



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

NGUYỄN PHÚC BÌNH

PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN
CHỨA SỐ HẠNG KIRCHHOFF
CÓ NGUỒN PHI TUYẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Toán Giải Tích**

Mã số: **60. 46. 01**

Thành phố Hồ Chí Minh - 2010

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi trân trọng kính gửi đến Thầy TS. *Trần Minh Thuyết* lời cảm ơn sâu sắc nhất về sự tận tình hướng dẫn, chỉ bảo của thầy đối với tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Qua luận văn này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy TS. *Nguyễn Thành Long*, người đã đọc và cho nhiều chỉ dẫn hết sức quý báu đối với luận văn của tôi. Lòng say mê nghiên cứu khoa học và sự tận tụy của Thầy đối với học trò là tấm gương sáng để thế hệ trẻ noi theo.

Xin chân thành cảm ơn *Quý Thầy, Cô* Khoa Toán – Tin học trường Đại học Sư Phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã tận tình giảng dạy và truyền đạt cho tôi nhiều kiến thức khoa học trong suốt khóa học.

Xin chân thành cảm ơn *Quý Thầy, Cô* thuộc Phòng Khoa học Công nghệ - Sau đại học, Trường Đại học Sư Phạm TP.HCM đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn tất chương trình học và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn *Ban Giám Hiệu, Quý Thầy, Cô* thuộc Khoa Sư phạm Khoa học Tự nhiên nói riêng và Quý Thầy Cô của trường Đại học Sài Gòn nói chung đã động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành chương trình học.

Xin cảm ơn anh *Hồ Quang Đức* và các bạn lớp *Cao học Toán Giải Tích khóa 18* cùng các anh chị trong nhóm seminar định kỳ do Thầy TS. Nguyễn Thành Long và Thầy TS. Trần Minh Thuyết tổ chức, đã trao đổi và thảo luận các đề tài liên hệ đến luận văn này.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng tri ân sâu sắc nhất tới mọi người trong gia đình tôi, những người đã hết lòng lo lắng cho tôi, luôn ở bên tôi, động viên và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Vì kiến thức của bản thân còn nhiều hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được sự chỉ bảo của Quý Thầy, Cô và sự góp ý chân thành của bạn bè, đồng nghiệp.

Nguyễn Phúc Bình

Chương 1

TỔNG QUAN

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm trong nhiều bài toán về phương trình sóng phi tuyến là đề tài được quan tâm bởi nhiều tác giả, chẳng hạn như trong [2, 4 – 10] và các tài liệu tham khảo trong đó. Trong luận văn này, chúng tôi khảo sát phương trình sóng phi tuyến chứa số hạng Kirchhoff liên kết với điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất sau đây.

Tìm hàm u thỏa phương trình sóng phi tuyến tính có dạng

$$u_{tt} - B(t, ||u_x(t)||^2)u_{xx} = f(x, t, u), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (1.1)$$

với điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = g(t), \quad (1.2)$$

và điều kiện đầu

$$u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad (1.3)$$

trong đó $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, B, f$ là các hàm cho trước thỏa các điều kiện mà ta sẽ chỉ ra sau và số hạng phi tuyến $B(t, ||u_x(t)||^2)$ phụ thuộc vào tích phân

$$||u_x(t)||^2 = \int_0^1 u_x^2(x, t) dx. \quad (1.4)$$

Trong trường hợp $N = 1$ và $\Omega = (0, L)$, phương trình (1.1) được tổng quát hóa từ phương trình sau đây mô tả dao động phi tuyến của một sợi dây đàn hồi [2]

$$\rho h u_{tt} = (P_0 + \frac{Eh}{2L} \int_0^L |\frac{\partial u}{\partial y}(y, t)|^2 dy) u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T. \quad (1.5)$$

N. T. Long, A. P. N. Định và T. N. Diễm trong [4] đã dùng phương pháp xấp xỉ tuyến tính để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} - (b_0 + B(|u_x(t)|^2))u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t), (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases} \quad (1.6)$$

Trong [5] N. T. Long và B. T. Dũng đã khảo sát sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} - B(|u_x(t)|^2)u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t, |u_x(t)|^2), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_x(0, t) - h_0 u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases} \quad (1.7)$$

Sau đó, các tác giả khai triển tiệm cận nghiệm đến cấp $N + 1$ của bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} - B_\varepsilon(|u_x|^2)u_{xx} = F_\varepsilon(x, t, u, u_x, u_t, |u_x|^2), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_x(0, t) - h_0 u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \\ F_\varepsilon(x, t, u, u_x, u_t, |u_x|^2) = f(x, t, u, u_x, u_t, |u_x|^2) + \varepsilon f_1(x, t, u, u_x, u_t, |u_x|^2), \\ B_\varepsilon(|u_x|^2) = B(|u_x|^2) + \varepsilon B_1(|u_x|^2). \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

Trong [6] N. T. Long đã khảo sát bài toán

$$u_{tt} - B(t, |u(t)|^2, |u_x(t)|^2)u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t, |u(t)|^2, |u_x(t)|^2), \quad (1.8)$$

liên kết với điều kiện biên hỗn hợp thuần nhất

$$u_x(0, t) - h_0 u(0, t) = u_x(1, t) + h_1 u(1, t) = 0, \quad (1.9)$$

và điều kiện đầu

$$u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x) \quad (1.10)$$

Trong [9] N. T. Long, L. T. P. Ngọc và L. X. Trường đã nghiên cứu thuật giải lặp cấp cao cho phương trình sóng phi tuyến

$$u_{tt} - \mu(t, ||u(t)||^2, ||u_x(t)||^2)u_{xx} = f(x, t, u), 0 < x < 1, 0 < t < T, \quad (1.11)$$

liên kết với điều kiện biên hỗn hợp thuần nhất

$$u_x(0, t) - h_0 u(0, t) = u_x(1, t) + h_1 u(1, t) = 0, \quad (1.12)$$

và điều kiện đầu

$$u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x). \quad (1.13)$$

Trong luận văn này chúng tôi sử dụng một số công cụ của giải tích hàm như: Phương pháp xấp xỉ Galerkin, phương pháp xấp xỉ tuyến tính liên kết với điểm bất động, phương pháp khai triển tiệm cận,... để khảo sát bài toán nói trên.

Bố cục của luận văn được trình bày theo các chương mục sau

Chương 1, Giới thiệu bài toán sẽ khảo sát trong luận văn, và các kết quả liên quan đến bài toán đã được nghiên cứu trong thời gian gần đây.

Chương 2, trình bày một số công cụ chuẩn bị bao gồm: Nhắc lại một số không gian Sobolev, một số kết quả về các phép nhúng compact giữa các không gian hàm.

Chương 3, khảo sát thuật giải xấp xỉ tuyến tính cho bài toán khảo sát (1.1) – (1.3) có điều kiện biên tại đầu $x = 1$ thuần nhất. Trong chương này, chúng tôi chứng minh được rằng bài toán (1.1) – (1.3) tồn tại và duy nhất nghiệm yếu, bằng cách thiết lập một dãy quy nạp tuyến tính hội tụ mạnh trong các không gian hàm thích hợp.

Chương 4, nghiên cứu một thuật giải xấp xỉ tuyến tính cho bài toán khảo sát (1.1) – (1.3) có điều kiện biên tại đầu $x = 1$ không thuần nhất. Bằng cách đổi ẩn hàm để đưa về bài toán có điều kiện biên thuần nhất đã khảo sát ở chương 3, rồi kế thừa phương pháp chúng tôi cũng thu được kết quả tương tự như chương 3.

Chương 5, Kết quả thu được ở chương 3 cho thấy sự hội tụ và đánh giá sai số của dãy quy nạp tuyến tính $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ chỉ là cấp một. Để tiếp nối và mở rộng kết quả của chương 3 chúng tôi, xây dựng một dãy lặp phi tuyến $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ nhằm nâng tốc độ hội tụ của dãy quy nạp tuyến tính $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ về nghiệm yếu của bài toán (1.1) – (1.3).

Chương 6, khảo sát bài toán nhiều sau

$$\begin{cases} u_{tt} - B(t, ||u_x(t)||^2)u_{xx} = f(x, t, u) + \varepsilon f_1(x, t, u), & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0, t) = 0, u_x(1, t) = g(t), \\ u(0, x) = \tilde{u}_0(x), u_t(0, x) = \tilde{u}_1(x). \end{cases} \quad (\tilde{P}_\varepsilon)$$

a) nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của u_ε khi $\varepsilon \rightarrow 0$

b) khai triển tiệm cận của nghiệm yếu của bài toán $(\tilde{P}_\varepsilon)$ theo tham số bé ε , $|\varepsilon| < \varepsilon_*$.

có nghĩa là có thể xấp xỉ nghiệm u_ε bởi đa thức theo ε :

$$u_\varepsilon(x, t) \approx \sum_{i=0}^N u_i(x, t)\varepsilon^i,$$

và đánh giá được sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ tiệm cận

$$\left\| u_\varepsilon - \sum_{i=0}^N u_i \varepsilon^i \right\|_* \leq C_N |\varepsilon|^{N+1},$$

trong đó, hằng số C_N độc lập đối với ε .

Kế đến là phần kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 2

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

2.1. Các không gian hàm thông dụng

Đầu tiên, ta đặt các kí hiệu sau $\Omega = (0,1)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$. Ta bỏ qua các định nghĩa các không gian hàm thông dụng như $C^m(\bar{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$

Ta có $L^2 = L^2(\Omega)$ là không gian Hilbert đối với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L^2, \quad (2.1)$$

Kí hiệu $\| \cdot \|$ để chỉ chuẩn sinh bởi tích vô hướng (2.1) nghĩa là

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \int_0^1 u^2(x)dx$$

Ta định nghĩa không gian Sobolev cấp 1

$$H^1 = \{v \in L^2, \quad v_x \in L^2\}$$

Không gian này là không gian Hilbert đối với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle + \langle u_x, v_x \rangle = \int_0^1 [u(x)v(x) + u_x(x)v_x(x)]dx$$

Bổ đề 2.1. [1] *Phép nhúng $H^1 \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ là compact và*

$$\|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \sqrt{2}\|v\|_{H^1}, \quad \forall v \in H^1$$

Bổ đề 2.2. [3] *Đồng nhất H với H' (đối ngẫu của H). Khi đó, ta có*

$$H^1 \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow (H^1)',$$

với các phép nhúng liên tục và trù mật.

2.2. Các công cụ thường sử dụng

2.2.1. Không gian hàm $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$

Ta định nghĩa $L^p(0, T; X)$ là không gian các lớp tương đương chứa hàm $u : (0, T) \rightarrow X$ đo được, sao cho

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

hay

$$\exists M > 0 : \|u(t)\|_X \leq M, \quad t \in (0, T) \text{ khi } p = \infty.$$

Ta trang bị $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$ bởi chuẩn sau:

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ với } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \|u(t)\|_X$$

$$\equiv \inf \left\{ M > 0 : \|u(t)\|_X \leq M, \text{ a.e., } t \in (0, T) \right\} \text{ khi } p = \infty$$

Khi đó ta có các bổ đề sau mà chứng minh có thể tìm thấy trong [3].

Bổ đề 2.3. $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq +\infty$ là không gian Banach

Bổ đề 2.4. Gọi X' là đối ngẫu của X . Khi đó $L^{p'}(0, T; X')$ với

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 < p < \infty \text{ là đối ngẫu của } L^p(0, T; X).$$

Hơn nữa, nếu X phản xạ thì $L^p(0, T; X)$ cũng phản xạ.

Bổ đề 2.5. $(L^1(0, T; X))' = L^\infty(0, T; X')$.

Hơn nữa, các không gian $L^1(0, T; X)$, $L^\infty(0, T; X')$ không phản xạ.

Bổ đề 2.6. $L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q_T)$, $1 \leq p < \infty$, trong đó $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

2.2.2. Phân bố trị vector

Định nghĩa 2.1. Cho X là không gian Banach thực. Một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $\mathbf{D}(0, T)$ vào X gọi là một hàm suy rộng (phân bố) có giá trị trong X . Tập các phân bố có giá trị trong X ký hiệu là

$$\mathbf{D}'(0, T; X) = \mathbf{L}(\mathbf{D}(0, T); X) = \left\{ f : \mathbf{D}(0, T) \rightarrow X \mid f \text{ tuyến tính, liên tục} \right\}.$$

Định nghĩa 2.2. Cho $f \in \mathbf{D}'(0, T; X)$. Ta định nghĩa đạo hàm $\frac{df}{dt}$ theo nghĩa phân bố

$$\text{của } f \text{ bởi công thức } \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathbf{D}(0, T)$$

Các tính chất:

i/ Cho $v \in L^p(0, T; X)$, ta làm tương ứng nó bởi ánh xạ như sau

$$T_v : \mathbf{D}(0, T) \rightarrow X$$

$$\langle T_v, \varphi \rangle = \int_0^T v(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in \mathbf{D}(0, T)$$

Ta có thể kiểm tra lại rằng $T_v \in \mathbf{D}'(0, T)$. Thật vậy,

1/ Ánh xạ $T_v : \mathbf{D}(0, T) \rightarrow X$ là ánh xạ tuyến tính,

2/ Ánh xạ $T_v : \mathbf{D}(0, T) \rightarrow X$ là liên tục.

Giả sử $\{\varphi_i\} \subset \mathbf{D}(0, T)$, sao cho $\varphi_i \rightarrow 0$ trong $\mathbf{D}(0, T)$. Ta có

$$\begin{aligned} \|\langle T_v, \varphi_i \rangle\| &= \left\| \int_0^T v(t) \varphi_i(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|v(t) \varphi_i(t)\|_X dt \\ &\leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T |\varphi_i(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Do đó $\langle T_v, \varphi_i \rangle \rightarrow 0$ trong X khi $i \rightarrow +\infty$. Vậy $T_v \in \mathbf{D}'(0, T; X)$

ii/ Ánh xạ $v \rightarrow T_v$ là một đơn ánh, tuyến tính từ $L^p(0, T; X) \rightarrow \mathbf{D}'(0, T; X)$. Do đó, ta có thể đồng nhất $T_v = v$.

Khi đó ta có bổ đề sau mà chứng minh có thể tìm thấy trong [3].

Bổ đề 2.7. $L^p(0, T; X) \hookrightarrow D'(0, T; X)$ với phép nhúng liên tục

2.2.3. Đạo hàm trong $L^p(0, T; X)$

Phần tử $f \in L^p(0, T, X)$ ta có thể xem f là phần tử của $D'(0, T; X)$.

Khi đó ta có bổ đề sau mà chứng minh có thể tìm thấy trong [3].

Bổ đề 2.8. Nếu $f \in L^p(0, T; X)$ và $\frac{df}{dt} \in L^p(0, T; X)$, thì f bằng hầu hết với một hàm liên tục từ $[0, T] \rightarrow X$.

2.2.4. Bổ đề về tính compact của Lions

Cho các không gian Banach B_0, B_1, B với $B_0 \subset B \subset B_1$ sao cho:

B_0, B_1 là phản xạ. Phép nhúng $B \hookrightarrow B_1$ liên tục, $B_0 \hookrightarrow B$ là compact

Với $0 < T < \infty, 1 < p_0 < +\infty, 1 < p_1 < +\infty$, ta đặt

$$W(0, T) = \{v \in L^{p_0}(0, T; B_0) : v' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}.$$

Ta trang bị $W(0, T)$ bởi chuẩn

$$\|v\|_{w(0, T)} = \|v\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}.$$

Khi đó $W(0, T)$ là một không gian Banach.

Hiển nhiên ta có $W(0, T) \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; B_0)$.

Ta cũng có kết quả sau đây liên quan đến phép nhúng compact.

Bổ đề 2.9. (Bổ đề về tính compact của Lions [3], trang 57). Với giả thiết trên và nếu $1 < p_i < +\infty, i = 1, 2$, thì phép nhúng $W(0, T) \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; X_0)$ là compact.

Bổ đề 2.10. (Bổ đề về sự hội tụ yếu của Lions [3] trang 12) Cho Q là tập mở bị chặn của $\mathbb{R}^N$ và $G_m, G \in L^p(Q), 1 < p < \infty$ sao cho:

$$i/ \|G_m\|_{L^p(Q)} \leq C, \text{ trong đó } C \text{ là hằng số độc lập với } m,$$

ii/ $G_m \rightarrow G$ a.e., trong Q .

Khi đó, ta có: $G_m \rightarrow G$ trong $L^p(Q)$ yếu

Bổ đề 2.11. (Bổ đề Gronwall). Giả sử $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả tích, không âm trên $[0, T]$ và thỏa bất đẳng thức

$$f(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t f(s) ds \text{ với hầu hết } t \in [0, T],$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số không âm. Khi đó

$$f(t) \leq C_1 e^{C_2 t}, \text{ với hầu hết } t \in [0, T].$$

Bổ đề 2.12. (Nguyên lý ánh xạ co của Banach [1]). Cho (M, d) là không gian Metric đầy đủ và $T : M \rightarrow M$ là ánh xạ co, nghĩa là, Tồn tại $k \in [0, 1)$ sao cho $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \forall x, y \in M$. Khi đó, T có duy nhất một điểm bất động $x_* \in M$.

Hơn nữa, với mỗi $x_0 \in M$ cho trước, dãy lặp $T^n x_0$ hội tụ về x_* .

Trong luận văn này để tiện cho việc trình bày ta sẽ dùng các ký hiệu sau

$$u(t), \quad u'(t) = u_t(t), \quad u''(t) = u_{tt}(t), \quad u_x(t) = \nabla u(t), \quad u_{xx}(t) = \Delta u(t), \quad D_3 f, \quad D_1 B, \quad D_2 B,$$

lần lượt thay cho

$$u(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, t, u), \quad \frac{\partial B(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial B(\xi, \eta)}{\partial \eta}.$$

Chương 3

SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM: TRƯỜNG HỢP ĐIỀU KIỆN BIÊN THUẦN NHẤT

3.1. Giới thiệu

Trong chương này, chúng tôi xét bài toán giá trị biên và giá trị ban đầu sau đây:

$$\begin{cases} u_{tt} - B(t, \|u_x(t)\|^2) u_{xx} = f(x, t, u), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$, B , f là các hàm cho trước thỏa các điều kiện mà ta sẽ chỉ ra sau và số hạng phi tuyến $B(t, \|u_x(t)\|^2)$ phụ thuộc vào các tích phân

$$\|u_x(t)\|^2 = \int_0^1 u_x^2(x, t) dx. \quad (3.2)$$

Trong chương này, chúng tôi sẽ kết hợp bài toán (3.1) với một thuật giải quy nạp tuyến tính mà sự tồn tại và duy nhất nghiệm được chứng minh bằng phương pháp Galerkin và phương pháp compact yếu.

3.2. Các ký hiệu và giả thiết

Ta thành lập các giả thiết sau:

$$(A_1) \quad \tilde{u}_0 \in V \cap H^2, \quad \tilde{u}_1 \in V,$$

$$(A_2) \quad B \in C^1(\mathbb{R}_+^2) \text{ với } B(\xi, \eta) \geq b_0 > 0, \quad \forall \xi, \eta \geq 0,$$

$$(A_3) \quad f \in C^1([0, 1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \text{ thỏa } f(0, t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Xét $T^* > 0$, cố định. Với $M > 0$ ta định nghĩa

$$K_0 = K_0(M, f) = \sup\{|f(x, t, z)| : (x, t, z) \in A_*(M)\}, \quad (3.3)$$

$$K_1 = K_1(M, f) = \sup\{(|D_1 f| + |D_3 f|)(x, t, z) : (x, t, z) \in A_*(M)\}, \quad (3.4)$$

$$\tilde{K}_0 = \tilde{K}_0(M, B) = \sup\{B(\xi, \eta) : \xi \in [0, T^*], \eta \in [0, M^2]\}, \quad (3.5)$$

$$\tilde{K}_1 = \tilde{K}_1(M, B) = \sup \{(|D_1 B| + |D_2 B|)(\xi, \eta) : \xi \in [0, T^*], \eta \in [0, M^2]\}, \quad (3.6)$$

trong đó $A_*(M) = \{(x, t, z) \in [0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R} : |z| \leq M\}$.

Với mỗi $T \in (0, T^*]$ và $M > 0$ ta đặt

$$W(M, T) = \{u \in L^\infty(0, T; V \cap H^2) : u_t \in L^\infty(0, T; V), u_{tt} \in L^2(Q_T),$$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; V \cap H^2)} \leq M, \|u_t\|_{L^\infty(0, T; V)} \leq M, \|u_{tt}\|_{L^2(Q_T)} \leq M\}, \quad (3.7)$$

$$W_1(M, T) = \{u \in W(M, T) : u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2)\}. \quad (3.8)$$

trong đó $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$.

3.3. Thuật giải xấp xỉ tuyến tính

Trong phần này, với sự lựa chọn M và T thích hợp ta xây dựng một dãy $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ trong $W_1(M, T)$ bằng quy nạp. Dãy $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ sẽ được chứng minh hội tụ về nghiệm yếu của bài toán (3.1).

Chọn số hạng ban đầu $u_0 = 0$. Giả sử rằng

$$u_{m-1} \in W_1(M, T). \quad (3.9)$$

Ta liên kết bài toán (3.1) với bài toán biên phân sau.

Tìm $u_m \in W_1(M, T)$, $m \geq 1$ sao cho

$$\begin{cases} \langle \ddot{u}_m(t), v \rangle + b_m(t) \langle \nabla u_m(t), \nabla v \rangle = \langle F_m(x, t), v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ u_m(0) = \tilde{u}_0, \quad \dot{u}_m(0) = \tilde{u}_1, \end{cases} \quad (3.10)$$

trong đó

$$b_m(t) = B(t, \|\nabla u_{m-1}(t)\|^2), \quad (3.11)$$

$$F_m(x, t) = f(x, t, u_{m-1}(t)). \quad (3.12)$$

Sự tồn tại của dãy $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ cho bởi định lý sau đây.

Định lý 3.1. *Giả sử $(A_1) - (A_3)$ đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số $M > 0$ và $T > 0$ sao cho, với $u_0 = 0$, tồn tại một dãy quy nạp tuyến tính $\{u_m\} \subset W_1(M, T)$ xác định bởi (3.10) – (3.12).*

Chứng minh định lý 3.1. Gồm các bước sau.

Bước 1. Xấp xỉ Galerkin. Giả sử $\{w_j\}$ với $w_j(x) = \sqrt{2} \sin(j + \frac{1}{2})\pi x$, $j \in \mathbb{N}$ là cơ sở đặc biệt của $V \cap H^2$ gồm các hàm riêng w_j của toán tử $-\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sao cho $-\Delta w_j = \lambda_j w_j$, $w_j \in V \cap H^2$, với $\lambda_j = (j + \frac{1}{2})^2 \pi^2$. Dùng phương pháp Galerkin để xây dựng nghiệm yếu xấp xỉ của (3.10) như sau

$$u_m^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^k c_{mj}^{(k)}(t) w_j, \quad (3.13)$$

với $c_{mj}^{(k)}$ thỏa các hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\begin{cases} \langle \ddot{u}_m^{(k)}(t), w_j \rangle + b_m(t) \langle \nabla u_m^{(k)}(t), \nabla w_j \rangle = \langle F_m(t), w_j \rangle, & 1 \leq j \leq k, \\ u_m^{(k)}(0) = u_{0k}, & \dot{u}_m^{(k)}(0) = u_{1k}, \end{cases} \quad (3.14)$$

trong đó

$$u_{0k} \equiv \sum_{j=1}^k \alpha_{mj}^{(k)} w_j \rightarrow \tilde{u}_0 \text{ mạnh trong } V \cap H^2, \quad (3.15)$$

$$u_{1k} \equiv \sum_{j=1}^k \beta_{mj}^{(k)} w_j \rightarrow \tilde{u}_1 \text{ mạnh trong } V. \quad (3.16)$$

Giả sử u_{m-1} thỏa (3.9), ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3.1. *Giả sử (A₁) – (A₃) đúng. Khi đó với $T > 0$ cố định, hệ phương trình (3.14) – (3.16) có nghiệm duy nhất $u_m^{(k)}$ xác định trên $0 \leq t \leq T$.*

Chứng minh bổ đề 3.1. Bỏ qua các chỉ số m, k trong cách viết và ta viết $c_j(t)$, α_j , β_j lần lượt thay cho $c_{mj}^{(k)}(t)$, $\alpha_{mj}^{(k)}$, $\beta_{mj}^{(k)}$. Khi đó, hệ phương trình (3.14) – (3.16) được viết lại dưới dạng như sau:

$$\begin{cases} \ddot{c}_j(t) = -\lambda_j b_m(t) c_j(t) + \langle F_m(t), w_j \rangle, & 1 \leq j \leq k, \\ c_j(0) = \alpha_j, & \dot{c}_j(0) = \beta_j. \end{cases} \quad (3.17)$$

Hệ phương trình này tương đương với hệ phương trình tích phân

$$c(t) = \alpha_j + \beta_j t - \lambda_j \int_0^t d\tau \int_0^\tau b_m(s) c_j(s) ds + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \langle F_m(s), w_j \rangle ds \quad (3.18)$$

Ta viết lại (3.18) dưới dạng

$$c(t) = H[c](t) \equiv L[c](t) + G(t), \quad c \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^k),$$

trong đó

$$\begin{cases} c(t) = (c_1(t), \dots, c_k(t)), \quad H[c](t) = (H_1[c](t), \dots, H_k[c](t)), \\ H_j[c](t) = L_j[c](t) + G_j(t) \\ L_j[c](t) = -\lambda_j \int_0^t d\tau \int_0^\tau b_m(s) c_j(s) ds, \\ G_j(t) = \alpha_j + \beta_j t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \langle F_m(s), w_j \rangle ds, \quad 1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

Sự tồn tại nghiệm $u_m^{(k)}(t)$ trên đoạn $[0, T]$ sẽ được suy ra từ sự tồn tại nghiệm $c_m^{(k)} \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^k)$ thỏa mãn phương trình tích phân nói trên. Như vậy ta cần chứng minh toán tử $H : C^0([0, T]; \mathbb{R}^k) \rightarrow C^0([0, T]; \mathbb{R}^k)$ có điểm bất động.

Ở đây, chuẩn trong không gian Banach $X = C^0([0, T]; \mathbb{R}^k)$ được định nghĩa như sau:

$$\|c\|_X = \sup_{0 \leq t \leq T} |c(t)|_1, \quad |c(t)|_1 = \sum_{j=1}^k |c_j(t)|, \quad \text{với mỗi } c = (c_1, \dots, c_k) \in X.$$

Ta bắt đầu bởi việc chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng: $c, d \in X$, $\forall t \in [0, T]$, bất đẳng thức sau đúng.

$$\left| H^n[c](t) - H^n[d](t) \right|_1 \leq \frac{(\sqrt{\lambda_k \tilde{K}_0} t)^{2n}}{(2n)!} \|c - d\|_X, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.19)$$

Chứng minh (3.19) như sau

Với $n = 1$, ta có

$$\begin{aligned} \left| H_j[c](t) - H_j[d](t) \right| &= \left| L_j[c](t) - L_j[d](t) \right| \\ &= \left| \lambda_j \int_0^t d\tau \int_0^\tau b_m(s) [c_j(s) - d_j(s)] ds \right| \\ &\leq \lambda_k \tilde{K}_0 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c_j(s) - d_j(s)| ds, \quad 1 \leq j \leq k, \end{aligned}$$

hay

$$\left| H[c](t) - H[d](t) \right|_1 \leq \lambda_k \tilde{K}_0 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \sum_{j=1}^k |c_j(s) - d_j(s)| ds$$

$$\leq \lambda_k \tilde{K}_0 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c(s) - d(s)|_1 ds \leq \frac{(\sqrt{\lambda_k \tilde{K}_0} t)^2}{2} \|c - d\|_X. \quad (3.20)$$

Do đó

$$\left| H[c](t) - H[d](t) \right|_1 \leq \frac{1}{2} \lambda_k \tilde{K}_0 t^2 \|c - d\|_X. \quad (3.21)$$

Vậy, (3.19) đúng với $n = 1$.

Giả sử (3.19) đúng với $n \geq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} \left| H^{n+1}[c](t) - H^{n+1}[d](t) \right|_1 &= \left| H[H^n[c]](t) - H[H^n[d]](t) \right|_1 \\ &\leq \lambda_k \tilde{K}_0 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |H^n[c](s) - H^n[d](s)|_1 ds \\ &\leq \lambda_k \tilde{K}_0 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{1}{(2n)!} (\lambda_k \tilde{K}_0 s^2)^n \|c - d\|_X ds \\ &\leq \frac{(\sqrt{\lambda_k \tilde{K}_0} T)^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!} \|c - d\|_X. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Điều này dẫn đến

$$\left\| H^n[c] - H^n[d] \right\|_X \leq \frac{(\sqrt{\lambda_k \tilde{K}_0} T)^{2n}}{(2n)!} \|c - d\|_X, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \quad (3.23)$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{\lambda_k \tilde{K}_0} T)^{2n}}{(2n)!} = 0$, nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{(\sqrt{\lambda_k \tilde{K}_0} T)^{2n_0}}{(2n_0)!} < 1$.

Áp dụng định lý Banach, ta suy ra được H có một điểm bất động duy nhất $c \in X$. Bổ đề 3.1 được chứng minh.

Khi đó hệ phương trình vi phân (3.14) – (3.16) có nghiệm duy nhất $u_m^{(k)}(t)$ trên một khoảng $[0, T]$.

Bước 2. Đánh giá tiên nghiệm.

Nhân (3.14)₁ bởi $\dot{c}_m^{(k)}(t)$, sau đó lấy tổng theo j , ta được

$$\langle \ddot{u}_m^{(k)}(t), \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle + b_m(t) \langle \nabla u_m^{(k)}(t), \nabla \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle = \langle F_m(t), \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle. \quad (3.24)$$

hay

$$\frac{d}{dt} \left(\|\dot{u}_m^{(k)}(t)\|^2 \right) + b_m(t) \frac{d}{dt} \left(\|\nabla u_m^{(k)}(t)\|^2 \right) = 2 \langle F_m(t), \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle. \quad (3.25)$$

Sau đó tích phân theo biến thời gian, cận từ 0 đến t , ta được

$$p_m^{(k)}(t) = p_m^{(k)}(0) + 2 \int_0^t \langle F_m(s), \dot{u}_m^{(k)}(s) \rangle ds + \int_0^t \dot{b}_m(s) \|\nabla u_m^{(k)}(s)\|^2 ds, \quad (3.26)$$

trong đó

$$p_m^{(k)}(t) = \|\dot{u}_m^{(k)}(t)\|^2 + b_m(t) \|\nabla u_m^{(k)}(t)\|^2. \quad (3.27)$$

Trong (3.14)₁ thay w_j bởi $-\frac{1}{\lambda_j} \Delta w_j$, sau đó đơn giản λ_j . Khi đó

$$\langle \dot{u}_m^{(k)}(t), -\Delta w_j \rangle + b_m(t) \langle \nabla u_m^{(k)}(t), -\Delta w_j \rangle = \langle F_m(t), -\Delta w_j \rangle. \quad (3.28)$$

Từ giả thiết (A₃) và tính tích phân từng phần theo biến x , với cận từ 0 đến 1 các tích phân trong (3.28) ta thu được

$$\langle \nabla \ddot{u}_m^{(k)}(t), \nabla w_j \rangle + b_m(t) \langle \Delta u_m^{(k)}(t), \Delta w_j \rangle = \langle \nabla F_m(t), \nabla w_j \rangle. \quad (3.29)$$

Nhân (3.29) bởi $\dot{u}_m^{(k)}(t)$, sau đó lấy tổng theo j , thì (3.29) trở thành

$$\langle \nabla \ddot{u}_m^{(k)}(t), \nabla \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle + b_m(t) \langle \Delta u_m^{(k)}(t), \Delta \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle = \langle \nabla F_m(t), \nabla \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle. \quad (3.30)$$

hay

$$\frac{d}{dt} (\|\nabla \dot{u}_m^{(k)}(t)\|^2) + b_m(t) \frac{d}{dt} (\|\Delta u_m^{(k)}(t)\|^2) = 2 \langle \nabla F_m(t), \nabla \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle. \quad (3.31)$$

Tích phân theo biến thời gian, cận từ 0 đến t , ta được

$$q_m^{(k)}(t) = q_m^{(k)}(0) + 2 \int_0^t \langle \nabla F_m(s), \nabla \dot{u}_m^{(k)}(s) \rangle ds + \int_0^t \dot{b}_m(s) \|\Delta u_m^{(k)}(s)\|^2 ds, \quad (3.32)$$

trong đó

$$q_m^{(k)}(t) = \|\nabla \dot{u}_m^{(k)}(t)\|^2 + b_m(t) \|\Delta u_m^{(k)}(t)\|^2. \quad (3.33)$$

Tổ hợp (3.26) – (3.27) và (3.32) – (3.33), ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} s_m^{(k)}(t) &= s_m^{(k)}(0) + 2 \int_0^t \langle F_m(s), \dot{u}_m^{(k)}(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle \nabla F_m(s), \nabla \dot{u}_m^{(k)}(s) \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \dot{b}_m(s) (\|\nabla u_m^{(k)}(s)\|^2 + \|\Delta u_m^{(k)}(s)\|^2) ds + \int_0^t \|\ddot{u}_m^{(k)}(s)\|^2 ds \\ &= s_m^{(k)}(0) + \sum_{j=1}^4 I_j, \end{aligned} \quad (3.34)$$

trong đó

$$s_m^{(k)}(t) = p_m^{(k)}(t) + q_m^{(k)}(t) + \int_0^t \|\ddot{u}_m^{(k)}(s)\|^2 ds. \quad (3.35)$$

Ta sẽ đánh giá các tích phân I_j , $j = 1, \dots, 4$, trong vế phải của (3.34).

Tích phân thứ nhất. Từ giả thiết (A_3) , (3.3), (3.9), (3.12) và (3.35). Ta thu được

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 2 \int_0^t \langle F_m(s), \dot{u}_m^{(k)}(s) \rangle ds \leq 2 \int_0^t \|F_m(s)\| \cdot \|\dot{u}_m^{(k)}(s)\| ds \\ &\leq 2K_0 \int_0^t \sqrt{p_m^{(k)}(s)} ds \leq TK_0^2 + \int_0^t s_m^{(k)}(s) ds. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Tích phân thứ hai. Từ giả thiết (A_3) , (3.4), (3.9), (3.12) và (3.35). Ta có

$$\nabla F_m(t) = \nabla f(x, t, u_{m-1}(t)) = D_1 f(x, t, u_{m-1}(t)) + D_3 f(x, t, u_{m-1}(t)) \nabla u_{m-1}(t),$$

nên

$$\begin{aligned} |\nabla F_m(t)| &\leq |D_1 f(x, t, u_{m-1}(t))| + |D_3 f(x, t, u_{m-1}(t))| \cdot |\nabla u_{m-1}(t)|, \\ &\leq (|D_1 f(x, t, u_{m-1}(t))| + |D_3 f(x, t, u_{m-1}(t))|) \cdot (1 + |\nabla u_{m-1}(t)|), \\ &\leq K_1(1 + |\nabla u_{m-1}(t)|) \end{aligned}$$

hay

$$\|\nabla F_m(t)\| \leq K_1(1 + \|\nabla u_{m-1}(t)\|) \leq K_1(1 + M).$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2 \int_0^t \|\nabla F_m(s)\| \cdot \|\nabla \dot{u}_m^{(k)}(s)\| ds \\ &\leq 2K_1(1 + M) \int_0^t \sqrt{q_m^{(k)}(s)} ds \leq TK_1^2(1 + M)^2 + \int_0^t s_m^{(k)}(s) ds. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Tích phân thứ ba. Từ giả thiết (A_2) , (3.6), (3.9), (3.11), (3.35). Ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} \dot{b}_m(t) &= \dot{B}(t, \|\nabla u_{m-1}(t)\|^2) \\ &= D_1 B(t, \|\nabla u_{m-1}(t)\|^2) + 2D_2 B(t, \|\nabla u_{m-1}(t)\|^2) \langle \nabla u_{m-1}(t), \nabla \dot{u}_{m-1}(t) \rangle, \end{aligned}$$

nên

$$|\dot{b}_m(t)| \leq (|D_1 B| + |D_2 B|) (1 + 2\|\nabla u_{m-1}(t)\| \cdot \|\nabla \dot{u}_{m-1}(t)\|) \leq \tilde{K}_1(1 + 2M^2).$$

Do đó

$$I_3 \leq \frac{\tilde{K}_1(1 + 2M^2)}{b_0} \int_0^t s_m^{(k)}(s) ds. \quad (3.38)$$

Tích phân thứ tư. Ta viết lại (3.14)₁ dưới dạng

$$\langle \ddot{u}_m^{(k)}(t), w_j \rangle = b_m(t) \langle \Delta u_m^{(k)}(t), w_j \rangle + \langle F_m(t), w_j \rangle. \quad (3.39)$$

Nhân (3.39) bởi $\ddot{c}_m^{(k)}(t)$, sau đó lấy tổng theo j , thì (3.39) trở thành

$$\langle \ddot{u}_m^{(k)}(t), \ddot{u}_m^{(k)}(t) \rangle = b_m(t) \langle \Delta u_m^{(k)}(t), \ddot{u}_m^{(k)}(t) \rangle + \langle F_m(t), \ddot{u}_m^{(k)}(t) \rangle,$$

hay

$$\begin{aligned} \|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\|^2 &\leq \|b_m(t)\| \|\Delta u_m^{(k)}(t)\| \|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\| + \|F_m(t)\| \|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\| \\ &\leq b_m^2(t) \|\Delta u_m^{(k)}(t)\|^2 + \frac{1}{4} \|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\|^2 + \|F_m(t)\|^2 + \frac{1}{4} \|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Từ các giả thiết (A₂), (A₃) và (3.3), (3.5), (3.9), (3.40). Ta thu được đánh giá

$$\|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\|^2 \leq 2\tilde{K}_0 b_m(t) \|\Delta u_m^{(k)}(t)\|^2 + 2K_0^2. \quad (3.41)$$

Lấy tích phân hai vế của (3.41) theo t , ta được

$$I_4 \leq 2\tilde{K}_0 \int_0^t s_m^{(k)}(s) ds + 2TK_0^2. \quad (3.42)$$

Tổ hợp (3.35) - (3.38), (3.42), ta được

$$s_m^{(k)}(t) \leq s_m^{(k)}(0) + C_1(M, T) + C_2(M) \int_0^t s_m^{(k)}(s) ds, \quad (3.43)$$

trong đó

$$C_1(M, T) = T[3K_0^2 + K_1^2(1 + M)^2], \quad (3.44)$$

$$C_2(M) = \frac{\tilde{K}_1}{b_0}(1 + 2M^2) + 2\tilde{K}_0 + 2. \quad (3.45)$$

Bây giờ ta cần đánh giá số hạng $s_m^{(k)}(0)$. Ta có

$$s_m^{(k)}(0) = \|u_{1k}\|^2 + \|\nabla u_{1k}\|^2 + B\left(0, \|\nabla \tilde{u}_0\|^2\right) \left(\|\nabla u_{0k}\|^2 + \|\Delta u_{0k}\|^2\right). \quad (3.46)$$

Từ giả thiết (A₂) (3.9), (3.15), (3.16) và (3.46). Ta suy ra rằng tồn tại hằng số $M > 0$, độc lập với k và m , sao cho:

$$s_m^{(k)}(0) \leq \frac{M^2}{2} \text{ với mọi } k \text{ và } m. \quad (3.47)$$

Chú ý rằng,

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} C_1(M, T) = 0. \quad (3.48)$$

Từ (3.44) – (3.48), chúng ta luôn chọn được hằng số $T > 0$ sao cho:

$$\left(\frac{M^2}{2} + C_1(M, T) \right) e^{-TC_2(M)} \leq M^2, \quad (3.50)$$

và

$$k_T = \left(1 + b_0^{-\frac{1}{2}} \right) \sqrt{T(K_1^2 + 4M^4 \tilde{K}_1^2)} e^{\left[2 + \frac{\tilde{K}_1(1+2M^2)}{b_0} \right] \frac{T}{2}} < 1. \quad (3.51)$$

Cuối cùng, ta suy từ (3.43) và (3.50) rằng

$$s_m^{(k)}(t) \leq M^2 e^{-TC_2(M)} + C_2(M) \int_0^t s_m^{(k)}(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.52)$$

Sử dụng bổ đề Gronwall, chúng ta suy từ (3.52) rằng

$$s_m^{(k)}(t) \leq M^2 e^{-TC_2(M)} e^{C_2(M)t} \leq M^2 e^{-TC_2(M)} e^{C_2(M)T} \leq M^2, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.53)$$

Vậy ta có

$$u_m^{(k)} \in W_1(M, T), \quad \forall m, k. \quad (3.54)$$

Bước 3. Qua giới hạn.

Từ (3.35) và (3.52) – (3.54) ta suy ra rằng tồn tại một dãy con của dãy $\{u_m^{(k)}\}$, mà vẫn ký hiệu $\{u_m^{(k)}\}$ sao cho

$$u_m^{(k)} \rightarrow u_m \quad \text{trong } L^\infty(0, T; V \cap H^2) \text{ yếu } *, \quad (3.55)$$

$$\dot{u}_m^{(k)} \rightarrow \dot{u}_m \quad \text{trong } L^\infty(0, T; V) \text{ yếu } *, \quad (3.56)$$

$$\ddot{u}_m^{(k)} \rightarrow \ddot{u}_m \quad \text{trong } L^2(Q_T) \text{ yếu }, \quad (3.57)$$

thỏa

$$u_m \in W(M, T). \quad (3.58)$$

Từ (3.55) – (3.57) qua giới hạn trong (3.14) ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng u_m thỏa (3.10) trong $L^2(0, T)$ yếu.

Mặt khác, từ (3.10)₁, (3.55) – (3.58), ta được

$$u_m'' = b_m(t) \Delta u_m + F_m \in L^\infty(0, T; L^2).$$

Do vậy,

$$u_m \in W_1(M, T). \quad (3.59)$$

Định lý 3.1 được chứng minh hoàn tất ■

3.4. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định lý 3.2. Giả sử $(A_1) - (A_3)$ đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số $M > 0$, $T > 0$ thỏa (3.47), (3.50), (3.51) sao cho bài toán (3.1) có duy nhất nghiệm yếu $u \in W_1(M, T)$.

Mặt khác, dãy quy nạp tuyến tính $\{u_m\}$ được xác định bởi (3.10) – (3.12) hội tụ mạnh về nghiệm u trong không gian

$$W_1(T) = \{u \in L^\infty(0, T; V) : u' \in L^\infty(0, T; L^2)\}. \quad (3.60)$$

Hơn nữa, ta cũng có đánh giá sai số

$$\|u_m - u\|_{L^\infty(0, T; V)} + \|u'_m - u'\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq Ck_T^m, \text{ với mọi } m, \quad (3.61)$$

trong đó

$$k_T = \left(1 + b_0^{-\frac{1}{2}}\right) \sqrt{T(K_1^2 + 4M^4 \tilde{K}_1^2)} e^{[2 + \frac{\tilde{K}_1(1+2M^2)}{b_0}] \frac{T}{2}} < 1, \quad (3.62)$$

và C là một hằng số chỉ phụ thuộc vào T , $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ và k_T .

Chứng minh định lý 3.2.

i) Sự tồn tại nghiệm

Trước tiên, ta chú ý rằng $W_1(T)$ là một không gian Banach đối với chuẩn

$$\|u\|_{W_1(T)} = \|u\|_{L^\infty(0, T; V)} + \|u'\|_{L^\infty(0, T; L^2)}. \quad (3.63)$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\{u_m\}$ là một dãy Cauchy trong $W_1(T)$.

Đặt $v_m = u_{m+1} - u_m$. Khi đó, v_m thỏa bài toán biến phân

$$\begin{cases} \langle v_m''(t), v \rangle + b_{m+1}(t) \langle \nabla v_m(t), \nabla v \rangle - (b_{m+1}(t) - b_m(t)) \langle \Delta u_m(t), v \rangle \\ \qquad \qquad \qquad = \langle F_{m+1}(t) - F_m(t), v \rangle, \forall v \in V, \\ v_m(0) = v'_m(0) = 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

Chọn $v = v'_m$ trong (3.64)₁, ta được

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|v'_m(t)\|^2 \right) + b_{m+1}(t) \frac{d}{dt} \left(\|\nabla v_m(t)\|^2 \right) = \\ 2(b_{m+1}(t) - b_m(t)) \langle \Delta u_m(t), v'_m(t) \rangle + 2 \langle F_{m+1}(t) - F_m(t), v'_m(t) \rangle. \end{aligned}$$

Tích phân theo biến thời gian, cận từ 0 đến t , thu được

$$\begin{aligned}\Psi_m(t) &= \int_0^t b'_{m+1}(s) \|\nabla v_m(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t [b_{m+1}(s) - b_m(s)] \langle \Delta u_m(s), v'_m(s) \rangle ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle F_{m+1}(s) - F_m(s), v'_m(s) \rangle ds = \sum_{i=1}^3 J_i,\end{aligned}\tag{3.65}$$

trong đó

$$\Psi_m(t) = \|v'_m(t)\|^2 + b_{m+1}(t) \|\nabla v_m(t)\|^2.\tag{3.66}$$

Bây giờ, ta đánh giá các tích phân ở vế phải của (3.65) như sau

Tích phân thứ nhất. Từ giả thiết (A₂), (3.5), (3.6), (3.9) và (3.11) ta dễ dàng có

$$\begin{aligned}b'_{m+1}(t) &= D_1 B(t, \|\nabla u_m(t)\|^2) + 2D_2 B(t, \|\nabla u_m(t)\|^2) \langle \nabla u_m(t), \nabla u'_m(t) \rangle, \\ &\leq (|D_1 B| + |D_2 B|)(1 + 2\|\nabla u_m(t)\| \|\nabla u'_m(t)\|) \\ &\leq \tilde{K}_1(1 + 2M^2).\end{aligned}$$

Do đó

$$J_1 = \int_0^t b'_{m+1}(s) \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \leq \frac{\tilde{K}_1(1+2M^2)}{b_0} \int_0^t \Psi_m(s) ds.\tag{3.67}$$

Tích phân thứ hai. Từ giả thiết (A₂), (3.5), (3.6), (3.9) và (3.11) ta thu được đánh giá sau

$$\begin{aligned}|b_{m+1}(t) - b_m(t)| &\leq |B(t, \|\nabla u_m(t)\|^2) - B(t, \|\nabla u_{m-1}(t)\|^2)| \\ &\leq \tilde{K}_1 \left(\left| \|\nabla u_m(t)\|^2 - \|\nabla u_{m-1}(t)\|^2 \right| \right) \\ &\leq 2M\tilde{K}_1 \left| \|\nabla u_m(t)\| - \|\nabla u_{m-1}(t)\| \right| \\ &\leq 2M\tilde{K}_1 \|\nabla v_{m-1}(t)\| \leq 2M\tilde{K}_1 \|v_{m-1}\|_{W_1(T)},\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}J_2 &= 2 \int_0^t [b_{m+1}(s) - b_m(s)] \langle \Delta u_m(s), v'_m(s) \rangle ds \\ &\leq 4M\tilde{K}_1 \|v_{m-1}\|_{W_1(T)} \int_0^t \|\Delta u_m(s)\| \cdot \|v'_m(s)\| ds \\ &\leq 4TM^4 \tilde{K}_1^2 \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 + \int_0^t \|v'_m(s)\|^2 ds \\ &\leq 4TM^4 \tilde{K}_1^2 \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 + \int_0^t \Psi_m(s) ds.\end{aligned}\tag{3.68}$$

Tích phân thứ ba. Từ giả thiết (A₃), (3.4), (3.8), (3.9) và (3.12) ta có

$$\begin{aligned}
\|F_{m+1}(t) - F_m(t)\| &= \|f(x, t, u_m(t)) - f(x, t, u_{m-1}(t))\| \\
&\leq K_1 \|u_m(t) - u_{m-1}(t)\| \leq K_1 \|v_{m-1}(t)\| \leq K_1 \|v_{m-1}\|_{W_1(T)},
\end{aligned}$$

suy ra rằng

$$\begin{aligned}
J_3 &= 2 \int_0^t \langle F_{m+1}(s) - F_m(s), v'_m(s) \rangle ds \leq 2 \int_0^t \|F_{m+1}(s) - F_m(s)\| \|v'_m(s)\| ds \\
&\leq TK_1^2 \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 + \int_0^t \Psi_m(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Tổ hợp (3.65), (3.67) - (3.69) ta được

$$\Psi_m(t) \leq T(K_1^2 + 4M^4 \tilde{K}_1^2) \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 + [2 + \frac{\tilde{K}_1(1+2M^2)}{b_0}] \int_0^t \Psi_m(s) ds. \tag{3.70}$$

Áp dụng bổ đề Gronwall cho (3.70), ta suy ra rằng

$$\Psi_m(t) \leq T(K_1^2 + 4M^4 \tilde{K}_1^2) \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 e^{[2 + \frac{\tilde{K}_1(1+2M^2)}{b_0}]T}. \tag{3.71}$$

Do đó

$$\|v_m\|_{W_1(T)} \leq k_T \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}, \text{ với mọi } m, \tag{3.72}$$

trong đó

$$k_T = \left(1 + b_0^{-\frac{1}{2}}\right) \sqrt{T(K_1^2 + 4M^4 \tilde{K}_1^2)} e^{[2 + \frac{\tilde{K}_1(1+2M^2)}{b_0}] \frac{T}{2}}. \tag{3.73}$$

Như vậy

$$\|u_{m+p} - u_m\|_{W_1(T)} \leq \frac{k_T^m}{1-k_T} \|u_1 - u_0\|_{W_1(T)}, \text{ với mọi } m, p. \tag{3.74}$$

Từ (3.74) ta có $\{u_m\}$ là dãy Cauchy trong không gian $W_1(T)$ và do đó tồn tại $u \in W_1(T)$, sao cho:

$$u_m \rightarrow u \text{ trong } W_1(T) \text{ mạnh.} \tag{3.75}$$

Ta cũng lưu ý rằng do $u_m \in W_1(M, T)$, nên ta trích ra một dãy con $\{u_{m_j}\}$ của dãy $\{u_m\}$, sao cho:

$$u_{m_j} \rightarrow u \text{ trong } L^\infty(0, T; V \cap H^2) \text{ yếu } *, \tag{3.76}$$

$$u'_{m_j} \rightarrow u' \text{ trong } L^\infty(0, T; V) \text{ yếu } *, \tag{3.77}$$

$$u''_{m_j} \rightarrow u'' \text{ trong } L^2(Q_T) \text{ yếu,} \tag{3.78}$$

$$u \in W(M, T). \quad (3.79)$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} & \left| b_m(t) \nabla u_m(t) - B(t, \|\nabla u(t)\|^2) \nabla u(t) \right| \\ & \leq \left| B(t, \|\nabla u_{m-1}(t)\|^2) \nabla u_m(t) - B(t, \|\nabla u(t)\|^2) \nabla u(t) \right| \\ & \leq \left| B(t, \|\nabla u_{m-1}(t)\|^2) \right| |\nabla u_m(t) - \nabla u(t)| \\ & \quad + \left| B(t, \|\nabla u_{m-1}(t)\|^2) - B(t, \|\nabla u(t)\|^2) \right| |\nabla u(t)| \\ & \leq \tilde{K}_0 |\nabla u_m(t) - \nabla u(t)| \\ & \quad + \tilde{K}_1 \|\nabla u_{m-1}(t) - \nabla u(t)\| (\|\nabla u_{m-1}(t)\| + \|\nabla u(t)\|) |\nabla u(t)| \\ & \leq \tilde{K}_0 |\nabla u_m(t) - \nabla u(t)| + 2M\tilde{K}_1 \|\nabla u_{m-1}(t) - \nabla u(t)\| \cdot \|\nabla u(t)\|, \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} & \|b_m(t) \nabla u_m(t) - B(t, \|\nabla u(t)\|^2) \nabla u(t)\| \\ & \leq \tilde{K}_0 \|\nabla u_m(t) - \nabla u(t)\| + 2M\tilde{K}_1 \|\nabla u_{m-1}(t) - \nabla u(t)\| \cdot \|\nabla u(t)\|. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} & \|b_m(t) \nabla u_m(t) - B(t, \|\nabla u(t)\|^2) \nabla u(t)\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \\ & \leq \tilde{K}_0 \|u_m - u\|_{W_1(T)} + 2M^2 \tilde{K}_1 \|u_{m-1} - u\|_{W_1(T)}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Ta suy ra từ (3.75) và (3.80) rằng

$$b_m(t) \nabla u_m \rightarrow B(t, \|\nabla u\|^2) \nabla u \text{ trong } L^\infty(0, T; L^2) \text{ mạnh.} \quad (3.81)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} & |F_m(t) - f(t)| = |f(x, t, u_{m-1}(t)) - f(x, t, u(t))| \leq K_1 \|u_{m-1}(t) - u(t)\|, \\ & \|F_m - f\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq K_1 \|u_{m-1} - u\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq K_1 \|u_{m-1} - u\|_{W_1(T)}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Vậy từ (3.75) và (3.82), ta thu được

$$F_m(t) \rightarrow f(x, t, u(t)) \text{ trong } L^\infty(0, T; L^2) \text{ mạnh.} \quad (3.83)$$

Sau đó qua giới hạn (3.10) - (3.12) với m thay bằng $m_j \rightarrow \infty$.

Từ (3.75) – (3.78), (3.81), (3.83) ta có $u \in W(M, T)$ thỏa bài toán biên phân

$$\begin{cases} \langle u''(t), v \rangle + b(t) \langle \nabla u(t), \nabla v \rangle = \langle f(t), v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ u(0) = \tilde{u}_0, \quad u'(0) = \tilde{u}_1. \end{cases} \quad (3.84)$$

Mặt khác từ giả thiết (A₂), (A₃), (3.79), (3.81) và (3.83), ta lại có

$$u'' = B(t, \|u_x(t)\|^2) u_{xx} + f(t, x, u) \in L^\infty(0, T; L^2), \quad (3.85)$$

Điều này dẫn đến $u \in W_1(M, T)$.

Sự tồn tại nghiệm được chứng minh.

ii) Sự duy nhất nghiệm

Lấy $u_1, u_2 \in W_1(M, T)$ là hai nghiệm yếu của bài toán (3.1). Thì $w = u_1 - u_2$

thỏa mãn bài toán biên phân sau

$$\begin{cases} \langle w''(t), v \rangle + B_1(t) \langle \nabla w(t), \nabla v \rangle - (B_1(t) - B_2(t)) \langle \Delta u_2(t), v \rangle \\ \quad \quad \quad = \langle F_1(t) - F_2(t), v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ w(0) = w'(0) = 0, \end{cases} \quad (3.86)$$

trong đó

$$B_i(t) = B(t, \|\nabla u_i(t)\|^2), \quad F_i(t) = f(x, t, u_i(t)), \quad i = 1, 2. \quad (3.87)$$

Trong (3.86)₁ ta thay $v = w'$, sau đó lấy tích phân theo t , ta được

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_0^t B_1'(s) \|\nabla w(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t [B_1(s) - B_2(s)] \langle \Delta u_2(s), w'(s) \rangle ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle F_1(s) - F_2(s), w(s) \rangle ds = \sum_{i=1}^3 \bar{J}_i, \end{aligned} \quad (3.88)$$

trong đó

$$X(t) = \|w'(t)\|^2 + B_1(t) \|\nabla w(t)\|^2. \quad (3.89)$$

Bây giờ, ta đánh giá các tích phân ở vế phải của (3.88) như sau

Tích phân thứ nhất. Từ giả thiết (A₂), (3.6) và (3.88) ta có

$$\bar{J}_1 = \int_0^t B_1'(s) \|\nabla w(s)\|^2 ds \leq \frac{\tilde{K}_1(1+2M^2)}{b_0} \int_0^t X(s) ds. \quad (3.90)$$

Tích phân thứ hai. Từ giả thiết (A₂), (3.6) ta thu được đánh giá sau

$$\begin{aligned} |B_1(t) - B_2(t)| &\leq |B(t, \|\nabla u_1(t)\|^2) - B(t, \|\nabla u_2(t)\|^2)| \\ &\leq \tilde{K}_1 \left(\left| \|\nabla u_1(t)\|^2 - \|\nabla u_2(t)\|^2 \right| \right) \leq 2M\tilde{K}_1 \|\nabla w(t)\|, \end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}
\bar{J}_2 &= 2 \int_0^t [B_1(s) - B_2(s)] \langle \Delta u_2(s), w'(s) \rangle ds \\
&\leq 4M\tilde{K}_1 \int_0^t \|\nabla w(s)\| \|\Delta u_2(s)\| \|w'_m(s)\| ds \\
&\leq 4M^2\tilde{K}_1 \int_0^t \|\nabla w(s)\| \|w'_m(s)\| ds
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Tích phân thứ ba. Từ giả thiết (A₃), (3.4) ta có

$$\begin{aligned}
\|F_1(t) - F_2(t)\| &= \|f(x, t, u_1(t)) - f(x, t, u_2(t))\| \\
&\leq K_1 \|u_1(t) - u_2(t)\| \leq K_1 \|w(t)\| \leq K_1 \|\nabla w(t)\|,
\end{aligned}$$

suy ra rằng

$$\begin{aligned}
\bar{J}_3 &= 2 \int_0^t \langle F_1(s) - F_2(s), w'(s) \rangle ds \leq 2 \int_0^t \|F_1(s) - F_2(s)\| \|w'(s)\| ds \\
&\leq 2K_1 \int_0^t \|\nabla w(s)\| \|w'(s)\| ds.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Tổ hợp (3.88), (3.90) - (3.92) ta được

$$\begin{aligned}
X(t) &\leq \frac{\tilde{K}_1(1+2M^2)}{b_0} \int_0^t X(s) ds + 2(K_1 + 2M^2\tilde{K}_1) \int_0^t \|\nabla w(s)\| \|w'(s)\| ds \\
&\leq \frac{1}{b_0} \left[\tilde{K}_1(1+2M^2) + (K_1 + 2M^2\tilde{K}_1)(1+b_0) \right] \int_0^t X(s) ds,
\end{aligned} \tag{3.93}$$

hay

$$X(t) \leq \bar{K} \int_0^t X(s) ds,$$

trong đó

$$\bar{K} = \frac{1}{b_0} \left[\tilde{K}_1(1+2M^2) + (K_1 + 2M^2\tilde{K}_1)(1+b_0) \right].$$

Sử dụng bổ đề Gronwall ta có $X(t) \equiv 0$, nghĩa là $u_1 \equiv u_2$.

Định lý 3.2 được chứng minh hoàn tất ■

Chương 4

SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM: TRƯỜNG HỢP ĐIỀU KIỆN BIÊN KHÔNG THUẦN NHẤT

4.1. Giới thiệu

Trong chương này, chúng tôi xét bài toán giá trị biên và giá trị ban đầu sau đây:

$$\begin{cases} u_{tt} - B(t, ||u_x(t)||^2)u_{xx} = f(x, t, u), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = g(t), \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (4.1)$$

trong đó $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$, B , f , g là các hàm cho trước thỏa các điều kiện mà ta sẽ chỉ ra sau và số hạng phi tuyến $B(t, ||u_x(t)||^2)$ phụ thuộc vào các tích phân:

$$||u_x(t)||^2 = \int_0^1 u_x^2(x, t) dx. \quad (4.2)$$

Đặt $\Phi(x, t) = xg(t)$. Bằng cách đổi ẩn hàm $v(x, t) = u(x, t) - \Phi(x, t)$, ta đưa bài toán có điều kiện biên không thuần nhất (4.1) về bài toán với điều kiện biên thuần nhất như sau.

$$\begin{cases} v_{tt} - \tilde{B}(t, ||v_x(t)||^2)v_{xx} = \tilde{f}(x, t, v), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ v(0, t) = v_x(1, t) = 0, \\ v(x, 0) = \tilde{v}_0(x), \quad v_t(x, 0) = \tilde{v}_1(x), \end{cases} \quad (4.3)$$

trong đó

$$\begin{cases} \tilde{B}(t, ||v_x(t)||^2) = B(t, ||v_x(t) + g(t)||^2), \\ \tilde{f}(x, t, v) = f(x, t, v + \Phi) - \Phi_{tt}(x, t) = f(x, t, v + \Phi) - xg''(t), \\ \tilde{v}_0(x) = \tilde{u}_0(x) - \Phi(x, 0) = \tilde{u}_0(x) - xg(0), \\ \tilde{v}_1(x) = \tilde{u}_1(x) - \Phi_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x) - xg'(0), \end{cases} \quad (4.4)$$

cùng với điều kiện tương thích $g(0) = u_t(1, 0) = \tilde{u}_1(1)$.

Trong chương này cũng như chương 3, chúng tôi sẽ kết hợp bài toán (4.3) với một thuật giải quy nạp tuyến tính mà sự tồn tại và duy nhất nghiệm được chứng minh bằng phương pháp Galerkin và phương pháp compact yếu.

4.2. Các ký hiệu và giả thiết

Ta thành lập các giả thiết sau:

$$(A_1) \quad \tilde{u}_0 \in V \cap H^2, \quad \tilde{u}_1 \in V,$$

$$(A_2) \quad B \in C^1(\mathbb{R}_+^2) \text{ với } B(\xi, \eta) \geq b_0 > 0, \quad \forall \xi, \eta \geq 0,$$

$$(A_3) \quad f \in C^1((0, 1) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \text{ thỏa } f(0, t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

$$(A_4) \quad g \in C^3(\mathbb{R}_+).$$

Xét $T^* > 0$, cố định. Với $M > 0$ ta định nghĩa

$$M^* = \sup_{0 \leq t \leq T^*} (|g(t)| + |g'(t)| + |g''(t)|), \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} K_0(\bar{M}, f) = \sup\{|f(x, t, z)| : (x, t, z) \in A_*(\bar{M})\}, \\ K_1(\bar{M}, f) = \sup\{(|D_1 f| + |D_3 f|)(x, t, z) : (x, t, z) \in A_*(\bar{M})\}, \end{cases} \quad (4.6)$$

trong đó $A_*(\bar{M}) = \{(x, t, z) \in [0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R} : |z| \leq \bar{M} \equiv M + M^*\}$.

$$\begin{cases} \tilde{K}_0(\bar{M}, B) = \sup\{B(\xi, \eta) : \xi \in [0, T^*], \eta \in [0, \bar{M}^2]\}, \\ \tilde{K}_1(\bar{M}, B) = \sup\{(|D_1 B| + |D_2 B|)(\xi, \eta) : \xi \in [0, T^*], \eta \in [0, \bar{M}^2]\}, \end{cases} \quad (4.7)$$

Với mỗi $T \in (0, T^*]$ và $M > 0$ ta đặt

$$\begin{cases} W(M, T) = \{u \in L^\infty(0, T; V \cap H^2) : u_t \in L^\infty(0, T; V), u_{tt} \in L^2(Q_T), \\ \quad \|u\|_{L^\infty(0, T; V \cap H^2)} \leq M, \|u_t\|_{L^\infty(0, T; V)} \leq M, \|u_{tt}\|_{L^2(Q_T)} \leq M\}, \\ W_1(M, T) = \{u \in W(M, T) : u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2)\}. \end{cases} \quad (4.8)$$

trong đó $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$.

4.3. Thuật giải xấp xỉ tuyến tính

Trong phần này, với sự lựa chọn M và T thích hợp ta xây dựng một dãy $\{v_m\}$ trong $W_1(M, T)$ bằng quy nạp. Dãy $\{v_m\}$ sẽ được chứng minh hội tụ về nghiệm yếu của bài toán (4.1).

Chọn số hạng ban đầu $v_0 = 0$. Giả sử rằng

$$v_{m-1} \in W_1(M, T), \quad (4.9)$$

Ta liên kết bài toán (4.3) với bài toán biên phân tuyến tính sau.

Tìm $v_m \in W_1(M, T)$, $m \geq 1$ sao cho

$$\begin{cases} \langle \ddot{v}_m(t), w \rangle + \tilde{b}_m(t) \langle \nabla v_m(t), \nabla w \rangle = \langle \tilde{F}_m(t), w \rangle, \quad \forall w \in V, \\ v_m(0) = \tilde{v}_0, \quad \dot{v}_m(0) = \tilde{v}_1, \end{cases} \quad (4.10)$$

trong đó

$$\begin{cases} \tilde{b}_m(t) = \tilde{B}(t, \|\nabla v_{m-1}(t)\|^2) = B(t, \|\nabla v_{m-1}(t) + g(t)\|^2), \\ \tilde{F}_m(x, t) = \tilde{f}(x, t, v_{m-1}(t)) = f(x, t, v_{m-1}(t) + \Phi(x, t)) - xg''(t). \end{cases} \quad (4.11)$$

Sự tồn tại u_m cho bởi định lý sau đây.

Định lý 4.1. *Giả sử $(A_1) - (A_4)$ đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số $M > 0$ độc lập với $\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, B, g$ và $T > 0$ độc lập với $\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, B, g, f$ sao cho, với $v_0 = 0$, tồn tại một dãy quy nạp tuyến tính $\{v_m\} \subset W_1(M, T)$ xác định bởi (4.10) và (4.11).*

Chứng minh định lý 4.1. Gồm các bước sau.

Bước 1. Xấp xỉ Galerkin.

Giả sử $\{w_j\}$ với $w_j(x) = \sqrt{2} \sin(j + \frac{1}{2})\pi x$, $j \in \mathbb{N}$ là cơ sở đặc biệt của $V \cap H^2$ gồm

các hàm riêng w_j của toán tử $-\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sao cho $-\Delta w_j = \lambda_j w_j$, $w_j \in V \cap H^2$.

Sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin để xây dựng nghiệm xấp xỉ

$$v_m^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^k c_{mj}^{(k)}(t) w_j, \quad (4.12)$$

với $c_{mj}^{(k)}$ thỏa các hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\begin{cases} \langle \ddot{v}_m^{(k)}(t), w_j \rangle + \tilde{b}_m(t) \langle \nabla v_m^{(k)}(t), \nabla w_j \rangle = \langle \tilde{F}_m(t), w_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq k, \\ v_m^{(k)}(0) = v_{0k}, \quad \dot{v}_m^{(k)}(0) = v_{1k}, \end{cases} \quad (4.13)$$

trong đó

$$v_{0k} \equiv \sum_{j=1}^k \alpha_{mj}^{(k)} w_j \rightarrow \tilde{v}_0 \text{ mạnh trong } V \cap H^2, \quad (4.14)$$

$$v_{1k} \equiv \sum_{j=1}^k \beta_{mj}^{(k)} w_j \rightarrow \tilde{v}_1 \text{ mạnh trong } V. \quad (4.15)$$

Chúng minh tương tự như Bổ đề 3.1 ở chương 3 ta cũng khẳng định được hệ phương trình vi phân (4.13) – (4.15) có nghiệm duy nhất $v_m^{(k)}(t)$ trên một khoảng $[0, T]$.

Bước 2. Đánh giá tiên nghiệm. Đặt

$$\begin{cases} X_m^{(k)}(t) = \|\dot{v}_m^{(k)}(t)\|^2 + \tilde{b}_m(t) \|\nabla v_m^{(k)}(t)\|^2, \\ Y_m^{(k)}(t) = \|\nabla \dot{v}_m^{(k)}(t)\|^2 + \tilde{b}_m(t) \|\Delta v_m^{(k)}(s)\|^2, \\ Z_m^{(k)}(t) = X_m^{(k)}(t) + Y_m^{(k)}(t) + \int_0^t \|\ddot{v}_m^{(k)}(s)\|^2 ds. \end{cases} \quad (4.16)$$

Nhân (4.13)₁ bởi $\dot{c}_m^{(k)}(t)$ và lấy tổng theo j , sau đó tích phân theo biến thời gian với cận từ 0 đến t , ta đạt được

$$X_m^{(k)}(t) = X_m^{(k)}(0) + 2 \int_0^t \langle \tilde{F}_m(s), \dot{v}_m^{(k)}(s) \rangle ds + \int_0^t \tilde{b}'_m(s) \|\nabla v_m^{(k)}(s)\|^2 ds. \quad (4.17)$$

Trong (4.13)₁ bằng cách thay w_j bởi Δw_j và sau một số bước biến đổi đơn giản ta có

$$\langle \nabla \dot{v}_m^{(k)}(t), \nabla w_j \rangle + \tilde{b}_m(t) \langle \Delta v_m^{(k)}(t), \Delta w_j \rangle = \langle \nabla \tilde{F}_m(t), \nabla w_j \rangle. \quad (4.18)$$

Nhân (4.18) bởi $\dot{c}_m^{(k)}(t)$ và lấy tổng theo j , sau đó tích phân theo biến thời gian với cận từ 0 đến t , ta được

$$Y_m^{(k)}(t) = Y_m^{(k)}(0) + 2 \int_0^t \langle \nabla \tilde{F}_m(s), \nabla \dot{v}_m^{(k)}(s) \rangle ds + \int_0^t \tilde{b}'_m(s) \|\Delta v_m^{(k)}(s)\|^2 ds. \quad (4.19)$$

Tổ hợp (4.16), (4.17) và (4.19) ta được

$$\begin{aligned} Z_m^{(k)}(t) &= Z_m^{(k)}(0) + 2 \int_0^t \langle \tilde{F}_m(s), \dot{v}_m^{(k)}(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle \nabla \tilde{F}_m(s), \nabla \dot{v}_m^{(k)}(s) \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \tilde{b}'_m(s) [\|\nabla v_m^{(k)}(s)\|^2 + \|\Delta v_m^{(k)}(s)\|^2] ds + \int_0^t \|\ddot{v}_m^{(k)}(s)\|^2 ds \\ &= Z_m^{(k)}(0) + \sum_{j=1}^4 I_j. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ta sẽ đánh giá các tích phân I_j , $j = 1, \dots, 4$, trong vế phải của (4.20).

Tích phân thứ nhất. Từ giả thiết (A₃), (4.6), (4.8), (4.9), (4.11)₂ và (4.16). Ta thu được

$$I_1 \leq 2 \int_0^t \|\tilde{F}_m(s), \dot{v}_m^{(k)}(s)\| ds \leq 2 \int_0^t \|\tilde{F}_m(s)\| \cdot \|\dot{v}_m^{(k)}(s)\| ds$$

$$\leq [2K_0(\bar{M}, f) + \bar{M}] \int_0^t \sqrt{X_m^{(k)}(s)} ds \leq T[2K_0(\bar{M}, f) + \bar{M}]^2 + \int_0^t Z_m^{(k)}(s) ds. \quad (4.21)$$

Tích phân thứ hai. Từ giả thiết (A₃), (4.6), (4.8), (4.9), (4.11)₂ và (4.16). Ta có

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{F}_m(t) &= \nabla \tilde{f}(x, t, v_{m-1}(t)) = \nabla f(x, t, v_{m-1}(t) + \Phi(t)) - g''(t) \\ &= D_1 f(x, t, v_{m-1} + \Phi) + D_3 f(x, t, v_{m-1} + \Phi) [\nabla v_{m-1}(t) + g(t)] - g''(t), \end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{F}_m(t)| &\leq |D_1 f(x, t, v_{m-1} + \Phi)| + |D_3 f(x, t, v_{m-1} + \Phi)| \cdot |\nabla v_{m-1}(t) + g(t)| + |g''(t)| \\ &\leq K_1(\bar{M}, f)(1 + |\nabla v_{m-1}(t) + g(t)|) + M^*, \end{aligned}$$

hay

$$\|\nabla \tilde{F}_m(t)\| \leq K_1(\bar{M}, f)(1 + \|\nabla v_{m-1}(t) + g(t)\|) + \bar{M} \leq K_1(\bar{M}, f)(1 + \bar{M}) + \bar{M}.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2 \int_0^t \|\nabla \tilde{F}_m(s)\| \cdot \|\nabla \dot{v}_m^{(k)}(s)\| ds \\ &\leq 2[K_1(\bar{M}, f)(1 + \bar{M}) + \bar{M}] \int_0^t \sqrt{Y_m^{(k)}(s)} ds \\ &\leq T[K_1(\bar{M}, f)(1 + \bar{M}) + \bar{M}]^2 + \int_0^t Z_m^{(k)}(s) ds. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Tích phân thứ ba. Từ giả thiết (A₂), (4.7), (4.8), (4.9), (4.11)₁, (4.16). Ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} \tilde{b}'_m(t) &= \tilde{B}'(t, \|\nabla v_{m-1}(t)\|^2) = B'(t, \|\eta_m(t)\|^2) \\ &= D_1 B(t, \|\eta_m(t)\|^2) + 2D_2 B(t, \|\eta_m(t)\|^2) \langle \eta_m(t), \eta'_m(t) \rangle, \end{aligned}$$

ở đây $\eta_m(t) = \nabla v_{m-1}(t) + g(t)$, nên

$$|\tilde{b}'_m(t)| \leq (|D_1 B| + |D_2 B|)(1 + 2\|\eta_m(t)\| \cdot \|\eta'_m(t)\|) \leq \tilde{K}_1(\bar{M}, B)[1 + 2\bar{M}^2].$$

Do đó

$$I_3 \leq \frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)}{b_0} (1 + 2\bar{M}^2) \int_0^t Z_m^{(k)}(s) ds. \quad (4.23)$$

Tích phân thứ tư. Ta viết lại (4.13)₁ dưới dạng

$$\langle \tilde{v}_m^{(k)}(t), w_j \rangle = \tilde{b}_m(t) \langle \Delta v_m^{(k)}(t), w_j \rangle + \langle \tilde{F}_m(t), w_j \rangle. \quad (4.24)$$

Nhân (4.24) bởi $\ddot{c}_m^{(k)}(t)$, sau đó lấy tổng theo j , thì (4.24) trở thành

$$\langle \ddot{v}_m^{(k)}(t), \ddot{v}_m^{(k)}(t) \rangle = \tilde{b}_m(t) \langle \Delta v_m^{(k)}(t), \ddot{v}_m^{(k)}(t) \rangle + \langle \tilde{F}_m(t), \ddot{v}_m^{(k)}(t) \rangle,$$

hay

$$\begin{aligned} \|\dot{v}_m^{(k)}(t)\|^2 &\leq |\tilde{b}_m(t)| \|\Delta v_m^{(k)}(t)\| \|\dot{v}_m^{(k)}(t)\| + \|\tilde{F}_m(t)\| \|\dot{v}_m^{(k)}(t)\| \\ &\leq \tilde{b}_m^2(t) \|\Delta v_m^{(k)}(t)\|^2 + \frac{1}{4} \|\dot{v}_m^{(k)}(t)\|^2 + \|\tilde{F}_m(t)\|^2 + \frac{1}{4} \|\dot{v}_m^{(k)}(t)\|^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Từ các giả thiết (A₂), (A₃) và (4.6)₁, (4.7)₁, (4.9), (4.25). Ta thu được đánh giá

$$\|\dot{v}_m^{(k)}(t)\|^2 \leq 2\tilde{K}_0(\bar{M}, B) \tilde{b}_m(t) \|\Delta v_m^{(k)}(t)\|^2 + 2[K_0(\bar{M}, f) + \bar{M}]^2. \quad (4.26)$$

Lấy tích phân hai vế của (4.26) theo t , ta được

$$I_4 \leq 2\tilde{K}_0(\bar{M}, B) \int_0^t Z_m^{(k)}(s) ds + 2T[K_0(\bar{M}, f) + \bar{M}]^2. \quad (4.27)$$

Tổ hợp (4.20) - (4.23), (4.27), ta được

$$Z_m^{(k)}(t) \leq Z_m^{(k)}(0) + \bar{C}_1(\bar{M}, T) + \bar{C}_2(\bar{M}) \int_0^t Z_m^{(k)}(s) ds, \quad (4.28)$$

trong đó

$$\begin{cases} \bar{C}_1(\bar{M}, T) = T \left(3[K_0(\bar{M}, f) + \bar{M}]^2 + [K_1(\bar{M}, f)(1 + \bar{M}) + \bar{M}]^2 \right), \\ \bar{C}_2(\bar{M}) = \frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)}{b_0} (1 + 2\bar{M}^2) + 2\tilde{K}_0(\bar{M}, B) + 2. \end{cases} \quad (4.29)$$

Bây giờ ta cần đánh giá số hạng $Z_m^{(k)}(0)$. Ta có

$$Z_m^{(k)}(0) = \|v_{1k}\|^2 + \|\nabla v_{1k}\|^2 + \tilde{B}(0, \|\nabla \tilde{v}_0\|^2) (\|\nabla v_{0k}\|^2 + \|\Delta v_{0k}\|^2). \quad (4.31)$$

Từ giả thiết (A₂), (4.9), (4.14), (4.15) và (4.31). Ta suy ra rằng tồn tại hằng số $M > 0$, độc lập với k và m , sao cho:

$$Z_m^{(k)}(0) \leq \frac{M^2}{2}, \text{ với mọi } k \text{ và } m. \quad (4.32)$$

Chú ý rằng, từ (4.29), ta suy ra rằng

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \bar{C}_1(\bar{M}, T) = 0, \quad (4.33)$$

Từ (4.28) – (4.33), chúng ta luôn chọn được hằng số $T > 0$ sao cho:

$$\left(\frac{M^2}{2} + \bar{C}_1(\bar{M}, T) \right) e^{-T\bar{C}_2(\bar{M})} \leq M^2, \quad (4.34)$$

và

$$\bar{k}_T = (1 + b_0^{-\frac{1}{2}}) \sqrt{T(K_1^2(\bar{M}, f) + 4\bar{M}^4 \tilde{K}_1^2(\bar{M}, B))} e^{[2 + \frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1+2\bar{M}^2)}{b_0}] \frac{T}{2}} < 1. \quad (4.35)$$

Cuối cùng, ta suy từ (4.28) và (4.34) rằng

$$Z_m^{(k)}(t) \leq M^2 e^{-T\bar{C}_2(\bar{M})} + \bar{C}_2(\bar{M}) \int_0^t Z_m^{(k)}(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.36)$$

Sử dụng bổ đề Gronwall, chúng ta suy từ (4.36) rằng

$$Z_m^{(k)}(t) \leq M^2 e^{-T\bar{C}_2(\bar{M})} e^{\bar{C}_2(\bar{M})t} \leq M^2 e^{-T\bar{C}_2(\bar{M})} e^{\bar{C}_2(\bar{M})T} \leq M^2, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.37)$$

Vậy, từ (4.26) và (4.37) ta có

$$v_m^{(k)} \in W_1(M, T), \quad \forall m, k. \quad (4.38)$$

Bước 3. Qua giới hạn.

Từ (4.38) ta suy ra rằng tồn tại một dãy con của dãy $\{v_m^{(k)}\}$, mà vẫn ký hiệu $\{v_m^{(k)}\}$ sao cho

$$v_m^{(k)} \rightarrow v_m \quad \text{trong } L^\infty(0, T; V \cap H^2) \text{ yếu } *, \quad (4.39)$$

$$\dot{v}_m^{(k)} \rightarrow \dot{v}_m \quad \text{trong } L^\infty(0, T; V) \text{ yếu } *, \quad (4.40)$$

$$\ddot{v}_m^{(k)} \rightarrow \ddot{v}_m \quad \text{trong } L^2(Q_T) \text{ yếu }, \quad (4.41)$$

$$v_m \in W(M, T). \quad (4.42)$$

Từ (4.39) – (4.42) qua giới hạn trong (4.13) ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng v_m thỏa (4.10) – (4.11) trong $L^2(0, T)$ yếu.

Mặt khác, từ (4.10)₁, (4.39) – (4.41), ta được

$$v_m'' = \tilde{b}_m(t) \Delta v_m + \tilde{F}_m \in L^\infty(0, T; L^2). \quad (4.43)$$

$$\text{Do vậy, } v_m \in W_1(M, T). \quad (4.44)$$

Định lý 4.1 được chứng minh hoàn tất ■

4.4. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định lý 4.2. *Giả sử (A₁) – (A₄) đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số $M > 0$, $T > 0$ thỏa (4.32), (4.34), (4.35) sao cho bài toán (4.1) có duy nhất nghiệm yếu $v \in W_1(M, T)$.*

Mặt khác, dãy quy nạp tuyến tính $\{v_m\}$ được xác định bởi (4.10) – (4.11) hội tụ mạnh về nghiệm v trong không gian

$$W_1(T) = \{v \in L^\infty(0, T; V) : v' \in L^\infty(0, T; L^2)\}. \quad (4.45)$$

Hơn nữa, ta cũng có đánh giá sai số

$$\|v_m - v\|_{L^\infty(0, T; V)} + \|v_m' - v'\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq \bar{C} k_T^m, \quad \text{với mọi } m, \quad (4.46)$$

trong đó

$$\bar{k}_T = (1 + b_0^{-\frac{1}{2}}) \sqrt{T(K_1^2(\bar{M}, f) + 4\bar{M}^4 \tilde{K}_1^2(\bar{M}, B))} e^{[2 + \frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1+2\bar{M}^2)}{b_0}] \frac{T}{2}} \quad (4.47)$$

và $\bar{C}$ là một hằng số chỉ phụ thuộc vào T , $\tilde{v}_0$, $\tilde{v}_1$, và k_T .

Chứng minh định lý 4.2.

i) Sự tồn tại nghiệm

Trước tiên, ta chú ý rằng $W_1(T)$ là một không gian Banach đối với chuẩn

$$\|u\|_{W_1(T)} = \|u\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|u'\|_{L^\infty(0,T;L^2)}. \quad (4.48)$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\{v_m\}$ là một dãy Cauchy trong $W_1(T)$.

Đặt $\hat{v}_m = v_{m+1} - v_m$. Khi đó, $\hat{v}_m$ thỏa bài toán biên phân

$$\begin{cases} \langle \hat{v}_m''(t), v \rangle + \tilde{b}_{m+1}(t) \langle \nabla \hat{v}_m(t), \nabla v \rangle - (\tilde{b}_{m+1}(t) - \tilde{b}_m(t)) \langle \Delta v_m(t), v \rangle \\ \hspace{15em} = \langle \tilde{F}_{m+1}(t) - \tilde{F}_m(t), v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ \hat{v}_m(0) = \hat{v}_m'(0) = 0. \end{cases} \quad (4.49)$$

Chọn $v = \hat{v}_m'$ trong (4.49)₁, ta được

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|\hat{v}_m'(t)\|)^2 + \tilde{b}_{m+1}(t) \frac{d}{dt} (\|\nabla \hat{v}_m(t)\|^2) = \\ 2(\tilde{b}_{m+1}(t) - \tilde{b}_m(t)) \langle \Delta v_m(t), \hat{v}_m'(t) \rangle + 2 \langle \tilde{F}_{m+1}(t) - \tilde{F}_m(t), \hat{v}_m'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Tích phân theo biến thời gian, cận từ 0 đến t của đẳng thức trên ta thu được

$$\begin{aligned} \sigma_m(t) &= \int_0^t \tilde{b}'_{m+1}(s) \|\nabla \hat{v}_m(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t [\tilde{b}_{m+1}(s) - \tilde{b}_m(s)] \langle \Delta v_m(s), \hat{v}_m'(s) \rangle ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle \tilde{F}_{m+1}(s) - \tilde{F}_m(s), \hat{v}_m'(s) \rangle ds = \sum_{i=1}^3 J_i, \end{aligned} \quad (4.50)$$

trong đó

$$\sigma_m(t) = \|\hat{v}_m'(t)\|^2 + \tilde{b}_{m+1}(t) \|\nabla \hat{v}_m(t)\|^2. \quad (4.51)$$

Bây giờ, ta đánh giá các tích phân ở vế phải của (4.50) như sau

Tích phân thứ nhất. Ta có

$$\tilde{b}'_{m+1}(t) = D_1 B(t, \|\eta_m(t)\|^2) + 2D_2 B(t, \|\eta_m(t)\|^2) \langle \eta_m(t), \eta_m'(t) \rangle,$$

ở đây $\eta_m(t) = \nabla v_m(t) + g(t)$ nên

$$|\tilde{b}'_{m+1}(t)| \leq (|D_1 B(t, \|\eta_m(t)\|^2)| + |D_2 B(t, \|\eta_m(t)\|^2)|) (1 + 2\|\eta_m(t)\| \|\eta_m'(t)\|)$$

$$\leq \tilde{K}_1(\bar{M}, B)[1 + 2\bar{M}^2].$$

Do đó

$$J_1 \leq \frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)[1 + 2\bar{M}^2]}{b_0} \int_0^t \sigma_m(s) ds. \quad (4.52)$$

Tích phân thứ hai.

$$\begin{aligned} |\tilde{b}_{m+1}(t) - \tilde{b}_m(t)| &= |B(t, \|\eta_m(t)\|^2) - B(t, \|\eta_{m-1}(t)\|^2)| \\ &\leq \tilde{K}_1(\bar{M}, B) \left(\left| \|\eta_m(t)\|^2 - \|\eta_{m-1}(t)\|^2 \right| \right) \\ &\leq 2\bar{M}\tilde{K}_1(\bar{M}, B) \left| \|\eta_m(t)\| - \|\eta_{m-1}(t)\| \right| \\ &\leq 2\bar{M}\tilde{K}_1(\bar{M}, B) \|\nabla \hat{v}_{m-1}(t)\| \leq 2\bar{M}\tilde{K}_1(\bar{M}, B) \|\hat{v}_{m-1}\|_{W_1(T)}, \end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned} J_2 &= 2 \int_0^t [\tilde{b}_{m+1}(s) - \tilde{b}_m(s)] \langle \Delta v_m(s), \hat{v}'_m(s) \rangle ds \\ &\leq 4\bar{M}\tilde{K}_1(\bar{M}, B) \|\hat{v}_{m-1}\|_{W_1(T)} \int_0^t \|\Delta v_m(s)\| \cdot \|\hat{v}'_m(s)\| ds \\ &\leq 4T\bar{M}^4\tilde{K}_1^2(\bar{M}, B) \|\hat{v}_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 + \int_0^t \|\hat{v}'_m(s)\|^2 ds \\ &\leq 4T\bar{M}^4\tilde{K}_1^2(\bar{M}, B) \|\hat{v}_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 + \int_0^t \sigma_m(s) ds. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Tích phân thứ ba. Do

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}_{m+1}(t) - \tilde{F}_m(t)\| &= \|f(x, t, v_m(t) + \Phi(t)) - f(x, t, v_{m-1}(t) + \Phi(t))\| \\ &\leq K_1(\bar{M}, f) \|v_m(t) - v_{m-1}(t)\| \leq K_1(\bar{M}, f) \|\hat{v}_{m-1}(t)\| \leq K_1(\bar{M}, f) \|\hat{v}_{m-1}\|_{W_1(T)}, \end{aligned}$$

nên ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} J_3 &= 2 \int_0^t \langle \tilde{F}_{m+1}(s) - \tilde{F}_m(s), \hat{v}'_m(s) \rangle ds \leq 2 \int_0^t \|\tilde{F}_{m+1}(s) - \tilde{F}_m(s)\| \cdot \|\hat{v}'_m(s)\| ds \\ &\leq TK_1^2(\bar{M}, f) \|\hat{v}_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 + \int_0^t \sigma_m(s) ds. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Tổ hợp (4.50), (4.52) - (4.54) ta được

$$\begin{aligned} \sigma_m(t) &\leq T(K_1^2(\bar{M}, f) + 4\bar{M}^4\tilde{K}_1^2(\bar{M}, B)) \|\hat{v}_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 \\ &\quad + \left[2 + \frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1+2\bar{M}^2)}{b_0} \right] \int_0^t \sigma_m(s) ds. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Áp dụng bổ đề Gronwall cho (4.55), ta suy ra rằng

$$\sigma_m(t) \leq T(K_1^2(\bar{M}, f) + 4\bar{M}^4 \tilde{K}_1^2(\bar{M}, B)) \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 e^{[2 + \frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1+2\bar{M}^2)}{b_0}]T}. \quad (4.57)$$

Do đó

$$\|\hat{v}_m\|_{W_1(T)} \leq \bar{k}_T \|\hat{v}_{m-1}\|_{W_1(T)}, \text{ với mọi } m, \quad (4.58)$$

trong đó

$$\bar{k}_T = (1 + b_0^{-\frac{1}{2}}) \sqrt{T(K_1^2(\bar{M}, f) + 4\bar{M}^4 \tilde{K}_1^2(\bar{M}, B))} e^{[2 + \frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1+2\bar{M}^2)}{b_0}] \frac{T}{2}}. \quad (4.59)$$

Như vậy

$$\|v_{m+p} - v_m\|_{W_1(T)} \leq \frac{\bar{k}_T^m}{1 - \bar{k}_T} \|v_1 - v_0\|_{W_1(T)}, \text{ với mọi } m, p. \quad (4.60)$$

Từ (4.60) ta có $\{v_m\}$ là dãy Cauchy trong không gian $W_1(T)$ và do đó tồn tại $v \in W_1(T)$, sao cho:

$$v_m \rightarrow v \text{ trong } W_1(T) \text{ mạnh.} \quad (4.61)$$

Ta cũng lưu ý rằng do $v_m \in W_1(M, T)$, nên ta trích ra một dãy con $\{v_{m_j}\}$ của dãy $\{v_m\}$, sao cho:

$$v_{m_j} \rightarrow v \text{ trong } L^\infty(0, T; V \cap H^2) \text{ yếu } *, \quad (4.62)$$

$$v'_{m_j} \rightarrow v' \text{ trong } L^\infty(0, T; V) \text{ yếu } *, \quad (4.63)$$

$$v''_{m_j} \rightarrow v'' \text{ trong } L^2(Q_T) \text{ yếu }, \quad (4.64)$$

$$v'' \in W(M, T). \quad (4.65)$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{b}_m(t) \nabla v_m(t) - \tilde{B}(t, \|\nabla v(t)\|^2) \nabla v(t) \right| \\ & \leq \left| \tilde{B}(t, \|\nabla v_{m-1}(t)\|^2) \nabla v_m(t) - B(t, \|\nabla v(t)\|^2) \nabla v(t) \right| \\ & \leq \left| \tilde{B}(t, \|\nabla v_{m-1}(t)\|^2) \right| |\nabla v_m(t) - \nabla v(t)| \\ & \quad + \left| \tilde{B}(t, \|\nabla v_{m-1}(t)\|^2) - \tilde{B}(t, \|\nabla v(t)\|^2) \right| \cdot |\nabla v(t)| \\ & \leq \tilde{K}_0(\bar{M}, B) |\nabla v_m(t) - \nabla v(t)| \\ & \quad + \tilde{K}_1(\bar{M}, B) \|\nabla v_{m-1}(t) + \nabla v(t)\| (|\|\nabla v_{m-1}(t)\| - \|\nabla v(t)\||) |\nabla v(t)| \end{aligned}$$

$$\leq \tilde{K}_0(\bar{M}, B) \|\nabla v_m(t) - \nabla v(t)\| + 2M\tilde{K}_1(\bar{M}, B) \|\nabla v_{m-1}(t) - \nabla v(t)\| \cdot \|\nabla v(t)\|,$$

hay

$$\begin{aligned} & \| \tilde{b}_m(t) \nabla v_m(t) - \tilde{B}(t, \|\nabla v(t)\|^2) \nabla v(t) \| \\ & \leq \tilde{K}_0(\bar{M}, B) \|\nabla v_m(t) - \nabla v(t)\| + 2M\tilde{K}_1(\bar{M}, B) \|\nabla v_{m-1}(t) - \nabla v(t)\| \cdot \|\nabla v(t)\|. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} & \| \tilde{b}_m(t) \nabla v_m(t) - \tilde{B}(t, \|\nabla v(t)\|^2) \nabla v(t) \|_{L^\infty(0, T; L^2)} \\ & \leq \tilde{K}_0(\bar{M}, B) \|v_m - v\|_{W_1(T)} + 2M^2 \tilde{K}_1(\bar{M}, B) \|v_{m-1} - v\|_{W_1(T)}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ta suy ra từ (4.61) và (4.66) rằng

$$\tilde{b}_m(t) \nabla v_m \rightarrow \tilde{B}(t, \|\nabla v\|^2) \nabla v \text{ trong } L^\infty(0, T; L^2) \text{ mạnh.} \quad (4.67)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} & |\tilde{F}_m(t) - \tilde{f}(t)| = |\tilde{f}(x, t, v_{m-1}(t)) - \tilde{f}(x, t, v(t))| \leq K_1(\bar{M}, f) |v_{m-1}(t) - v(t)|, \\ & \|\tilde{F}_m - \tilde{f}\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq K_1(\bar{M}, f) \|v_{m-1} - v\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq K_1(\bar{M}, f) \|v_{m-1} - v\|_{W_1(T)}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Vậy từ (4.61) và (4.68), ta thu được

$$\tilde{F}_m(t) \rightarrow \tilde{f}(x, t, v(t)) \text{ trong } L^\infty(0, T; L^2) \text{ mạnh.} \quad (4.69)$$

Sau đó qua giới hạn (4.10) với m thay bằng $m_j \rightarrow \infty$.

Từ (4.61) – (4.64), (4.67), (4.69) ta có $v \in W(M, T)$ thỏa bài toán biên phân

$$\begin{cases} \langle v''(t), w \rangle + \tilde{B}(t, \|\nabla v(t)\|^2) \langle \nabla v(t), \nabla w \rangle = \langle \tilde{f}(t), w \rangle, \quad \forall w \in V, \\ v(0) = \tilde{v}_0(x), \quad v'(0) = \tilde{v}_1(x). \end{cases} \quad (4.70)$$

Mặt khác từ giả thiết (A₂), (A₃), (4.65), (4.67) và (4.69), ta lại có

$$v'' = \tilde{B}(t, \|v_x(t)\|^2) v_{xx} + \tilde{f}(t, x, v) \in L^\infty(0, T; L^2), \quad (4.71)$$

Điều này dẫn đến $v \in W_1(M, T)$.

Sự tồn tại nghiệm được chứng minh.

ii) Sự duy nhất nghiệm

Lấy $v_1, v_2 \in W_1(M, T)$ là hai nghiệm yếu của bài toán (4.1). Thì $v = v_1 - v_2$

thỏa mãn bài toán biên phân sau

$$\begin{cases} \langle v''(t), w \rangle + \tilde{B}_1(t) \langle \nabla v(t), \nabla w \rangle - (\tilde{B}_1(t) - \tilde{B}_2(t)) \langle \Delta v_2(t), w \rangle \\ \qquad \qquad \qquad = \langle \tilde{F}_1(t) - \tilde{F}_2(t), w \rangle, \quad \forall w \in V, \\ v(0) = v'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.72)$$

trong đó

$$\tilde{B}_i(t) = \tilde{B}(t, \|\nabla v_i(t)\|^2), \quad \tilde{F}_i(t) = \tilde{f}(x, t, v_i(t)), \quad i = 1, 2. \quad (4.73)$$

Trong (4.72)₁ ta thay $w = v'$, sau đó lấy tích phân theo t , ta được

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(t) &= \int_0^t \tilde{B}'_1(s) \|\nabla v(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t [\tilde{B}_1(s) - \tilde{B}_2(s)] \langle \Delta v_2(s), v'(s) \rangle ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle \tilde{F}_1(s) - \tilde{F}_2(s), v'(s) \rangle ds = \sum_{i=1}^3 \bar{J}_i, \end{aligned} \quad (4.74)$$

trong đó

$$\bar{\Psi}(t) = \|v'(t)\|^2 + \tilde{B}_1(t) \|\nabla v(t)\|^2. \quad (4.75)$$

Bây giờ, ta đánh giá các tích phân ở vế phải của (4.74) như sau

Tích phân thứ nhất.

$$\bar{J}_1 = \int_0^t \tilde{B}'_1(s) \|\nabla v(s)\|^2 ds \leq \frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1+2\bar{M}^2)}{b_0} \int_0^t \bar{\Psi}(s) ds. \quad (4.76)$$

Tích phân thứ hai.

$$\begin{aligned} |\tilde{B}_1(t) - \tilde{B}_2(t)| &\leq |\tilde{B}(t, \|\nabla v_1(t)\|^2) - \tilde{B}(t, \|\nabla v_2(t)\|^2)| \\ &\leq \tilde{K}_1(\bar{M}, B) \left(\left| \|\nabla u_1(t)\|^2 - \|\nabla u_2(t)\|^2 \right| \right) \leq 2M\tilde{K}_1(\bar{M}, B) \|\nabla v(t)\|, \end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned} \bar{J}_2 &= 2 \int_0^t [\tilde{B}_1(s) - \tilde{B}_2(s)] \langle \Delta v_2(s), v'(s) \rangle ds \\ &\leq 4M\tilde{K}_1(\bar{M}, B) \int_0^t \|\nabla v(s)\| \|\Delta v_2(s)\| \|v'(s)\| ds \\ &\leq 4M^2\tilde{K}_1(\bar{M}, B) \int_0^t \|\nabla v(s)\| \|v'(s)\| ds. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Tích phân thứ ba.

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}_1(t) - \tilde{F}_2(t)\| &= \|\tilde{f}(x, t, v_1(t)) - \tilde{f}(x, t, v_2(t))\| \\ &\leq K_1(\bar{M}, f) \|v_1(t) - v_2(t)\| \leq K_1(\bar{M}, f) \|v(t)\| \leq K_1(\bar{M}, f) \|\nabla v(t)\|, \end{aligned}$$

suy ra rằng

$$\begin{aligned}
\bar{J}_3 &= 2 \int_0^t \langle \tilde{F}_1(s) - \tilde{F}_2(s), v'(s) \rangle ds \leq 2 \int_0^t \|\tilde{F}_1(s) - \tilde{F}_2(s)\| \cdot \|v'(s)\| ds \\
&\leq 2K_1(\bar{M}, f) \int_0^t \|\nabla v(s)\| \cdot \|v'(s)\| ds.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Tổ hợp (4.74), (4.76) - (4.78) ta được

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}(t) &\leq \frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1+2\bar{M}^2)}{b_0} \int_0^t \bar{\Psi}(s) ds \\
&\quad + 2[K_1(\bar{M}, f) + 2M^2\tilde{K}_1(\bar{M}, B)] \int_0^t \|\nabla v(s)\| \cdot \|v'(s)\| ds,
\end{aligned} \tag{4.79}$$

hay

$$\bar{\Psi}(t) \leq \bar{K} \int_0^t \bar{\Psi}(s) ds,$$

trong đó

$$\bar{K} = \frac{1}{b_0} \left[\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1 + 2\bar{M}^2) + (K_1(\bar{M}, f) + 2M^2\tilde{K}_1(\bar{M}, B))(1 + b_0) \right].$$

Sử dụng bổ đề Gronwall ta có $\bar{\Psi}(t) \equiv 0$, nghĩa là $v_1 \equiv v_2$.

Định lý 4.2 được chứng minh hoàn tất ■

Chương 5

THUẬT GIẢI HỘI TỤ CẤP HAI

5.1. Giới thiệu

Kết quả thu được ở chương 3 cho thấy sự hội tụ và đánh giá sai số của dãy quy nạp tuyến tính $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ chỉ là cấp một. Để tiếp nối và mở rộng kết quả của chương 3. Chúng tôi, xây dựng một dãy lặp phi tuyến $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ nhằm nâng tốc độ hội tụ, chúng tôi sẽ tìm kiếm một điều kiện đủ cho bài toán (1.1) – (1.3) bằng một thuật giải tinh tế hơn với một dãy lặp hội tụ bậc hai được thiết lập mà chúng tôi sẽ trình bày dưới đây.

Trong chương này, chúng tôi xét dãy lặp cấp hai cho bài toán

$$\begin{cases} u_{tt} - B(t, \|u_x(t)\|^2) u_{xx} = f(x, t, u) \equiv f[u], & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (5.1)$$

trong đó $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, B, f$ là các hàm cho trước thỏa các điều kiện mà ta sẽ chỉ ra sau và số hạng phi tuyến $B(t, \|u_x(t)\|^2)$ phụ thuộc vào tích phân:

$$\|u_x(t)\|^2 = \int_0^1 u_x^2(x, t) dx. \quad (5.2)$$

Bài toán (5.1) được xét với các giả thiết tăng thêm như sau:

$$(A_1) \quad \tilde{u}_0 \in V \cap H^2, \quad \tilde{u}_1 \in V,$$

$$(B_2) \quad B \in C^1(\mathbb{R}_+^2) \text{ sao cho tồn tại } p > 1, b_0, b_1, b_2, b_3 > 0, \text{ thỏa các đánh giá sau}$$

$$\text{i) } 0 < b_0 \leq B(\xi, \eta) \leq b_1(1 + \eta^p), \text{ với mọi } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$\text{ii) } |D_1 B(\xi, \eta)| \leq b_2(1 + \eta^p), \text{ với mọi } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$\text{iii) } |D_2 B(\xi, \eta)| \leq b_3(1 + \eta^{p-1}), \text{ với mọi } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$(B_3) \quad f \in C^2(\mathbb{R}) \text{ thỏa } f(0, t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Xét $T^* > 0$, cố định. Với $M > 0$ ta định nghĩa

$$K = \max \bar{K}_i = \bar{K}_i(M, f) = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| = i \leq 2} \sup |D^\alpha f(x, t, z)| : (x, t, z) \in A_*(M) \right\}, \quad (5.3)$$

trong đó $A_*(M) = \{(x, t, z) \in [0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R} : |z| \leq M\}$.

Với mỗi $T \in (0, T^*]$ và $M > 0$ ta đặt

$$\begin{cases} W(M, T) = \{u \in L^\infty(0, T; V \cap H^2) : u_t \in L^\infty(0, T; V), u_{tt} \in L^2(Q_T), \\ \quad ||u||_{L^\infty(0, T; V \cap H^2)} \leq M, ||u_t||_{L^\infty(0, T; V)} \leq M, ||u_{tt}||_{L^2(Q_T)} \leq M\}, \\ W_1(M, T) = \{u \in W(M, T) : u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2)\}. \end{cases} \quad (5.4)$$

trong đó $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$.

Các kí hiệu sử dụng trong chương này vẫn tương tự như trong chương 3, tuy nhiên chúng tôi còn sử dụng thêm các kí hiệu sau:

$$D_1 D_3 f = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} f(x, t, z), \quad D_3^2 f = \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, t, z).$$

5.2. Thuật giải xấp xỉ phi tuyến

Trong phần này, với sự lựa chọn M và T thích hợp ta xây dựng một dãy $\{u_m\}$ trong $W_1(M, T)$ bằng quy nạp. Dãy $\{u_m\}$ sẽ được chứng minh hội tụ về nghiệm yếu của bài toán (5.1).

Chọn số hạng ban đầu $u_0 = 0$. Giả sử rằng

$$u_{m-1} \in W_1(M, T). \quad (5.5)$$

Ta liên kết bài toán (5.1) với bài toán biên phân sau. Tìm $u_m \in W_1(M, T)$, $m \geq 1$ sao cho

$$\begin{cases} \langle \ddot{u}_m(t), v \rangle + b_m(t) \langle \nabla u_m(t), \nabla v \rangle = \langle F_m(x, t), v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ u_m(0) = \tilde{u}_0, \quad \dot{u}_m(0) = \tilde{u}_1, \end{cases} \quad (5.6)$$

trong đó

$$\begin{cases} b_m(t) = B(t, ||\nabla u_m(t)||^2), \\ F_m(t) = f[u_{m-1}] + [u_m(t) - u_{m-1}(t)] D_3 f[u_{m-1}]. \end{cases} \quad (5.7)$$

Sự tồn tại u_m cho bởi định lý sau đây.

Định lý 5.1. *Giả sử (A_1) , (B_2) , (B_3) đúng. Khi đó tồn tại các hằng số $M > 0$ và $T > 0$ sao cho, với $u_0 = 0$, tồn tại một dãy quy nạp phi tuyến $\{u_m\} \subset W_1(M, T)$ xác định bởi (5.5) – (5.7).*

Chứng minh định lý 5.1. Gồm các bước sau.

Bước 1. Xấp xỉ Galerkin. Giả sử $\{w_j\}$ cơ sở của $V \cap H^2$ như trong chương 3.

Dùng phương pháp Galerkin để xây dựng nghiệm yếu xấp xỉ cho bài toán (5.6), (5.7).

$$u_m^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^k c_{mj}^{(k)}(t)w_j, \quad (5.8)$$

với $c_{mj}^{(k)}$ thỏa các hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\begin{cases} \langle \ddot{u}_m^{(k)}(t), w_j \rangle + b_m^{(k)}(t) \langle \nabla u_m^{(k)}(t), \nabla w_j \rangle = \langle F_m^{(k)}(t), w_j \rangle, & 1 \leq j \leq k, \\ u_m^{(k)}(0) = u_{0k}, & \dot{u}_m^{(k)}(0) = u_{1k}, \end{cases} \quad (5.9)$$

trong đó

$$u_{0k} \equiv \sum_{j=1}^k \alpha_{mj}^{(k)} w_j \rightarrow \tilde{u}_0 \text{ mạnh trong } V \cap H^2, \quad (5.10)$$

$$u_{1k} \equiv \sum_{j=1}^k \beta_{mj}^{(k)} w_j \rightarrow \tilde{u}_1 \text{ mạnh trong } V, \quad (5.11)$$

và

$$\begin{cases} b_m^{(k)}(t) = B(t, \|\nabla u_m^{(k)}(t)\|^2), \\ F_m^{(k)}(t) = f[u_{m-1}] + (u_m^{(k)} - u_{m-1})D_3 f[u_{m-1}]. \end{cases} \quad (5.12)$$

Giả sử u_{m-1} thỏa (5.5). Khi đó, ta có bổ đề sau.

Bổ đề 5.1. *Giả sử (A_1) , (B_2) , (B_3) đúng. Khi đó, tồn tại $T_m^{(k)} \in (0, T]$ sao cho hệ phương trình (5.9) – (5.12) có nghiệm duy nhất $u_m^{(k)}$ xác định trên $[0, T_m^{(k)}] \subset [0, T]$.*

Chứng minh bổ đề 5.1. Bỏ qua các chỉ số m, k trong cách viết và ta viết $c_j(t)$, α_j , β_j , $b(t)$ lần lượt thay cho $c_{mj}^{(k)}(t)$, $\alpha_{mj}^{(k)}$, $\beta_{mj}^{(k)}$, $b_m^{(k)}(t)$. Khi đó, hệ phương trình (5.9) – (5.12) được viết lại dưới dạng như sau:

$$\begin{cases} c_j''(t) = -\lambda_j b(t)c_j(t) + \langle f[u_{m-1}] - u_{m-1}D_3 f[u_{m-1}], w_j \rangle, \\ \quad \quad \quad + \sum_{i=1}^k c_i(t) \langle D_3 f[u_{m-1}] w_i, w_j \rangle, & 1 \leq j \leq k, \\ c_j(0) = \alpha_j, & c_j'(0) = \beta_j. \end{cases} \quad (5.13)$$

Hệ phương trình này tương đương với hệ phương trình tích phân phi tuyến sau

$$\begin{aligned}
c_j(t) = & \alpha_j + \beta_j t - \lambda_j \int_0^t d\tau \int_0^\tau b(s) c_j(s) ds \\
& + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \sum_{i=1}^k c_i(s) \langle D_3 f[u_{m-1}] w_i, w_j \rangle ds \\
& + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \langle f[u_{m-1}] - u_{m-1} D_3 f[u_{m-1}], w_j \rangle ds, \quad 1 \leq j \leq k.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Với mỗi $T_m^{(k)} \in (0, T]$ và $\rho > 0$ (ta sẽ chỉ ra sau). Ta đặt

$$X = C^0([0, T_m^{(k)}]; \mathbb{R}^k), \quad S = \{c \in X : \|c\|_X \leq \rho\}.$$

Ở đây, chuẩn trong không gian Banach X được định nghĩa như sau:

$$\|c\|_X = \sup_{0 \leq t \leq T_m^{(k)}} |c(t)|_1, \quad |c(t)|_1 = \sum_{j=1}^k |c_j(t)|, \quad \text{với mỗi } c = (c_1, \dots, c_k) \in X.$$

Ta viết lại (5.14) dưới dạng phương trình điểm bất động như sau

$$c(t) = H[c](t) \equiv L[c](t) + G(t), \quad c \in C^0([0, T_m^{(k)}]; \mathbb{R}^k), \tag{5.15}$$

trong đó

$$\begin{cases} c(t) = (c_1(t), \dots, c_k(t)), & H[c](t) = (H_1[c](t), \dots, H_k[c](t)), \\ H_j[c](t) = L_j[c](t) + G_j(t), \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} L_j[c](t) = -\lambda_j \int_0^t d\tau \int_0^\tau b(s) c_j(s) ds + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \sum_{i=1}^k c_i(s) \langle D_3 f[u_{m-1}] w_i, w_j \rangle ds, \\ G_j(t) = \alpha_j + \beta_j t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \langle f[u_{m-1}] - u_{m-1} D_3 f[u_{m-1}], w_j \rangle ds, \quad 1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

Sự tồn tại nghiệm $u_m^{(k)}(t)$ trên đoạn $[0, T_m^{(k)}]$ sẽ được suy ra từ sự tồn tại nghiệm $c_m^{(k)} \in X$ thỏa mãn phương trình tích phân nói trên. Như vậy ta cần chứng minh toán tử $H : X \rightarrow X$ có duy nhất điểm bất động, hay chứng minh $H : S \rightarrow S$ là ánh xạ co khi ρ đủ lớn và $T_m^{(k)}$ đủ bé.

Ta bắt đầu bằng việc chứng minh tồn tại $\rho > 0$ và $T_m^{(k)} > 0$ sao cho H biến S thành chính nó. Thật vậy, lấy $c = (c_1, c_2, \dots, c_k) \in S$, ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u_m^{(k)}(t)\| \leq \sum_{j=1}^k |c_{mj}^{(k)}(t)| \|w_j\| \leq \rho, \quad \forall t \in [0, T_m^{(k)}], \\ \|\nabla u_m^{(k)}(t)\| \leq \|\Delta u_m^{(k)}(t)\| \leq \sum_{j=1}^k |\lambda_j| |c_{mj}^{(k)}(t)| \|w_j\| \leq \lambda_k \rho, \quad \forall t \in [0, T_m^{(k)}]. \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Do đó, từ giả thiết B₂ (i) ta suy ra

$$b(t) = B(t, \|\nabla u_m^{(k)}(t)\|^2) \leq b_1(1 + \|\nabla u_m^{(k)}(t)\|^{2p}) \leq b_1(1 + \lambda_k^{2p} \rho^{2p}). \quad (5.17)$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} |L_j[c](t)| &\leq \lambda_j \int_0^t d\tau \int_0^\tau |b(s)| |c_j(s)|_1 ds + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \sum_{i=1}^k |c_i(s)| |\langle D_3 f[u_{m-1}] w_i, w_j \rangle| ds \\ &\leq \lambda_j b_1(1 + \lambda_k^{2p} \rho^{2p}) \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c_j(s)| ds + \bar{K}_1 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c(s)|_1 \|w_i\| \|w_j\| ds \\ &\leq \lambda_j b_1(1 + \lambda_k^{2p} \rho^{2p}) \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c_j(s)| ds + \bar{K}_1 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c(s)|_1 ds, \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} |L[c](t)|_1 &\leq \lambda_k b_1(1 + \lambda_k^{2p} \rho^{2p}) \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c(s)|_1 ds + k \bar{K}_1 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c(s)|_1 ds \\ &\leq [\lambda_k b_1(1 + \lambda_k^{2p} \rho^{2p}) + k \bar{K}_1] \int_0^t d\tau \int_0^\tau \|c\|_X ds \\ &\leq [\lambda_k b_1(1 + \lambda_k^{2p} \rho^{2p}) + k \bar{K}_1] \frac{(T_m^{(k)})^2}{2} \rho \leq D_1 (T_m^{(k)})^2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

trong đó, hằng số dương D_1 , độc lập với $T_m^{(k)}$.

Hơn nữa, ta lại có

$$\begin{aligned} |G_j(t)| &\leq |\alpha_j| + |\beta_j|t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \langle |f[u_{m-1}] - u_{m-1} D_3 f[u_{m-1}]|, w_j \rangle ds \\ &\leq |\alpha_j| + |\beta_j|t + (\bar{K}_0 + M \bar{K}_1) \int_0^t d\tau \int_0^\tau \langle 1, w_j \rangle ds \\ &\leq |\alpha_j| + |\beta_j| T_m^{(k)} + (\bar{K}_0 + M \bar{K}_1) \frac{(T_m^{(k)})^2}{2}, \end{aligned}$$

hay

$$|G(t)|_1 \leq |\alpha|_1 + |\beta|_1 T + (\bar{K}_0 + M \bar{K}_1) \frac{(T_m^{(k)})^2}{2} \leq D_2 + D_3 (T_m^{(k)})^2, \quad (5.19)$$

trong đó, hằng số dương D_3 , độc lập với $T_m^{(k)}$ và ρ .

Từ (5.15), (5.18) và (5.19) ta suy ra rằng

$$\|H[c]\|_X \leq D_2 + \bar{D}_2(T_m^{(k)})^2.$$

Ta chọn $\rho > D_2$ và $T_m^{(k)} \in (0, T]$ thỏa $T_m^{(k)} \leq \sqrt{\frac{1}{\bar{D}_2}(\rho - D_2)}$, ta suy ra điều phải chứng minh.

Kế tiếp, ta chứng minh H là ánh xạ co khi $T_m^{(k)}$ đủ bé. Lấy $c, d \in S$, ta kí hiệu

$$b_c(t) = B(t, \|\nabla u(t)\|^2), \quad b_d(t) = B(t, \|\nabla v(t)\|^2),$$

$$\text{trong đó, } u(t) = \sum_{j=1}^k c_j(t)w_j, \quad v(t) = \sum_{j=1}^k d_j(t)w_j.$$

Từ giả thiết B₂ (iii) và với $0 < \theta < 1$, ta có

$$\begin{aligned} b_c(s) - b_d(s) &= D_2 B(t, \theta \|\nabla u(t)\|^2 + (1 - \theta) \|\nabla v(t)\|^2) (\|\nabla u(t)\|^2 - \|\nabla v(t)\|^2) \\ &\leq b_3(1 + [\theta \|\nabla u(t)\|^2 + (1 - \theta) \|\nabla v(t)\|^2]^{p-1}) 2\lambda_k \rho \left| \|\nabla u(t)\| - \|\nabla v(t)\| \right| \\ &\leq 2\lambda_k \rho b_3 [1 + (\lambda_k \rho)^{2p-2}] \|\nabla u(t) - \nabla v(t)\| \\ &\leq 2\lambda_k^2 \rho b_3 [1 + (\lambda_k \rho)^{2p-2}] |c(s) - d(s)|_1. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Từ (5.3), (5.17), (5.20) ta thu được đánh giá

$$\begin{aligned} |H_j[c](t) - H_j[d](t)| &= |L_j[c](t) - L_j[d](t)| \\ &\leq \lambda_j \int_0^t d\tau \int_0^\tau |b_c(s)[c_j(s) - d_j(s)]| ds + \lambda_j \int_0^t d\tau \int_0^\tau |[b_c(s) - b_d(s)]d_j(s)| ds \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \sum_{i=1}^k |c_i(s) - d_i(s)| \cdot |\langle D_3 f(x, s, u_{m-1}) w_i, w_j \rangle| ds \\ &\leq \lambda_j b_1 (1 + \lambda_k^{2p} \rho^{2p}) \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c_j(s) - d_j(s)| ds \\ &\quad + 2\lambda_j \lambda_k^2 \rho b_3 [1 + (\lambda_k \rho)^{2p-2}] \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c(s) - d(s)|_1 \cdot |d_j(s)| ds \\ &\quad + \bar{K}_1 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c(s) - d(s)|_1 ds, \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned}
|H[c](t) - H[d](t)|_1 &\leq \lambda_k b_1 (1 + \lambda_k^{2p} \rho^{2p}) \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c(s) - d(s)|_1 ds \\
&+ 2\lambda_k^3 \rho^2 b_3 [1 + (\lambda_k \rho)^{2p-2}] \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c(s) - d(s)|_1 ds \\
&+ k \bar{K}_1 \int_0^t d\tau \int_0^\tau |c(s) - d(s)|_1 ds.
\end{aligned}$$

Do đó

$$|H[c](t) - H[d](t)|_1 \leq \xi(T_m^{(k)})^2 \|c - d\|_X, \quad \forall t \in [0, T_m^{(k)}] \text{ và } 1 \leq j \leq k,$$

trong đó, $\xi = \lambda_k b_1 (1 + \lambda_k^{2p} \rho^{2p}) + 2\lambda_k^3 \rho^2 [1 + (\lambda_k \rho)^{2p-2}] + \bar{K}_1 k$.

Điều này dẫn đến

$$\|H[c] - H[d]\|_X \leq \xi(T_m^{(k)})^2 \|c - d\|_X.$$

Vậy, ta có thể chọn $T_m^{(k)}$ đủ nhỏ sao cho $H : S \rightarrow S$ là ánh xạ co. Áp dụng định lý Banach, ta suy ra được H có một điểm bất động duy nhất $c \in X$. Khi đó, hệ phương trình vi phân (5.9) – (5.12) có nghiệm duy nhất $u_m^{(k)}(t)$ trên một khoảng $[0, T_m^{(k)}]$. Bổ đề 5.1 được chứng minh hoàn tất.

Chú thích 5.1. Trong việc chứng minh sự tồn tại nghiệm xấp xỉ Galerkin. Nếu ta chứng minh tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $H^n : X \rightarrow X$ là ánh xạ co, thì ta thu được sự tồn tại và duy nhất nghiệm $u_m^{(k)}(t)$ toàn cục. Nhưng ở đây ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại của nghiệm $u_m^{(k)}(t)$ nên chúng tôi đã chọn giải pháp trên để đơn giản trong việc trình bày với lại kỹ thuật chứng minh không bị trùng lặp với chương 3.

Bước 2. Đánh giá tiên nghiệm. Đặt

$$\begin{cases} P_m^{(k)}(t) = \|\dot{u}_m^{(k)}(t)\|^2 + b_m^{(k)}(t) \|\nabla u_m^{(k)}(t)\|^2, \\ Q_m^{(k)}(t) = \|\nabla \dot{u}_m^{(k)}(t)\|^2 + b_m^{(k)}(t) \|\Delta u_m^{(k)}(s)\|^2, \\ S_m^{(k)}(t) = P_m^{(k)}(t) + Q_m^{(k)}(t) + \int_0^t \|\ddot{u}_m^{(k)}(s)\|^2 ds. \end{cases} \quad (5.21)$$

Nhân (5.9)₁ bởi $\dot{c}_m^{(k)}(t)$ và lấy tổng theo j , sau đó tích phân theo biến thời gian với cận từ 0 đến t , ta được

$$P_m^{(k)}(t) = P_m^{(k)}(0) + 2 \int_0^t \langle F_m^{(k)}(s), \dot{u}_m^{(k)}(s) \rangle ds + \int_0^t \dot{b}_m^{(k)}(s) \|\nabla u_m^{(k)}(s)\|^2 ds. \quad (5.22)$$

Trong (5.9)₁ bằng cách thay w_j bởi Δw_j , ta đạt được

$$\langle \nabla \ddot{u}_m^{(k)}(t), \nabla w_j \rangle + b_m^{(k)}(t) \langle \Delta u_m^{(k)}(t), \Delta w_j \rangle = \langle \nabla F_m^{(k)}(t), \nabla w_j \rangle. \quad (5.23)$$

Nhân (5.23) bởi $\dot{c}_m^{(k)}(t)$, sau đó lấy tổng theo j , thì (5.23) trở thành

$$\langle \nabla \ddot{u}_m^{(k)}(t), \nabla \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle + b_m^{(k)}(t) \langle \Delta u_m^{(k)}(t), \Delta \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle = \langle \nabla F_m^{(k)}(t), \nabla \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle. \quad (5.24)$$

Tích phân theo biến thời gian, cận từ 0 đến t , ta được

$$Q_m^{(k)}(t) = Q_m^{(k)}(0) + 2 \int_0^t \langle \nabla F_m^{(k)}(s), \nabla \dot{u}_m^{(k)}(s) \rangle ds + \int_0^t \dot{b}_m^{(k)}(s) \|\Delta u_m^{(k)}(s)\|^2 ds. \quad (5.25)$$

Tổ hợp (5.21) – (5.25), ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} S_m^{(k)}(t) &= S_m^{(k)}(0) + 2 \int_0^t \langle F_m^{(k)}(s), \dot{u}_m^{(k)}(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle \nabla F_m^{(k)}(s), \nabla \dot{u}_m^{(k)}(s) \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \dot{b}_m^{(k)}(s) \left(\|\nabla u_m^{(k)}(s)\|^2 + \|\Delta u_m^{(k)}(s)\|^2 \right) ds + \int_0^t \|\ddot{u}_m^{(k)}(s)\|^2 ds \\ &= S_m^{(k)}(0) + \sum_{j=1}^4 I_j, \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ta sẽ đánh giá các tích phân I_j , $j = 1, \dots, 4$, trong vế phải của (5.26).

Tích phân thứ nhất.

$$\begin{aligned} |F_m^{(k)}(t)| &\leq |f[u_{m-1}(t)]| + |u_m^{(k)}(t) - u_{m-1}(t)| \cdot |D_3 f[u_{m-1}(t)]| \\ &\leq \bar{K}_0 + \bar{K}_1 |u_m^{(k)}(t) - u_{m-1}(t)|, \end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned} \|F_m^{(k)}(t)\| &\leq \bar{K}_0 + \bar{K}_1 (\|u_m^{(k)}(t)\| + \|u_{m-1}(t)\|) \leq \bar{K}_0 + \bar{K}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{b_0}} \sqrt{S_m^{(k)}(t)} + M \right) \\ &\leq K(1 + M) + \frac{1}{\sqrt{b_0}} K \sqrt{S_m^{(k)}(t)}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 2 \int_0^t |\langle F_m^{(k)}(s), \dot{u}_m^{(k)}(s) \rangle| ds \leq 2 \int_0^t \|F_m^{(k)}(s)\| \cdot \|\dot{u}_m^{(k)}(s)\| ds \\ &\leq 2a_0 \int_0^t \sqrt{S_m^{(k)}(s)} ds + 2a_1 \int_0^t S_m^{(k)}(s) ds. \end{aligned} \quad (5.27)$$

trong đó, $a_0 = K(1 + M)$, $a_1 = \frac{1}{\sqrt{b_0}} K$.

Tích phân thứ hai. Ta có

$$\begin{aligned}\nabla F_m^{(k)}(t) &= D_1 f[u_{m-1}(t)] + D_3 f[u_{m-1}(t)] \cdot \nabla u_{m-1}(t) \\ &\quad + [\nabla u_m^{(k)}(t) - \nabla u_{m-1}(t)] \cdot D_3 f[u_{m-1}(t)] \\ &\quad + [u_m^{(k)}(t) - u_{m-1}(t)] [D_1 D_3 f[u_{m-1}(t)] + D_3^2 f[u_{m-1}(t)] \cdot \nabla u_{m-1}(t)],\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}|\nabla F_m^{(k)}(t)| &\leq \bar{K}_1(1 + |\nabla u_{m-1}(t)|) + \bar{K}_1 |\nabla u_m^{(k)}(t) - \nabla u_{m-1}(t)| \\ &\quad + \bar{K}_2 |u_m^{(k)}(t) - u_{m-1}(t)| \cdot (1 + |\nabla u_{m-1}(t)|),\end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned}||\nabla F_m^{(k)}(t)|| &\leq \bar{K}_1(1 + ||\nabla u_{m-1}(t)||) + \bar{K}_1 (||\nabla u_m^{(k)}(t)|| + ||\nabla u_{m-1}(t)||) \\ &\quad + \bar{K}_2 (||u_m^{(k)}(t)|| + ||u_{m-1}(t)||)(1 + ||\nabla u_{m-1}(t)||) \\ &\leq \bar{K}_1(1 + M) + \bar{K}_1 (\frac{1}{\sqrt{b_0}} \sqrt{S_m^{(k)}(t)} + M) + \bar{K}_2 (1 + M)(\frac{1}{\sqrt{b_0}} \sqrt{S_m^{(k)}(t)} + M) \\ &\leq K(1 + 3M + M^2) + \frac{1}{\sqrt{b_0}} K(2 + M) \sqrt{S_m^{(k)}(t)}.\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}I_2 &\leq 2 \int_0^t ||\nabla F_m^{(k)}(s)|| \cdot ||\nabla \dot{u}_m^{(k)}(s)|| ds \\ &\leq 2c_0 \int_0^t \sqrt{S_m^{(k)}(t)} ds + 2c_1 \int_0^t S_m^{(k)}(s) ds.\end{aligned}\tag{5.28}$$

trong đó, $c_0 = K(1 + 3M + M^2)$, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{b_0}} K(2 + M)$

Tích phân thứ ba.

$$\begin{aligned}\dot{b}_m^{(k)}(t) &= \dot{B}(t, ||\nabla u_m^{(k)}(t)||^2) \\ &\leq D_1 B(t, ||\nabla u_m^{(k)}(t)||^2) + 2D_2 B(t, ||\nabla u_m^{(k)}(t)||^2) \langle \nabla u_m^{(k)}(t), \nabla \dot{u}_m^{(k)}(t) \rangle,\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}|\dot{b}_m^{(k)}(t)| &\leq b_2(1 + ||\nabla u_m^{(k)}(t)||^{2p}) + 2b_3(1 + ||\nabla u_m^{(k)}(t)||^{2p-2}) ||\nabla u_m^{(k)}(t)|| \cdot ||\nabla \dot{u}_m^{(k)}(t)|| \\ &\leq b_2(1 + \frac{(S_m^{(k)}(t))^p}{b_0^p}) + 2b_3(1 + \frac{(S_m^{(k)}(t))^{p-1}}{b_0^{p-1}}) \frac{S_m^{(k)}(t)}{\sqrt{b_0}} \\ &\leq \bar{b}[1 + S_m^{(k)}(t) + (S_m^{(k)}(t))^p],\end{aligned}$$

với $\bar{b} = b_2 + \frac{2b_3}{\sqrt{b_0}} + \frac{b_2 + 2b_3\sqrt{b_0}}{b_0^p}$.

Do đó

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^t \dot{b}_m^{(k)}(s) \left(\|\nabla u_m^{(k)}(s)\|^2 + \|\Delta u_m^{(k)}(s)\|^2 \right) ds \\
&\leq \int_0^t |\dot{b}_m^{(k)}(s)| \cdot \left(\|\nabla u_m^{(k)}(s)\|^2 + \|\Delta u_m^{(k)}(s)\|^2 \right) ds \\
&\leq \frac{\bar{b}}{b_0} \int_0^t [1 + S_m^{(k)}(s) + (S_m^{(k)}(s))^p] \cdot S_m^{(k)}(s) ds \\
&\leq \frac{\bar{b}}{b_0} \int_0^t [S_m^{(k)}(s) + (S_m^{(k)}(s))^2 + (S_m^{(k)}(s))^{p+1}] ds.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Tích phân thứ tư. Ta viết lại (5.9)₁ dưới dạng

$$\langle \ddot{u}_m^{(k)}(t), w_j \rangle = b_m^{(k)}(t) \langle \Delta u_m^{(k)}(t), w_j \rangle + \langle F_m^{(k)}(t), w_j \rangle. \tag{5.30}$$

Nhân (5.30) bởi $\ddot{c}_m^{(k)}(t)$, sau đó lấy tổng theo j , thì (5.30) trở thành

$$\langle \ddot{u}_m^{(k)}(t), \ddot{u}_m^{(k)}(t) \rangle = b_m^{(k)}(t) \langle \Delta u_m^{(k)}(t), \ddot{u}_m^{(k)}(t) \rangle + \langle F_m^{(k)}(t), \ddot{u}_m^{(k)}(t) \rangle,$$

hay

$$\begin{aligned}
\|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\|^2 &\leq |b_m^{(k)}(t)| \|\Delta u_m^{(k)}(t)\| \|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\| + \|F_m^{(k)}(t)\| \|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\| \\
&\leq (b_m^{(k)}(t))^2 \|\Delta u_m^{(k)}(t)\|^2 + \frac{1}{4} \|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\|^2 + \|F_m^{(k)}(t)\|^2 + \frac{1}{4} \|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\|^2,
\end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned}
\|\ddot{u}_m^{(k)}(t)\|^2 &\leq 2b_1 \left(1 + \frac{(S_m^{(k)}(t))^p}{b_0^p} \right) S_m^{(k)}(t) + 2 \left(K[1 + M] + \frac{1}{\sqrt{b_0}} K \sqrt{S_m^{(k)}(t)} \right)^2 \\
&\leq 2b_1 (S_m^{(k)}(t) + \frac{(S_m^{(k)}(t))^{p+1}}{b_0^p}) + 4[a_0^2 + a_1^2 S_m^{(k)}(t)] \\
&\leq d_0 + d_1 S_m^{(k)}(t) + d_2 (S_m^{(k)}(t))^{p+1},
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Với $d_0 = 4a_0^2$, $d_1 = 2b_1 + 4a_1^2$, $d_2 = \frac{2b_1}{b_0^p}$.

Lấy tích phân hai vế của (5.31) theo t , ta được

$$I_4 \leq d_0 T + d_1 \int_0^t S_m^{(k)}(s) ds + d_2 \int_0^t (S_m^{(k)}(s))^{p+1} ds. \tag{5.32}$$

Tổ hợp (5.26) - (5.29), (5.32) và sử dụng bất đẳng thức

$$x^q \leq 1 + x^{p+1}, \quad \forall x \geq 0, \quad \forall q \in (0, p+1],$$

ta được

$$S_m^{(k)}(t) \leq S_m^{(k)}(0) + \bar{C}_1(M, T) + \bar{C}_2(M) \int_0^t [S_m^{(k)}(s)]^{p+1} ds, \quad \forall t \in [0, T_m^{(k)}], \tag{5.33}$$

trong đó

$$\begin{cases} \bar{C}_1(M, T) = [2(a_0 + a_1 + c_0 + c_1) + \frac{2\bar{b}}{b_0} + d_0 + d_1]T, \\ \bar{C}_2(M) = 2(a_0 + a_1 + c_0 + c_1) + \frac{3\bar{b}}{b_0} + d_1 + d_2. \end{cases} \quad (5.34)$$

Bây giờ ta cần đánh giá số hạng $S_m^{(k)}(0)$. Ta có

$$S_m^{(k)}(0) = \|u_{1k}\|^2 + \|\nabla u_{1k}\|^2 + B\left(0, \|\nabla \tilde{u}_0\|^2\right)\left(\|\nabla u_{0k}\|^2 + \|\Delta u_{0k}\|^2\right). \quad (5.35)$$

Từ giả thiết (A_1) , (5.10), (5.11) ta suy ra rằng tồn tại hằng số $M > 0$, độc lập với k và m , sao cho:

$$S_m^{(k)}(0) \leq \frac{M^2}{2} \text{ với mọi } k \text{ và } m. \quad (5.36)$$

Kết hợp (5.33) và (5.36), ta suy ra rằng

$$S_m^{(k)}(t) \leq \frac{M^2}{2} + \bar{C}_1(M, T) + \bar{C}_2(M) \int_0^t [S_m^{(k)}(s)]^{p+1} ds. \quad (5.37)$$

Bổ đề 5.2. Tồn tại $T_m^{(k)} > 0$ đủ bé độc lập với k, m sao cho

$$S_m^{(k)}(t) \leq M^2, \quad \forall t \in [0, T_m^{(k)}] \text{ với mọi } k, m. \quad (5.38)$$

Chứng minh. Đặt

$$Y(t) = \frac{M^2}{2} + \bar{C}_1(M, T) + \bar{C}_2(M) \int_0^t [S_m^{(k)}(s)]^{p+1} ds.$$

Khi đó, rõ ràng ta có

$$\begin{cases} Y(t) > 0, \quad 0 \leq S_m^{(k)}(t) \leq Y(t), \\ Y'(t) = \bar{C}_2(M) [S_m^{(k)}(t)]^{p+1} \leq \bar{C}_2(M) [Y(t)]^{p+1}, \\ Y(0) = \frac{M^2}{2} + \bar{C}_1(M, T), \end{cases} \quad (5.39)$$

với mọi $t \in [0, T_m^{(k)}]$. Do đó, nếu đặt $Z(t) = Y^{-p}(t)$ thì ta suy ra từ (5.39)₂ rằng

$$\frac{Y'(t)}{[Y(t)]^{p+1}} \leq \bar{C}_2(M). \quad (5.40)$$

Lấy tích phân hai vế của (5.40) theo biến thời gian từ 0 đến t ta được

$$\frac{1}{-p} [Y^{-p}(t) - Y^{-p}(0)] \leq \bar{C}_2(M),$$

hay

$$\begin{aligned} Z(t) = Y^{-p}(t) &\geq Y^{-p}(0) - p\bar{C}_2(M)t = [\frac{M^2}{2} + \bar{C}_1(M, T)]^{-p} - p\bar{C}_2(M)t \\ &\geq [\frac{M^2}{2} + \bar{C}_1(M, T)]^{-p} - p\bar{C}_2(M)T. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} [(\frac{M^2}{2} + \bar{C}_1(M, T))^{-p} - p\bar{C}_2(M)T] > (M^2)^{-p},$$

do đó, ta có thể chọn $T > 0$ sao cho

$$\begin{cases} [(\frac{M^2}{2} + \bar{C}_1(M, T))^{-p} - p\bar{C}_2(M)T] > (M^2)^{-p}, \\ \bar{k}_T = \left(1 + b_0^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{K}_2 \sqrt{T} \exp\left[\left(\frac{M_1}{b_0} + \frac{2MM_2}{\sqrt{b_0}} + \frac{2\bar{K}_1}{\sqrt{b_0}} + 1\right)\frac{T}{2}\right] < 1. \end{cases} \quad (5.41)$$

Kết hợp (5.39) – (5.41) ta được

$$0 \leq S_m^{(k)}(t) \leq Y(t) = \frac{1}{\sqrt[p]{Z(t)}} < M^2, \quad \forall t \in [0, T_m^{(k)}]. \quad (5.42)$$

Vậy bổ đề 5.2 được chứng minh xong ■

Từ (5.38) ta có suy ra rằng

$$u_m^{(k)} \in W(M, T), \quad \forall m, k. \quad (5.43)$$

Bước 3. Qua giới hạn.

Từ (5.43) ta suy ra rằng tồn tại một dãy con của dãy $\{u_m^{(k)}\}$, mà vẫn ký hiệu $\{u_m^{(k)}\}$ sao cho

$$u_m^{(k)} \rightarrow u_m \quad \text{trong } L^\infty(0, T; V \cap H^2) \text{ yếu } *, \quad (5.44)$$

$$\dot{u}_m^{(k)} \rightarrow \dot{u}_m \quad \text{trong } L^\infty(0, T; V) \text{ yếu } *, \quad (5.45)$$

$$\ddot{u}_m^{(k)} \rightarrow \ddot{u}_m \quad \text{trong } L^2(Q_T) \text{ yếu }, \quad (5.46)$$

$$u_m \in W(M, T). \quad (5.47)$$

Từ (5.44) – (5.46) qua giới hạn trong (5.9) ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng u_m thỏa (5.6) trong $L^2(0, T)$ yếu.

Mặt khác, từ (5.9)₁ và (5.47), ta được

$$u_m'' = b_m^{(k)}(t)\Delta u_m + F_m^{(k)} \in L^\infty(0, T; L^2). \quad (5.48)$$

Do vậy, $u_m \in W_1(M, T)$.

Định lý 5.1 được chứng minh hoàn tất ■

5.3. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định lý 5.2. Giả sử (A_1) , (B_2) , (B_3) đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số $M > 0$, $T > 0$ thỏa (5.36), (5.41) sao cho bài toán (5.1) có duy nhất nghiệm yếu $u \in W_1(M, T)$.

Mặt khác, dãy quy nạp tuyến tính $\{u_m\}$ được xác định bởi (5.5) – (5.7) hội tụ mạnh về nghiệm u trong không gian

$$W_1(T) = \{u \in L^\infty(0, T; V) : u' \in L^\infty(0, T; L^2)\}. \quad (5.49)$$

Hơn nữa, ta cũng có đánh giá sai số

$$\|u_m - u\|_{L^\infty(0, T; V)} + \|u'_m - u'\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq C_T \bar{k}_T^{2^m}, \quad \forall m \geq 1, \quad (5.50)$$

trong đó

$$\bar{k}_T = \frac{1}{2}(1 + b_0^{-\frac{1}{2}})\bar{K}_2 \sqrt{T} \exp\left[\left(\frac{M_1}{b_0} + \frac{2MM_2}{\sqrt{b_0}} + \frac{2\bar{K}_1}{\sqrt{b_0}} + 1\right)\frac{T}{2}\right]. \quad (5.51)$$

và C_T là một hằng số chỉ phụ thuộc vào T , $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ và $\bar{k}_T$.

Chứng minh định lý 5.2.

i) Sự tồn tại nghiệm

Trước tiên, ta chú ý rằng $W_1(T)$ là một không gian Banach đối với chuẩn

$$\|u\|_{W_1(T)} = \|u\|_{L^\infty(0, T; V)} + \|u'\|_{L^\infty(0, T; L^2)}. \quad (5.52)$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\{u_m\}$ là một dãy Cauchy trong $W_1(T)$.

Đặt $v_m = u_{m+1} - u_m$, $m \in \mathbb{N}$. Khi đó, v_m thỏa bài toán biên phân

$$\begin{cases} \langle v_m''(t), v \rangle + b_{m+1}(t) \langle \nabla v_m(t), \nabla v \rangle - (b_{m+1}(t) - b_m(t)) \langle \Delta u_m(t), v \rangle \\ \qquad \qquad \qquad = \langle F_{m+1}(t) - F_m(t), v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ v_m(0) = v'_m(0) = 0. \end{cases} \quad (5.53)$$

trong đó

$$\begin{cases} b_m(t) = B(t, \|\nabla u_m(t)\|^2), \\ F_m(t) = f[u_{m-1}] + [u_m(t) - u_{m-1}(t)]D_3 f[u_{m-1}]. \end{cases} \quad (5.54)$$

Chọn $v = v'_m$ trong (5.53)₁, ta được

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|v'_m(t)\|^2 \right) + b_{m+1}(t) \frac{d}{dt} \left(\|\nabla v_m(t)\|^2 \right) = \\ 2(b_{m+1}(t) - b_m(t)) \langle \Delta u_m(t), v'_m(t) \rangle + 2 \langle F_{m+1}(t) - F_m(t), v'_m(t) \rangle. \end{aligned}$$

Tích phân theo biến thời gian, cận từ 0 đến t , ta thu được

$$\begin{aligned} X_m(t) = \int_0^t b'_{m+1}(s) \|\nabla v_m(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t [b_{m+1}(s) - b_m(s)] \langle \Delta u_m(s), v'_m(s) \rangle ds \\ + 2 \int_0^t \langle F_{m+1}(s) - F_m(s), v'_m(s) \rangle ds = \sum_{i=1}^3 J_i, \end{aligned} \quad (5.55)$$

trong đó

$$X_m(t) = \|v'_m(t)\|^2 + b_{m+1}(t) \|\nabla v_m(t)\|^2. \quad (5.56)$$

Bây giờ, ta đánh giá các tích phân ở vế phải của (5.55) như sau

Tích phân thứ nhất. Do $u_m \in W_1(M, T)$, $\forall m$ và tương tự như cách đánh giá tích phân I_3 ở mục trước ta suy ra tồn tại hằng số dương M_1 độc lập với m sao cho

$$|b'_{m+1}(t)| \leq M_1, \quad \forall t \in [0, T].$$

Do đó

$$J_1 = \int_0^t b'_{m+1}(s) \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \leq \frac{M_1}{b_0} \int_0^t X_m(s) ds. \quad (5.57)$$

Tích phân thứ hai. Từ giả thiết của hàm B và $u_m \in W_1(M, T)$, $\forall m$ ta suy ra tồn tại hằng số dương M_2 độc lập với m sao cho

$$\begin{aligned} |b_{m+1}(t) - b_m(t)| &= |B(t, \|\nabla u_{m+1}(t)\|^2) - B(t, \|\nabla u_m(t)\|^2)| \\ &\leq D_2 B(t, \theta \|\nabla u_{m+1}(t)\|^2 + (1-\theta) \|\nabla u_m(t)\|^2) \left(\left| \|\nabla u_{m+1}(t)\|^2 - \|\nabla u_m(t)\|^2 \right| \right) \\ &\leq M_2 \|\nabla v_m(t)\|, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

do đó, ta có đánh giá tích phân thứ 2 như sau

$$\begin{aligned} J_2 &= 2 \int_0^t [b_{m+1}(s) - b_m(s)] \langle \Delta u_m(s), v'_m(s) \rangle ds \\ &\leq 2M_2 \int_0^t \|\nabla v_m(s)\| \cdot \|\Delta u_m(s)\| \cdot \|v'_m(s)\| ds \\ &\leq 2MM_2 \int_0^t \|\nabla v_m(s)\| \cdot \|v'_m(s)\| ds \leq \frac{2MM_2}{\sqrt{b_0}} \int_0^t X_m(s) ds. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Tích phân thứ ba. Từ giả thiết (B₃), ta có

$$\begin{aligned} F_{m+1}(t) - F_m(t) &= f[u_m] - f[u_{m-1}] \\ &+ (u_{m+1}(t) - u_m(t))D_3 f[u_m] - (u_m(t) - u_{m-1}(t))D_3 f[u_{m-1}]. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có khai triển Taylor $f[u_m] = f[u_{m-1} + v_{m-1}]$ quanh điểm u_{m-1} đến cấp 2

$$f[u_{m-1} + v_{m-1}] = f[u_{m-1}] + v_{m-1}(t) \cdot D_3 f[u_{m-1}] + \frac{1}{2} v_{m-1}^2(t) D_3^2 f(\theta), \quad 0 < \theta < 1,$$

do đó

$$F_{m+1}(t) - F_m(t) = v_m(t) D_3 f[u_m] + \frac{1}{2} v_{m-1}^2(t) D_3^2 f(\theta).$$

Suy ra

$$\|F_{m+1}(t) - F_m(t)\| \leq \|\nabla v_m(t)\| \bar{K}_1 + \frac{1}{2} \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 \bar{K}_2.$$

Điều này đưa đến

$$\begin{aligned} J_3 &= 2 \int_0^t \langle F_{m+1}(s) - F_m(s), v'_m(s) \rangle ds \leq 2 \int_0^t \|F_{m+1}(s) - F_m(s)\| \cdot \|v'_m(s)\| ds \\ &\leq 2 \int_0^t \left(\|\nabla v_m(s)\| \bar{K}_1 + \frac{1}{2} \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 \bar{K}_2 \right) \cdot \|v'_m(s)\| ds \\ &\leq 2 \bar{K}_1 \int_0^t \|\nabla v_m(s)\| \cdot \|v'_m(s)\| ds + \bar{K}_2 \int_0^t \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 \cdot \|v'_m(s)\| ds \\ &\leq \frac{2 \bar{K}_1}{\sqrt{b_0}} \int_0^t X_m(s) ds + \frac{\bar{K}_2^2}{4} \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^4 + \int_0^t X_m(s) ds. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Tổng hợp (5.55), (5.57) - (5.59) ta được

$$X_m(t) \leq \frac{\bar{K}_2^2}{4} T \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^4 + \left(\frac{M_1}{b_0} + \frac{2MM_2}{\sqrt{b_0}} + \frac{2\bar{K}_1}{\sqrt{b_0}} + 1 \right) \int_0^t X_m(s) ds. \quad (5.60)$$

Áp dụng bổ đề Gronwall cho (5.60), ta suy ra rằng

$$X_m(t) \leq \frac{\bar{K}_2^2}{4} T \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^4 \exp \left[\left(\frac{M_1}{b_0} + \frac{2MM_2}{\sqrt{b_0}} + \frac{2\bar{K}_1}{\sqrt{b_0}} + 1 \right) T \right]. \quad (5.61)$$

Do đó

$$\|v_m\|_{W_1(T)} \leq \bar{k}_T \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2, \quad \text{với mọi } m, \quad (5.62)$$

trong đó

$$\bar{k}_T = \frac{1}{2} (1 + b_0^{-\frac{1}{2}}) \bar{K}_2 \sqrt{T} \exp \left[\left(\frac{M_1}{b_0} + \frac{2MM_2}{\sqrt{b_0}} + \frac{2\bar{K}_1}{\sqrt{b_0}} + 1 \right) \frac{T}{2} \right]. \quad (5.63)$$

Bằng phương pháp qui nạp, ta chứng minh được rằng

$$\|v_m\|_{W_1(T)} \leq \bar{k}_T^{2^m-1} \|v_0\|_{W_1(T)}^{2^m}, \quad \forall m \geq 1.$$

Như vậy, với $\forall m, p \in \mathbb{N}$, thì ta có

$$\begin{aligned} \|u_{m+p} - u_m\|_{W_1(T)} &\leq \|u_{m+p} - u_{m+p-1}\|_{W_1(T)} + \cdots + \|u_{m+1} - u_m\|_{W_1(T)} \\ &\leq \|v_{m+p-1}\|_{W_1(T)} + \|v_{m+p-2}\|_{W_1(T)} + \cdots + \|v_m\|_{W_1(T)} \\ &\leq \frac{1}{\bar{k}_T} (\bar{k}_T^{2^{m+p-1}} \|v_0\|_{W_1(T)}^{2^{m+p-1}} + \bar{k}_T^{2^{m+p-2}} \|v_0\|_{W_1(T)}^{2^{m+p-2}} + \cdots + \bar{k}_T^{2^m} \|v_0\|_{W_1(T)}^{2^m}). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Do $\|v_0\|_{W_1(T)} = \|u_1 - u_0\|_{W_1(T)} \leq M$, nên nếu đặt $\mu_T = M\bar{k}_T$ thì (5.64) được viết lại

$$\|u_{m+p} - u_m\|_{W_1(T)} \leq \frac{1}{\bar{k}_T} (\mu_T^{2^{m+p-1}} + \mu_T^{2^{m+p-2}} + \cdots + \mu_T^{2^m}) \leq \frac{\mu_T^{2^m}}{\bar{k}_T(1 - \mu_T)}. \quad (5.65)$$

Khi đó, chọn $T > 0$ sao cho $\mu_T = M\bar{k}_T < 1$ thì từ (5.65) ta có $\{u_m\}$ là dãy Cauchy trong không gian $W_1(T)$ và do đó tồn tại $u \in W_1(T)$, sao cho:

$$u_m \rightarrow u \text{ trong } W_1(T) \text{ mạnh.} \quad (5.66)$$

Lập luận tương tự như trong chứng minh của định lý 3.2 của chương 3 ta cũng chỉ ra được rằng $u \in W_1(M, T)$ là nghiệm yếu của bài toán (5.1). Hơn nữa, cố định m trong (5.65) và qua giới hạn khi $p \rightarrow +\infty$ ta thu được đánh giá (5.50). Cuối cùng, việc chứng minh tính duy nhất của nghiệm yếu tương tự như chương 3, nên cho phép chúng tôi bỏ qua chứng minh này.

Định lý **5.2** được chứng minh hoàn tất ■

Chương 6

DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN

VÀ KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM YẾU

6.1. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu khi $\varepsilon \rightarrow 0$

Trong mục này, ta cần thêm giả thiết sau

(A₅) f_1 thỏa mãn giả thiết (A₃).

Ta xét bài toán nhiều sau đây:

$$\begin{cases} u_{tt} - B[u]u_{xx} = f_\varepsilon(x, t, u), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = g(t), \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

trong đó $B[u] = B(t, \|u_x(t)\|^2)$, $f_\varepsilon(x, t, u) = f(x, t, u) + \varepsilon f_1(x, t, u) \equiv f[u] + \varepsilon f_1[u]$, với tham số ε , $|\varepsilon| < \varepsilon_*$ và $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, B, f, g, f_1$ lần lượt thỏa các giả thiết từ (A₁) – (A₅). Khi đó, theo các định lý 4.1 và 4.2, bài toán (P_ε) tương ứng $f = f_\varepsilon$ có duy nhất nghiệm yếu phụ thuộc ε , kí hiệu u_ε . Ta nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của bài toán (P_ε) theo tham số ε .

Ta sử dụng các giả thiết (A₁) – (A₅) thì các đánh giá tiên nghiệm của dãy xấp xỉ Galerkin $\{u_m^{(k)}\}$ trong chứng minh của định lý 4.1 cho bài toán (P_ε) thỏa

$$u_m^{(k)} \in W_1(M, T), \quad \forall m, k, \quad (6.1)$$

trong đó M, T là các hằng số độc lập với m, k và ε . Hơn nữa, cũng giống như khi chọn các hằng số M, T ở (4.32), (4.34), (4.35) với $K_i(\bar{M}, f)$, $i = 0, 1$ được thay thế bởi $K_i(\bar{M}, f) + K_i(\bar{M}, f_1)$, $i = 0, 1$. Do đó, giới hạn u_ε trong các không gian hàm của dãy $\{u_m^{(k)}\}$ khi $k \rightarrow +\infty$ sau đó $m \rightarrow +\infty$ sẽ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (P_ε) thỏa

$$u_\varepsilon \in W_1(M, T) \quad (6.2)$$

Hơn nữa, ta có định lý sau

Định lý 6.1. *Giả sử các giả thiết (A₁) – (A₅) đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số $M > 0$, $T > 0$ sao cho với mọi ε , $|\varepsilon| < \varepsilon_*$, bài toán (P_ε) có duy nhất nghiệm yếu $u_\varepsilon \in W_1(M, T)$ thỏa một đánh giá tiệm cận.*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_1(T)} \leq C|\varepsilon|, \quad (6.4)$$

trong đó, C là hằng số phụ thuộc M, T, ε .

Chứng minh.

Đặt $v = u_\varepsilon - u_0$. Khi đó v thỏa bài toán biến phân sau:

$$\begin{cases} \langle v''(t), w \rangle + B[u_\varepsilon] \langle \nabla v(t), \nabla w \rangle - (B[u_\varepsilon] - B[u_0]) \langle \Delta u_0(t), w \rangle \\ \quad = \langle f[u_\varepsilon] - f[u_0], w \rangle + \varepsilon \langle f_1[u_\varepsilon], w \rangle, \quad \forall w \in V, \\ v(0) = v'(0) = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Thay $w = \dot{v}(t)$ trong (6.5)₁ ta được

$$\begin{aligned} \langle v''(t), v'(t) \rangle + B[u_\varepsilon] \langle \nabla v(t), \nabla v'(t) \rangle - (B[u_\varepsilon] - B[u_0]) \langle \Delta u_0(t), v'(t) \rangle \\ = \langle f[u_\varepsilon] - f[u_0], v'(t) \rangle + \varepsilon \langle f_1[u_\varepsilon], v'(t) \rangle, \end{aligned} \quad (6.6)$$

hay

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v'(t)\|^2 + B[u_\varepsilon] \frac{d}{dt} \|\nabla v(t)\|^2 = 2(B[u_\varepsilon] - B[u_0]) \langle \Delta u_0(t), v'(t) \rangle \\ + 2\langle f[u_\varepsilon] - f[u_0], v'(t) \rangle + 2\varepsilon \langle f_1[u_\varepsilon], v'(t) \rangle. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Lấy tích phân (6.7) theo biến thời gian t , ta được

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \int_0^t \frac{d}{ds} B[u_\varepsilon] \|\nabla v(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t (B[u_\varepsilon] - B[u_0]) \langle \Delta u_0(s), v'(s) \rangle ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle f[u_\varepsilon] - f[u_0], v'(s) \rangle ds + 2\varepsilon \int_0^t \langle f_1[u_\varepsilon], v'(s) \rangle ds \\ &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4, \end{aligned} \quad (6.8)$$

trong đó

$$\eta(t) = \|v'(t)\|^2 + B[u_\varepsilon] \cdot \|\nabla v(t)\|^2. \quad (6.9)$$

Ta sẽ đánh giá các tích phân L_j , $j = 1, \dots, 4$, trong vế phải của (6.8).

Tích phân thứ nhất. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} B[u_\varepsilon] &\leq |D_1 B(t, \|\nabla u_\varepsilon(t)\|^2)| + 2|D_2 B(t, \|\nabla u_\varepsilon(t)\|^2) \langle \nabla u_\varepsilon(t), \nabla u'_\varepsilon(t) \rangle| \\ &\leq \tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1 + 2\|\nabla u_\varepsilon(t)\| \cdot \|\nabla u'_\varepsilon(t)\|) \leq \tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1 + 2M^2), \end{aligned}$$

nên

$$L_1 \leq \frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1+2M^2)}{b_0} \int_0^t \eta(s) ds. \quad (6.10)$$

Tích phân thứ hai. Ta có

$$\begin{aligned} |B[u_\varepsilon] - B[u_0]| &= |B(t, \|\nabla u_\varepsilon(t)\|^2) - B(t, \|\nabla u_0(t)\|^2)| \\ &= |D_2 B(t, \theta \|\nabla u_\varepsilon(t)\|^2 + (1-\theta) \|\nabla u_0(t)\|^2) (\|\nabla u_\varepsilon(t)\|^2 - \|\nabla u_0(t)\|^2)| \\ &\leq \tilde{K}_1(\bar{M}, B) \left| \|\nabla u_\varepsilon(t)\|^2 - \|\nabla u_0(t)\|^2 \right| \leq 2M\tilde{K}_1(\bar{M}, B) \|\nabla v(t)\|, \end{aligned}$$

với $\theta \in (0, 1)$, do đó

$$\begin{aligned} L_2 &\leq 2 \int_0^t |B[u_\varepsilon] - B[u_0]| \cdot \|\Delta u_0(s)\| \cdot \|v'(s)\| ds \\ &\leq 4M^2 \tilde{K}_1(\bar{M}, B) \int_0^t \|\nabla v(t)\| \cdot \|v'(s)\| ds \leq \frac{4M^2 \tilde{K}_1(\bar{M}, B)}{\sqrt{b_0}} \int_0^t \eta(s) ds. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Tích phân thứ ba. Ta có

$$\begin{aligned} |f[u_\varepsilon] - f[u_0]| &= |f(x, t, u_\varepsilon) - f(x, t, u_0)| \\ &\leq |D_3 f(x, t, \theta u_\varepsilon + (1-\theta)u_0)| \cdot |u_\varepsilon(t) - u_0(t)| \leq K_1(\bar{M}, f) |v(t)|, \end{aligned}$$

với $\theta \in (0, 1)$, nên

$$\begin{aligned} L_3 &\leq 2 \int_0^t \|f[u_\varepsilon] - f[u_0]\| \cdot \|v'(s)\| ds \leq 2K_1(\bar{M}, f) \int_0^t \|v(s)\| \cdot \|v'(s)\| ds \\ &\leq 2K_1 \int_0^t \|\nabla v(s)\| \cdot \|v'(s)\| ds \leq \frac{2K_1(\bar{M}, f)}{\sqrt{b_0}} \int_0^t \eta(s) ds. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Tích phân thứ tư. Ta có

$$\begin{aligned} L_4 &\leq 2|\varepsilon| \cdot K_0(\bar{M}, f_1) \int_0^t \|v'(s)\| ds \leq \varepsilon^2 T K_0^2(\bar{M}, f_1) + \int_0^t \|v'(s)\|^2 ds \\ &\leq \varepsilon^2 T K_0^2(\bar{M}, f_1) + \int_0^t \eta(s) ds. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Từ (6.9) – (6.13) ta được

$$\eta(t) \leq \varepsilon^2 T K_0^2(\bar{M}, f_1) + \left(\frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1+2M^2)}{b_0} + \frac{4M^2 \tilde{K}_1(\bar{M}, B)}{\sqrt{b_0}} + \frac{2K_1(\bar{M}, f)}{\sqrt{b_0}} + 1 \right) \int_0^t \eta(s) ds.$$

Áp dụng bổ đề Gronwall cho bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\eta(t) \leq \varepsilon^2 T K_0^2(\bar{M}, f_1) \exp \left[\left(\frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1+2M^2)}{b_0} + \frac{4M^2 \tilde{K}_1(\bar{M}, B)}{\sqrt{b_0}} + \frac{2K_1(\bar{M}, f)}{\sqrt{b_0}} + 1 \right) T \right]. \quad (6.14)$$

Điều này dẫn đến

$$\|v\|_{W_1(T)} \leq C|\varepsilon|, \quad (6.15)$$

trong đó

$$C = \sqrt{T} K_0(\bar{M}, f_1) (1 + b_0^{-\frac{1}{2}}) \exp \left[\left(\frac{\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(1+2M^2)}{b_0} + \frac{4M^2 \tilde{K}_1(\bar{M}, B)_1}{\sqrt{b_0}} + \frac{2K_1(\bar{M}, f)}{\sqrt{b_0}} + 1 \right) \frac{T}{2} \right].$$

Định lý 6.1 được chứng minh xong ■

6.2. Khai triển tiệm cận nghiệm theo một tham số ε đến cấp $N+1$

Trước tiên, ta thành lập thêm các giả thiết sau

$$(A_2') \quad B \in C^{N+1}(\mathbb{R}_+^2) \text{ với } B(\xi, \eta) \geq b_0 > 0, \quad \forall \xi, \eta \geq 0,$$

$$(A_3') \quad f \in C^{N+1}([0, 1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \text{ thỏa } f(0, t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

$$(A_5') \quad f_1 \in C^N([0, 1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \text{ thỏa } f_1(0, t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Giả sử $u_0 \in W_1(M, T)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (P_0) ứng với $\varepsilon = 0$,

nghĩa là

$$\begin{cases} u_0'' - B[u_0]u_{0xx} = f(x, t, u_0) \equiv f[u_0], & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_0(0, t) = 0, \quad u_{0x}(1, t) = g(t), \\ u_0(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_0'(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (P_0)$$

và $u_1, \dots, u_N \in W_1(M, T)$ (với M, T được chọn một cách thích hợp) lần lượt là

nghiệm yếu duy nhất của các bài toán dưới đây

$$\begin{cases} u_1'' - B[u_0]\Delta u_1 = F_1[u_1], & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u_1(0, t) = u_{1x}(0, t) = 0, \\ u_1(0) = u_1'(0) = 0, \end{cases} \quad (Q_1)$$

trong đó

$$F_1[u_1] = \pi_1[f] + \pi_0[f_1] + \rho_1[B]\Delta u_0, \quad (6.16)$$

với $\pi_0[f]$, $\pi_1[f]$, $\rho_0[B]$, $\rho_1[B]$ được xác định như sau:

$$\pi_0[f] = f[u_0] \equiv f(x, t, u_0), \quad \pi_1[f] = \pi_0[D_3 f]u_1, \quad (6.17)$$

$$\rho_0[B] = B[u_0] \equiv B(t, \|\nabla u_0(t)\|^2), \quad \rho_1[B] = 2\rho_0[D_2 B]\langle \nabla u_0, \nabla u_1 \rangle, \quad (6.18)$$

với $2 \leq i \leq N$,

$$\begin{cases} u_i'' - B[u_0]\Delta u_i = F_i[u_i], & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_i(0, t) = u_{ix}(0, t) = 0, \\ u_i(0) = u_i'(0) = 0, \end{cases} \quad (Q_i)$$

trong đó

$$F_i[u_i] = \pi_i[f] + \pi_{i-1}[f_1] + \sum_{k=1}^i \rho_k[B]\Delta u_{i-k}, \quad 2 \leq i \leq N. \quad (6.19)$$

Với $\pi_i[B] = \pi_i[f, u_0, u_1, \dots, u_i]$, $\rho_i[B] = \rho_i[B, u_0, u_1, \dots, u_i]$, xác định theo công thức truy hồi sau:

$$\pi_i[f] = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{i-k}{i} \pi_k[D_3 f]u_{i-k}, \quad 2 \leq i \leq N, \quad (6.20)$$

$$\rho_i[B] = \frac{2}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{j=0}^{i-k-1} (i-k-j) \rho_k[D_2 B]\langle \nabla u_j, \nabla u_{i-k-j} \rangle, \quad 2 \leq i \leq N. \quad (6.21)$$

Chúng ta chú ý rằng $\pi_i[f]$ là làm bậc nhất đối với u_i . Thật vậy,

$$\begin{aligned} \pi_i[f] &= \pi_0[D_3 f]u_i \\ &\quad + \text{các phần tử phụ thuộc vào } (i, \pi_k[D_3 f], u_k), \quad k = \overline{0, i-1}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned} \rho_i[B] &= \rho_0[D_2 B]\langle u_0, u_i \rangle \\ &\quad + \text{các phần tử phụ thuộc vào } (i, \rho_k[D_3 B], \nabla u_k), \quad k = \overline{0, i-1}. \end{aligned}$$

Gọi $u_\varepsilon \in W_1(M, T)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (P_ε) . Khi đó

$$v = u_\varepsilon - \sum_{i=0}^N u_i \varepsilon^i \equiv u_\varepsilon - h,$$

thỏa bài toán

$$\begin{cases} v'' - B[v+h]\Delta v = f[v+h] - f[h] + (B[v+h] - B[h])\Delta h \\ \quad + \varepsilon(f_1[v+h] - f_1[h]) + E_\varepsilon(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ v(0, t) = v_x(1, t) = 0, \\ v(0) = v'(0) = 0, \end{cases} \quad (6.22)$$

với

$$E_\varepsilon(x, t) = \varepsilon f_1[h] + f[h] - f[u_0] + (B[h] - B[u_0])\Delta h - \sum_{i=1}^N F_i[u_i]\varepsilon^i. \quad (6.23)$$

Ta có các bổ đề sau

Bổ đề 6.1. Các hàm $\pi_i[f]$, $\rho_i[B]$ được xác định bằng công thức truy hồi sau đây:

$$\text{i) } \pi_i[f] = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} f[h] \Big|_{\varepsilon=0}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (6.24)$$

$$\text{ii) } \rho_i[B] = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} B[h] \Big|_{\varepsilon=0}, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (6.25)$$

Chứng minh.

Chứng minh i). Ta có

$$\pi_0[f] = f[h] \Big|_{\varepsilon=0} = f[u_0] = f(x, t, u_0),$$

$$\pi_1[f] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f[h] \Big|_{\varepsilon=0} = D_3 f[h] \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (h) \Big|_{\varepsilon=0} = D_3 f[h] u_1.$$

Vậy (6.24) đúng với $i = 0, 1$.

Với $i \geq 1$, ta có

$$\frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} f[h] = \frac{1}{i!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \varepsilon^{i-1}} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f[h] \right) = \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} (D_3 f[h]) \frac{\partial^{i-k}}{\partial \varepsilon^{i-k}} (h). \quad (6.26)$$

Từ các công thức

$$h = \sum_{i=0}^N u_i \varepsilon^i, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} h = \sum_{i=0}^N i u_i \varepsilon^{i-1}, \quad \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} (h) \Big|_{\varepsilon=0} = i! u_i, \quad (6.27)$$

Giả sử ta đã xác định được các hàm $\pi_k[f]$, $\pi_k[D_3 f]$, $k = 0, 1, \dots, i-1$ từ các công

thức (6.17) và (6.24). Do đó, từ (6.26) ta suy ra rằng:

$$\frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} f[h] \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{i!} C_{i-1}^k \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} (D_3 f[h]) \frac{\partial^{i-k}}{\partial \varepsilon^{i-k}} (h) \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{k!}{i!} C_{i-1}^k \pi_k [D_3 f] \frac{\partial^{i-k}}{\partial \varepsilon^{i-k}} (h) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{k!(i-k)!}{i!} C_{i-1}^k \pi_k [D_3 f] u_{i-k} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{i-k}{i} \pi_k [D_3 f] u_{i-k} = \pi_i[f].
\end{aligned}$$

Vậy (6.24) đúng $\forall i, 0 \leq i \leq N$.

Chứng minh ii). Ta có

$$\begin{aligned}
\rho_0[B] &= B[h] \Big|_{\varepsilon=0} = B[u_0] = B(t, ||\nabla u_0(t)||^2). \\
\rho_1[B] &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} B[h] \Big|_{\varepsilon=0} = D_2 B[h] \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (||\nabla h||^2) \Big|_{\varepsilon=0} = 2D_2 B[h] \langle \nabla h, \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \nabla h \rangle \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= 2D_2 B[h] \langle \nabla u_0 + \varepsilon \nabla u_1, \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\nabla u_0 + \varepsilon \nabla u_1) \rangle \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= 2D_2 B[h] \langle \nabla u_0, \nabla u_1 \rangle.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Vậy (6.25) đúng với $i = 0, 1$.

Với $i \geq 1$, ta có

$$\frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} B[h] = \frac{1}{i!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \varepsilon^{i-1}} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} B[h] \right) = \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} (D_2 B[h]) \frac{\partial^{i-k}}{\partial \varepsilon^{i-k}} (||\nabla h||^2). \tag{6.29}$$

Do

$$\frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} (||\nabla h||^2) = 2 \frac{\partial^{m-1}}{\partial \varepsilon^{m-1}} \langle \nabla h, \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \nabla h \rangle = 2 \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j \langle \frac{\partial^j}{\partial \varepsilon^j} \nabla h, \frac{\partial^{m-j}}{\partial \varepsilon^{m-j}} \nabla h \rangle, \tag{6.30}$$

nên

$$\frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} (||\nabla h||^2) \Big|_{\varepsilon=0} = 2 \sum_{j=0}^{m-1} j!(m-j)! C_{m-1}^j \langle \nabla u_j, \nabla u_{m-j} \rangle. \tag{6.31}$$

Giả sử ta đã xác định được các hàm $\rho_k[B], \rho_k[D_2 B], k = 0, 1, \dots, i-1$ từ các công thức (6.18) và (6.25). Do đó, từ (6.29) ta suy ra rằng:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} B[h] \Big|_{\varepsilon=0} &= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{i!} C_{i-1}^k \rho_k [D_2 B] \frac{\partial^{i-k}}{\partial \varepsilon^{i-k}} (||\nabla h||^2) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= 2 \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{i!} C_{i-1}^k \sum_{j=0}^{i-k-1} j!(i-k-j)! C_{i-k-1}^j \rho_k [D_2 B] \langle \nabla u_j, \nabla u_{i-k-j} \rangle \\
&= \frac{2}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{j=0}^{i-k-1} (i-k-j) \rho_k [D_2 B] \langle \nabla u_j, \nabla u_{i-k-j} \rangle = \rho_i[B].
\end{aligned}$$

Vậy (6.25) đúng $\forall i, 0 \leq i \leq N$.

Bổ đề 6.1 đã được chứng minh hoàn tất ■

Bổ đề 6.2. Giả sử $N \geq 1, |\varepsilon| < \varepsilon_*$ và các giả thiết $(A_1), (A_2'), (A_3'), (A_5')$ thỏa.

Khi đó, tồn tại hằng số dương $\tilde{C}_N$ sao cho

$$\|E_\varepsilon(x, t)\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq \tilde{C}_N |\varepsilon|^{N+1}, \quad \forall \varepsilon \in (-\varepsilon_*, \varepsilon_*). \quad (6.32)$$

trong đó $\tilde{C}_N$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào M, T, N và các hằng số

$$K_i(M, T, f) = \sup_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} \{|D_3^i f(x, t, u)| : |u| \leq (N+1)M\}, \quad i = 0, 1, \dots, N+1,$$

$$K_i(M, T, f_1) = \sup_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} \{|D_3^i f_1(x, t, u)| : |u| \leq (N+1)M\}, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$\tilde{K}_i(M, T, B) = \sup_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} \{|D_2^i B(t, y)| : 0 \leq y \leq (N+1)^2 M^2\}, \quad i = 0, 1, \dots, N+1,$$

Chứng minh.

Với $N = 1$, việc chứng minh bổ đề 6.2 đơn giản, nên chúng tôi bỏ qua chi tiết.

Với $N \geq 2$. Áp dụng công thức khai triển Maclaurin quanh điểm $\varepsilon = 0$ cho hàm $f_1[h]$ đến cấp $N-1$ sau đó áp dụng bổ đề 6.1, ta được

$$\begin{aligned} f_1[h] &= f_1[u_0] + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} f_1[h] \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon^i + \varepsilon^N R_N^1(f_1, \varepsilon, \theta_1) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i[f_1] \varepsilon^i + \varepsilon^N R_N^1(f_1, \varepsilon, \theta_1), \quad 0 < \theta_1 < 1 \end{aligned} \quad (6.33)$$

với

$$R_N^1(f_1, \varepsilon, \theta_1) = \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial \varepsilon^N} f_1[h] \Big|_{\varepsilon := \theta_1 \varepsilon}, \quad (6.34)$$

Áp dụng công thức khai triển Maclaurin quanh điểm $\varepsilon = 0$ cho hàm $f[h]$ đến cấp N và bổ đề 6.1, ta được

$$\begin{aligned} f[h] - f[u_0] &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} f[h] \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon^i + \varepsilon^{N+1} R_{N+1}^2(f, \varepsilon, \theta_2) \\ &= \sum_{i=1}^N \pi_i[f] \varepsilon^i + \varepsilon^{N+1} R_{N+1}^2(f, \varepsilon, \theta_2), \quad 0 < \theta_2 < 1, \end{aligned} \quad (6.35)$$

trong đó

$$R_{N+1}^2(f, \varepsilon, \theta_2) = \frac{1}{(N+1)!} \frac{\partial^{N+1}}{\partial \varepsilon^{N+1}} f[h] \Big|_{\varepsilon := \theta_2 \varepsilon}, \quad (6.36)$$

Tổ hợp (6.33) – (6.36) ta thu được

$$\varepsilon f_1[h] + f[h] - f[u_0] = \sum_{i=1}^N (\pi_{i-1}[f_1] + \pi_i[f])\varepsilon^i + \varepsilon^{N+1} R_N(f, f, \varepsilon, \theta_1, \theta_2), \quad (6.37)$$

trong đó

$$R_N(f_1, f, \varepsilon, \theta_1, \theta_2) = R_N^1(f_1, \varepsilon, \theta_1) + R_{N+1}^2(f, \varepsilon, \theta_2). \quad (6.38)$$

Áp dụng công thức khai triển Maclaurin quanh điểm $\varepsilon = 0$ cho hàm $B[h]$ đến cấp N và bổ đề 6.1, ta được

$$\begin{aligned} B[h] - B[u_0] &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} (B[h]) \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon^k + \frac{1}{(N+1)!} \frac{\partial^{N+1}}{\partial \varepsilon^{N+1}} (B[h]) \Big|_{\varepsilon=\theta_3 \varepsilon} \varepsilon^{N+1} \\ &= \sum_{k=1}^N \rho_k[B] \varepsilon^k + \varepsilon^{N+1} R_{N+1}^3(B, \varepsilon, \theta_3), \quad 0 < \theta_3 < 1, \end{aligned}$$

trong đó

$$R_{N+1}^3(B, \varepsilon, \theta_3) = \frac{1}{(N+1)!} \frac{\partial^{N+1}}{\partial \varepsilon^{N+1}} (B[h]) \Big|_{\varepsilon=\theta_3 \varepsilon},$$

nên

$$(B[h] - B[u_0])\Delta h = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{k=1}^i \rho_k[B] \Delta u_{i-k} \right] \varepsilon^i + \varepsilon^{N+1} \bar{R}_N(B, \varepsilon, \theta_3), \quad (6.39)$$

với

$$\bar{R}_N(B, \varepsilon, \theta_3) = \sum_{k=1}^N \rho_k[B] \sum_{i=N+1}^{k+N} \Delta u_{i-k} \varepsilon^{i-N-1} + R_{N+1}^3(B, \varepsilon, \theta_3) \Delta h. \quad (6.40)$$

Tổ hợp (6.23), (6.36), (6.38), (6.39), (6.40) và do (6.19) ta thu được

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(x, t) &= \sum_{i=1}^N (\pi_{i-1}[f_1] + \pi_i[f])\varepsilon^i + \sum_{i=1}^N \left[\sum_{k=1}^i \rho_k[B] \Delta u_{i-k} \right] \varepsilon^i - \sum_{i=1}^N F_i[u_i] \varepsilon^i \\ &\quad + \varepsilon^{N+1} R_N(f_1, f, \varepsilon, \theta_1, \theta_2) + \varepsilon^{N+1} \bar{R}_N(B, \varepsilon, \theta_3) \\ &= \varepsilon^{N+1} [R_N(f_1, f, \varepsilon, \theta_1, \theta_2) + \bar{R}_N(B, \varepsilon, \theta_3)]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Từ tính bị chặn các hàm $u_i, u'_i, i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq N$ trong $L^\infty(0, T; H^1)$. Ta suy ra rằng

$$\|E_\varepsilon(x, t)\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq \tilde{C}_N |\varepsilon|^{N+1}, \quad (6.42)$$

trong đó $\tilde{C}_N$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào M, T, N và các hằng số $K_i(M, T, f)$,

$$K_i(M, T, f), \tilde{K}_i(M, T, B).$$

Bổ đề 6.2 đã chứng minh xong ■

Bây giờ ta xét dãy hàm $\{v_m\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} v_0 \equiv 0, \\ v_m'' - B[v_{m-1} + h]\Delta v_m = f(v_{m-1} + h) - f(h) + (B[v_{m-1} + h] - B[h])\Delta h \\ \quad + \varepsilon[f_1(v_{m-1} + h) - f_1(h)] + E_\varepsilon(x, t), \quad 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ v_m(0, t) = v_m(1, t) = 0, \\ v_m(0) = v_m'(0) = 0, \quad m \geq 1. \end{cases} \quad (6.43)$$

Với $m = 1$, ta có bài toán

$$\begin{cases} v_1'' - B[h]\Delta v_1 = E_\varepsilon(x, t), \quad 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ v_1(0, t) = v_1(1, t) = 0, \\ v_1(0) = v_1'(0) = 0. \end{cases} \quad (6.44)$$

Nhân hai vế (6.34) cho $\dot{v}_1$ rồi lấy tích phân theo t ta được

$$\|\dot{v}_1(t)\|^2 + B[h]\|\nabla v_1(t)\|^2 \leq 2\tilde{C}_N \varepsilon^{N+1} T \|\dot{v}_1\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \int_0^t \frac{d}{ds} B[h] \cdot \|\nabla v_1(s)\|^2 ds, \quad (6.45)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B[h] &= \frac{d}{dt} B(t, \|\nabla h(t)\|^2) = D_1 B(t, \|\nabla h(t)\|^2) + D_2 B(t, \|\nabla h(t)\|^2) (\|\nabla h(t)\|^2)' \\ &\leq [D_1 B(t, \|\nabla h(t)\|^2) + D_2 B(t, \|\nabla h(t)\|^2)] (1 + 2\langle \nabla h(t), \nabla h'(t) \rangle), \end{aligned}$$

nên

$$\left| \frac{d}{dt} B[h] \right| \leq \tilde{K}_1(\bar{M}, B) [1 + 2(N+1)^2 M^2] \equiv \eta_1. \quad (6.46)$$

Từ (6.35) và (6.36) suy ra rằng

$$\|\dot{v}_1(t)\|^2 + b_0 \|v_1(t)\|_V^2 \leq 2\tilde{C}_N \varepsilon^{N+1} T \|\dot{v}_1\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \frac{\eta_1}{b_0} \int_0^t \|v_1(s)\|_V^2 ds. \quad (6.47)$$

Sử dụng bổ đề Gronwall ta được

$$\|\dot{v}_1\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2 + \|v_1\|_{L^\infty(0, T; V)}^2 \leq 2(1 + b_0^{-\frac{1}{2}}) T \tilde{C}_N \exp\left(\frac{\eta_1 T}{b_0}\right) |\varepsilon|^{N+1}. \quad (6.48)$$

Ta sẽ chứng minh tồn tại hàm số C_T độc lập với m và ε sao cho

$$\|\dot{v}_m\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2 + \|v_m\|_{L^\infty(0, T; V)}^2 \leq C_T |\varepsilon|^{N+1}, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_*, \quad \forall m. \quad (6.49)$$

Nhân hai vế (6.33)₂ với $\dot{v}_m$ sao đó lấy tích phân theo t và một số bức biến đổi đơn giản ta thu được

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_m(t)\|^2 + b_0 \|v_m(t)\|_V^2 &\leq \int_0^t \frac{d}{ds} B[v_{m-1} + h] \cdot \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \\
&+ 2 \int_0^t \|f(v_{m-1} + h) - f(h)\| \cdot \|\dot{v}_m(s)\| ds \\
&+ 2 \int_0^t |B[v_{m-1} + h] - B[h]| \cdot \|\Delta h\| \cdot \|\dot{v}_m(s)\| ds \\
&+ 2\varepsilon \int_0^t \|f_1(v_{m-1} + h) - f_1(h)\| \cdot \|\dot{v}_m(s)\| ds + 2\tilde{C}_N |\varepsilon|^{N+1} \int_0^t \|\dot{v}_m(s)\| ds, \quad (6.50)
\end{aligned}$$

Ta lần lượt đánh giá các tích phân bên vế phải của (6.50) như sau

Tích phân thứ nhất. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} B[v_{m-1} + h] &= \frac{d}{dt} B(t, \|\nabla v_{m-1} + \nabla h\|^2) = D_1 B(t, \|\nabla v_{m-1} + \nabla h\|^2) \\
&+ 2D_2 B(t, \|\nabla v_{m-1} + \nabla h\|^2) \langle \nabla v_{m-1} + \nabla h, \nabla v'_{m-1} + \nabla h' \rangle
\end{aligned}$$

nên

$$\left| \frac{d}{dt} B[v_{m-1} + h] \right| \leq \tilde{K}_1(\bar{M}, B) [1 + 2(N+2)^2 M^2] \equiv \eta_2.$$

Do đó

$$\int_0^t \frac{d}{ds} B[v_{m-1} + h] \cdot \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \leq \frac{\eta_2}{b_0} \int_0^t \|\nabla v_m(s)\|^2 ds \leq \frac{\eta_2}{b_0} \int_0^t \|v_m(s)\|_V^2 ds. \quad (6.51)$$

Tích phân thứ hai. Ta có

$$\begin{aligned}
|f(v_{m-1} + h) - f(h)| &\leq |D_3 f(x, t, \theta_1 v_{m-1} + h)| v_{m-1}(t) \\
&\leq K_1(\bar{M}, f) \|v_{m-1}(t)\|_V \leq K_1(\bar{M}, f) \|v_{m-1}\|_{W_1(T)},
\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}
2 \int_0^t \|f(v_{m-1} + h) - f(h)\| \cdot \|\dot{v}_m(s)\| ds &\leq 2K_1(\bar{M}, f) \|v_{m-1}\|_{W_1(T)} \int_0^t \|\dot{v}_m(s)\| ds \\
&\leq TK_1^2(\bar{M}, f) \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 + \int_0^t \|\dot{v}_m(s)\|^2 ds. \quad (6.52)
\end{aligned}$$

Tích phân thứ ba. Ta có

$$|B[v_{m-1} + h] - B[h]| = B(t, \|\nabla v_{m-1}(t) + \nabla h(t)\|^2) - B(t, \|\nabla h(t)\|^2)$$

$$\begin{aligned}
&\leq D_2 B[\theta v_{m-1} + h](\|\nabla v_{m-1}\| + 2\|\nabla h\|)\|\nabla v_{m-1}\| \\
&\leq \tilde{K}_1(\bar{M}, B)(2N + 3)M\|v_{m-1}\|_{W_1(T)},
\end{aligned}$$

do đó

$$\begin{aligned}
&2 \int_0^t |B[v_{m-1} + h] - B[h]| \cdot \|\Delta h\| \|\dot{v}_m(s)\| ds \\
&\leq 2\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(2N + 3)(N + 1)M^2 \|v_{m-1}\|_{W_1(T)} \int_0^t \|\dot{v}_m(s)\| ds \\
&\leq T[\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(2N + 3)(N + 1)M^2]^2 \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 + \int_0^t \|\dot{v}_m(s)\|^2 ds. \quad (6.53)
\end{aligned}$$

Tích phân thứ tư. Ta có

$$\begin{aligned}
|f_1(v_{m-1} + h) - f_1(h)| &\leq |D_3 f_1(x, t, \theta_3 v_{m-1} + h)| |v_{m-1}(t)| \\
&\leq K_1(\bar{M}, f_1) \|v_{m-1}(t)\|_V \leq K_1(\bar{M}, f_1) \|v_{m-1}\|_{W_1(T)},
\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}
2\varepsilon \int_0^t |f_1(v_{m-1} + h) - f_1(h)| \cdot \|\dot{v}_m(s)\| ds &\leq 2\varepsilon_* K_1(\bar{M}, f_1) \|v_{m-1}\|_{W_1(T)} \int_0^t \|\dot{v}_m(s)\| ds \\
&\leq T\varepsilon_*^2 K_1^2(\bar{M}, f_1) \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 + \int_0^t \|\dot{v}_m(s)\|^2 ds. \quad (6.54)
\end{aligned}$$

Tích phân thứ năm

$$\begin{aligned}
2 \int_0^t \|E_\varepsilon(x, s)\| \|\dot{v}_m(s)\| ds &\leq 2\tilde{C}_N |\varepsilon|^{N+1} \int_0^t \|\dot{v}_m(s)\| ds \\
&\leq T\tilde{C}_N^2 |\varepsilon|^{2N+2} + \int_0^t \|\dot{v}_m(s)\|^2 ds. \quad (6.55)
\end{aligned}$$

Tổng hợp (6.50) – (6.55) ta được

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}_m(t)\|^2 + b_0 \|v_m(t)\|_V^2 &\leq T\tilde{C}_N^2 |\varepsilon|^{2N+2} + T\eta_3 \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 \\
&\quad + \left(\frac{\eta_2}{b_0} + 4\right) \int_0^t (\|\dot{v}_m(s)\|^2 + \|v_m(s)\|_V^2) ds, \quad (6.56)
\end{aligned}$$

trong đó

$$\eta_3 = K_1^2(\bar{M}, f) + [\tilde{K}_1(\bar{M}, B)(2N + 3)(N + 1)M^2]^2 + \varepsilon_*^2 K_1^2(\bar{M}, f_1). \quad (6.57)$$

Áp dụng bổ đề Gronwall cho (6.56) ta được

$$\|v_m(t)\|_{W_1(T)}^2 \leq \left(T\tilde{C}_N^2 |\varepsilon|^{2N+2} + T\eta_3 \|v_{m-1}\|_{W_1(T)}^2 \right) \exp\left[\left(\frac{\eta_2}{b_0} + 4\right)T\right] \quad (6.58)$$

hay

$$\|v_m(t)\|_{W_1(T)} \leq \gamma \|v_{m-1}\|_{W_1(T)} + \eta, \quad (6.59)$$

trong đó

$$\begin{cases} \gamma = \sqrt{T\eta_3} (1 + b_0^{-\frac{1}{2}}) \eta_3 \exp\left[\left(\frac{\eta_2}{b_0} + 4\right)\frac{T}{2}\right], \\ \eta = \sqrt{T} (1 + b_0^{-\frac{1}{2}}) \tilde{C}_N \exp\left[\left(\frac{\eta_2}{b_0} + 4\right)\frac{T}{2}\right] |\varepsilon|^{N+1}. \end{cases} \quad (6.60)$$

Từ (6.60) ta suy ra rằng

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \gamma = 0, \quad \lim_{T \rightarrow 0^+} \eta = 0. \quad (6.61)$$

Do đó, tồn tại T đủ nhỏ thì $0 \leq \gamma < 1$ và $\eta \geq 0$.

Bổ đề 6.3. Cho dãy $\{\psi_m\}$ thỏa

$$\psi_0 = 0, \quad 0 \leq \psi_m \leq \gamma \psi_{m-1} + \eta, \quad m \geq 1,$$

trong đó $0 \leq \gamma < 1$, $\eta \geq 0$ là các hằng số cho trước. Khi đó

$$\psi_m \leq \frac{\eta}{1 - \gamma} \text{ với mọi } m \geq 1.$$

Áp dụng bổ đề 6.3 cho (6.59) với $\psi_m = \|v_m\|_{W_1(T)}$, ta được

$$\|v_m\|_{W_1(T)} \leq \frac{\eta}{1 - \gamma} \leq \tilde{C}_T |\varepsilon|^{N+1}, \quad \forall m \geq 1, \quad (6.62)$$

Mặt khác dãy qui nạp tuyến tính $\{v_m\}$ được xác định ở (6.43) hội tụ mạnh trong không gian $W_1(T)$ đến nghiệm v của bài toán (6.19). Do đó, khi $m \rightarrow +\infty$ trong (6.62) ta được

$$\|v\|_{W_1(T)} \leq \tilde{C}_T |\varepsilon|^{N+1}, \quad (6.63)$$

hay

$$\|u_\varepsilon - \sum_{i=0}^N u_i \varepsilon^i\|_{W_1(T)} \leq \tilde{C}_T |\varepsilon|^{N+1}. \quad (6.64)$$

Do đó, ta có định lý sau

Định lý 6.2. Giả sử các giả thiết (A_1) , (A_2') , (A_3') , (A_4) , (A_5') thỏa. Khi đó, tồn tại các hằng số $M > 0$, $T > 0$ sao cho, với mỗi ε , $|\varepsilon| < \varepsilon_*$, bài toán (P_ε) có duy nhất nghiệm yếu $u_\varepsilon \in W_1(M, T)$ thỏa một đánh giá tiên nghiệm đến cấp $N + 1$ như trong (6.64), các hàm u_i , $i = 0, \dots, N$ lần lượt là nghiệm yếu của các bài toán (P_0) , (Q_1) , $\dots$, (Q_N) .

Phần kết luận

Qua luận văn này, tác giả thực sự bắt đầu làm quen với công việc nghiên cứu khoa học một cách nghiêm túc và có hệ thống. Tác giả cũng học tập được phương pháp nghiên cứu qua việc tìm đọc tài liệu và sự phân tích thảo luận các đề tài liên quan trong nhóm seminar định kỳ do quý thầy hướng dẫn. Tác giả cũng học tập được phương pháp chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán biên phi tuyến nhờ vào các phương pháp: xấp xỉ tuyến tính, xấp xỉ Galerkin, các kỹ thuật đánh giá tiên nghiệm, kỹ thuật về tính compact và các kết quả về sự hội tụ yếu.

Nội dung chính của luận văn bao gồm các chương 3, 4, 5, 6.

Trong chương 3, chúng tôi khảo sát bài toán. Tìm hàm u thỏa phương trình sóng phi tuyến có dạng $u_{tt} - B(t, \|u_x(t)\|^2)u_{xx} = f(x, t, u)$ liên kết với điều kiện biên hỗn hợp thuần nhất. Chúng tôi thu được kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu bằng thuật giải xấp xỉ tuyến tính.

Trong chương 4, chúng tôi khảo sát bài toán giống chương 3, nhưng có điều kiện biên hỗn hợp không thuần nhất. Kế thừa phương pháp ở chương 3, chúng tôi cũng thu được kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu.

Trong chương 5, Để tiếp nối và mở rộng kết quả của chương 3. Chúng tôi, trình bày một thuật giải tinh tế hơn bằng cách xây dựng một dãy lặp phi tuyến $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ nhằm nâng tốc độ hội tụ của u_m về nghiệm yếu u .

Trong chương 6, chúng tôi trình bày các kết quả về dáng điệu tiệm cận và khai triển tiệm cận cho bài toán của chương 4.

Tuy nhiên, do sự hạn chế của hiểu biết bản thân nên tác giả chưa tìm hiểu cặn kẽ khả năng ứng dụng của các kết quả thu được trong luận văn vào các bài toán vật lý và các bài toán khác. Vì vậy tác giả kính mong nhận được sự chỉ bảo của quý Thầy, Cô trong và ngoài hội đồng.

Tài liệu tham khảo

- [1] **H. Brézis** (1983), *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, Paris, 1983.
- [2] **G. R. Kirchhoff**, *Vorlesungen über Mathematische Physik: Machanik*, Teuber, Leipzig, 1876, Section 29.7.
- [3] **J. L. Lions**, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod; Gauthier – Villars, Paris, 1969.
- [4] **Nguyen Thanh Long, Alain Pham Ngoc Dinh, Tran Ngoc Diem** (2002), *Linear recursive schemes and asymptotic expansion associated with the Kirchhoff – Carrier operator*, J. Math. Anal. Appl. **267** (1) (2002) 116 – 134.
- [5] **Nguyen Thanh Long, Bui Tien Dung** (2003), *On the nonlinear wave equation $u_{tt} - B(\|u_x(t)\|^2)u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t, \|u(t)\|^2)$ associated with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal., Ser. A: Theory Methods, **55** (5) (2003) 493 – 519.
- [6] **Nguyen Thanh Long** (2005), *On the nonlinear wave equation $u_{tt} - B(t, \|u(t)\|^2, \|u_x(t)\|^2)u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t, \|u(t)\|^2, \|u_x(t)\|^2)$ associated with the mixed homogeneous conditions*, J. Math. Anal. Appl. **306** (1) (2005) 243 – 268.
- [7] **Nguyen Thanh Long, Tran Minh Thuyet** (2003), *A semilinear wave equation associated with a nonlinear integral equation*, Demonstratio Math. **36** (4) (2003) 915 – 938.
- [8] **Nguyen Thanh Long, Le Thi Phuong Ngoc** (2009), *On nonlinear boundary value problems for nonlinear wave equations*, Vietnam J. Math. **37** (2 – 3) (2009) 141 – 178.
- [9] **Le Xuan Truong, Le Thi Phuong Ngoc, Nguyen Thanh Long** (2009), *High-order iterative schemes for a nonlinear Kirchhoff – Carrier wave equation associated with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **71** (1 – 2) (2009) 467 – 484.
- [10] **Le Thi Phuong Ngoc, Le Khanh Luan, Tran Minh Thuyet, Nguyen Thanh Long** (2009), *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogeneous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solutions*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **71** (11) (2009) 5799 – 5819.