{jx} \rangle + P'_m(t) w_j(0) \\ + \langle F'(u_m(t), u'_m(t)), w_j \rangle = \langle f'(t), w_j \rangle, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

trong đó,

$$\begin{aligned} P'_m(t) = g'(t) + K'_1(t) u_m(0, t) + K_1(t) u'_m(0, t) + \lambda'_1(t) u'_m(0, t) \\ + \lambda_1(t) u''_m(0, t) - k(0) u_m(0, t) - \int_0^t k'(t-s) u_m(0, s) ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nhân (4.7) với $c''_{mj}(t)$ và lấy tổng theo j , ta được

$$\begin{aligned} \langle u_m'''(t), u''_m(t) \rangle + \mu'(t) \langle u_{mx}(t), u''_{mx}(t) \rangle + \mu(t) \langle u'_{mx}(t), u''_{mx}(t) \rangle \\ + P'_m(t) u''_m(0) + \langle F'(u_m(t), u'_m(t)), u''_m(t) \rangle = \langle f'(t), u''_m(t) \rangle, \end{aligned} \quad (4.9)$$

Lấy tích phân (4.9) theo biến thời gian từ 0 đến t , ta thu được

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^t \langle u_m'''(s), u_m''(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \mu'(s) \langle u_{mx}(s), u_{mx}''(s) \rangle ds \\
& + 2 \int_0^t \mu(s) \langle u_{mx}'(s), u_{mx}''(s) \rangle ds + 2 \int_0^t P_m'(s) u_m''(0, s) ds \\
& + 2 \int_0^t \langle F'(u_m(s), u_m'(s)), u_m''(s) \rangle ds = 2 \int_0^t \langle f'(s), u_m''(s) \rangle ds. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần ta tính các tích phân ở vế trái của (4.10) như sau

$$I_1 = 2 \int_0^t \langle u_m'''(s), u_m''(s) \rangle ds = \|u_m''(t)\|^2 - \|u_m''(0)\|^2. \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2 \int_0^t \mu'(s) \langle u_{mx}(s), u_{mx}''(s) \rangle ds \\
&= 2\mu'(t) \langle u_{mx}(t), u_{mx}'(t) \rangle - 2\mu'(0) \langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle \\
&\quad - 2 \int_0^t \mu''(s) \langle u_{mx}(s), u_{mx}'(s) \rangle ds - 2 \int_0^t \mu'(s) \|u_{mx}'(s)\|^2 ds, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= 2 \int_0^t \mu(s) \langle u_{mx}'(s), u_{mx}''(s) \rangle ds = \int_0^t \mu(s) \frac{d}{ds} \|u_{mx}'(s)\|^2 ds \\
&= \mu(s) \|u_{mx}'(s)\|^2 \Big|_0^t - \int_0^t \mu'(s) \|u_{mx}'(s)\|^2 ds \\
&= \mu(t) \|u_{mx}'(t)\|^2 - \mu(0) \|u_{1mx}\|^2 - \int_0^t \mu'(s) \|u_{mx}'(s)\|^2 ds. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= 2 \int_0^t P_m'(s) u_m''(0, s) ds = 2 \int_0^t \lambda_1(s) |u_m''(0, s)|^2 ds \\
&+ 2 \int_0^t \left([K_1(s) + \lambda_1'(s)] u_m'(0, s) + [K_1'(s) - k(0)] u_m(0, s) \right) u_m''(0, s) ds \\
&+ 2 \int_0^t \left[g'(\tau) - \int_0^\tau k'(\tau - s) u_m(0, s) ds \right] u_m''(0, s) d\tau. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

$$I_5 = 2 \int_0^t \langle F'(u_m(s), u_m'(s)), u_m''(s) \rangle ds = 2 \int_0^t \langle Ku_m'(s) + \lambda u_m''(s), u_m''(s) \rangle ds$$

$$= K||u'_m(t)||^2 - K||u_{1m}||^2 + 2\lambda \int_0^t ||u''_m(s)||^2 ds. \quad (4.15)$$

Tổ hợp (4.10) – (4.15) ta được

$$\begin{aligned} X_m(t) &= X_m(0) + 2\mu'(0)\langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + K||u_{1m}||^2 - 2\mu'(t)\langle u_{mx}(t), u'_{mx}(t) \rangle \\ &\quad - K||u'_m(t)||^2 - 2\lambda \int_0^t ||u''_m(s)||^2 ds + 3 \int_0^t \mu'(s)||u'_{mx}(s)||^2 ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \mu''(s)\langle u_{mx}(s), u'_{mx}(s) \rangle ds - 2 \int_0^t [K_1(s) + \lambda'_1(s)]u'_m(0, s)u''_m(0, s)ds \\ &\quad - 2 \int_0^t [K'_1(s) - k(0)]u_m(0, s)u''_m(0, s)ds - 2 \int_0^t g'(s)u''_m(0, s)ds \\ &\quad + 2 \int_0^t u''_m(0, \tau) \int_0^\tau k'(\tau - s)u_m(0, s)ds d\tau + 2 \int_0^t \langle f'(s), u''_m(s) \rangle ds, \end{aligned} \quad (4.16)$$

trong đó

$$X_m(t) \equiv ||u''_m(t)||^2 + \mu(t)||u'_{mx}(t)||^2 + 2 \int_0^t \lambda_1(s)||u''_m(0, s)||^2 ds. \quad (4.17)$$

Từ giả thiết (H₅) ta suy ra từ (4.16) rằng

$$\begin{aligned} X_m(t) &\leq X_m(0) + 2\mu'(0)\langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + K||u_{1m}||^2 - 2\mu'(t)\langle u_{mx}(t), u'_{mx}(t) \rangle \\ &\quad + 3 \int_0^t \mu'(s)||u'_{mx}(s)||^2 ds + 2 \int_0^t \mu''(s)\langle u_{mx}(s), u'_{mx}(s) \rangle ds \\ &\quad - 2 \int_0^t [K_1(s) + \lambda'_1(s)]u'_m(0, s)u''_m(0, s)ds \\ &\quad - 2 \int_0^t [K'_1(s) - k(0)]u_m(0, s)u''_m(0, s)ds - 2 \int_0^t g'(s)u''_m(0, s)ds \\ &\quad + 2 \int_0^t u''_m(0, \tau) \int_0^\tau k'(\tau - s)u_m(0, s)ds d\tau + 2 \int_0^t \langle f'(s), u''_m(s) \rangle ds, \\ X_m(t) &\leq X_m(0) + 2\mu'(0)\langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + K||u_{1m}||^2 + \sum_{i=1}^8 J_i. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ta sử dụng bất đẳng thức Holder và các bất đẳng thức sau

$$|u_m(0, t)| \leq \|u_m(t)\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \|u_{mx}(t)\| \leq \sqrt{\frac{S_m(t)}{\mu_0}} \leq \sqrt{\frac{C_T^{(1)}}{\mu_0}}, \quad (4.19)$$

$$|u'_m(0, t)| \leq \|u'_m(t)\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \|u'_{mx}(t)\| \leq \sqrt{\frac{X_m(t)}{\mu_0}}, \quad (4.20)$$

$$2ab \leq \frac{1}{\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2, \quad \forall a, b \geq 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.21)$$

Để đánh giá các tích phân bên vế phải của (4.18)

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq 2|\mu'(t)| \cdot \langle u_{mx}(t), u'_{mx}(t) \rangle \\ &\leq 2|\mu'(t)| \|u_{mx}(t)\| \|u'_{mx}(t)\| \leq 2|\mu'(t)| \sqrt{\frac{C_T^{(1)}}{\mu_0}} \sqrt{\frac{X_m(t)}{\mu_0}} \\ &\leq \frac{|\mu'(t)|^2}{\varepsilon \mu_0^2} C_T^{(1)} + \varepsilon X_m(t) \leq \frac{1}{\varepsilon} C_T^{(2)} + \varepsilon X_m(t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$|J_2| \leq 3 \int_0^t |\mu'(s)| \|u'_{mx}(s)\|^2 ds \leq \frac{3}{\mu_0} \int_0^t |\mu'(s)| X_m(s) ds, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq 2 \int_0^t |\mu''(s)| \langle u_{mx}(s), u'_{mx}(s) \rangle ds \\ &\leq 2 \int_0^t \frac{|\mu''(s)|}{\mu_0} \sqrt{C_T^{(1)}} \sqrt{X_m(s)} ds \leq \frac{C_T^{(1)}}{\mu_0^2} \int_0^t |\mu''(s)|^2 ds + \int_0^t X_m(s) ds, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} |J_4| &\leq 2 \int_0^t |K_1(s) + \lambda'_1(s)| |u'_m(0, s)| |u''_m(0, s)| ds \\ &\leq 2 \int_0^t |K_1(s) + \lambda'_1(s)| \sqrt{\frac{X_m(s)}{2\mu_0\lambda_0}} \sqrt{2\lambda_0} |u''_m(0, s)| ds \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon\mu_0\lambda_0} \int_0^t |K_1(s) + \lambda'_1(s)|^2 X_m(s) ds + \varepsilon X_m(t), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} |J_5| &\leq 2 \int_0^t |K'_1(s) - k(0)| |u_m(0, s)| |u''_m(0, s)| ds \\ &\leq \frac{C_T^{(1)}}{2\varepsilon\mu_0\lambda_0} \int_0^t |K'_1(s) - k(0)|^2 ds + \varepsilon X_m(t), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$|J_6| \leq 2 \int_0^t |g'(s)| |u_m''(0, s)| ds \leq \frac{1}{\varepsilon 2\lambda_0} \int_0^t |g'(s)|^2 ds + \varepsilon X_m(t), \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} |J_7| &\leq 2 \int_0^t |u_m''(0, \tau)| \int_0^\tau |k(\tau - s)| |u_m(0, s)| ds d\tau \\ &\leq 2 \sqrt{\frac{C_T^{(1)}}{\mu_0}} \int_0^t |u_m''(0, \tau)| \int_0^\tau |k(\theta)| d\theta d\tau \\ &\leq 2 \sqrt{\frac{C_T^{(1)}}{2\lambda_0 \mu_0}} \int_0^t \sqrt{2\lambda_0} |u_m''(0, \tau)| \int_0^\tau |k(\theta)| d\theta d\tau \\ &\leq \frac{C_T^{(1)} T}{2\varepsilon \lambda_0 \mu_0} \int_0^t |k(\theta)|^2 d\theta + \varepsilon X_m(t), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$|J_8| \leq \int_0^t |\langle f'(s), u_m''(s) \rangle| \leq \int_0^t X_m(s) ds + \int_0^t \|f'(s)\|^2 ds. \quad (4.29)$$

Tổ hợp (4.18), (4.22) – (4.29) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} X_m(t) &\leq X_m(0) + 2\mu'(0) \langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + K \|u_{1m}\|^2 + 5\varepsilon X_m(t) \\ &\quad + \frac{C_T^{(1)}}{\mu_0^2} \left(\frac{|\mu'(t)|^2}{\varepsilon} + \int_0^t |\mu''(s)|^2 ds \right) + \frac{1}{2\varepsilon \lambda_0} \int_0^t |g'(s)|^2 ds + \int_0^t \|f'(s)\|^2 ds \\ &\quad + \frac{C_T^{(1)}}{2\varepsilon \lambda_0 \mu_0} \left(\int_0^t |K_1'(s) - k(0)|^2 ds + T \int_0^t |k(s)|^2 ds \right) \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{1}{2\varepsilon \lambda_0 \mu_0} |K_1(s) + \lambda_1'(s)|^2 + \frac{3}{\mu_0} |\mu'(s)| \right) X_m(s) ds + 2 \int_0^t X_m(s) ds. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Chọn $\varepsilon = \frac{1}{10}$ từ (4.30) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} X_m(t) &\leq 2X_m(0) + 4\mu'(0) \langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + 2K \|u_{1m}\|^2 \\ &\quad + \frac{2C_T^{(1)}}{\mu_0^2} \left(10 |\mu'(t)|^2 + \int_0^t |\mu''(s)|^2 ds \right) + \frac{10}{\lambda_0} \int_0^t |g'(s)|^2 ds + 2 \int_0^t \|f'(s)\|^2 ds \\ &\quad + \frac{10C_T^{(1)}}{\lambda_0 \mu_0} \left(\int_0^t |K_1'(s) - k(0)|^2 ds + T \int_0^t |k(s)|^2 ds \right) \end{aligned}$$

$$+ 2 \int_0^t \left(\frac{5}{\lambda_0 \mu_0} |K_1(s) + \lambda_1'(s)|^2 + \frac{3}{\mu_0} |\mu'(s)| + 2 \right) X_m(s) ds. \quad (4.31)$$

Sử dụng giả thiết $(A'_1) - (A'_3)$, (A'_5) và (4.3) – (4.4), ta có

$$2X_m(0) + 4\mu'(0)\langle u_{0mx}, u_{1mx} \rangle + 2K\|u_{1m}\|^2 \leq 2\|u_m''(0)\|^2 + C_2, \quad \forall m. \quad (4.32)$$

Khi đó C_2 là hằng số chỉ phụ thuộc vào $\mu, K, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$.

Bằng cách sử dụng (4.2) – (4.4) ta có

$$\langle u_m''(0), u_m''(0) \rangle - \mu(0)\langle u_{0mx}, u_m''(0) \rangle + \langle Ku_{0m} + \lambda u_{1m}, u_m''(0) \rangle = \langle f(0), u_m''(0) \rangle,$$

hay

$$\|u_m''(0)\| \leq \mu(0)\|u_{0mx}\| + K\|u_{0m}\| + \lambda\|u_{1m}\| + \|f(0)\|. \quad (4.33)$$

Từ (4.3) – (4.4), giả thiết $(H_3) - (H_5)$ và (4.33) ta suy ra rằng

$$\|u_m''(0)\| \leq C_3, \quad \forall m, \quad (4.34)$$

trong đó C_3 là hằng số chỉ phụ thuộc vào $\mu, K, \lambda, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} C_2 + 2C_3^2 + \frac{2C_T^{(1)}}{\mu_0^2} \left(10|\mu'(t)|^2 + \int_0^t |\mu''(s)|^2 ds \right) + \frac{10}{\lambda_0} \int_0^t |g'(s)|^2 ds + 2 \int_0^t \|f'(s)\|^2 ds \\ + \frac{10C_T^{(1)}}{\lambda_0 \mu_0} \left(\int_0^t |K_1'(s) - k(0)|^2 ds + T \int_0^t |k(s)|^2 ds \right) \leq M_T^{(3)}, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.35)$$

trong đó $M_T^{(3)}$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào T .

Từ (4.31) – (4.35) ta thu được đánh giá

$$X_m(t) \leq M_T^{(3)} + \int_0^t N_T^{(2)}(s) X_m(s) ds, \quad (4.36)$$

trong đó

$$N_T^{(2)}(t) = 2 \left(\frac{5}{\lambda_0 \mu_0} |K_1(t) + \lambda_1'(t)|^2 + \frac{3}{\mu_0} |\mu'(t)| + 2 \right), \quad N_T^{(2)} \in L^1(0, T).$$

Sử dụng bổ đề Gronwall cho (4.32) ta được

$$X_m(t) \leq M_T^{(3)} e^{\int_0^t N_T^{(2)}(s) ds} \leq C_T^{(2)}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.37)$$

Từ (4.5), (4.8), (4.17) và (4.37) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} \|P'_m\|_{L^2(0,T)} &\leq \int_0^T |g'(t)|^2 dt + \int_0^T [K_1(t) + \lambda'_1(t)]^2 |u'_m(0,t)|^2 dt \\ &\quad + \int_0^T [K'_1(t) + k(0)]^2 |u_m(0,t)|^2 dt + \int_0^T |\lambda_1(t)|^2 |u''_m(0,t)|^2 dt \\ &\quad + \int_0^T \left| \int_0^t k'(t-s) u_m(0,s) ds \right|^2 dt, \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} \|P'_m\|_{L^2(0,T)} &\leq \int_0^T |g'(t)|^2 dt + \frac{C_T^{(2)}}{\mu_0} \int_0^T [K_1(t) + \lambda'_1(t)]^2 dt + \frac{C_T^{(2)}}{2\lambda_0} \int_0^T |\lambda_1(t)|^2 dt \\ &\quad + \frac{C_T^{(1)}}{\mu_0} \int_0^T [K'_1(t) + k(0)]^2 dt + \frac{TC_T^{(1)}}{\mu_0} \left(\int_0^t k'(\theta) d\theta \right)^2. \end{aligned}$$

Do đó

$$\|P_m\|_{H^1(0,T)} \leq M_T^{(5)}. \quad (4.38)$$

Từ (4.5) và (4.37) – (4.38) ta suy ra rằng trích được dãy con của dãy $\{u_m\}$ mà vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

$$u_m \rightarrow u \text{ trong } L^\infty(0,T;V) \text{ yếu } *, \quad (4.39)$$

$$u'_m \rightarrow u' \text{ trong } L^\infty(0,T;V) \text{ yếu } *, \quad (4.40)$$

$$u''_m \rightarrow u'' \text{ trong } L^\infty(0,T;L^2) \text{ yếu } *, \quad (4.41)$$

$$u_m(0,.) \rightarrow u(0,.) \text{ trong } H^2(0,T) \text{ yếu}, \quad (4.42)$$

$$P_m \rightarrow \tilde{P} \text{ trong } H^1(0,T) \text{ yếu}. \quad (4.43)$$

Hơn nữa, sử dụng bổ đề nhúng compact của Lions ta suy từ (4.31) và (4.43) rằng tồn tại một dãy con của $\{u_m\}$, mà ta vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$, sao cho

$$u_m \rightarrow u \text{ trong } L^2(Q_T) \text{ mạnh và a.e. } Q_T. \quad (4.44)$$

$$u'_m \rightarrow u' \text{ trong } L^2(Q_T) \text{ mạnh và a.e. } Q_T. \quad (4.45)$$

$$u_m(0,.) \rightarrow u(0,.) \text{ trong } C^1([0,T]) \text{ mạnh}, \quad (4.46)$$

$$u'_m(0, \cdot) \rightarrow u'(0, \cdot) \text{ trong } C([0, T]) \text{ mạnh,} \quad (4.47)$$

$$P_m \rightarrow \tilde{P} \text{ trong } C([0, T]) \text{ mạnh.} \quad (4.48)$$

Từ (4.2)₂ và (4.44), (4.45) ta có

$$P_m(t) \rightarrow g(t) + K_1(t)u(0, t) + \lambda_1(t)u'(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds \equiv P(t) \\ \text{trong } C(0, T) \text{ mạnh.} \quad (4.47)$$

Từ (4.46) và (4.47) ta suy ra rằng

$$P(t) = \tilde{P}(t). \quad (4.48)$$

Qua giới hạn (4.2) và nhờ vào (4.37), (4.39), (4.42), (4.43) và (4.47), (4.48) ta được (u, P) thỏa bài toán sau:

$$\begin{cases} \langle u''(t), v \rangle + \mu(t)\langle u_x(t), v_x \rangle + P(t)v(0) + \langle F(u, u'), v \rangle = \langle f(t), v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ P(t) = g(t) + K_1(t)u(0, t) + \lambda_1(t)u'(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \\ F(u, u') = Ku + \lambda u', \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \quad (3.59)$$

Mặt khác, từ (3.59)₁ và giả thiết $(A'_3) - (A'_4)$ ta có

$$u_{xx} = \frac{1}{\mu(t)}[u_{tt} + Ku + \lambda u' - f] \in L^\infty(0, T; L^2)$$

Vậy, $u \in L^\infty(0, T; H^2)$ và sự tồn tại nghiệm yếu (u, P) của bài toán (3.1) đã được chứng minh.

Bây giờ, ta tiếp tục chứng minh tính duy nhất của nghiệm.

Bước 4: Sự duy nhất nghiệm

Giả sử $(u_1, P_1), (u_2, P_2)$ là hai nghiệm yếu của bài toán (3.1) sao cho

$$\begin{cases} u_i \in L^\infty(0, T; V \cap H^2), \quad u'_i \in L^\infty(0, T; V), \quad u''_i \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u_i(0, \cdot) \in H^1(0, T), \quad P_i \in L^2(0, T), \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (4.60)$$

Thì (u, P) với $u = u_1 - u_2$ và $P = P_1 - P_2$ là nghiệm yếu của bài toán sau:

$$\begin{cases} \langle u''(t), v \rangle + \mu(t) \langle u_x(t), v_x \rangle + P(t)v(0) + \langle Ku(t) + \lambda u'(t), v \rangle = 0, \\ P(t) = K_1(t)u(0, t) + \lambda_1(t)u'(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds, \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases} \quad (4.61)$$

Thay $v = u'$ vào (4.61), sau đó lấy tích phân theo biên thời gian từ 0 đến t , ta được.

$$\begin{aligned} S(t) = \int_0^t \mu'(s) \|u_x(s)\|^2 ds + \int_0^t K_1'(s) u^2(0, s) ds \\ + 2 \int_0^t u'(0, \tau) \int_0^\tau k(\tau-s) u(0, s) ds d\tau, \end{aligned} \quad (4.62)$$

trong đó

$$\sigma(t) = \|u'(t)\|^2 + \mu(t) \|u_x(t)\|^2 + K_1(t) u^2(0, t) + 2 \int_0^t \lambda_1(s) |u'(0, s)|^2 ds,$$

Chú ý rằng

$$\sigma(t) \geq \|u'(t)\|^2 + \mu_0 \|u_x(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u'(0, s)|^2 ds,$$

$$\|u(0, t)\| \leq \|u(t)\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \|u_x(t)\| \leq \sqrt{\frac{S(t)}{\mu_0}}$$

$$\sigma(t) \geq \int_0^t \mu'(s) \|u_x(s)\|^2 ds + \int_0^t K_1'(s) u^2(0, s) ds + 2 \int_0^t u'(0, \tau) \int_0^\tau k(\tau-s) u(0, s) ds d\tau.$$

Đánh giá các tích phân ở vế phải của (4.62) ta được

$$I_1 \leq \int_0^t |\mu'(s)| \cdot \|u_x(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\mu_0} \int_0^t |\mu'(s)| \sigma(s) ds,$$

$$I_2 \leq \int_0^t |K_1'(s)| |u(0, s)|^2 ds \leq \frac{1}{\mu_0} \int_0^t |K_1'(s)| \sigma(s) ds,$$

$$\begin{aligned} I_3 &\leq 2 \int_0^t |u'(0, \tau)| \int_0^\tau |k(\tau-s)| |u(0, s)| ds d\tau, \\ &\leq \varepsilon \int_0^t |u'(0, \tau)|^2 d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_0^\tau |k(\tau-s)| |u(0, s)| ds \right)^2 d\tau \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\lambda_0} \sigma(t) + \frac{T}{\varepsilon\mu_0} \int_0^T k^2(\theta) d\theta \int_0^t \sigma(s) ds.$$

Chọn $\varepsilon = \lambda_0$, thì ta được

$$\sigma(t) \leq \frac{1}{\mu_0} \int_0^t (|\mu'(s)| + |K_1'(s)|) \sigma(s) ds + \frac{T}{\alpha_0 \mu_0} \int_0^T k^2(\theta) d\theta \int_0^t \sigma(s) ds + \frac{1}{2\lambda_0} \sigma(t)$$

Vậy

$$\sigma(t) \leq \int_0^t \gamma(s) \sigma(s) ds,$$

trong đó

$$\gamma(s) = \frac{2}{\mu_0} (|\mu'(s)| + |K_1'(s)|) + \frac{T}{\alpha_0 \mu_0} \int_0^T k^2(\theta) d\theta \in L^1(0, T).$$

Bằng cách sử dụng bổ đề Gronwall, ta suy ra rằng $S \equiv 0$ hay $u_1 = u_2$.

Định lý 4.1 được chứng minh đầy đủ ■

Chương 5

ỔN ĐỊNH NGHIỆM

Trong chương này, chúng tôi khảo sát sự ổn định nghiệm yếu của bài toán (3.1). Giả sử các hàm $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$ thỏa giả thiết (H_1) . Theo định lý 4.1, bài toán (3.1) có duy nhất nghiệm yếu (u, P) phụ thuộc vào $K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1$.

$$u = u(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1), \quad P = P(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1). \quad (5.1)$$

trong đó $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$ thỏa các giả thiết $(H_2) - (H_5)$.

Đặt $\mathfrak{S}(\lambda_0, \mu_0) = \{(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1) : (K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1) \text{ thỏa } (H_2) - (H_5)\}$

với $\lambda_0 > 0, \mu_0 > 0$ là các hằng số cho trước.

Khi đó, ta có định lý sau

Định lý 5.1. *Giả sử $(H_1) - (H_5)$ thỏa. Khi đó, với mỗi $T > 0$, nghiệm yếu của bài toán (3.1) là ổn định với dữ kiện $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$ nghĩa là*

Nếu $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1), (K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j) \in \mathfrak{S}(\lambda_0, \mu_0)$ sao cho

$$\begin{cases} |K^j - K| + |\lambda^j - \lambda| \rightarrow 0, \quad \|\mu^j - \mu\|_{H^2(0,T)} \rightarrow 0, \\ \|\lambda_1^j - \lambda_1\|_{H^1(0,T)} \rightarrow 0, \quad \|f^j - f\|_{L^2(Q_T)} + \|f_t^j - f_t\|_{L^2(Q_T)} \rightarrow 0, \\ \|k^j - k\|_{H^1(0,T)} \rightarrow 0, \quad \|K_1^j - K_1\|_{H^1(0,T)} \rightarrow 0, \quad \|g^j - g\|_{H^1(0,T)} \rightarrow 0, \end{cases} \quad \text{khi } j \rightarrow +\infty, \quad (5.2)$$

thì

$$(u_j, u'_j, u_j(1, \cdot), P_j) \rightarrow (u, u', u(1, \cdot), P), \quad (5.3)$$

trong $L^\infty(0, T; V) \times L^\infty(0, T; L^2) \times H^1(0, T) \times L^2(0, T)$ khi $j \rightarrow +\infty$,

trong đó $u_j = u(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j)$, $P_j = P(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j)$

Chứng minh. Trước hết, ta chú ý rằng, nếu các dữ kiện $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$ thỏa

$$\begin{cases} |K| \leq K^*, |\lambda| \leq \lambda^*, \|\mu\|_{H^2(0,T)} \leq \mu^*, \|\lambda_1\|_{H^1(0,T)} \leq \lambda_1^*, \\ \|f\|_{L^2(Q_T)} + \|f_t\|_{L^2(Q_T)} \leq f^*, \|g\|_{H^1(0,T)} \leq g^*, \|k\|_{H^1(0,T)} \leq k^*, \|K_1\|_{H^1(0,T)} \leq K_1^*, \end{cases} \quad (5.4)$$

trong đó $(K^*, \lambda^*, \mu^*, \lambda_1^*, f^*, g^*, k^*, K_1^*)$ là các hằng số dương cố định. Khi đó, các đánh giá tiên nghiệm cho dãy $\{u_m, P_m\}$ trong chứng minh định lý 4.1 thỏa

$$\begin{cases} \|u'_m(t)\|^2 + \mu_0 \|u_{mx}(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u'_m(0,s)| ds \leq C_T^{(1)}, \quad \forall t \in [0, T], \\ \|u''_m(t)\|^2 + \mu_0 \|u'_{mx}(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u''_m(0,s)| ds \leq C_T^{(2)}, \quad \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (5.5)$$

trong đó $C_T^{(1)}, C_T^{(2)}$, là các hằng số chỉ phụ thuộc vào $T, u_0, u_1, \lambda_0, \mu_0, K^*, \lambda^*, f^*, g^*, \mu^*, \lambda_1^*, k^*, K_1^*$ (độc lập với $K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1$).

Do đó giới hạn (u, P) trong các không gian hàm thích hợp của dãy $\{(u_m, P_m)\}$ được xác định bởi (4.3) – (4.5), là nghiệm của bài toán (3.1) thỏa các đánh giá tiên nghiệm (5.5).

Do (5.2) nên ta có thể giả sử rằng tồn tại các hằng số dương $K^*, \lambda^*, f^*, g^*, \mu^*, \lambda_1^*, k^*, K_1^*$ sao cho dữ kiện $(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j) \in \mathfrak{S}(\lambda_0, \mu_0)$ thỏa (5.4), với $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1) = (K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j)$ Khi đó, nhờ vào nhận xét trên, ta có cặp nghiệm yếu (u_j, P_j) của bài toán (3.1) tương ứng với $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1) = (K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j)$ thỏa

$$\begin{cases} \|u'_j(t)\|^2 + \mu_0 \|u_{jx}(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u'_j(0,s)|^2 ds \leq C_T^{(1)}, \quad \forall t \in [0, T], \\ \|u''_j(t)\|^2 + \mu_0 \|u'_{jx}(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u''_j(0,s)|^2 ds \leq C_T^{(2)}, \quad \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (5.6)$$

Đặt

$$\begin{cases} \tilde{K}_j = K^j - K, \quad \tilde{\lambda}_j = \lambda^j - \lambda, \quad \tilde{\mu}_j = \mu^j - \mu, \quad \tilde{\lambda}_{1j} = \lambda_1^j - \lambda_1, \\ \tilde{f}_j = f^j - f, \quad \tilde{g}_j = g^j - g, \quad \tilde{k}_j = k^j - k, \quad \tilde{K}_{1j} = K_1^j - K_1. \end{cases} \quad (5.7)$$

Khi đó $v_j = u_j - u$ và $Q_j = P_j - P$ thỏa bài toán sau

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle v_j''(t), v \rangle + \mu(t) \langle v_{jx}(t), v_x \rangle + Q_j(t) v(0) + \langle K v_j(t) + \lambda v_j'(t), v \rangle \\ \quad = \langle \tilde{f}_j(t), v \rangle - \tilde{\mu}_j(t) \langle u_{jx}(t), v_x \rangle - \langle \tilde{K}_j u_j(t) + \tilde{\lambda}_j u_j'(t), v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ Q_j(t) = \hat{g}_j(t) + K_1(t) v_j(0, t) + \lambda_1(t) v_j'(0, t) - \int_0^t k(t-s) v_j(0, s) ds, \\ v_j(x, 0) = v_j'(x, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (5.8)$$

với

$$\hat{g}_j(t) = \tilde{g}_j(t) + \tilde{K}_{1j}(t) u_j(0, t) + \tilde{\lambda}_{1j}(t) u_j'(0, t) - \int_0^t \tilde{k}_j(t-s) u_j(0, s) ds. \quad (5.9)$$

Trong (5.8)₁, thay $v = v_j'$ sau đó lấy tích phân theo biến thời gian từ 0 đến t ta được

$$\begin{aligned} \checkmark \quad & \int_0^t \langle v_j''(s), v_j'(s) \rangle ds = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} (||v_j'(s)||^2) ds = \frac{1}{2} ||v_j'(t)||^2 \\ \checkmark \quad & \int_0^t \mu(s) \langle v_{jx}(s), v_{jx}'(s) \rangle ds = \frac{1}{2} \int_0^t \mu(s) \frac{d}{ds} (||v_j(s)||^2) ds \\ & = \frac{1}{2} \mu(t) ||v_j(t)||^2 - \frac{1}{2} \int_0^t \mu'(s) ||v_j(s)||^2 ds \\ \checkmark \quad & \int_0^t Q_j(s) v_j'(0, s) ds = \underbrace{\int_0^t K_1(s) v_j(0, s) v_j'(0, s) ds}_I + \int_0^t \lambda_1(s) |v_j'(0, s)|^2 ds \\ & \quad - \int_0^t \left(\int_0^r k(r-s) v_j(0, s) ds + \hat{g}_j(r) \right) v_j'(0, r) dr \\ I &= \frac{1}{2} \int_0^t K_1(s) \frac{d}{ds} |v_j(0, s)|^2 ds = \frac{1}{2} K_1(t) |v_j(0, t)|^2 - \frac{1}{2} \int_0^t K_1'(s) |v_j(0, s)|^2 ds \\ \checkmark \quad & \int_0^t \langle K v_j(s) + \lambda v_j'(s), v_j'(s) \rangle ds = K \int_0^t \langle v_j(s), v_j'(s) \rangle ds + \lambda \int_0^t \langle v_j'(s), v_j'(s) \rangle ds \\ & = \frac{K}{2} ||v_j(t)||^2 + \lambda \int_0^t ||v_j'(s)||^2 ds, \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned}
S_j(t) = & \int_0^t \mu'(s) \|v_{jx}(s)\|^2 ds + \int_0^t K_1'(s) |v_j(0, s)|^2 ds \\
& + 2 \int_0^t \left(\int_0^r k(r-s) v_j(0, s) ds + \hat{g}_j(r) \right) v_j'(0, r) dr + 2 \int_0^t \langle \tilde{f}_j, v_j'(s) \rangle ds \\
& - 2 \tilde{\mu}_j(t) \langle u_{jx}(t), v_{jx}(t) \rangle + 2 \int_0^t \tilde{\mu}_j'(s) \langle u_{jx}(s), v_{jx}(s) \rangle ds \\
& + 2 \int_0^t \tilde{\mu}_j(s) \langle u_{jx}'(s), v_{jx}(s) \rangle ds - 2 \int_0^t \langle \tilde{K}_j u_j(s) + \tilde{\lambda}_j u_j'(s), v_j'(s) \rangle ds,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
S_j(t) = & \|v_j'(t)\|^2 + \mu(t) \|v_{jx}(t)\|^2 + K_1(t) |v_j(0, t)|^2 + 2 \int_0^t \lambda_1(s) |v_j'(0, s)|^2 ds \\
& + K \|v_j(t)\|^2 + 2 \lambda \int_0^t \|v_j'(s)\|^2 ds.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Sử dụng (H₂) và (H₃) vào (5.11), thu được

$$S_j(t) \geq \|v_j'(t)\|^2 + \mu_0 \|v_{jx}(t)\|^2 + 2 \lambda_0 \int_0^t |v_j'(0, s)|^2 ds. \tag{5.12}$$

Bây giờ, ta lần lượt đánh giá các tích phân bên vế phải của (5.10) ta được

Ở đây để cho tiện cho việc trình bày, chúng tôi sử dụng ký hiệu $\|\cdot\|_\infty$ để chỉ $\|\cdot\|_{L^\infty(0, T)}$.

Tích phân thứ nhất

$$I_1 \leq \int_0^t |\mu'(s)| \cdot \|v_{jx}(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\mu_0} \int_0^t |\mu'(s)| S_j(s) ds \leq \frac{\|\mu'\|_\infty}{\mu_0} \int_0^t S_j(s) ds. \tag{5.13}$$

Tích phân thứ hai

$$\begin{aligned}
I_3 & \leq \int_0^t |K_1'(s)| \cdot |v_j(0, s)|^2 ds \leq \int_0^t |K_1'(s)| \cdot \|v_{jx}(s)\|^2 ds \\
& \leq \frac{1}{\mu_0} \int_0^t |K_1'(s)| S_j(s) ds \leq \frac{\|K_1'\|_\infty}{\mu_0} \int_0^t S_j(s) ds.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Tích phân thứ ba

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq 2 \int_0^t \left| \int_0^r k(r-s) v_j(0, s) ds + \hat{g}_j(s) \right| |v_j'(0, s)| dr \\
&\leq \int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^r k(r-s) v_j(0, s) ds + \hat{g}_j(s) \right)^2 + \varepsilon |v_j'(0, s)|^2 \right) dr \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_0^r k(r-s) v_j(0, s) ds + \hat{g}_j(s) \right)^2 dr + \varepsilon \int_0^t |v_j'(0, s)|^2 dr \\
&\leq \frac{2}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_0^r k(r-s) v_j(0, s) ds \right)^2 dr + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^t |\hat{g}_j(r)|^2 dr + \frac{\varepsilon}{2\lambda_0} S_j(t) \\
&\leq \frac{2}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_0^r |k(r-s)|^2 ds \int_0^r |v_j(0, s)|^2 ds \right) dr + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^t |\hat{g}_j(r)|^2 dr + \frac{\varepsilon}{2\lambda_0} S_j(t) \\
&\leq \frac{2}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_0^r |k(r-s)|^2 ds \int_0^r \|v_{jx}(s)\|^2 ds \right) dr + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^t |\hat{g}_j(r)|^2 dr + \frac{\varepsilon}{2\lambda_0} S_j(t) \\
&\leq \frac{2T \|k\|_{L^2(0,T)}^2}{\varepsilon \mu_0} \int_0^t S_j(s) ds + \frac{2 \|\hat{g}_j\|_{L^2(0,T)}^2}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2\lambda_0} S_j(t).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Tích phân thứ tư

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq 2 \int_0^t \|\tilde{f}_j(s)\| \cdot \|v_j'(s)\| ds \leq \int_0^t \|\tilde{f}_j(s)\|^2 ds + \int_0^t \|v_j'(s)\|^2 ds \\
&\leq \|\tilde{f}_j\|_{L^2(Q_T)}^2 + \int_0^t S_j(s) ds.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Tích phân thứ năm

$$\begin{aligned}
I_5 &\leq 2 \|\tilde{\mu}_j(t)\| |\langle u_{jx}(t), v_{jx}(t) \rangle| \leq 2 \|\tilde{\mu}_j\|_{\infty} \|u_{jx}(t)\| \|v_{jx}(t)\| \\
&\leq 2 \frac{\|\tilde{\mu}_j\|_{\infty}}{\mu_0} \sqrt{C_T^{(1)}} \sqrt{S_j(t)} \leq \frac{\|\tilde{\mu}_j\|_{\infty}^2}{\varepsilon \mu_0^2} C_T^{(1)} + \varepsilon S_j(t).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Tích phân thứ sáu

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq 2 \int_0^t \|\tilde{\mu}_j'(s)\| \cdot |\langle u_{jx}(s), v_{jx}(s) \rangle| ds \leq 2 \int_0^t \|\tilde{\mu}_j'\|_{\infty} \|u_{jx}(s)\| \|v_{jx}(s)\| ds \\
&\leq \int_0^t 2 \frac{\|\tilde{\mu}_j'\|_{\infty}}{\mu_0} \sqrt{C_T^{(1)}} \sqrt{S_j(s)} ds \leq \frac{\|\tilde{\mu}_j'\|_{\infty}^2}{\mu_0^2} T C_T^{(1)} + \int_0^t S_j(s) ds.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Tích phân thứ bảy

$$\begin{aligned}
I_7 &\leq 2 \int_0^t |\tilde{\mu}_j(s)| \cdot \langle u'_j(s), v_{jx}(s) \rangle ds \leq 2 \int_0^t \|\tilde{\mu}_j\|_\infty \|u'_j(s)\| \|v_{jx}(s)\| ds \\
&\leq \int_0^t 2 \frac{\|\tilde{\mu}_j\|_\infty}{\mu_0} \sqrt{C_T^{(2)}} \cdot \sqrt{S_j(s)} ds \leq \frac{\|\tilde{\mu}_j\|_\infty^2}{\mu_0^2} TC_T^{(2)} + \int_0^t S_j(s) ds.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Tích phân thứ tám

$$\begin{aligned}
I_8 &\leq 2 \int_0^t \langle \tilde{K}_j u_j(s) + \tilde{\lambda}_j u'_j(s), v'_j(s) \rangle ds \\
&\leq 2 \int_0^t \langle \tilde{K}_j u_j(s), v'_j(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle \tilde{\lambda}_j u'_j(s), v'_j(s) \rangle ds \\
&\leq 2 |\tilde{K}_j| \int_0^t \langle u_j(s), v'_j(s) \rangle ds + 2 |\tilde{\lambda}_j| \int_0^t \langle u'_j(s), v'_j(s) \rangle ds \\
&\leq 2 |\tilde{K}_j| \int_0^t \|u_j(s)\| \|v'_j(s)\| ds + 2 |\tilde{\lambda}_j| \int_0^t \|u'_j(s)\| \|v'_j(s)\| ds \\
&\leq 2 \frac{|\tilde{K}_j|}{\sqrt{\mu_0}} \int_0^t \sqrt{C_T^{(1)}} \cdot \sqrt{S_j(s)} ds + 2 |\tilde{\lambda}_j| \int_0^t \sqrt{C_T^{(1)}} \cdot \sqrt{S_j(s)} ds \\
&\leq \frac{|\tilde{K}_j|^2 TC_T^{(1)}}{\mu_0} + \int_0^t S_j(s) ds + |\tilde{\lambda}_j|^2 TC_T^{(1)} + \int_0^t S_j(s) ds.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Tổ hợp (5.10) và (5.13) – (5.20), ta có

$$\begin{aligned}
S_j(t) &\leq \varepsilon \left(\frac{1}{2\lambda_0} + 1 \right) S_j(t) + \frac{2\|\hat{g}_j\|_{L^2(0,T)}^2}{\varepsilon} + \|\tilde{f}_j\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{\|\tilde{\mu}_j\|_\infty}{\varepsilon \mu_0^2} C_T^{(1)} \\
&\quad + \frac{\|\tilde{\mu}'_j\|_\infty^2}{\mu_0^2} TC_T^{(1)} + \frac{\|\tilde{\mu}_j\|_\infty^2}{\mu_0^2} TC_T^{(2)} + \frac{|\tilde{K}_j|^2}{\mu_0} TC_T^{(1)} + |\tilde{\lambda}_j|^2 TC_T^{(1)} \\
&\quad + \left(5 + \frac{\|\mu'\|_\infty}{\mu_0} + \frac{\|K_1'\|_\infty}{\mu_0} + \frac{2T\|k\|_{L^2(0,T)}^2}{\varepsilon \mu_0} \right) \int_0^t S_j(s) ds,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

với mọi $\varepsilon > 0$ và $t \in [0, T]$.

Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\varepsilon \left(\frac{1}{2\lambda_0} + 1 \right) \leq \frac{1}{2}$ và ta ký hiệu

$$\begin{aligned}\tilde{R}_j = & 2(4\|\hat{g}_j\|_{L^2(0,T)}^2 + \|\tilde{f}_j\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{\|\tilde{\mu}_j\|_\infty}{\varepsilon\mu_0^2}C_T^{(1)} + \frac{\|\tilde{\mu}_j'\|_\infty^2}{\mu_0^2}TC_T^{(1)}) \\ & + 2(\frac{\|\tilde{\mu}_j\|_\infty^2}{\mu_0^2}TC_T^{(2)} + \frac{|\tilde{K}_j|^2}{\mu_0}TC_T^{(1)} + |\tilde{\lambda}_j|^2TC_T^{(1)}),\end{aligned}\quad (5.22)$$

$$\hat{C}_T = 2\left(5 + \frac{\|\mu'\|_\infty}{\mu_0} + \frac{\|K_1'\|_\infty}{\mu_0} + \frac{2T\|k\|_{L^2(0,T)}^2}{\varepsilon\mu_0}\right). \quad (5.23)$$

Từ (5.21) - (5.23) ta có

$$S_j(t) \leq \tilde{R}_j + \hat{C}_T \int_0^t S_j(s)ds, \quad (5.24)$$

Sử dụng bổ đề Gronwalls và từ (5.24) ta suy ra rằng

$$S_j(t) \leq \tilde{R}_j \exp(\hat{C}_T T) \leq C_T^* \tilde{R}_j, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.25)$$

Do phép nhúng $H^1(0, T) \hookrightarrow C([0, T])$ là compact nên từ (5.8)₂, (5.9) và (5.25)

$$\begin{aligned}\|Q_j\|_{L^2(0,T)} & \leq \|\hat{g}_j\|_{L^2(0,T)} + \left(\frac{\|K_1\|_\infty}{\sqrt{\mu_0}} + \frac{\|\lambda_1\|_\infty}{\sqrt{2\lambda_0}}\right)\sqrt{C_T^* \tilde{R}_j} \\ & + \left(\sqrt{\frac{T}{\mu_0}}T \int_0^T k^2(\theta)d\theta\right)C_T^* \tilde{R}_j,\end{aligned}\quad (5.26)$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_j & \leq \frac{4}{\beta}\|\hat{g}_j\|_{L^2(0,T)}^2 + 2\|\tilde{f}_j\|_{L^2(0,T)}^2 + 8T\frac{M_T}{\mu_0}\|\tilde{\mu}_j\|_{H^1(0,T)} \\ & + 8T\frac{M_T}{\mu_0}\left(|\tilde{K}_j| + \sqrt{\mu_0}|\tilde{\lambda}_j|\right),\end{aligned}\quad (5.27)$$

$$\begin{aligned}\|\hat{g}_j\|_{L^2(0,T)} & \leq \|\tilde{g}_j\|_{H^1(0,T)} + \sqrt{\frac{M_T}{\mu_0}}\|\tilde{K}_{1j}\|_{H^1(0,T)} \\ & + \sqrt{\frac{M_T}{\mu_0}}\|\tilde{\lambda}_{1j}\|_{H^1(0,T)} + \sqrt{T}\sqrt{\frac{M_T}{\mu_0}}\|\tilde{k}_j\|_{H^1(0,T)}.\end{aligned}\quad (5.28)$$

Từ (5.2), (5.4) và các đánh giá (5.25) – (5.28) ta suy ra (5.3) đúng.

Định lý 5.1 được chứng minh đầy đủ ■

Chương 6

DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN

VÀ KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM

6.1. Giới thiệu

Trong chương này, chúng tôi giả sử rằng $K_1(t) = K_1 \geq 0$ (hằng số) và $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \mu, \lambda_1, f, g, k)$ thỏa các giả thiết $(H_1) - (H_4)$. Kết quả của chương 6 bao gồm hai định lý 6.1 và định lý 6.2. Trong đó, định lý 6.1 cho ta một kết quả về dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu của bài toán (1.1) – (1.3) khi ba tham số bé $\varepsilon \equiv (K, \lambda, K_1) \rightarrow (0_+, 0_+, 0_+) \equiv 0_+$. Định lý 6.2 cho phép ta xấp xỉ nghiệm yếu đó bởi một đa thức theo ba tham số nhiều này.

Cho $(K, \lambda, K_1) \in \mathbb{R}_+^3$, thì từ định lý 4.1, bài toán (1.1) – (1.3) có duy nhất nghiệm yếu (u, P) phụ thuộc vào (K, λ, K_1) :

$$u \equiv u_\varepsilon = u(K, \lambda, K_1), \quad P \equiv P_\varepsilon = P(K, \lambda, K_1). \quad (6.1)$$

Ta xét bài toán nhiều dưới đây theo ba tham số bé $\varepsilon = (K, \lambda, K_1)$ thỏa $0 \leq K \leq K_*$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$, $0 \leq K_1 \leq K_{1*}$ (K_* , λ_* , K_{1*} là các hằng số cố định).

$$\left\{ \begin{array}{l} Au \equiv u_{tt} - \mu(t)u_{xx} = -Ku - \lambda u_t + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(1, t) = 0, \quad \mu(t)u_x(0, t) = P(t), \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \\ P(t) = g(t) + Ku(0, t) + \lambda_1(t)u'(0, t) - \int_0^t k(t-s)u(0, s)ds. \end{array} \right. \quad (\tilde{Q}_\varepsilon)$$

6.2. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu khi $(K, \lambda, K_1) \rightarrow (0_+, 0_+, 0_+)$.

Trước tiên, chúng tôi sẽ nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ của bài toán $(\tilde{Q}_\varepsilon)$ phụ thuộc vào các tham số bé $\varepsilon = (K, \lambda, K_1)$. Khi đó, ta có định lý sau

Định lý 6.1. *Cho $T > 0$. Giả sử $(A_1) - (A_4)$ đúng. Khi đó*

(i) Bài toán $(\tilde{Q}_0)$ tương ứng với $\varepsilon = 0$ có nghiệm duy nhất $(u_0, P_0) \equiv (u_{0,0,0}, P_{0,0,0})$ thỏa

$$u_0 \in W(T), \quad u_0(0, \cdot) \in H^2(0, T), \quad P_0 \in H^1(0, T). \quad (6.2)$$

(ii) Nghiệm $(u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ hội tụ mạnh trong $W(T) \times L^2(0, T)$ về (u_0, P_0) khi $\varepsilon \rightarrow 0_+$, trong đó, $W(T) = \{v \in L^\infty(0, T; V) : v_t \in L^\infty(0, T; L^2)\}$.

Hơn nữa, chúng ta có đánh giá tiệm cận

$$\begin{cases} \|u_\varepsilon - u_0\|_{W(T)} + \|u'_\varepsilon(0, \cdot) - u'_0(0, \cdot)\|_{L^2(0, T)} \leq C_T \sqrt{K^2 + \lambda^2 + K_1^2}, \\ \|P_\varepsilon - P_0\|_{L^2(0, T)} \leq C_T \sqrt{K^2 + \lambda^2 + K_1^2}, \end{cases} \quad (6.3)$$

trong đó, C_T là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào T .

Chứng minh định lý 6.1

Ta chú rằng, với ba tham số bé $\varepsilon = (K, \lambda, K_1)$ thỏa $0 \leq K \leq K_*$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$, $0 \leq K_1 \leq K_{1*}$ (K_* , λ_* , K_{1*} là các hằng số cố định), thì tương tự như trong chương 4, ta cũng thu được đánh giá tiên nghiệm sau

$$\begin{cases} \| |u'_m(t)|^2 + \mu_0 \|u_{mx}(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u'_m(0, s)|^2 ds \leq C_T, \\ \|P_m\|_{L^2(0, T)} \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T > 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

và

$$\begin{cases} \| |u''_m(t)|^2 + \mu_0 \|u'_{mx}(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u''_m(0, s)|^2 ds \leq C_T, \\ \|P'_m\|_{L^2(0, T)} \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T > 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

trong đó, $\{(u_m, P_m)\}$ là dãy xấp xỉ Galerkin của bài toán $(\tilde{Q}_\varepsilon)$ và C_T là hằng số chỉ phụ thuộc T .

Ta chú ý rằng $W(T)$ là không gian Banach thực với chuẩn định bởi

$$\|u\|_{W(T)}^2 = \|u_t\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2 + \|u\|_{L^\infty(0, T; V)}^2 \quad (6.6)$$

Xét $\varepsilon_* > 0$ cố định và các tham số $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$. Chứng minh tương tự như trong định lý 4.1 với $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, ta thu được các kết quả sau

$$\begin{cases} \|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \mu_0 \|u_{\varepsilon x}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u'_\varepsilon(0,s)|^2 ds \leq \hat{C}_T, \\ \|P_\varepsilon\|_{L^2(0,T)} \leq \hat{C}_T, \quad \forall \varepsilon > 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

và

$$\begin{cases} \|u''_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \mu_0 \|u'_{\varepsilon x}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u''_\varepsilon(0,s)|^2 ds \leq \hat{C}_T, \\ \|P'_\varepsilon\|_{L^2(0,T)} \leq \hat{C}_T, \quad \forall \varepsilon > 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

trong đó $\hat{C}_T$ là một hằng số độc lập $\forall m$ và với mọi $\varepsilon > 0$.

Xét dãy $\{\varepsilon_m\}$ sao cho $\varepsilon_m \rightarrow 0_+$ khi $m \rightarrow +\infty$. Từ (6.7) – (6.8) ta trích được dãy con của dãy $\{(u_{\varepsilon_m}, P_{\varepsilon_m})\}$ mà vẫn ký hiệu là $\{(u_{\varepsilon_m}, P_{\varepsilon_m})\}$, sao cho

$$u_{\varepsilon_m} \rightarrow u_* \quad \text{trong } L^\infty(0,T;V) \text{ yếu } *, \quad (6.9)$$

$$u'_{\varepsilon_m} \rightarrow u'_* \quad \text{trong } L^\infty(0,T;V) \text{ yếu } *, \quad (6.10)$$

$$u_{\varepsilon_m}(0, \cdot) \rightarrow u_*(0, \cdot) \quad \text{trong } H^2(0,T) \text{ yếu}, \quad (6.11)$$

$$K_{1m} u_{\varepsilon_m}(0, \cdot) \rightarrow \zeta \quad \text{trong } H^2(0,T) \text{ yếu}, \quad (6.12)$$

$$P_{\varepsilon_m} \rightarrow P_* \quad \text{trong } H^1(0,T) \text{ yếu}. \quad (6.13)$$

Hơn nữa, do bổ đề nhúng compact của Lion và (6.9), (6.10) ta suy ra rằng

$$u_{\varepsilon_m} \rightarrow u_* \quad \text{trong } L^2(0,T;L^2) \equiv L^2(Q_T) \text{ mạnh và a.e. } Q_T. \quad (6.14)$$

Do $H^2(0,T) \hookrightarrow C^1([0,T])$ và $H^1(0,T) \hookrightarrow C^0([0,T])$ compact, nên từ (6.12), (6.13)

ta suy ra rằng

$$K_{1m} u_{\varepsilon_m}(0, \cdot) \rightarrow \zeta \quad \text{mạnh trong } C^1([0,T]), \quad (6.15)$$

$$P_{\varepsilon_m} \rightarrow P_* \quad \text{mạnh trong } C^0([0,T]). \quad (6.16)$$

Mặt khác, từ (6.11) ta lại có

$$K_{1m} u_{\varepsilon_m}(0, \cdot) \rightarrow 0 \quad \text{trong } H^2(0,T) \text{ yếu}, \quad (6.17)$$

Từ (6.15), (6.17) ta suy ra rằng

$$K_{1m} u_{\varepsilon_m}(0, \cdot) \rightarrow 0 \quad \text{mạnh trong } C^1([0, T]). \quad (6.18)$$

Tương tự, từ (6.18) ta cũng chứng minh được rằng

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon_m}(t) &= g(t) + K_{1m} u_{\varepsilon_m}(0, t) + \lambda_1(t) u'_{\varepsilon_m}(0, t) - \int_0^t k(t-s) u_{\varepsilon_m}(0, s) ds \\ &\rightarrow g(t) + \lambda_1(t) u'(0, t) - \int_0^t k(t-s) u(0, s) ds = P_0(t) \quad \text{mạnh trong } C^0([0, T]). \end{aligned}$$

Bằng cách qua giới hạn giống như trong chương 4, ta suy ra (u_*, P_*) là nghiệm yếu bài toán $(\tilde{Q}_0)$ ứng với $\varepsilon = 0$ và thỏa (6.2). Hơn nữa, do tính duy nhất của nghiệm yếu, nên chúng ta có $(u_*, P_*) = (u_0, P_0)$.

Đặt $u = u_{\varepsilon_m} - u_0$ và $P = P_{\varepsilon_m} - P_0$, khi đó (u, P) thỏa :

$$\left\{ \begin{aligned} &\langle u'', v \rangle + \mu(t) \langle u_x, v \rangle + P(t) v(0) + \langle Ku + \lambda u', v \rangle \\ &\quad = -\langle Ku_0 + \lambda u'_0, v \rangle, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ &u(0) = u'(0) = 0, \\ &P(t) = K_1[u(0, t) + u_0(0, t)] + \lambda_1(t) u'(0, t) - \int_0^t k(t-s) u(0, s) ds. \end{aligned} \right. \quad (6.19)$$

Trong (6.19)₁ ta thay $v = u'$, sau đó lấy tích phân theo biến thời gian t , ta được

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_0^t \mu'(s) \|u_x(s)\|^2 ds + 2k(0) \int_0^t u_m^2(0, s) ds + 2u(0, t) \int_0^t k(t-s) u(0, s) ds \\ &\quad - 2 \int_0^t u(0, \tau) \int_0^\tau k'(\tau-s) u(0, s) ds d\tau - 2K_1 \int_0^t u_0(0, s) u'(0, s) ds \\ &\quad - 2K \int_0^t \langle u_0(s), u'(s) \rangle ds - 2\lambda \int_0^t \langle u'_0(s), u'(s) \rangle ds \end{aligned} \quad (6.20)$$

Trong đó

$$Z(t) = \|u'(t)\|^2 + \mu(t) \|u_x(t)\|^2 + K_1 u^2(0, t) + 2 \int_0^t \lambda_1(s) |u'(0, s)|^2 ds$$

$$+ K||u(t)||^2 + 2\lambda \int_0^t ||u'(s)||^2 ds. \quad (6.21)$$

Chú ý từ (6.21) ta suy ra rằng

$$|u(0, t)| \leq ||u(t)||_{C^0(\bar{\Omega})} \leq ||u_x(t)|| \leq \sqrt{\frac{\sigma(t)}{\mu_0}}. \quad (6.22)$$

Đánh giá lần lượt các số hạng bên vế phải của (6.20) như sau

$$\blacksquare \quad \int_0^t \mu'(s) ||u_x(s)||^2 ds \leq \frac{||\mu||_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0} \int_0^t Z(s) ds \quad (6.23)$$

$$\blacksquare \quad 2k(0) \int_0^t u_m^2(0, s) ds \leq \frac{2||k||_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0} \int_0^t Z(s) ds \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & 2u(0, t) \int_0^t k(t-s)u(0, s) ds \leq \beta u^2(0, t) + \frac{1}{\beta} \left(\int_0^t k(t-s)u(0, s) ds \right)^2 \\ & \leq \frac{\beta}{\mu_0} Z(t) + \frac{||k||_{L^2(0,T)}^2}{\mu_0 \beta} \int_0^t Z(s) ds, \quad \forall \beta > 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & -2 \int_0^t u(0, \tau) \int_0^\tau k'(\tau-s)u(0, s) ds d\tau \leq 2 \int_0^t |u(0, \tau)| \int_0^\tau |k'(\tau-s)u(0, s)| ds d\tau \\ & \leq \int_0^t \left[u^2(0, \tau) + \left(\int_0^\tau k'(\tau-s)u(0, s) ds \right)^2 \right] d\tau \\ & \leq \frac{1}{\mu_0} (1 + T ||k'||_{L^2(0,T)}^2) \int_0^t Z(s) ds \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & -2K_1 \int_0^t u_0(0, s)u'(0, s) ds \leq \frac{K_1^2}{\lambda_0} \int_0^t |u_0(0, s)|^2 ds + \lambda_0 \int_0^t |u'(0, s)|^2 ds \\ & \leq \frac{K_1^2}{\lambda_0} C_T + \int_0^t Z(s) ds \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\blacksquare \quad -2K \int_0^t \langle u_0, u' \rangle ds \leq 2K \int_0^t ||u_0(s)|| \cdot ||u'(s)|| ds$$

$$\leq K^2 \int_0^t \|u_0(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u'(s)\|^2 ds \leq TK^2 C_T + \int_0^t Z(s) ds \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & -2\lambda \int_0^t \langle u'_0, u' \rangle ds \leq 2\lambda \int_0^t \|u'_0(s)\| \cdot \|u'(s)\| ds \\ & \leq \lambda^2 \int_0^t \|u'_0(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u'(s)\|^2 ds \leq T\lambda^2 C_T + \int_0^t Z(s) ds \end{aligned} \quad (6.29)$$

Tổ hợp (6.20), (6.23) - (6.29) và chọn $\frac{\beta}{\mu_0} \leq \frac{1}{2}$ ta có

$$Z(t) \leq 2(K^2 + \lambda^2 + K_1^2)(\frac{1}{\lambda_0} + 2) + 2D_T \int_0^t Z(s) ds, \quad \forall \beta > 0. \quad (6.30)$$

trong đó

$$D_T = \frac{1}{\mu_0} (1 + \|\mu\|_{L^\infty(0,T)} + T\|k'\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\|k\|_{L^2(0,T)}^2}{\beta} + 2\|k\|_{L^\infty(0,T)}), \quad (6.31)$$

Dùng bổ đề Gronwall cho (6.30) ta thu được

$$\begin{aligned} Z(t) & \leq 2(K^2 + \lambda^2 + K_1^2)(\frac{1}{\lambda_0} + 2)C_T \exp(2D_T T) \\ & \leq \bar{C}_T (K^2 + \lambda^2 + K_1^2), \end{aligned}$$

trong đó $\bar{C}_T = 2(\frac{1}{\lambda_0} + 2)C_T \exp(2D_T T)$.

Do đó

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W(T)} + \|u'_\varepsilon(0, \cdot) - u'_0(0, \cdot)\|_{L^2(0,T)} \leq \bar{C}_T \sqrt{K^2 + \lambda^2 + K_1^2}, \quad (6.32)$$

trong đó, $\bar{C}_T$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào T .

Mặt khác, từ (6.19)₃ và (6.31) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} \|P\|_{L^2(0,T)} & \leq K_1 \left[\sqrt{\frac{Z(t)}{\mu_0}} + \|u_0\|_{L^\infty(0,T;V)} \right] + \|\lambda_1\|_{L^\infty(0,T)} \cdot \|u'(0, \cdot)\|_{L^2(0,T)} \\ & \quad + \left(\frac{1}{\mu_0} \int_0^T k^2(\theta) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t Z(s) ds \right)^{1/2} \\ & \leq \bar{C}_T \sqrt{K^2 + \lambda^2 + K_1^2}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Do đó

$$\|P_\varepsilon - P_0\|_{L^\infty(0,T)} \leq \bar{C}_T \sqrt{K^2 + \lambda^2 + K_1^2}, \quad (6.34)$$

trong đó, $\bar{C}_T$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào T . Định lý 6.1 được chứng minh đầy đủ ■

6.3. Khai triển tiệm cận theo ba tham số bé (K, λ, K_1)

Trong mục này, chúng tôi khai triển tiệm cận nghiệm yếu của bài toán (P_{K,λ,K_1}) theo ba tham số bé (K, λ, K_1) tức là ta có thể xấp xỉ nghiệm yếu u bởi một đa thức theo ba biến (K, λ, K_1) và đánh giá được sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ.

Ở đây, ta sẽ dùng các ký hiệu sau, với đa chỉ số $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{Z}_+^3$ và $\vec{\varepsilon} = (K, \lambda, K_1) \in \mathbb{R}_+^3$, ta đặt

$$\begin{cases} |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \quad \gamma! = \gamma_1! \gamma_2! \gamma_3!, \\ \varepsilon^\gamma = K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2} K_1^{\gamma_3}, \quad \|\varepsilon\| = \sqrt{K^2 + \lambda^2 + K_1^2}, \\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^3, \quad \beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i, \quad \forall i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (6.35)$$

Giả sử (u_0, P_0) là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\tilde{Q}_0)$ (như trong định lý 4.1) ứng với $(K, \lambda, K_1) = (0, 0, 0)$, tức là

$$\begin{cases} Au_0 = F_0 \equiv f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_0(1, t) = 0, \quad \mu(t)u_{0x}(0, t) = P_0(t), \\ u_0(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u'_0(x, 0) = \tilde{u}'_0(x), \\ P_0(t) = g(t) + \lambda_1(t)u'_0(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_0(0, s)ds, \\ u_0 \in L^\infty(0, T; V), \quad u'_0 \in L^\infty(0, T; V), \quad u''_0 \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u'_0(0, \cdot) \in H^1(0, T), \quad P_0 \in H^1(0, T). \end{cases} \quad (\tilde{Q}_0)$$

Xét dãy hữu hạn các nghiệm yếu (u_γ, P_γ) , $\gamma \in \mathbb{Z}_+^3$, $1 \leq |\gamma| \leq N$ được xác định bởi các bài toán sau

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_\gamma = F_\gamma, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_\gamma(1, t) = 0, \quad \mu(t)u_{\gamma x}(0, t) = P_\gamma(t), \\ u_\gamma(x, 0) = 0, \quad u_{\gamma t}(x, 0) = 0, \\ P_\gamma(t) = C_\gamma(t) + \lambda_1(t)u'_\gamma(0, t) - \int_0^t k(t-s)u_\gamma(0, s)ds, \\ u_\gamma \in L^\infty(0, T; V), \quad u'_\gamma \in L^\infty(0, T; V), \quad u''_\gamma \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u'_\gamma(0, \cdot) \in H^1(0, T), \quad P_\gamma \in H^1(0, T), \end{array} \right. \quad (Q_\gamma)$$

trong đó $F_\gamma, C_\gamma(t), |\gamma| \leq N$, được xác định bởi công thức truy hồi sau

$$F_\gamma = \left\{ \begin{array}{ll} f(x, t), & |\gamma| = 0, \\ 0, & \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad 1 \leq |\gamma| \leq N, \\ -u_{\gamma_1-1, \gamma_2, \gamma_3}, & \gamma_1 \geq 1, \quad \gamma_2 = 0, \quad 1 \leq |\gamma| \leq N, \\ -u'_{\gamma_1, \gamma_2-1, \gamma_3}, & \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 \geq 1, \quad 1 \leq |\gamma| \leq N, \\ -u_{\gamma_1-1, \gamma_2, \gamma_3} - u'_{\gamma_1, \gamma_2-1, \gamma_3}, & \gamma_1 \geq 1, \quad \gamma_2 \geq 1, \quad 2 \leq |\gamma| \leq N, \end{array} \right. \quad (6.36)$$

và

$$C_\gamma = \left\{ \begin{array}{ll} g(t), & |\gamma| = 0, \\ 0, & \gamma_3 = 0, \quad 1 \leq |\gamma| \leq N, \\ u_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3-1}(0, t), & \gamma_3 \geq 1, \quad 1 \leq |\gamma| \leq N. \end{array} \right. \quad (6.37)$$

Giả sử $(u, P) = (u_\varepsilon, P_\varepsilon)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\tilde{Q}_\varepsilon)$. Khi đó

$$v = u - \sum_{|\gamma| \leq N} u_\gamma \varepsilon^\gamma, \quad R = P - \sum_{|\gamma| \leq N} P_\gamma \varepsilon^\gamma, \quad (6.38)$$

thỏa bài toán sau

$$\begin{cases} Av + Kv + \lambda v_t = E_N(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ v(1, t) = 0, \quad \mu(t)v_x(0, t) = R(t), \\ v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0, \\ R(t) = \tilde{E}_N(t) + K_1 v(0, t) + \lambda_1(t)v'(0, t) - \int_0^t k(t-s)v(0, s)ds, \end{cases} \quad (6.39)$$

trong đó

$$E_N(x, t) = - \sum_{|\gamma|=N+1} \left(u_{\gamma_1-1, \gamma_2, \gamma_3} + u'_{\gamma_1, \gamma_2-1, \gamma_3} \right) \varepsilon^\gamma, \quad (6.40)$$

và

$$\tilde{E}_N(t) = \sum_{|\gamma|=N+1} u_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3-1}(0, t) \varepsilon^\gamma. \quad (6.41)$$

Bổ đề 6.1. *Giả sử (H₁) – (H₅) thỏa. Thì*

$$(i) \quad \|E_N\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq \tilde{C}_{1N} \|\varepsilon\|^{N+1}, \quad (6.42)$$

$$(ii) \quad \|\tilde{E}_N\|_{L^2(0, T)} \leq \tilde{C}_{2N} \|\varepsilon\|^{N+1}, \quad (6.43)$$

trong đó $\tilde{C}_{1N}$, $\tilde{C}_{2N}$ và $\tilde{C}_{3N}$ là các hằng số dương chỉ phụ thuộc vào các hằng số

$$K_*, \lambda_*, K_{1*}, \|u_\gamma\|_{L^\infty(0, T; V)}, \|u'_\gamma\|_{L^\infty(0, T; V)}, \|u'_\gamma(0, \cdot)\|_{L^2(0, T)}, |\gamma| = N.$$

Chứng minh.

(i) Từ tính bị chặn của các hàm $u_\gamma, u'_\gamma, \gamma \in \mathbb{Z}_+^3, |\gamma| = N$ trong không gian hàm

$L^\infty(0, T; V)$. Từ (6.40) ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} \|E_N(x, t)\|_{L^\infty(0, T; L^2)} &\leq \sum_{|\gamma|=N+1} \left(|u_{\gamma_1-1, \gamma_2, \gamma_3}| + |u'_{\gamma_1, \gamma_2-1, \gamma_3}| \right) |K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2} K_1^{\gamma_3}| \\ &\leq \sum_{|\gamma|=N+1} \left(\|u_{\gamma_1-1, \gamma_2, \gamma_3}\|_V + \|u'_{\gamma_1, \gamma_2-1, \gamma_3}\|_V \right) |K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2} K_1^{\gamma_3}| \\ &\leq \sum_{|\gamma|=N+1} \left(\|u_{\gamma_1-1, \gamma_2, \gamma_3}\|_{L^\infty(0, T; V)} + \|u'_{\gamma_1, \gamma_2-1, \gamma_3}\|_{L^\infty(0, T; V)} \right) |K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2} K_1^{\gamma_3}|. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Holder

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad \forall x_i \geq 0, \quad \forall \alpha_i \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

với $x_1 = K^2$, $x_2 = \lambda^2$, $x_3 = K_1^2$, $\alpha_1 = \frac{\gamma_1}{N+1}$, $\alpha_2 = \frac{\gamma_2}{N+1}$, $\alpha_3 = \frac{\gamma_3}{N+1}$, ta được

$$\begin{aligned} |\varepsilon^\gamma| &= \left| K^{\gamma_1} \lambda^{\gamma_2} \lambda_1^{\gamma_3} \right| = \left| K^{\frac{2\gamma_1}{N+1}} \lambda^{\frac{2\gamma_2}{N+1}} \lambda_1^{\frac{2\gamma_3}{N+1}} \right|^{\frac{N+1}{2}} \leq \left(\frac{\gamma_1}{N+1} K^2 + \frac{\gamma_2}{N+1} \lambda^2 + \frac{\gamma_3}{N+1} \lambda_1^2 \right)^{\frac{N+1}{2}} \\ &\leq \left(K^2 + \lambda^2 + \lambda_1^2 \right)^{\frac{N+1}{2}} = \|\varepsilon\|^{N+1}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}_+^3, \quad |\gamma| = N+1. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Từ (6.44) và (6.45) ta được

$$\|E_N\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq \tilde{C}_{1N} \|\varepsilon\|^{N+1}, \quad (6.46)$$

trong đó

$$\tilde{C}_{1N} = \sum_{|\gamma|=N+1} \left(\|u_{\gamma_1-1, \gamma_2, \gamma_3}\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|u'_{\gamma_1, \gamma_2-1, \gamma_3}\|_{L^\infty(0,T;V)} \right).$$

(ii) Từ (6.41) và chứng minh tương tự như trên ta cũng thu được đánh giá

$$\|\tilde{E}_N(t)\|_{L^2(0,T)} \leq \tilde{C}_{2N} \|\tilde{\varepsilon}\|^{N+1}, \quad (6.47)$$

trong đó

$$\tilde{C}_{2N} = \sum_{|\gamma|=N+1} \|u'_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3-1}(0, \cdot)\|_{L^2(0,T)}.$$

Hoàn tất chứng minh Bổ đề 6.1 ■

Kế tiếp, ta có định lý sau

Định lý 6.2. *Giả sử (A₁) – (A₄) thỏa. Thì mọi $(K, \lambda, K_1) \in \mathbb{R}_+^3$ thỏa $0 \leq K \leq K_*$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$, $0 \leq K_1 \leq K_{1*}$ bài toán $(\tilde{Q}_\varepsilon)$ có duy nhất nghiệm yếu $(u, P) = (u_\varepsilon, P_\varepsilon) \in W(T) \times L^\infty(0, T)$ thỏa đánh giá tiệm cận tới cấp $N+1$ như sau*

$$\begin{aligned} &\|u - \sum_{|\gamma| \leq N} u_\gamma \varepsilon^\gamma\|_{W(T)} + \|u'(0, \cdot) - \sum_{|\gamma| \leq N} u'_\gamma(0, \cdot) \varepsilon^\gamma\|_{L^2(0,T)} \\ &\quad + \|P - \sum_{|\gamma| \leq N} P_\gamma \varepsilon^\gamma\|_{L^2(0,T)} \leq \tilde{C}_N^* \|\varepsilon\|^{N+1}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

với mọi $(K, \lambda, K_1) \in \mathbb{R}_+^3$ thỏa $0 \leq K \leq K_*$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$, $0 \leq K_1 \leq K_{1*}$, (u_γ, P_γ) là nghiệm yếu của bài toán (Q_γ) , $\gamma \in \mathbb{Z}_+^3$, $|\gamma| \leq N$, và $\tilde{C}_N^*$ là hằng số độc lập với $\varepsilon = (K, \lambda, K_1)$.

Chứng minh.

Áp dụng bổ đề 3.2, ta được

$$\begin{aligned} & ||v'(t)||^2 + \mu(t)||v_x(t)||^2 + 2 \int_0^t R(s)v'(0,s)ds + 2 \int_0^t \langle Kv + \lambda v', v' \rangle ds \\ &= \int_0^t \mu'(s)||v_x(s)||^2 ds + 2 \int_0^t \langle E_N(s), v' \rangle ds, \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} \sigma(t) &\leq \int_0^t \mu'(s)||v_x(s)||^2 ds + 2v(0,t) \int_0^t k(t-s)v(0,s)ds - 2k(0) \int_0^t v^2(0,s)ds \\ &\quad - 2 \int_0^t v(0,r)dr \int_0^r k'(r-s)v(0,s)ds + 2 \int_0^t \langle E_N(s), v' \rangle ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \tilde{E}_N(s)v'(0,s)ds \equiv \sum_{i=1}^7 J_i, \end{aligned} \tag{6.49}$$

trong đó

$$\sigma(t) = ||v'(t)||^2 + \mu_0||v_x(t)||^2 + \lambda_0 \int_0^t |v'(0,s)|^2 ds. \tag{6.50}$$

Ta chú ý từ (6.50) suy ra rằng

$$|v(0,t)| \leq ||v(t)||_{C^0(\bar{\Omega})} \leq ||v_x(t)|| \leq \sqrt{\frac{\sigma(t)}{\mu_0}}, \tag{6.51}$$

Áp dụng bổ đề 6.1, ta đánh giá các tích phân ở vế trái của (6.49)

$$|J_1| \leq \int_0^t |\mu'(s)| \cdot ||v_x(s)||^2 ds \leq \frac{||\mu'||_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0} \int_0^t \sigma(s)ds, \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq 2|v(0,t)| \int_0^t |k(t-s)v(0,s)|ds \leq \beta\sigma(t) + \frac{1}{\beta\mu_0^2} \int_0^t k^2(\theta)d\theta \int_0^t \sigma(s)ds \\ &\leq \beta\sigma(t) + \frac{||k||_{L^2(0,T)}^2}{\beta\mu_0^2} \int_0^t \sigma(s)ds, \quad \forall \beta > 0, \end{aligned} \tag{6.53}$$

$$|J_3| \leq 2|k(0)| \int_0^t v^2(0,s)ds \leq \frac{2||k||_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0} \int_0^t \sigma(s)ds, \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned}
|J_4| &\leq 2 \left| \int_0^t v(0, \tau) d\tau \int_0^\tau k'(\tau - s) v(0, s) ds \right| \\
&\leq \int_0^t \sigma(s) ds + \frac{T}{\mu_0^2} \int_0^t |k'(\theta)|^2 d\theta \int_0^t \sigma(s) ds \\
&\leq \left(1 + \frac{T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2}{\mu_0^2} \right) \int_0^t \sigma(s) ds,
\end{aligned} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned}
|J_5| &\leq 2 \int_0^t \|E_N(s)\| \cdot \|v'(s)\| ds \leq \int_0^t \left(\|E_N(s)\|^2 + \|v'(s)\|^2 \right) ds \\
&\leq \int_0^t \|E_N\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 ds + \int_0^t \|v'(s)\|^2 ds \leq T \tilde{C}_{1N}^2 \|\varepsilon\|^{2N+2} + \int_0^t \sigma(s) ds,
\end{aligned} \tag{6.56}$$

$$\begin{aligned}
|J_6| &\leq 2 \int_0^t |\tilde{E}_N(s)| \cdot |v'(0, s)| ds \leq \frac{1}{\lambda_0} \int_0^t |\tilde{E}_N(s)|^2 ds + \lambda_0 \int_0^t |v'(0, s)|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{\lambda_0} \|\tilde{E}_N\|_{L^2(0,T)}^2 + \int_0^t \sigma(s) ds \leq \frac{1}{\lambda_0} \tilde{C}_{2N}^2 \|\varepsilon\|^{2N+2} + \int_0^t \sigma(s) ds,
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Chọn $\beta = \frac{1}{2}$ và từ (6.49), (6.52) – (6.57) ta suy ra rằng

$$\sigma(t) \leq 2(T \tilde{C}_{1N}^2 + \frac{1}{\lambda_0} \tilde{C}_{2N}^2) \|\varepsilon\|^{2N+2} + 2\bar{D}_T \int_0^t \sigma(s) ds, \quad \forall \beta > 0, \tag{6.58}$$

trong đó

$$\bar{D}_T = 3 + \frac{\|\mu'\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0} + \frac{\|k\|_{L^2(0,T)}^2}{\beta \mu_0^2} + \frac{2\|k\|_{L^\infty(0,T)}}{\mu_0} + \frac{T \|k'\|_{L^2(0,T)}^2}{\mu_0^2}. \tag{6.59}$$

Dùng bổ đề Gronwall cho (6.58) ta thu được

$$\sigma(t) \leq 2(T \tilde{C}_{1N}^2 + \frac{1}{\lambda_0} \tilde{C}_{2N}^2) \exp(2\bar{D}_T T) \|\varepsilon\|^{2N+2}. \tag{6.60}$$

Do đó

$$\|v'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|v\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|v'(0, \cdot)\|_{L^2(0,T)} \leq \bar{D}_N^* \|\varepsilon\|^{N+1}, \tag{6.61}$$

ở đây, $\bar{D}_T^* = \sqrt{2(T \tilde{C}_{1N}^2 + \frac{1}{\lambda_0} \tilde{C}_{2N}^2) \exp(\bar{D}_T T)}$.

Hay là

$$\| u - \sum_{|\gamma| \leq N} u_\gamma \varepsilon^\gamma \|_{W(T)} + \| u'(0, \cdot) - \sum_{|\gamma| \leq N} u'_\gamma(0, \cdot) \varepsilon^\gamma \|_{L^2(0, T)} \leq \bar{D}_N^* \|\varepsilon\|^{N+1}, \quad (6.62)$$

với mọi $(K, \lambda, K_1) \in \mathbb{R}_+^3$ thỏa $0 \leq K \leq K_*$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$, $0 \leq K_1 \leq K_{1*}$.

Mặt khác, từ (6.39) và (6.50) ta lại suy ra rằng

$$\begin{aligned} \|R\|_{L^2(0, T)} &\leq \|\tilde{E}_N\|_{L^2(0, T)} + K_{1^*} \|v\|_{L^\infty(0, T; V)} + \|\lambda_1\|_{L^\infty(0, T)} \|v'(0, \cdot)\|_{L^2(0, T)} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\mu_0} \int_0^T k^2(\theta) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right)^{1/2} \\ &\leq \bar{D}_T^{**} \|\varepsilon\|^{N+1}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Do đó

$$\| P - \sum_{|\gamma| \leq N} P_\gamma \varepsilon^\gamma \|_{L^2(0, T)} \leq \tilde{C}_N^* \|\varepsilon\|^{N+1}. \quad (6.64)$$

Vậy, ta hoàn tất chứng minh Định lý 6.2 ■

Chương 7

VÍ DỤ MINH HỌA CÁCH TÌM NGHIỆM TIỆM CẬN

Trong chương này, chúng ta sẽ xem xét một trường hợp đặc biệt của bài toán nhiều tham số bé $(\tilde{Q}_\varepsilon)$ đã nêu trong chương 6 để minh họa phương pháp tìm nghiệm tiệm cận theo ba tham số này đến cấp 1 và cấp 2. Bài toán cụ thể được phát biểu như sau

$$\left\{ \begin{array}{l} Au \equiv u'' - \Delta u = -Ku - \lambda u', \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(1, t) = 0, \quad \nabla u(0, t) = P(t) \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x) \\ P(t) = g(t) + K_1 u(0, t) + \lambda_1(t) u'(0, t) - \int_0^t \sin(t-s) u(0, s) ds, \end{array} \right. \quad (\tilde{Q}_\varepsilon)$$

trong đó, các tham số nhiều $(K, \lambda, K_1) \in \mathbb{R}_+^3$ thỏa $0 \leq K \leq K_*$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$, $0 \leq K_1 \leq K_{1*}$, $f(x, t) \equiv 0$, $\mu(t) \equiv 1$, $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$, g , λ_1 , $k(t) = \sin t$ là các hàm cho trước thỏa các giả thiết $(H_1) - (H_3)$ tương ứng.

Giả sử (u_0, P_0) là nghiệm yếu duy nhất của bài toán

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_0 \equiv u_0'' - \Delta u_0 = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_0(1, t) = 0, \quad \nabla u_0(0, t) = P_0(t) \\ u_0(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_0'(x, 0) = \tilde{u}_1(x) \\ P_0(t) = g(t) + \lambda_1(t) u_0'(0, t) - \int_0^t \sin(t-s) u_0(0, s) ds, \\ u_0 \in L^\infty(0, T; V), \quad u_0' \in L^\infty(0, T; V), \quad u_0'' \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u_0'(0, \cdot), \quad P_0 \in H^1(0, T). \end{array} \right. \quad (\tilde{Q}_0)$$

Khi đó các nghiệm yếu u_{100} , u_{010} , u_{001} được xác định bởi hai bài toán

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_{100} \equiv u_{100}'' - \Delta u_{100} = -u_0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_{100}(1, t) = 0, \quad \nabla u_{100}(0, t) = P_{100}(t), \\ u_{100}(x, 0) = 0, \quad u_{100}'(x, 0) = 0, \\ P_{100}(t) = \lambda_1(t)u_{100}'(0, t) - \int_0^t \sin(t-s)u_{100}(0, s)ds, \\ u_{100} \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{100}' \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{100}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u_{100}'(0, \cdot), \quad P_{100} \in H^1(0, T). \end{array} \right. \quad (Q_{100})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_{010} \equiv u_{010}'' - \Delta u_{010} = -u_0', \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_{010}(1, t) = 0, \quad \nabla u_{010}(0, t) = P_{010}(t), \\ u_{010}(x, 0) = 0, \quad u_{010}'(x, 0) = 0, \\ P_{010}(t) = \lambda_1(t)u_{010}'(0, t) - \int_0^t \sin(t-s)u_{010}(0, s)ds, \\ u_{010} \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{010}' \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{010}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u_{010}'(0, \cdot), \quad P_{010} \in H^1(0, T). \end{array} \right. \quad (Q_{010})$$

và

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_{001} \equiv u_{001}'' - \Delta u_{001} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_{001}(1, t) = 0, \quad \nabla u_{001}(0, t) = P_{001}(t), \\ u_{001}(x, 0) = 0, \quad u_{001}'(x, 0) = 0, \\ P_{001}(t) = u_0(0, t) + \lambda_1(t)u_{001}'(0, t) - \int_0^t \sin(t-s)u_{001}(0, s)ds, \\ u_{001} \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{001}' \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{001}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u_{001}'(0, \cdot), \quad P_{001} \in H^1(0, T). \end{array} \right. \quad (Q_{001})$$

Khi đó, nghiệm của bài toán $(\tilde{Q}_\epsilon)$ có thể xấp xỉ bởi một đa thức cấp một theo ba biến

K, λ, K_1 như sau

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x, t) \approx u_0(x, t) + u_{100}(x, t)K + u_{010}(x, t)\lambda + u_{001}(x, t)K_1, \\ P_\varepsilon(t) \approx P_0(t) + P_{100}(t)K + P_{010}(t)\lambda + P_{001}(t)K_1, \end{cases}$$

với đánh giá tiệm cận đến cấp hai như sau

$$\begin{aligned} & \|u'_\varepsilon - \sum_{|\gamma| \leq 1} u'_\gamma \varepsilon^\gamma\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \|u_\varepsilon - \sum_{|\gamma| \leq 1} u_\gamma \varepsilon^\gamma\|_{L^\infty(0, T; V)} \\ & + \|P - \sum_{|\gamma| \leq 1} P_\gamma \varepsilon^\gamma\|_{L^2(0, T)} \leq D_1(K^2 + \lambda^2 + K_1^2) \leq \tilde{C}_1^* \|\varepsilon\|^2, \end{aligned}$$

trong đó, D_1 hoàn toàn độc lập với ba tham số bé K, λ, K_1 .

Ta lại tìm các nghiệm yếu u_γ , $|\gamma| \leq 2$ được xác định bởi các bài toán dưới đây

$$\begin{cases} Au_{110} \equiv u''_{110} - \Delta u_{110} = -u_{010} - u'_{100}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_{110}(1, t) = 0, & \nabla u_{110}(0, t) = P_{110}(t), \\ u_{110}(x, 0) = 0, & u'_{110}(x, 0) = 0, \\ P_{110}(t) = \lambda_1(t)u'_{110}(0, t) - \int_0^t \sin(t-s)u_{110}(0, s)ds, \\ u_{110} \in L^\infty(0, T; V), & u'_{110} \in L^\infty(0, T; V), \quad u''_{110} \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u'_{110}(0, \cdot), & P_{110} \in H^1(0, T). \end{cases} \quad (Q_{110})$$

$$\begin{cases} Au_{101} \equiv u''_{101} - \Delta u_{101} = -u_{001}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_{101}(1, t) = 0, & \nabla u_{101}(0, t) = P_{101}(t), \\ u_{101}(x, 0) = 0, & u'_{101}(x, 0) = 0, \\ P_{101}(t) = u_{100}(0, t) + \lambda_1(t)u'_{101}(0, t) - \int_0^t \sin(t-s)u_{101}(0, s)ds, \\ u_{101} \in L^\infty(0, T; V), & u'_{101} \in L^\infty(0, T; V), \quad u''_{101} \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u'_{101}(0, \cdot), & P_{101} \in H^1(0, T). \end{cases} \quad (Q_{101})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_{011} \equiv u_{011}'' - \Delta u_{011} = -u_{001}', \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_{011}(1, t) = 0, \quad \nabla u_{011}(0, t) = P_{011}(t), \\ u_{011}(x, 0) = 0, \quad u_{011}'(x, 0) = 0, \\ P_{011}(t) = u_{011}(0, t) + \lambda_1(t)u_{011}'(0, t) - \int_0^t \sin(t-s)u_{011}(0, s)ds, \\ u_{011} \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{011}' \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{011}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u_{011}'(0, \cdot), \quad P_{011} \in H^1(0, T). \end{array} \right. \quad (Q_{011})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_{200} \equiv u_{200}'' - \Delta u_{200} = -u_{100}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_{200}(1, t) = 0, \quad \nabla u_{200}(0, t) = P_{200}(t), \\ u_{200}(x, 0) = 0, \quad u_{200}'(x, 0) = 0, \\ P_{200}(t) = \lambda_1(t)u_{200}'(0, t) - \int_0^t \sin(t-s)u_{200}(0, s)ds, \\ u_{200} \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{200}' \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{200}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u_{200}'(0, \cdot), \quad P_{200} \in H^1(0, T). \end{array} \right. \quad (Q_{200})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_{020} \equiv u_{020}'' - \Delta u_{020} = -u_{010}', \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_{020}(1, t) = 0, \quad \nabla u_{020}(0, t) = P_{020}(t), \\ u_{020}(x, 0) = 0, \quad u_{020}'(x, 0) = 0, \\ P_{020}(t) = \lambda_1(t)u_{020}'(0, t) - \int_0^t \sin(t-s)u_{020}(0, s)ds, \\ u_{020} \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{020}' \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{020}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u_{020}'(0, \cdot), \quad P_{020} \in H^1(0, T). \end{array} \right. \quad (Q_{020})$$

và

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_{002} \equiv u_{002}'' - \Delta u_{002} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_{002}(1, t) = 0, \quad \nabla u_{002}(0, t) = P_{002}(t), \\ u_{002}(x, 0) = 0, \quad u_{002}'(x, 0) = 0, \\ P_{002}(t) = u_{001}(0, t) + \lambda_1(t)u_{002}'(0, t) - \int_0^t \sin(t-s)u_{002}(0, s)ds, \\ u_{002} \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{002}' \in L^\infty(0, T; V), \quad u_{002}'' \in L^\infty(0, T; L^2), \\ u_{002}'(0, \cdot), \quad P_{002} \in H^1(0, T). \end{array} \right. \quad (Q_{002})$$

Khi đó, nghiệm của bài toán $(\tilde{Q}_\varepsilon)$ có thể xấp xỉ bởi một đa thức cấp hai theo ba biến

K, λ, K_1 như sau

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon(x, t) \approx u_0(x, t) + u_{100}(x, t)K + u_{010}(x, t)\lambda + u_{001}(x, t)K_1 \\ \quad + u_{110}(x, t)K\lambda + u_{101}(x, t)KK_1 + u_{011}(x, t)\lambda K_1 \\ \quad + u_{200}(x, t)K^2 + u_{020}(x, t)\lambda^2 + u_{002}(x, t)K_1^2, \\ P_\varepsilon(t) \approx P_0(t) + P_{100}(t)K + P_{010}(t)\lambda + P_{001}(t)K_1 \\ \quad + P_{110}(t)K\lambda + P_{101}(t)KK_1 + P_{011}(t)\lambda K_1 \\ \quad + P_{200}(t)K^2 + P_{020}(t)\lambda^2 + P_{002}(t)K_1^2, \end{array} \right.$$

với đánh giá tiệm cận đến cấp ba như sau

$$\begin{aligned} & \|u_\varepsilon' - \sum_{|\gamma| \leq 2} u_\gamma' \varepsilon^\gamma\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \|u_\varepsilon - \sum_{|\gamma| \leq 2} u_\gamma \varepsilon^\gamma\|_{L^\infty(0, T; V)} \\ & + \|P - \sum_{|\gamma| \leq 2} P_\gamma \varepsilon^\gamma\|_{L^2(0, T)} \leq D_2(K^2 + \lambda^2 + K_1^2)^{3/2} = D_2\|\varepsilon\|^3, \end{aligned}$$

trong đó, D_2 hoàn toàn độc lập với ba tham số bé K, λ, K_1 .

KẾT LUẬN

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] **Nguyen Thuc An, Nguyen Dinh Trieu** (1991), *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side*, J. Mech. NCSR. Vietnam, **13** (2) (1991) 1 – 7.
- [2] **M. Bergounioux, Nguyen Thanh Long, Alain Pham Ngoc Dinh** (2001), *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. **43** (2001) 547 – 561.
- [3] **Haïm Brezis** (1983), *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Paris, 1983.
- [4] **J.L. Lions** (1969), *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [5] **Nguyen Thanh Long, Le Van Ut, Nguyen Thi Thao Truc** (2005), *On a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. **63** (2) (2005) 198 – 224.
- [6] **Nguyen Thanh Long, Alain Pham Ngoc Dinh, Tran Ngoc Diem** (2003), *Asymptotic expansion of the solution for nonlinear wave equation with mixed nonhomogeneous conditions*, Demonstratio Math. **36** (3) (2003) 683 – 695.
- [7] **Nguyen Thanh Long, Nguyen Cong Tam, Nguyen Thi Thao Truc** (2005), *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogeneous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solution*, Demonstratio Math. **38** (2) (2005), 365 – 386.
- [8] **Nguyen Thanh Long, Alain Pham Ngoc Dinh, Tran Ngoc Diem** (2005), *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, Bound. Value Probl. **2005** (3) 337–358.
- [9] **Nguyen Thanh Long, Le Thi Phuong Ngoc** (2007), *On a nonlinear Kirchhoff-Carrier wave equation in the unit membrane: The quadratic convergence and asymptotic expansion of solutions*, Demonstratio Math. **40** (2) (2007) 365 – 392.

- [10] **Nguyen Thanh Long** (2002), *On the nonlinear wave equation $u_{tt} - B(t, ||u_x||^2)u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t)$ associated with the mixed homogeneous conditions*, J. Math. Anal. Appl. **274** (1) (2002) 102 – 123.
- [11] **Nguyen Thanh Long** (2005), *Nonlinear Kirchhoff - Carrier wave equation in a unit membrane with mixed homogeneous boundary conditions*, Electron. J. Differential Equations, **2005**, No. 138, 18 pp.
- [12] **Lê Xuân Trường, Lê Thị Phương Ngọc, Nguyễn Thành Long** (2009), *High-order iterative schemes for a nonlinear Kirchhoff – Carrier wave equation associated with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **71** (1 – 2) (2009) 467 – 484.