

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH
-----o0o-----

Nguyễn Đăng Quang

**PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN PHI TUYẾN
VÀ CÁC ỨNG DỤNG**

Chuyên ngành : **Toán Giải Tích**

Mã số : **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. LÊ THỊ THIÊN HƯƠNG

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin kính gửi đến **TS. Lê Thị Thiên Hương** lời cảm ơn sâu sắc về sự tận tình giúp đỡ của **Cô** đối với tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn cũng như trong học tập.

Xin trân trọng cảm ơn **Quý Thầy Cô** thuộc khoa Toán của trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh đã tận tình truyền đạt kiến thức và kinh nghiệm quý báu cho tôi trong suốt ba năm học tập.

Xin trân trọng cảm ơn Phòng Sau Đại Học trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn tất chương trình học tập và thực hiện luận văn này.

Xin chân thành cảm ơn các bạn lớp Cao học khóa 18 chuyên ngành Toán giải Tích trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, các anh, chị và các bạn đồng nghiệp thuộc Bộ môn Cơ bản – Cơ sở trường Đại học Ngoại thương thành phố Hồ Chí Minh đã động viên và nhiệt tình giúp đỡ tôi trong thời gian qua.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn đến gia đình tôi, là chỗ dựa cho tôi về mọi mặt và đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi học tập và hoàn thành luận văn này.

Nguyễn Đăng Quang

MỞ ĐẦU

Trong lĩnh vực phương trình toán lý, chúng ta gặp các phương trình vi phân hay đạo hàm riêng nhằm xác định một hàm Ψ nào đó. Do các phương trình liên quan tới đạo hàm hay đạo hàm riêng chỉ diễn tả tính chất địa phương của hàm Ψ nên thường các điều kiện biên được thêm vào nhằm lựa chọn nghiệm tương thích với trạng thái vật lý được quan tâm.

Vì vậy, cần thiết thành lập phương trình cho Ψ sao cho Ψ chứa tất cả các điều kiện biên. Loại phương trình này không những đặc trưng cho hàm Ψ bằng những giá trị địa phương mà phải đại diện cho cả những giá trị của nó trên toàn miền khảo sát, kể cả biên. Phương trình tích phân là một loại phương trình như vậy.

Trong luận văn này, chúng tôi khảo sát phương trình tích phân phi tuyến có dạng:

$$u(x) = \int_G K(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (*)$$

trong đó G là tập compact trong $\mathbb{R}^n$ và $f(x, u) = \sum_{i=1}^m a_i(x) u^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$.

Hiển nhiên $u(x) \equiv 0$ là một nghiệm tầm thường của phương trình (*). Luận văn khảo sát sự tồn tại nghiệm không âm, không tầm thường của phương trình (*) dựa vào các điều kiện được thiết lập cho nhân $K(x, y)$ và các điều kiện của hàm $f(x, u)$, $a_i(x), i = 1, 2, \dots, m$ mà chúng tôi sẽ giới thiệu trong các chương sau.

Điều kiện đối với $K(x, y)$ gồm có:

(H1) $K(x, y)$ là hàm liên tục, không âm trên $G \times G$;

Tồn tại tập hợp đóng $G_0 \subset G$ với $mes G_0 > 0$ ($mes G_0$ là độ đo của tập G_0)

và $0 < \varepsilon_0 < 1$ thoả mãn điều kiện:

(i) $K(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in G_0 \times G_0$;

(ii) $K(x, y) \geq \varepsilon_0 K(z, y)$, $\forall x \in G_0, \forall y \in G, \forall z \in G$.

(H2) $K(x, y)$ là hàm liên tục, không âm trên $G \times G$ và tồn tại $x_0 \in G$

sao cho $K(x_0, x_0) > 0$.

(H3) Với mọi quả cầu đóng $T \subset G^\circ$, tồn tại $\varepsilon^* = \varepsilon^*(T) > 0$ sao cho

$$\int_T K(x, y) dy \geq \varepsilon^* \int_G K(x, y) dy, \quad \forall x \in G.$$

Trong toàn bộ luận văn, chuẩn trong $C(G)$ (chuẩn max) được kí hiệu là $\|\cdot\|$

và chuẩn trong $L(G)$ được kí hiệu là $\|\cdot\|_L$.

Luận văn có ba chương:

+ Chương 1 là các kiến thức chuẩn bị để sử dụng cho các chương sau.

+ Chương 2 chứng minh sự tồn tại nghiệm không âm, không tầm thường của phương trình tích phân phi tuyến (*) dựa vào các định lý điểm bất động được nêu trong Chương 1.

+ Chương 3 là các ví dụ minh họa.

Sau cùng là phần kết luận, phần phụ lục và tài liệu tham khảo.

Chương 1. CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này giới thiệu định nghĩa và một số tính chất cơ bản của nón trong không gian Banach nhằm phục vụ việc chứng minh một số định lý điểm bất động. Các định lý này là công cụ chính để chứng minh sự tồn tại nghiệm không âm, không tầm thường của phương trình (*).

1.1. Nón và thứ tự sinh bởi nón

Định nghĩa

Cho E là không gian Banach trên trường số thực.

(a) Tập con khác rỗng K của E được gọi là nón nếu:

- (i) K đóng;
- (ii) $K + K \subset K, \lambda K \subset K, \forall \lambda \geq 0$
 $(x, y \in K; \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 \Rightarrow x + y \in K, \lambda x \in K);$
- (iii) $K \cap (-K) = \{\theta\}$.

(b) Nếu K là nón thì thứ tự “ $\leq$ ” trong E sinh bởi K được xác định bởi

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

Mỗi $x \in K \setminus \{\theta\}$ được gọi là phần tử dương.

Mệnh đề 1.1

Giả sử “ $\leq$ ” là thứ tự sinh bởi nón K . Khi đó

- (1) $x \leq y \Rightarrow \begin{cases} x + z \leq y + z, & \forall z \in E \\ \lambda x \leq \lambda y, & \forall \lambda \geq 0 \end{cases}$.
- (2) $(x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y) \Rightarrow x \leq y$.
- (3) $(x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x) \Rightarrow x_n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}$.

Mệnh đề trên được chứng minh khá đơn giản nên ta bỏ qua phần chứng minh.

1.2. Nón chuẩn

Định nghĩa

Nón K được gọi là nón chuẩn nếu $\exists N > 0, \forall x, y \in E (\theta \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N \|y\|)$.

Mệnh đề 1.2

Cho K là nón chuẩn. Khi đó

- (1) Nếu $u \leq v$ thì tập $\langle u, v \rangle = \{x \in E : u \leq x \leq v\}$ bị chặn.
- (2) Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$.
- (3) Nếu $\{x_n\}_n \subset E$ là dãy đơn điệu và có dãy con hội tụ thì $\{x_n\}_n$ hội tụ.

Chứng minh

$$(1) \forall x \in \langle u, v \rangle \Rightarrow \theta \leq x - u \leq v - u.$$

Vì K là nón chuẩn nên tồn tại $N > 1 : \|x - u\| \leq N \|v - u\|$

suy ra $\|x\| \leq N \|v - u\| + \|u\|$.

$$(2) \text{ Ta có } \theta \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \|y_n - x_n\| \leq N \|z_n - x_n\|.$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow +\infty} (z_n - x_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0 \text{ hay } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

$$(3) \text{ Giả sử } \{x_n\}_n \text{ là dãy tăng và } \{x_{n_k}\}_k \subset \{x_n\}_n \text{ sao cho } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x. \text{ Ta có}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_{n_k} \leq x, \forall k \in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : n < n_k \end{array} \right\} \Rightarrow x_n \leq x, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cho $\varepsilon > 0$, vì $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x$ nên tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\|x_{n_{k_0}} - x\| < \frac{\varepsilon}{N}$, khi đó

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_{k_0} \text{ suy ra } \theta \leq x - x_n \leq x - x_{n_{k_0}}.$$

$$\Rightarrow \|x - x_n\| \leq N \|x - x_{n_{k_0}}\| < \varepsilon \text{ hay } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

1.3. Nón liên hợp

Định nghĩa

Cho nón $K \subset E$, ta định nghĩa

$$K^* = \{f \in E^* : f(x) \geq 0, \forall x \in K\} \text{ là nón liên hợp của } K.$$

K^* có các tính chất (i) và (ii) của định nghĩa nón.

$$\text{Ta có thể chứng minh } K^* \cap (-K^*) = \{\theta_{E^*}\} \Leftrightarrow \overline{K - K} = E.$$

Mệnh đề 1.3

$$(1) x \in K \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall f \in K^*.$$

$$(2) \text{ Nếu } E \text{ khả ly thì tồn tại } f_0 \in K^* \text{ sao cho } f_0(x) > 0, \forall x > \theta.$$

Phần chứng minh mệnh đề 1.3 xin tham khảo trong [7].

1.4. Chỉ số điểm bất động

Cho E là không gian Banach thực, tập hợp con X của E được gọi là cái co rút của E nếu tồn tại một ánh xạ liên tục $r : E \rightarrow X$ xác định bởi $r(x) = x, \forall x \in X$.

Ánh xạ r gọi là phép co rút E lên X . Áp dụng định lý Dugundji (xem [6]), ta chứng minh được mọi tập con lồi đóng khác rỗng của E là cái co rút của E .

Đặc biệt, mọi nón trong E đều là cái co rút của E .

Định lý 1.4.1

Giả sử X là cái co rút của không gian Banach thực E , U là tập con mở, bị chặn của X , $A: \bar{U} \rightarrow X$ là ánh xạ hoàn toàn liên tục và không có điểm bất động trên ∂U . Khi đó tồn tại số nguyên $i(A, U, X)$ thỏa mãn các tính chất sau:

(i) tính chuẩn tắc : $i(A, U, X) = 1$ nếu $A(x) = y_0 \in U, \forall x \in \bar{U}$;

(ii) tính cộng tính : $i(A, U, X) = i(A, U_1, X) + i(A, U_2, X)$,

trong đó U_1, U_2 là hai tập con mở rời nhau của U và ánh xạ A không có điểm bất động trên $\bar{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$;

(iii) bất biến đồng luân: $i(H(t, \cdot), U, X)$ không phụ thuộc t ($0 \leq t \leq 1$)

với $H: [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow X$ là ánh xạ hoàn toàn liên tục và thỏa điều kiện

$H(t, x) \neq x, \forall (t, x) \in [0, 1] \times \partial U$;

(iv) $i(A, U, X) = i(A, U \cap Y, Y)$ với Y là cái co rút của X và $A(\bar{U}) \subset Y$.

$i(A, U, X)$ được xác định duy nhất và được gọi là chỉ số điểm bất động của A trên U đối với X .

Phần chứng minh định lý 1.4.1 xin tham khảo trong [7].

Định lý 1.4.2

(v) $i(A, U, X) = i(A, U_0, X)$ trong đó U_0 là tập con mở của U

và $A(x) \neq x, \forall x \in \bar{U} \setminus U_0$.

(vi) Nếu $i(A, U, X) \neq 0$ thì A có ít nhất một điểm bất động trên U .

Chứng minh

(v) Đặt $U_1 = U, U_2 = \emptyset$ và áp dụng (ii), ta có

$$i(A, U, X) = i(A, U_1, X) + i(A, U_2, X) = i(A, U, X) + i(A, \emptyset, X).$$

$$\Rightarrow i(A, \emptyset, X) = 0.$$

Đặt $U_1 = U_0, U_2 = \emptyset$ và áp dụng (ii), ta có

$$i(A, U, X) = i(A, U_1, X) + i(A, U_2, X) = i(A, U_0, X) + i(A, \emptyset, X).$$

$$\Rightarrow i(A, U, X) = i(A, U_0, X).$$

(vi) Giả sử A không có điểm bất động trong U .

Đặt $U_0 = \emptyset$ và áp dụng (v), ta được

$$i(A, U, X) = i(A, \emptyset, X) = 0 \text{ (mâu thuẫn với giả thiết).}$$

Vậy A có điểm bất động trong U .

Trong phần tiếp theo chúng tôi sẽ giới thiệu và chứng minh một số bổ đề liên quan đến chỉ số điểm bất động. Những bổ đề này là công cụ để chứng minh các định lý điểm bất động ở phần sau.

Giả sử P là nón trong không gian Banach thực E thì P cũng là cái co rút của E ,

$\Omega \subset E$ là tập mở bị chặn, khi đó $P \cap \Omega$ là tập mở bị chặn của P và $\partial(P \cap \Omega) = P \cap \partial\Omega$,
 $\overline{P \cap \Omega} = P \cap \overline{\Omega}$.

Bổ đề 1.4.1

Cho $A : P \cap \overline{\Omega} \rightarrow P$ là ánh xạ hoàn toàn liên tục và $\theta \in \Omega$.

Giả sử $A(x) \neq \mu x, \forall x \in P \cap \partial\Omega, \forall \mu \geq 1$.

Khi đó $i(A, P \cap \Omega, P) = 1$.

Chứng minh

Xét ánh xạ $H : [0, 1] \times (P \cap \overline{\Omega}) \rightarrow P$ xác định bởi

$$H(t, x) = tA(x) + (1-t)\theta(x) \quad (\theta : \text{ánh xạ không})$$

thì H là ánh xạ hoàn toàn liên tục (do A hoàn toàn liên tục)

và $H(t, x) \neq x, \forall (t, x) \in [0, 1] \times \partial(P \cap \Omega)$.

Áp dụng tính chất bất biến đồng luân của chỉ số điểm bất động ta suy ra

$$i(A, P \cap \Omega, P) = i(\theta, P \cap \Omega, P) = 1.$$

Bổ đề 1.4.2

Giả sử $A : P \cap \overline{\Omega} \rightarrow P$,

$B : P \cap \partial\Omega \rightarrow P$ là các ánh xạ hoàn toàn liên tục và

(a) $\inf_{x \in P \cap \partial\Omega} \|B(x)\| > 0$;

(b) $x - A(x) \neq tB(x), \forall x \in P \cap \partial\Omega, t \geq 0$.

Khi đó, ta có $i(A, P \cap \Omega, P) = 0$.

Chứng minh

Theo định lý thác triển của Dugundji (xem phụ lục), chúng ta có thể thác triển B thành toán tử hoàn toàn liên tục từ $P \cap \overline{\Omega}$ vào P thỏa mãn

$$B(P \cap \overline{\Omega}) \subset \overline{co}B(P \cap \partial\Omega). \quad (1.1)$$

Đặt $F = B(P \cap \partial\Omega)$ thì $\overline{co}B(P \cap \partial\Omega) = \overline{co}F = \overline{M}$,

$$\text{với } M = \left\{ y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \mid y_i \in F, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 ; n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

$$\text{Trước tiên ta chứng minh rằng } \inf_{y \in \overline{M}} \|y\| > 0. \quad (1.2)$$

Kí hiệu $E_0 = \overline{F}$ (không gian con của E được mở rộng bởi F).

Vì B là ánh xạ hoàn toàn liên tục nên F là tập compact tương đối, suy ra E_0 là tập compact và do đó E_0 khả ly.

Hiển nhiên $P_0 = P \cap E_0$ là nón trong E_0 và $F \subset P_0$, $\overline{co}F \subset P_0$.

Theo mệnh đề 1.3, tồn tại $f_0 \in E_0^*$ sao cho $f_0(y) > 0$, $\forall y \in P_0$, $y \neq \theta$.

$$\text{Khi đó, } \inf_{y \in F} f_0(y) = \sigma > 0. \quad (1.3)$$

Thật vậy, giả sử $\sigma = 0$,

suy ra tồn tại dãy $\{y_k\}_k \subset F$ sao cho $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_0(y_k) = 0$.

Vì F là tập compact tương đối nên tồn tại dãy con $\{y_{k_i}\}_i \subset \{y_k\}_k$

thoả mãn $\lim_{i \rightarrow +\infty} y_{k_i} = y_0 \in P_0$.

Vì f_0 liên tục nên $\lim_{i \rightarrow +\infty} f_0(y_{k_i}) = f_0(y_0)$ và $f_0(y_0) = 0$ (do $\lim_{i \rightarrow +\infty} f_0(y_{k_i}) = 0$),

từ đó suy ra $y_0 = \theta$ và $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|y_{k_i}\| = 0$ (mâu thuẫn (a)).

Vậy (1.3) đúng.

Với mọi $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in M$, ở đây $y_i \in F$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ và $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

$$\text{Từ (1.3) ta suy ra } f_0(y) = f_0\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_0(y_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma = \sigma.$$

$$\text{Do đó } f_0(y) \geq \sigma, \forall y \in \overline{M}. \quad (1.4)$$

$$\text{Vì } \overline{M} = \overline{co}F \text{ là tập compact nên tồn tại } z_0 \in \overline{M} \text{ sao cho } \inf_{y \in \overline{M}} \|y\| = \|z_0\|. \quad (1.5)$$

Từ (1.4) suy ra $f_0(z_0) > 0$ và do đó $z_0 \neq \theta$.

Từ (1.5) suy ra (1.2) đúng.

$$\text{Từ (1.1) và (1.2) ta cũng suy ra được } \inf_{x \in P \cap \Omega} \|B(x)\| = a > 0. \quad (1.6)$$

Tiếp theo ta chứng minh $i(A, P \cap \Omega, P) = 0$.

Giả sử ngược lại, tức là $i(A, P \cap \Omega, P) \neq 0$.

Theo giả thiết (b) và tính chất bất biến đồng luân của chỉ số điểm bất động,

ta có

$$i(A + tB, P \cap \Omega, P) = i(A, P \cap \Omega, P) \neq 0, \forall t > 0.$$

Đặc biệt, nếu chọn $t_0 > \frac{b+c}{a}$ với $b = \sup_{x \in P \cap \bar{\Omega}} \|x\|$, $c = \sup_{x \in P \cap \bar{\Omega}} \|A(x)\|$

thì ta cũng có $i(A + t_0 B, P \cap \Omega, P) \neq 0$.

Do đó theo định lý 1.4.2 suy ra tồn tại $x_0 \in P \cap \Omega$ sao cho $A(x_0) + t_0 B(x_0) = x_0$.

Từ đó,

$$t_0 = \frac{\|x_0 - A(x_0)\|}{\|B(x_0)\|} \leq \frac{b+c}{a} \text{ (mâu thuẫn với cách chọn } t_0 \text{)}.$$

Vậy $i(A, P \cap \Omega, P) = 0$.

Bổ đề 1.4.3

Cho $A : P \cap \bar{\Omega} \rightarrow P$ là ánh xạ hoàn toàn liên tục. Giả sử

- (i) $\inf_{x \in P \cap \partial\Omega} \|A(x)\| > 0$;
- (ii) $A(x) \neq \mu x, \forall x \in P \cap \partial\Omega, \mu \in (0, 1]$.

Khi đó, $i(A, P \cap \Omega, P) = 0$.

Chứng minh

Đặt $B = A$ trong bổ đề 1.4.2, ta thấy rằng điều kiện (a) của bổ đề 1.4.2 chính là điều kiện (i) của bổ đề 1.4.3.

Ta chứng minh điều kiện (b) của bổ đề 1.4.2 cũng đúng.

Thật vậy, giả sử tồn tại $x_0 \in P \cap \partial\Omega$ và $t_0 \geq 0$ sao cho $x_0 - A(x_0) = t_0 A(x_0)$.

Đặt $\mu_0 = (1 + t_0)^{-1}$ thì $0 < \mu_0 \leq 1$ và $A(x_0) = \mu_0 x_0$ (mâu thuẫn với (ii)).

Do đó áp dụng bổ đề 1.4.2 ta được $i(A, P \cap \Omega, P) = 0$.

Định lý 1.4.3

Cho Ω_1, Ω_2 là hai tập con mở, bị chặn trong không gian Banach thực E , $\theta \in \Omega_1$ và $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Toán tử $A : P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow P$ là hoàn toàn liên tục.

Giả sử một trong hai điều kiện sau đây được thỏa mãn

- (i) $\|A(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ và $\|A(x)\| \geq \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$;
- (ii) $\|A(x)\| \geq \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ và $\|A(x)\| \leq \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$.

Khi đó A có điểm bất động trong $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

Chứng minh

Ta chỉ cần chứng minh định lý trong trường hợp điều kiện (i) thỏa mãn, trường hợp còn lại được chứng minh tương tự.

Áp dụng định lý thác triển (xem phụ lục), toán tử A có thể thác triển được thành toán tử hoàn toàn liên tục từ $P \cap \overline{\Omega_2}$ vào P .

Ta có thể giả sử rằng toán tử A không có điểm bất động trên $P \cap \partial\Omega_1$ và trên $P \cap \partial\Omega_2$. Ta chứng minh $A(x) \neq \mu x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1, \forall \mu \geq 1$.

Giả sử ngược lại, tức là tồn tại $x_0 \in P \cap \partial\Omega_1$ và $\mu_0 > 1$ sao cho $A(x_0) = \mu_0 x_0$.

Suy ra $\|A(x_0)\| = \mu_0 \|x_0\| > \|x_0\|$, mâu thuẫn với (i).

Vậy $A(x) \neq \mu x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1, \forall \mu \geq 1$.

Áp dụng bổ đề 1.4.1 suy ra $i(A, P \cap \Omega_1, P) = 1$. (1.7)

Mặt khác, ta cũng có

$$A(x) \neq \mu x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2, \forall \mu \in (0, 1]. \quad (1.8)$$

Thật vậy, giả sử ngược lại, tức là tồn tại $x_1 \in P \cap \partial\Omega_2$ và $\mu_1 \in (0, 1)$

sao cho $A(x_1) = \mu_1 x_1$.

Khi đó $\|A(x_1)\| = \mu_1 \|x_1\| < \|x_1\|$, mâu thuẫn với (i).

Cũng từ (i) ta suy ra $\inf_{x \in P \cap \partial\Omega_2} \|A(x)\| \geq \inf_{x \in P \cap \partial\Omega_2} \|x\| > 0$. (1.9)

Từ (1.8), (1.9) và áp dụng bổ đề 1.4.3 ta có $i(A, P \cap \Omega_2, P) = 0$. (1.10)

Từ (1.7), (1.10) và áp dụng tính chất cộng tính của chỉ số điểm bất động ta được

$$i(A, P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1), P) = i(A, P \cap \Omega_2, P) - i(A, P \cap \Omega_1, P) = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

Do đó theo định lý 1.4.2, A có điểm bất động trên $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

Định lý 1.4.4

Giả sử toán tử $A: P \rightarrow P$ là hoàn toàn liên tục, $A(\theta) = \theta$ và một trong hai điều kiện sau đây được thỏa mãn :

$$(i) \lim_{\substack{\|x\| \rightarrow 0 \\ x \in P}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad , \quad \lim_{\substack{\|x\| \rightarrow +\infty \\ x \in P}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = +\infty ;$$

$$(ii) \lim_{\substack{\|x\| \rightarrow 0 \\ x \in P}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = +\infty \quad , \quad \lim_{\substack{\|x\| \rightarrow +\infty \\ x \in P}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = 0 .$$

Khi đó

$$(a) \forall \mu > 0, \exists x_\mu > \theta : A(x_\mu) = \mu x_\mu .$$

$$(b) \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|x_\mu\| = +\infty \text{ (với điều kiện (i)) và } \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|x_\mu\| = 0 \text{ (với điều kiện (ii))}.$$

Chứng minh

Ta chỉ cần chứng minh định lý với điều kiện (i) còn với điều kiện (ii) thì chứng minh tương tự.

Cho trước $\mu > 0$ tùy ý, từ điều kiện (i) suy ra tồn tại $R > r > 0$ sao cho

$$\left\| \frac{1}{\mu} A(x) \right\| < \|x\|, \forall x \in P, \|x\| = r$$

$$\text{và } \left\| \frac{1}{\mu} A(x) \right\| > \|x\|, \forall x \in P, \|x\| = R.$$

$$\text{Đặt } \Omega_r = \{x \in E : \|x\| < r\},$$

$$\Omega_R = \{x \in E : \|x\| < R\},$$

ta có Ω_r, Ω_R là hai tập mở trong E và $\theta \in \Omega_r, \overline{\Omega_r} \subset \Omega_R$.

Khi đó điều kiện (i) của định lý 1.4.3 được thỏa mãn với toán tử $\frac{1}{\mu} A$.

Theo định lý 1.4.3 tồn tại $x_\mu \in \overline{\Omega_R} \setminus \Omega_r$, tức là $\|x_\mu\| > \theta$;

$$\text{sao cho } \left(\frac{1}{\mu} A \right)(x_\mu) = x_\mu \text{ hay } A(x_\mu) = \mu x_\mu.$$

Vậy kết luận (a) đã được chứng minh.

Để chứng minh kết luận (b) tức là $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|x_\mu\| = +\infty$ ta sẽ dùng phương pháp phản chứng.

Giả sử (b) không đúng, nghĩa là tồn tại số thực $c > 0$ và dãy số thực $\{\mu_n\}_n$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty \text{ sao cho } \|x_{\mu_n}\| \leq c, n = 1, 2, \dots.$$

Khi đó tồn tại dãy con $\left\{ \|x_{\mu_{n_k}}\| \right\}_k \subset \left\{ \|x_{\mu_n}\| \right\}_n$ và số thực $\tau \in [0, c]$ sao cho $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_{\mu_{n_k}}\| = \tau$.

$$* \text{ Nếu } \tau > 0 \text{ thì } \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0 \Rightarrow \|x_{\mu_{n_k}}\| > \frac{\tau}{2},$$

$$\text{suy ra } \mu_{n_k} = \frac{\|A(x_{\mu_{n_k}})\|}{\|x_{\mu_{n_k}}\|} \leq \frac{2M}{\tau} \quad (k > k_0),$$

$$\text{với } M = \sup_{\|x\| \leq c} \|A(x)\|, \text{ mâu thuẫn với điều kiện } \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_{n_k} = +\infty.$$

* Nếu $\tau = 0$ thì từ điều kiện (i) ta có

$$\mu_{n_k} = \frac{\|A(x_{\mu_{n_k}})\|}{\|x_{\mu_{n_k}}\|} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty), \text{ mâu thuẫn với điều kiện } \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_{n_k} = +\infty.$$

Vậy $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|x_\mu\| = +\infty$ và định lý được chứng minh.

Định lý 1.4.5

Giả sử $u_0, v_0 \in E$; $u_0 < v_0$ và $A: [u_0, v_0] \rightarrow E$ là toán tử đơn điệu tăng (tức là nếu $x \leq y$ thì $A(x) \leq A(y)$) thỏa mãn

$$u_0 \leq A(u_0) \quad , \quad A(v_0) \leq v_0. \quad (1.11)$$

Nếu P là nón chuẩn và A là toán tử hoàn toàn liên tục thì A có điểm bất động cực đại x^* và điểm bất động cực tiểu x_* trong $[u_0, v_0]$; hơn nữa

$$x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \quad , \quad x_* = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad (1.12)$$

với $v_n = A(v_{n-1})$, $u_n = A(u_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$

$$\text{và } u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0. \quad (1.13)$$

Chứng minh

Vì A là toán tử đơn điệu tăng nên từ (1.11) suy ra (1.13) đúng. Bây giờ ta chứng minh rằng dãy $\{u_n\}_n$ hội tụ đến $x_* \in E$ và $x_* = A(x_*)$.

Ta có tập hợp $S = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ là tập hợp bị chặn (do 1.13) và $S = A(S) \cup \{u_0\}$.

Vì A là toán tử hoàn toàn liên tục nên $A(S)$ là tập compact tương đối trong E và do đó S cũng là tập compact tương đối trong E .

Khi đó, tồn tại dãy con $\{u_{n_k}\}_k \subset \{u_n\}_n$ và $x_* \in E$ sao cho $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{n_k} = x_*$.

Từ mệnh đề 1.1 suy ra $u_n \leq x_*$ ($n = 1, 2, \dots$) và $x_* \in [u_0, v_0]$.

Mặt khác, do P là nón chuẩn và dãy $\{u_n\}_n$ đơn điệu tăng nên từ mệnh đề 1.2 suy ra $x_* = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Vì $u_n = A(u_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$ và A liên tục nên cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $x_* = A(x_*)$.

Tương tự ta chứng minh được dãy $\{v_n\}_n$ hội tụ đến $x^* \in E$ và $x^* = A(x^*)$, $x^* \in [u_0, v_0]$.

Sau cùng, ta sẽ chứng minh x_* và x^* là điểm bất động cực tiểu và cực đại của A trong $[u_0, v_0]$.

Giả sử $\bar{x} \in [u_0, v_0]$ và $A(\bar{x}) = \bar{x}$.

Vì A đơn điệu tăng nên từ $u_0 \leq \bar{x} \leq v_0$ suy ra $A(u_0) \leq A(\bar{x}) \leq A(v_0)$

$$\text{hay } u_1 \leq \bar{x} \leq v_1.$$

Lập luận tương tự ta được $u_2 \leq \bar{x} \leq v_2$.

Tổng quát, ta có $u_n \leq \bar{x} \leq v_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Cho $n \rightarrow +\infty$ suy ra $x_* \leq \bar{x} \leq x^*$ (đpcm).

Chương 2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM KHÔNG TÂM THƯỜNG

Chương 2 dành cho việc chứng minh phương trình tích phân phi tuyến (*) có nghiệm không âm, không tâm thường và liên tục dựa vào các điều kiện của hàm $K(x, y)$ đã nêu trong chương 1 và các điều kiện của hàm $f(x, u)$, $a_i(x)$; $i=1, 2, \dots, m$ mà chúng tôi sẽ giới thiệu sau đây. Trước tiên ta đưa ra một bổ đề quan trọng, là công cụ để chứng minh sự tồn tại nghiệm không tâm thường của phương trình (*).

Bổ đề 2.1

Giả sử $\{u_n\}_n \subset C(G)$, $u \in C(G)$, $u_n(x) \geq 0$, $u(x) \geq 0$, $\forall x \in G$, $\forall n \in \mathbb{N}$

và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\| = 0$. Khi đó, với mọi $\alpha > 0$ ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n^\alpha - u^\alpha\| = 0. \quad (2.1)$$

Chứng minh

Để chứng minh bổ đề 2.1 ta sử dụng bất đẳng thức sau đây (xem [8]).

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leq \alpha(x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1})|x - y|; \quad \forall x > 0, \forall y > 0, \alpha > 0. \quad (2.2)$$

Vì $u_n(x) \geq 0$, $u(x) \geq 0$, $\forall x \in G$, $\forall n \in \mathbb{N}$ nên áp dụng (2.2), ta được

$$\begin{aligned} |[u_n(x)]^\alpha - [u(x)]^\alpha| &\leq \alpha([u_n(x)]^{\alpha-1} + [u(x)]^{\alpha-1})|u_n(x) - u(x)| \\ \Rightarrow \|u_n^\alpha - u^\alpha\| &\leq \alpha(u_n^{\alpha-1} + u^{\alpha-1}) \cdot \|u_n - u\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp có thể xảy ra sau đây.

➤ Trường hợp $\alpha \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\| = 0 \Rightarrow \exists \lambda > 0 : \|u_n\| \leq \lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \|u_n\|^{\alpha-1} \leq \lambda^{\alpha-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \|u_n^\alpha - u^\alpha\| &\leq \alpha(\|u_n\|^{\alpha-1} + \|u\|^{\alpha-1}) \cdot \|u_n - u\| \\ &\leq \alpha(\lambda^{\alpha-1} + \|u\|^{\alpha-1}) \cdot \|u_n - u\|. \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n^\alpha - u^\alpha\| = 0$.

➤ Trường hợp $0 < \alpha < 1$

Cho $\varepsilon > 0$, đặt $\varepsilon^* = \left(\frac{\varepsilon}{2\alpha + 2}\right)^{1/\alpha}$.

$\forall x \in G$, $\forall n \in \mathbb{N}$ đặt

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & \text{khi } u(x) \geq \varepsilon^* \\ \varepsilon^*, & \text{khi } u(x) < \varepsilon^* \end{cases} \quad w(x) = \begin{cases} u(x), & \text{khi } u(x) < \varepsilon^* \\ \varepsilon^*, & \text{khi } u(x) \geq \varepsilon^* \end{cases}$$

$$v_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{khi } u_n(x) \geq \varepsilon^* \\ \varepsilon^*, & \text{khi } u_n(x) < \varepsilon^* \end{cases} \quad w_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & \text{khi } u_n(x) < \varepsilon^* \\ \varepsilon^*, & \text{khi } u_n(x) \geq \varepsilon^* \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh được các hàm $v, w, v_n, w_n \in C(G), \forall n \in \mathbb{N}$ và

- $v(x) \geq \varepsilon^*, v_n(x) \geq \varepsilon^*, \forall x \in G, \forall n \in \mathbb{N},$
 $w(x) \leq \varepsilon^*, w_n(x) \leq \varepsilon^*, \forall x \in G, \forall n \in \mathbb{N}.$
- $v(x) + w(x) = u(x) + \varepsilon^*,$
 $v_n(x) + w_n(x) = u_n(x) + \varepsilon^*,$
 $[v(x)]^\alpha + [w(x)]^\alpha = [u(x)]^\alpha + (\varepsilon^*)^\alpha,$
 $[v_n(x)]^\alpha + [w_n(x)]^\alpha = [u_n(x)]^\alpha + (\varepsilon^*)^\alpha.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - v\| = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n - w\| = 0.$ (2.3)

Tiếp theo, áp dụng (2.2) ta có

$$\begin{aligned} \left| [u_n(x)]^\alpha - [u(x)]^\alpha \right| &\leq \left| [v_n(x)]^\alpha - [v(x)]^\alpha \right| + \left| [w_n(x)]^\alpha - [w(x)]^\alpha \right| \\ &\leq \alpha \left([v_n(x)]^{\alpha-1} + [v(x)]^{\alpha-1} \right) \cdot |v_n(x) - v(x)| \\ &\quad + \left| [w_n(x)]^\alpha - [w(x)]^\alpha \right| \\ &\leq 2\alpha(\varepsilon^*)^{\alpha-1} \cdot |v_n(x) - v(x)| + 2(\varepsilon^*)^\alpha, \quad \forall x \in G. \\ \Rightarrow \|u_n^\alpha - u^\alpha\| &\leq 2\alpha(\varepsilon^*)^{\alpha-1} \cdot \|v_n - v\| + 2(\varepsilon^*)^\alpha. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Từ (2.3) ta suy ra

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \left(n \geq n_0 \Rightarrow \|v_n - v\| < \varepsilon^* \right). \quad (2.5)$$

Do đó từ (2.4) và (2.5) ta được

$$\|u_n^\alpha - u^\alpha\| \leq 2\alpha(\varepsilon^*)^{\alpha-1} \cdot \varepsilon^* + 2(\varepsilon^*)^\alpha = \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n^\alpha - u^\alpha\| = 0.$$

Tiếp theo ta chứng minh một số định lý về sự tồn tại nghiệm không âm, không tầm thường của phương trình tích phân phi tuyến (*). Kỹ thuật chủ yếu được sử dụng ở đây là các định lý về điểm bất động đã được trình bày trong chương 1.

Định lý 2.1

Giả sử

- (i) Nhân $K(x, y)$ thỏa mãn điều kiện (H1);
- (ii) $a_i \in L(G)$, $a_i(x) \geq 0$, $\forall x \in G$; $i = 1, 2, \dots, m$
 $\exists i_0, i_1 \in \{1, 2, \dots, m\} : \alpha_{i_0} < 1, \alpha_{i_1} > 1$ và $\inf_{x \in G_0} a_{i_0}(x) > 0, \inf_{x \in G_0} a_{i_1}(x) > 0$;
- (iii) $\sum_{i=1}^m \|a_i\|_L < M^{-1}$, với $M = \max_{(x,y) \in G_0 \times G_0} K(x, y)$.

Khi đó, phương trình (*) có ít nhất hai nghiệm không âm, không tầm thường và liên tục trên G .

Chứng minh

Đặt $P = \left\{ u \in C(G) \mid u(x) \geq 0, \min_{x \in G_0} u(x) \geq \varepsilon_0 \|u\| \right\}$.

Dễ dàng chứng minh được P là nón chuẩn trong không gian Banach $E = C(G)$.

Toán tử $A : P \rightarrow E$ xác định bởi

$$Au(x) = \int_G K(x, y) f(y, u(y)) dy = \int_G K(x, y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) [u(y)]^{\alpha_i} \right) dy$$

là toán tử hoàn toàn liên tục.

* Chứng minh A liên tục

Lấy tùy ý $u \in P$, giả sử $\{u_n\}_n \subset P$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\| = 0$.

Ta sẽ chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Au_n - Au\| = 0$.

với mọi $x \in G$, ta có

$$\begin{aligned} |Au_n(x) - Au(x)| &\leq \int_G K(x, y) \left| \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) \right) \left([u_n(y)]^{\alpha_i} - [u(y)]^{\alpha_i} \right) \right| dy \\ &\leq \sum_{i=1}^m M \int_G a_i(y) \left| [u_n(y)]^{\alpha_i} - [u(y)]^{\alpha_i} \right| dy. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Au_n - Au\| \leq \sum_{i=1}^m M \int_G a_i(y) \left| [u_n(y)]^{\alpha_i} - [u(y)]^{\alpha_i} \right| dy.$$

Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\| = 0$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n^{\alpha_i} - u^{\alpha_i}\| = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ (do bổ đề 2.1).

hay $\lim_{n \rightarrow +\infty} |[u_n(y)]^{\alpha_i} - [u(y)]^{\alpha_i}| = 0$ đều trên G .

suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_G a_i(y) |[u_n(y)]^{\alpha_i} - [u(y)]^{\alpha_i}| dy = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Au_n - Au\| = 0$ (đpcm).

* Chứng minh A compact

Giả sử $\Omega \subset P$ là tập bị chặn, ta chứng minh $A(\Omega)$ là tập compact tương đối trong P .

+ Chứng minh $A(\Omega)$ bị chặn đều

Lấy $u \in \Omega$ tùy ý.

Vì Ω bị chặn nên tồn tại $\lambda > 0$ sao cho $\|u\| \leq \lambda$

$$\text{suy ra } \|u\|^{\alpha_i} \leq \lambda^{\alpha_i}; i = 1, 2, \dots, m.$$

Đặt $\gamma = \max_{1 \leq i \leq m} \lambda^{\alpha_i}$ thì $\|u\|^{\alpha_i} \leq \gamma; i = 1, 2, \dots, m$.

với mọi $x \in G$, ta có

$$\begin{aligned} |Au(x)| &\leq \int_G |K(x, y)| \cdot \left(\sum_{i=1}^m |a_i(y)| \cdot |u(y)|^{\alpha_i} \right) dy \\ &\leq \int_G M \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) \|u\|^{\alpha_i} \right) dy \\ &\leq M \gamma \left(\sum_{i=1}^m \int_G a_i(y) dy \right) \\ &\leq M \gamma \left(\sum_{i=1}^m \|a_i\|_L \right) \leq M \gamma M^{-1} = \gamma. \end{aligned}$$

Suy ra $\|Au\| \leq \gamma$.

+ Chứng minh A đẳng liên tục

Lấy $u \in \Omega$ tùy ý.

Vì u liên tục trên tập compact G nên $\exists N > 0: |u(x)| \leq N, \forall x \in G$

$$\Rightarrow |u(x)|^{\alpha_i} \leq N^{\alpha_i}, \forall x \in G; i = 1, 2, \dots, m.$$

Đặt $N_1 = \max_{1 \leq i \leq m} N^{\alpha_i}$ thì $|u(x)|^{\alpha_i} \leq N_1, \forall x \in G; i = 1, 2, \dots, m$.

Vì hàm $K(x, y)$ liên tục trên tập compact $G \times G$ và do đó liên tục đều trên $G \times G$. Khi đó,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x', y'), \forall (x, y) \in G \times G \text{ nếu}$$

$$\|(x', y') - (x, y)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n [(x'_i - x_i)^2 + (y'_i - y_i)^2] \right)^{1/2} < \delta$$

$$\text{thì } |K(x', y') - K(x, y)| < \frac{\varepsilon}{MN_1}.$$

$$\text{Vậy } \forall x, x' \in G, \|x' - x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i)^2 \right]^{1/2} < \delta, \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned}
|Au(x') - Au(x)| &\leq \int_G |K(x', y') - K(x, y)| \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) \cdot |u(y)|^{\alpha_i} \right) dy \\
&\leq \int_G \frac{\varepsilon}{MN_1} \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) N_1 \right) dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{MN_1} N_1 \left(\sum_{i=1}^m \int_G a_i(y) dy \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{M} \left(\sum_{i=1}^m \|a_i\|_L \right) \leq \frac{\varepsilon}{M} M^{-1} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Áp dụng định lý Ascoli – Arzela (xem phụ lục) suy ra $A(\Omega)$ là tập compact tương đối trong P .

+ *Chứng minh* $A(P) \subset P$

Lấy tùy ý $u \in P$, từ điều kiện (H1) ta có

$$Au(x) \geq \varepsilon_0 \int_G K(z, y) f(y, u(y)) dy = \varepsilon_0 Au(z), \quad \forall x \in G_0, \quad \forall z \in G.$$

Suy ra $\min_{x \in G_0} Au(x) \geq \varepsilon_0 \|Au\|$,

hay $Au \in P$.

Vậy ta đã chứng minh được toán tử $A: P \rightarrow P$ là hoàn toàn liên tục. Khi đó điểm bất động khác không của toán tử A chính là nghiệm không tầm thường, không âm và liên tục của phương trình (*).

Tiếp theo ta chứng minh toán tử A có điểm bất động.

$\forall u \in P, \quad \forall x \in G$ ta có

$$\begin{aligned}
+ \quad Au(x) &\geq \int_{G_0} K(x, y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) [u(y)]^{\alpha_i} \right) dy \\
&\geq \int_{G_0} K(x, y) a_{i_0}(y) [u(y)]^{\alpha_{i_0}} dy \\
&\geq \tau \tau_0 (\text{mes} G_0) \varepsilon_0^{\alpha_{i_0}} \|u\|^{\alpha_{i_0}}; \\
+ \quad Au(x) &\geq \int_{G_0} K(x, y) a_{i_1}(y) [u(y)]^{\alpha_{i_1}} dy \\
&\geq \tau \tau_1 (\text{mes} G_0) \varepsilon_0^{\alpha_{i_1}} \|u\|^{\alpha_{i_1}};
\end{aligned}$$

trong đó $\tau = \min_{(x, y) \in G_0 \times G_0} K(x, y) > 0$,

$$\tau_0 = \inf_{x \in G_0} a_{i_0}(x) > 0,$$

$$\tau_1 = \inf_{x \in G_0} a_{i_1}(x) > 0.$$

Do đó

$$\|Au\| \geq \tau\tau_0(mesG_0)\varepsilon_0^{\alpha_0} \|u\|^{\alpha_0}, \quad \forall u \in P; \quad (2.6)$$

$$\|Au\| \geq \tau\tau_1(mesG_0)\varepsilon_0^{\alpha_1} \|u\|^{\alpha_1}, \quad \forall u \in P. \quad (2.7)$$

Từ (2.6) ta suy ra tồn tại $r \in (0,1)$ thỏa mãn

$$\|Au\| > \|u\|, \quad \forall u \in P, \quad \|u\| = r. \quad (2.8)$$

Thật vậy, giả sử ngược lại, tức là

$$\forall r \in (0,1), \exists u \in P, \|u\| = r \text{ và } \|Au\| \leq \|u\|.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ đủ lớn, chọn $r_n = \frac{1}{n} \in (0,1)$, khi đó tồn tại dãy $\{u_n\}_n \subset P$

thỏa mãn $\|u_n\| = \frac{1}{n}$ và $\|Au_n\| \leq \|u_n\| = \frac{1}{n}$.

$$\text{Suy ra } \tau\tau_0(mesG_0)\varepsilon_0^{\alpha_0} \|u_n\|^{\alpha_0} = \tau\tau_0(mesG_0)\varepsilon_0^{\alpha_0} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha_0} \leq \frac{1}{n},$$

$$\text{hay } n^{1-\alpha_0} \leq \left(\tau\tau_0(mesG_0)\varepsilon_0^{\alpha_0}\right)^{-1} \text{ (vô lý).}$$

Vậy (2.8) đúng.

Tương tự, từ (2.7) suy ra tồn tại $R > 1$ thỏa mãn

$$\|Au\| > \|u\|, \quad \forall u \in P, \quad \|u\| = R. \quad (2.9)$$

Mặt khác, theo điều kiện (iii), ta có

$$\|Au\| \leq M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L \|u\|^{\alpha_i} = M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L < 1 = \|u\|, \quad \forall u \in P, \|u\| = 1. \quad (2.10)$$

$$\text{Đặt } \Omega_r = \{u \in P : \|u\| < r\}, \quad \Omega_R = \{u \in P : \|u\| < R\},$$

$$\Omega_1 = \{u \in P : \|u\| < 1\}.$$

thì $\Omega_1, \Omega_r, \Omega_R$ là các tập mở trong P và $\theta \in \Omega_r, \Omega_r \subset \Omega_1 \subset \Omega_R$.

Hơn nữa, từ (2.8), (2.9), (2.10) ta có

$$\|Au\| > \|u\|, \quad \forall u \in P \cap \partial\Omega_r \text{ và } \|Au\| \leq \|u\|, \quad \forall u \in P \cap \partial\Omega_1;$$

$$\|Au\| > \|u\|, \quad \forall u \in P \cap \partial\Omega_R \text{ và } \|Au\| \leq \|u\|, \quad \forall u \in P \cap \partial\Omega_1.$$

Do đó, từ định lý 1.4.3 suy ra tồn tại $u^* \in P \cap (\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_r)$, $u^{**} \in P \cap (\overline{\Omega_R} \setminus \Omega_1)$ thỏa mãn

$$Au^* = u^*, \quad Au^{**} = u^{**} \text{ và } r < \|u^*\| < 1 < \|u^{**}\| < R.$$

Rõ ràng, $u^*(x)$ và $u^{**}(x)$ là hai nghiệm không âm, không tầm thường và liên tục của phương trình (*).

Định lý 2.2

Giả sử

(i) Nhân $K(x, y)$ thỏa mãn điều kiện (H1);

(ii) $a_i \in L(G)$, $a_i(x) \geq 0$, $\forall x \in G$;

$\alpha_i > 1$, $i = 1, 2, \dots, m$;

$\exists i_0 \in \{1, 2, \dots, m\} : \inf_{x \in G_0} a_{i_0}(x) > 0$.

Khi đó, phương trình (*) có ít nhất một nghiệm không âm, không tầm thường và liên tục.

Chứng minh

Từ chứng minh của định lý 2.1 ta thấy rằng toán tử $A : P \rightarrow P$

xác định bởi $Au(x) = \int_G K(x, y) f(y, u(y)) dy = \int_G K(x, y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) [u(y)]^{\alpha_i} \right) dy$

là hoàn toàn liên tục. Hơn nữa, từ điều kiện (ii) của định lý 2.2 ta cũng suy ra

$$\exists R > 0 : \|Au\| > \|u\|, \forall u \in P, \|u\| = R. \quad (2.11)$$

Mặt khác, vì $\alpha_i > 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$) nên

$$\exists r \in (0, R) : \|Au\| \leq M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L \cdot \|u\|^{\alpha_i} < \|u\|, \forall u \in P, \|u\| = r. \quad (2.12)$$

Thật vậy, giả sử ngược lại, tức là

$$\forall r \in (0, R), \exists u \in P, \|u\| = r \text{ và } \|Au\| \geq \|u\|.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, chọn $r_n = \frac{R}{n} \in (0, R)$. Khi đó,

tồn tại dãy $\{u_n\}_n \subset P$ thỏa mãn $\|u_n\| = r_n$ và $\|Au_n\| \geq \|u_n\|$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L r_n^{\alpha_i} \geq r_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{hay } M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L r_n^{\alpha_i-1} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Cho $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L r_n^{\alpha_i-1} \right) = 0$ (mâu thuẫn).

Vậy (2.12) đúng.

Đặt $\Omega_r = \{u \in P : \|u\| < r\}$,

$$\Omega_R = \{u \in P : \|u\| < R\}$$

thì Ω_r, Ω_R là hai tập mở trong P và $\theta \in \Omega_r, \Omega_r \subset \Omega_R$.

Từ (2.11) và (2.12) ta có

$$\|Au\| > \|u\|, \forall u \in P \cap \partial\Omega_R \text{ và } \|Au\| < \|u\|, \forall u \in P \cap \partial\Omega_r.$$

Do đó, áp dụng định lý 1.4.3 ta suy ra tồn tại $\bar{u} \in P \cap (\overline{\Omega_R} \setminus \Omega_r)$ thỏa mãn

$$A\bar{u} = \bar{u} \text{ và } r < \|\bar{u}\| < R.$$

Rõ ràng, $\bar{u}(x)$ là nghiệm không âm, không tầm thường và liên tục của phương trình (*).

Định lý 2.3

Giả sử

(i') Nhân $K(x, y)$ thỏa mãn điều kiện (H2);

(ii') $a_i \in L(G)$, $a_i(x) \geq 0$, $\forall x \in G$;

$$\alpha_i < 1, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\exists i_0 \in \{1, 2, \dots, m\} : \inf_{x \in D_0} a_{i_0}(x) > 0,$$

trong đó D_0 là quả cầu đóng, $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 \leq \delta\}$ với $K(x_0, x_0) > 0$
($\delta > 0$ bất kỳ).

Khi đó tồn tại $R_0 > 0$ thỏa mãn tính chất sau:

Nếu ta xây dựng dãy $\{v_j\}_j$ xác định bởi:

$$v_0(x) \equiv R, R \geq R_0, \forall x \in G$$

$$v_j(x) = \int_G K(x, y) f(y, v_{j-1}(y)) dy, \forall x \in G, j = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

$$\text{thì ta có } v_0(x) \geq v_1(x) \geq \dots \geq v_j(x) \geq \dots, \forall x \in G \quad (2.14)$$

và $\lim_{j \rightarrow +\infty} v_j(x) = u^*(x)$ đều trên G .

$u^*(x)$ chính là nghiệm không âm, không tầm thường và liên tục của phương trình (*).

Chứng minh

Từ điều kiện (i') ta suy ra

$$\exists \tau > 0, \exists \delta_1 \in (0, \delta) : K(x, y) \geq \tau, \forall (x, y) \in D_1 \times D_1, \quad (2.15)$$

$$\text{ở đây } D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 < \delta_1\}.$$

Hiển nhiên $D_1 \subset D_0$ và $\tau_1 = \inf_{x \in D_1} a_{i_0}(x) > 0$.

Đặt $D_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 \leq \frac{\delta_1}{2}\right\}$ và xét hàm liên tục ψ trên G

xác định bởi:

$$\psi(x) = 1 \text{ nếu } x \in D_2,$$

$$\psi(x) = 0 \text{ nếu } x \in G \setminus D_1,$$

$\psi(x)$ là một số nằm giữa 0 và 1 sao cho ψ liên tục trên G

$$x \in D_1 \setminus D_2.$$

Đặt $\varepsilon' = (\tau\tau_1 \text{mes} D_2)^{1/1-\alpha_0}$. Tương tự các định lý trên, ta xét toán tử

$$A: P_1 \rightarrow E \text{ xác định bởi } Au(x) = \int_G K(x, y) f(y, u(y)) dy, \quad (2.16)$$

với $P_1 = \{u \in C(G) \mid u(x) \geq 0, \forall x \in G\}$ là nón chuẩn trong $E = C(G)$.

Khi đó,

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'] , \forall x \in G \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned} A(\varepsilon\psi(x)) &\geq \int_{D_2} K(x, y) f(y, \varepsilon\psi(y)) dy \\ &\geq \int_{D_2} K(x, y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) [\varepsilon\psi(y)]^{\alpha_i} \right) dy \\ &\geq \int_{D_2} K(x, y) a_{i_0}(y) [\varepsilon\psi(y)]^{\alpha_0} dy \\ &\geq \int_{D_2} \tau\tau_1 \varepsilon^{\alpha_0} dy \\ &\geq \tau\tau_1 \varepsilon^{\alpha_0} (\text{mes} D_2) \geq \varepsilon. \\ \Rightarrow A(\varepsilon\psi(x)) &\geq \varepsilon\psi(x), \forall x \in G. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Bây giờ ta sẽ chọn $R_0 > \varepsilon'$ sao cho

$$M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L R^{\alpha_i-1} \leq 1, \forall R \geq R_0, \quad (2.18)$$

$$\text{với } M = \max_{(x,y) \in G \times G} K(x, y).$$

Tiếp theo ta đặt $v_0(x) \equiv R$ ($R \geq R_0$), $\forall x \in G$

$$v_j(x) = Av_{j-1}(x) = \int_G K(x, y) f(y, v_{j-1}(y)) dy, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\text{thì } \{v_j\}_j \subset P_1.$$

với mọi $x \in G$ và theo (2.18) ta có

$$\begin{aligned} Av_0(x) &= \int_G K(x, y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) R^{\alpha_i} \right) dy \\ &\leq \int_G M \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) R^{\alpha_i} \right) dy = \sum_{i=1}^m M R^{\alpha_i} \left(\int_G a_i(y) dy \right) \\ &\leq M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L R^{\alpha_i} \leq R = v_0(x). \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow v_1(x) \leq v_0(x), \quad \forall x \in G.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$v_j(x) \leq v_{j-1}(x), \quad \forall x \in G, j = 1, 2, \dots$$

hay $v_0(x) \geq v_1(x) \geq \dots \geq v_j(x) \geq \dots, \quad \forall x \in G$.

Mặt khác, ta có

+ Toán tử $A: P_1 \rightarrow E$ là hoàn toàn liên tục (chứng minh tương tự định lý 2.1).

+ $\varepsilon\psi(x) \leq v_0(x), \quad \forall x \in G$ (hiển nhiên).

+ $\begin{cases} A(\varepsilon\psi(x)) \geq \varepsilon\psi(x) \\ Av_0(x) \leq Av_0(x) \end{cases}, \quad \forall x \in G$ (do 2.17 và 2.19).

Theo định lý 1.4.5 tồn tại $u^* \in E$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \varepsilon\psi(x) \leq u^*(x) \leq v_0(x), \quad \forall x \in G \\ Au^*(x) = u^*(x), \quad \forall x \in G \end{cases}$$

và $\lim_{j \rightarrow +\infty} v_j(x) = u^*(x)$ đều trên G .

Rõ ràng, $u^*(x)$ là nghiệm không âm, không tầm thường và liên tục của phương trình (*).

Định lý 2.4

Giả sử

- (i) Nhân $K(x, y)$ thỏa điều kiện (H2) và (H3);
- (ii) Các hàm $a_i(x)$ liên tục và không âm trên $G; i = 1, 2, \dots, m$;

thỏa điều kiện $\sum_{i=1}^m a_i(x) > 0, \quad \forall x \in G$

và $\alpha_i < 1, i = 1, 2, \dots, m$.

Khi đó, phương trình (*) có duy nhất nghiệm không tầm thường là hàm liên tục và không âm $u^*(x)$.

Hơn nữa, nếu ta xây dựng dãy $\{u_n\}_n \subset P$ xác định bởi

$$u_n(x) = \int_G K(x, y) f(y, u_{n-1}(y)) dy, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

với điều kiện đầu $u_0(x)$ là hàm liên tục, không âm, không đồng nhất bằng không bất kì trên G thì

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u^*\| = 0. \quad (2.21)$$

Chứng minh

Rõ ràng từ điều kiện (i) và (ii) của định lý này dễ dàng suy ra điều kiện (i') và

(ii') của định lý 2.3 thỏa mãn. Vì vậy, từ định lý 2.3 suy ra phương trình (*) có ít nhất một nghiệm liên tục, không âm, không tầm thường $u^*(x)$. Ta sẽ chứng minh nghiệm $u^*(x)$ là duy nhất.

Giả sử $u^{**}(x)$ cũng là nghiệm liên tục, không âm, không tầm thường của phương trình (*). Ta cần chứng minh $u^{**}(x) = u^*(x)$, $\forall x \in G$.

Vì G° là tập mở nên tồn tại quả cầu đóng $T \subset G^\circ$ và $\tau \in (0,1)$ sao cho

$$u^{**}(x) \geq \tau, \forall x \in T.$$

Do đó, từ (H3), suy ra

$$\begin{aligned} u^{**}(x) &\geq \int_T K(x,y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) [u^{**}(y)]^{\alpha_i} \right) dy \\ &\geq \int_T K(x,y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) \tau^{\alpha_i} \right) dy \\ &\geq \int_T K(x,y) \sigma \tau^\alpha dy \\ &\geq \sigma \tau^\alpha \varepsilon^* \int_G K(x,y) dy, \quad \forall x \in G, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\text{ở đây } \sigma = \min_{x \in G} \sum_{i=1}^m a_i(x) > 0, \quad \alpha = \max_{1 \leq i \leq m} \alpha_i < 1,$$

ε^* là số dương tồn tại theo điều kiện (H3).

Mặt khác,

đặt $\beta_i = \max_{x \in G} a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, ta có

$$u^*(x) \leq \int_G K(x,y) \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \|u^*\|^{\alpha_i} \right) dy, \quad \forall x \in G. \quad (2.23)$$

$$\text{Từ (2.22) và (2.23) suy ra } u^{**}(x) \geq \gamma u^*(x), \quad \forall x \in G, \quad (2.24)$$

$$\text{với } \gamma = \sigma \tau^\alpha \varepsilon^* \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \|u^*\|^{\alpha_i} \right)^{-1} > 0.$$

Tiếp theo, đặt

$$t_0 = \sup \{ t > 0 \mid u^{**}(x) \geq t u^*(x), \forall x \in G \}.$$

Dễ dàng chứng minh được

$$0 < \gamma \leq t_0 < +\infty \text{ và } u^{**}(x) \geq t_0 u^*(x), \quad \forall x \in G.$$

Ta sẽ chứng tỏ $t_0 \geq 1$. Thật vậy,

nếu $0 < t_0 < 1$ và với mọi $x \in G$ thì

$$u^{**}(x) \geq \int_G K(x,y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) [t_0 u^*(y)]^{\alpha_i} \right) dy$$

$$\begin{aligned} &\geq t_0^\alpha \int_G K(x, y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) [u^*(y)]^{\alpha_i} \right) dy \\ &\geq t_0^\alpha u^*(x). \end{aligned}$$

Suy ra $t_0^\alpha \leq t_0$ (mâu thuẫn vì $t_0^\alpha > t_0$).

Vậy $t_0 \geq 1$ và $u^{**}(x) \geq u^*(x)$, $\forall x \in G$.

Chúng minh tương tự ta được $u^{**}(x) \leq u^*(x)$, $\forall x \in G$.

Suy ra $u^{**}(x) = u^*(x)$, $\forall x \in G$.

Sau cùng, ta chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u^*\| = 0$.

Lấy bất kì $u_0(x)$ là hàm liên tục, không âm và không đồng nhất bằng không trên G . Khi đó, tồn tại quả cầu đóng $T_1 \subset G^\circ$ và

$$\exists \tau_1 \in (0, 1): u_0(x) \geq \tau_1, \forall x \in T_1.$$

Chúng minh tương tự (2.22), ta được

$$u_1(x) = Au_0(x) \geq \sigma \tau_1^\alpha \varepsilon_1^* \int_G K(x, y) dy, \forall x \in G, \quad (2.25) \quad \text{ở đây } A \text{ là toán}$$

tử đã được định nghĩa trong định lý 2.3 và ε_1^* là số dương

tồn tại phụ thuộc vào T_1 xác định bởi điều kiện (H3).

$$\text{Ta chọn số dương } \varepsilon > 0 \text{ đủ nhỏ sao cho } \sum_{i=1}^m \beta_i \varepsilon^{\alpha_i} \leq \sigma \tau_1^\alpha \varepsilon_1^* \quad (2.26)$$

$$\text{và } A(\varepsilon \psi(x)) \geq \varepsilon \psi(x), \forall x \in G,$$

với $\psi(x)$ là hàm liên tục trên G được định nghĩa trong định lý 2.3.

với mọi $x \in G$, đặt

$$w_0(x) = \varepsilon \psi(x),$$

$$w_n(x) = Aw_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Từ (2.17) và bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng chứng minh được

$$w_0(x) \leq w_1(x) \leq \dots \leq w_n(x) \leq \dots, \forall x \in G.$$

Từ (2.17), (2.25), (2.26) và với mọi $x \in G$, ta có

$$\begin{aligned} w_1(x) &= A(\varepsilon \psi(x)) = \int_G K(x, y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) [\varepsilon \psi(y)]^{\alpha_i} \right) dy \\ &\leq \int_G K(x, y) \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \varepsilon^{\alpha_i} \right) dy = \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \varepsilon^{\alpha_i} \right) \int_G K(x, y) dy \\ &\leq \sigma \tau_1^\alpha \varepsilon_1^* \int_G K(x, y) dy \leq u_1(x). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Chọn $R \geq \max \left\{ R_0, \max_{x \in G} u_0(x) \right\}$, với R_0 được xác định trong định lý 2.3

với mọi $x \in G$, đặt

$$v_0(x) \equiv R \geq u_0(x),$$

$$v_n(x) = Av_{n-1}(x) = \int_G K(x, y) f(y, v_{n-1}(y)) dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

thì $v_0(x) \geq v_1(x) \geq \dots \geq v_n(x) \geq \dots, \quad \forall x \in G$

và $v_1(x) = Av_0(x) \geq Au_0(x) = u_1(x), \quad \forall x \in G.$ (2.28)

Từ (2.27) và (2.28) suy ra $w_1(x) \leq u_1(x) \leq v_1(x), \quad \forall x \in G.$

Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$w_n(x) \leq u_n(x) \leq v_n(x), \quad \forall x \in G, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Vì $Aw_0(x) \geq w_0(x), \quad Av_0(x) \leq v_0(x), \quad \forall x \in G$

và $A: P_1 \rightarrow E$ là toán tử hoàn toàn liên tục nên áp dụng định lý 1.4.5 và do tính duy nhất nghiệm của phương trình (*) ta suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - u^*\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n - u^*\| = 0.$$

Từ (2.29) và P_1 là nón chuẩn ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u^*\| = 0$ (đpcm).

Định lý 2.5

Giả sử

- (i) Nhân $K(x, y)$ là hàm liên tục, không âm trên $G \times G$ và thỏa mãn điều kiện (H3);
- (ii) Các hàm $a_i(x)$ liên tục và không âm trên G ; $i = 1, 2, \dots, m$

$$\text{thỏa điều kiện } \sum_{i=1}^m a_i(x) > 0, \quad \forall x \in G$$

$$\text{và } \alpha_i > 1; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Khi đó, phương trình (*) không thể có hai nghiệm không tầm thường so sánh được với nhau.

Chứng minh

Giả sử rằng $u^*(x), u^{**}(x)$ là hai nghiệm không tầm thường, liên tục, không âm và so sánh được với nhau của phương trình (*).

Ta giả sử $u^{**}(x) \geq u^*(x), \quad \forall x \in G.$ Khi đó,

tồn tại quả cầu đóng $T \subset G^\circ$, tồn tại $\tau \in (0, 1)$ sao cho

$$[u^{**}(x)]^{\alpha_i} - [u^*(x)]^{\alpha_i} \geq \tau, \quad \forall x \in T; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Do đó, theo (H3) ta được

$$\begin{aligned} u^{**}(x) - u^*(x) &\geq \int_T K(x, y) \left\{ \sum_{i=1}^m a_i(y) [(u^{**}(y))^{\alpha_i} - (u^*(y))^{\alpha_i}] \right\} dy \\ &\geq \tau \sigma \int_T K(x, y) dy \geq \tau \sigma \varepsilon^* \int_G K(x, y) dy, \quad \forall x \in G, \end{aligned} \quad (2.30)$$

ở đây $\sigma = \min_{x \in G} \sum_{i=1}^m a_i(x) > 0$, ε^* là số dương tồn tại phụ thuộc vào T theo điều kiện (H3).

Mặt khác, ta có

$$u^*(x) \leq \int_G K(x, y) \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \|u^*\|^{\alpha_i} \right) dy, \quad \forall x \in G, \quad (2.31)$$

với $\beta_i = \max_{x \in G} a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Từ (2.30) và (2.31) suy ra

$$u^{**}(x) \geq (1 + \gamma) u^*(x), \quad \forall x \in G, \quad (2.32)$$

trong đó $\gamma = \sigma \tau \varepsilon^* \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \|u^*\|^{\alpha_i} \right)^{-1} > 0$.

Đặt $t_0 = \sup \{ t > 0 \mid u^{**}(x) \geq t u^*(x), \forall x \in G \}$.

Từ (2.32) suy ra $0 < 1 + \gamma \leq t_0 < +\infty$ và $u^{**}(x) \geq t_0 u^*(x)$, $\forall x \in G$.

Từ đó, với mọi $x \in G$ ta có

$$\begin{aligned} u^{**}(x) &\geq \int_G K(x, y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) [t_0 u^*(y)]^{\alpha_i} \right) dy \\ &\geq t_0^\alpha \int_G K(x, y) \left(\sum_{i=1}^m a_i(y) [u^*(y)]^{\alpha_i} \right) dy \\ &\geq t_0^\alpha u^*(x), \end{aligned} \quad (2.33)$$

với $\alpha = \min_{1 \leq i \leq m} \alpha_i > 1$.

Từ (2.33) suy ra $t_0^\alpha \leq t_0$ (mâu thuẫn vì $t_0^\alpha > t_0$).

Vậy phương trình (*) không thể có hai nghiệm liên tục, không tầm thường, không âm so sánh được với nhau.

Hai định lý sau cùng đề cập tới sự tồn tại giá trị riêng và hàm riêng của toán tử A.

Định lý 2.6

Giả sử

(i) Nhân $K(x, y)$ thỏa mãn điều kiện (H1);

(ii) $a_i \in L(G)$, $a_i(x) \geq 0$, $\forall x \in G$;

$$\alpha_i > 1, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\exists i_1 \in \{1, 2, \dots, m\} : \inf_{x \in G_0} a_{i_1}(x) > 0.$$

Khi đó

với mỗi $\mu > 0$, tồn tại hàm liên tục, không âm, không tầm thường trên G

$$u_\mu(x) \text{ thỏa mãn } \mu u_\mu(x) = Au_\mu(x) = \int_G K(x, y) f(y, u_\mu(y)) dy, \forall x \in G.$$

Hơn nữa

$$\max_{x \in G} u_\mu(x) \rightarrow +\infty \text{ khi } \mu \rightarrow +\infty.$$

Định lý 2.7

Giả sử

(i) Nhân $K(x, y)$ thỏa mãn điều kiện (H1);

(ii) $a_i \in L(G)$, $a_i(x) \geq 0$, $\forall x \in G$;

$$\alpha_i < 1, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\exists i_0 \in \{1, 2, \dots, m\} : \inf_{x \in G_0} a_{i_0}(x) > 0.$$

Khi đó

với mỗi $\mu > 0$, tồn tại hàm liên tục, không âm, không tầm thường trên G

$$u_\mu(x) \text{ thỏa mãn } \mu u_\mu(x) = Au_\mu(x) = \int_G K(x, y) f(y, u_\mu(y)) dy, \forall x \in G.$$

Hơn nữa

$$\max_{x \in G} u_\mu(x) \rightarrow 0 \text{ khi } \mu \rightarrow +\infty.$$

Chứng minh định lý 2.6 và 2.7

Toán tử $A: P \rightarrow P$ xác định bởi $Au(x) = \int_G K(x, y) f(y, u(y)) dy$ là hoàn toàn liên tục (chứng minh của định lý 2.1),

$$\text{ở đây } P = \left\{ u \in C(G) \mid u(x) \geq 0, \min_{x \in G_0} u(x) \geq \varepsilon_0 \|u\| \right\}.$$

Từ giả thiết của định lý 2.6 ta dễ dàng chứng minh được

$$\|Au\| \geq \tau \tau_1(mes G_0) \varepsilon_0^{\alpha_{i_1}} \|u\|^{\alpha_{i_1}}, \forall u \in P. \quad (2.34)$$

Từ giả thiết của định lý 2.7 ta chứng minh được

$$\|Au\| \geq \tau\tau_0(\text{mes}G_0)\varepsilon_0^{\alpha_0} \|u\|^{\alpha_0}, \quad \forall u \in P, \quad (2.35)$$

trong đó

$$\tau = \min_{(x,y) \in G_0 \times G_0} K(x,y) > 0, \quad \tau_0 = \inf_{x \in G_0} a_{i_0}(x) > 0, \quad \tau_1 = \inf_{x \in G_0} a_{i_1}(x) > 0.$$

Từ (2.34) và (2.35) suy ra

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \frac{\|Au\|}{\|u\|} \geq \tau\tau_1(\text{mes}G_0)\varepsilon_0^{\alpha_1} \|u\|^{\alpha_1-1}. \\ \Rightarrow & \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow +\infty \\ u \in P}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = +\infty \quad (\text{do } \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow +\infty \\ u \in P}} \|u\|^{\alpha_1-1} = +\infty \text{ vì } \alpha_1 > 1). \\ \blacksquare \quad & \frac{\|Au\|}{\|u\|} \geq \tau\tau_0(\text{mes}G_0)\varepsilon_0^{\alpha_0} \|u\|^{\alpha_0-1}. \\ \Rightarrow & \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow 0 \\ u \in P}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = +\infty \quad (\text{do } \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow 0 \\ u \in P}} \|u\|^{\alpha_0-1} = +\infty \text{ vì } \alpha_0 < 1). \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\|Au\| \leq M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L \|u\|^{\alpha_i}, \quad \forall u \in P,$$

với $M = \max_{x,y \in G} K(x,y)$.

$$\Rightarrow \frac{\|Au\|}{\|u\|} \leq M \sum_{i=1}^m \|a_i\|_L \|u\|^{\alpha_i-1}.$$

Do đó

$$\text{từ giả thiết của định lý 2.6 suy ra } \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow 0 \\ u \in P}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = 0,$$

$$\text{từ giả thiết của định lý 2.7 suy ra } \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow +\infty \\ u \in P}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = 0.$$

Vậy ta đã chứng minh được

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow +\infty \\ u \in P}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} &= +\infty, \quad \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow 0 \\ u \in P}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = 0, \\ \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow 0 \\ u \in P}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} &= +\infty, \quad \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow +\infty \\ u \in P}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = 0. \end{aligned}$$

Áp dụng định lý 1.4.4 ta thu được các kết luận của định lý 2.6 và 2.7.

Chương 3. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Chương này nêu một số bài toán cụ thể, minh họa cho lý thuyết được trình bày trong chương 2.

➤ Ví dụ 1

$$\text{Xét phương trình } u(x) = \int_G K(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (*)$$

trong đó

$$+ K(x, y) = a(x)b(y), \text{ với}$$

- $a(x)$ là hàm không âm, liên tục và không đồng nhất bằng không trên G .
- $b(y)$ là hàm dương và liên tục trên G .

$$+ f(x, u) = a_1 \sqrt{u} + a_2 \sqrt{u^3}, \text{ với } a_1, a_2 > 0.$$

Trước tiên ta chứng minh hàm $K(x, y)$ thỏa mãn điều kiện (H1).

Vì $a(x)$ không âm và không đồng nhất bằng không trên G nên tồn tại $x_0 \in G$ sao cho $a(x_0) > 0$.

Vì $a(x)$ liên tục trên G nên tồn tại $r > 0$ sao cho $a(x) > 0, \forall x \in G_0$,

với $G_0 = B'(x_0, r) = \{x \in G : \|x - x_0\|_2 \leq r\}$ là quả cầu đóng trong $\mathbb{R}^n$.

Suy ra $K(x, y) = a(x)b(y) > 0, \forall (x, y) \in G_0 \times G_0$.

Tiếp theo ta chứng minh tồn tại $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ sao cho

$$a(x) \geq \varepsilon_0 a(z), \forall x \in G_0, \forall z \in G.$$

Giả sử ngược lại, tức là

$$\forall \varepsilon_0 \in (0, 1), \exists x \in G_0, \exists z \in G : a(x) < \varepsilon_0 a(z).$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, chọn $\varepsilon_0 = \frac{1}{n}$.

Suy ra tồn tại dãy $\{x_n\}_n \subset G_0, \{z_n\}_n \subset G : a(x_n) < \frac{1}{n} a(z_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vì G, G_0 là tập compact nên tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}_k \subset \{x_n\}_n, \{z_{n_k}\}_k \subset \{z_n\}_n$

và $x \in G_0, z \in G$ sao cho

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x, \lim_{k \rightarrow +\infty} z_{n_k} = z \text{ và } a(x_{n_k}) < \frac{1}{k} a(z_{n_k}) \quad (**)$$

Vì a liên tục nên $\lim_{k \rightarrow +\infty} a(x_{n_k}) = a(x)$ và $\lim_{k \rightarrow +\infty} a(z_{n_k}) = a(z)$.

Cho $k \rightarrow +\infty$ trong $(**)$ ta được $a(x) \leq 0$ (vô lý).

$$\Rightarrow K(x, y) = a(x)b(y) \geq \varepsilon_0 a(z)b(y) = K(z, y), \forall x \in G_0, \forall z \in G, \forall y \in G.$$

Vậy hàm $K(x, y)$ thỏa mãn điều kiện (H1) cũng là điều kiện (i) của định lý 2.1.

Điều kiện (ii) của định lý 2.1 hiển nhiên thỏa mãn.

Điều kiện (iii) của định lý 2.1 trở thành

$$a_1 + a_2 < (mesG)^{-1} M_1^{-1} M_2^{-1}, \quad (3.1)$$

trong đó $M_1 = \max_{x \in G} a(x)$, $M_2 = \max_{x \in G} b(x)$.

Nếu $u(x)$ là nghiệm không âm, không tầm thường và liên tục của phương trình (*) thì

$$u(x) = a(x) \int_G b(y) (a_1 \sqrt{u(y)} + a_2 \sqrt{[u(y)]^3}) dy. \quad (3.2)$$

Vậy $u(x)$ phải có dạng $u(x) = \gamma a(x)$, $\gamma > 0$.

Thế $u(x) = \gamma a(x)$ vào (3.2) ta được

$$\begin{aligned} \gamma a(x) &= a(x) \int_G b(y) (a_1 \sqrt{\gamma a(y)} + a_2 \sqrt{[\gamma a(y)]^3}) dy. \\ \Leftrightarrow \gamma &= a_1 \sqrt{\gamma} \int_G b(y) \sqrt{a(y)} dy + a_2 \sqrt{\gamma^3} \int_G b(y) \sqrt{[a(y)]^3} dy. \end{aligned}$$

Đặt $b_1 = \int_G b(y) \sqrt{a(y)} dy > 0$,

$$b_2 = \int_G b(y) \sqrt{[a(y)]^3} dy > 0.$$

Ta được phương trình theo γ

$$\gamma = a_1 b_1 \sqrt{\gamma} + a_2 b_2 \sqrt{\gamma^3}.$$

$$\Leftrightarrow a_2^2 b_2^2 \gamma^2 + (2a_1 a_2 b_1 b_2 - 1) \gamma + a_1^2 b_1^2 = 0. \quad (3.3)$$

$$\Delta = (2a_1 a_2 b_1 b_2 - 1)^2 - 4(a_1 a_2 b_1 b_2)^2 = 1 - 4a_1 a_2 b_1 b_2.$$

Mặt khác, ta có

$$b_1 = \int_G b(y) \sqrt{a(y)} dy \leq \int_G M_2 \sqrt{M_1} dy = (mesG) M_2 \sqrt{M_1},$$

$$b_2 = \int_G b(y) \sqrt{[a(y)]^3} dy \leq \int_G M_2 \sqrt{M_1^3} dy = (mesG) M_2 \sqrt{M_1^3}.$$

Suy ra $b_1 b_2 \leq (mesG)^2 M_1^2 M_2^2$,

hay $\sqrt{b_1 b_2} \leq (mesG) M_1 M_2$.

Do đó từ (3.1) suy ra

$$(a_1 + a_2) \sqrt{b_1 b_2} \leq (a_1 + a_2) (mesG) M_1 M_2 < 1,$$

hay $a_1 a_2 b_1 b_2 = a_1 \sqrt{b_1 b_2} \cdot a_2 \sqrt{b_1 b_2} \leq \frac{1}{4} (a_1 \sqrt{b_1 b_2} + a_2 \sqrt{b_1 b_2}) < \frac{1}{4}$.

Vậy $\Delta = 1 - 4a_1a_2b_1b_2 > 0$.

Suy ra phương trình (3.3) có hai nghiệm phân biệt γ_1, γ_2

$$\gamma_1 = \frac{1 - 2a_1a_2b_1b_2 - \sqrt{1 - 4a_1a_2b_1b_2}}{2a_2^2b_2^2} > 0,$$

$$\gamma_2 = \frac{1 - 2a_1a_2b_1b_2 + \sqrt{1 - 4a_1a_2b_1b_2}}{2a_2^2b_2^2} > 0.$$

Nếu a_1, a_2 thỏa mãn điều kiện (3.1) thì từ định lý 2.1 suy ra phương trình (*) có đúng hai nghiệm không âm, không tầm thường, liên tục là $u_1(x) = \gamma_1 a(x)$ và $u_2(x) = \gamma_2 a(x)$.

➤ Ví dụ 2

Xét bài toán hai điểm biên cho phương trình vi phân cấp hai

$$\begin{cases} -x'(t) = f(t, x(t)) & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\text{với } f(t, x) = \sum_{i=1}^m a_i(t) x^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0; \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.5)$$

Trước tiên ta chứng minh bài toán (3.4) tương đương với phương trình tích phân

$$x(t) = \int_0^1 K(t, s) f(s, x(s)) ds, \quad (3.6)$$

trong đó

$$K(t, s) = \begin{cases} t(1-s) & , \quad 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s(1-t) & , \quad 0 \leq s < t \leq 1 \end{cases}. \quad (3.7)$$

Bổ đề 3.1

Với mỗi $h \in C([0, 1])$, tồn tại duy nhất hàm số $x \in C^2([0, 1])$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} -x''(t) = h(t) & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}. \quad (3.8)$$

Hơn nữa x còn được biểu diễn dưới dạng $x(t) = \int_0^1 K(t, s) h(s) ds$.

Chứng minh

Phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình (3.8) là

$$-x'' = 0.$$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 + C_2 t, \quad (3.9)$$

trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý.

Bây giờ ta xem C_1, C_2 là hàm số theo biến t . Ta đi tìm C_1, C_2 để (3.9) là nghiệm của bài toán (3.8).

Với mọi $t \in [0,1]$, ta có

$$x'(t) = C_1'(t) + C_2(t) + tC_2'(t).$$

Chọn C_1, C_2 sao cho $C_1'(t) + tC_2'(t) = 0$.

Khi đó $x'(t) = C_2(t)$.

$$\Rightarrow x''(t) = C_2'(t).$$

Thay vào phương trình (3.8), ta được

$$-C_2'(t) = h(t), \quad \forall t \in [0,1].$$

Vậy, hàm số (3.9) là nghiệm của phương trình (3.8) nếu các hàm số

$C_1(t), C_2(t)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} -C_2'(t) = h(t) \\ C_1'(t) + tC_2'(t) = 0 \end{cases}.$$

Giải hệ trên ta được

$$\begin{cases} C_1'(t) = t.h(t) \\ C_2'(t) = -h(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(t) = \int_0^t sh(s)ds + D_1 \\ C_2(t) = -\int_0^t h(s)ds + D_2 \end{cases},$$

trong đó D_1, D_2 là hai hằng số mà ta sẽ xác định sau.

$$\text{Vậy } x(t) = \int_0^t (s-t)h(s)ds + D_1 + tD_2.$$

Suy ra $x(0) = D_1 = 0$,

$$\text{hay } x(t) = \int_0^t (s-t)h(s)ds + tD_2.$$

$$\text{Mặt khác, vì } x(1) = \int_0^1 (s-1)h(s)ds + D_2 = 0$$

$$\text{nên } D_2 = \int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

$$\text{Vậy } x(t) = \int_0^t (s-t)h(s)ds + t \int_0^1 (1-s)h(s)ds$$

$$\text{hay } x(t) = \int_0^t s(1-t)h(s)ds + \int_t^1 t(1-s)h(s)ds.$$

$$\text{Đặt } K(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & , \quad 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s(1-t) & , \quad 0 \leq s < t \leq 1 \end{cases}.$$

Khi đó

$$x(t) = \int_0^1 K(t,s)h(s)ds \text{ là nghiệm duy nhất của bài toán (3.8).}$$

Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề 3.1 ta suy ra bài toán (3.4) tương đương với phương trình tích phân (3.6).

Tiếp theo ta chứng minh hàm số $K(t,s)$ thỏa mãn điều kiện (H1) với mọi tập đóng $G_0 = [\alpha, \beta]$, trong đó, $0 < \alpha < \beta < 1$ và $G = [0,1]$.

- Hàm số $K(t,s)$ liên tục và không âm trên $G \times G$ (hiển nhiên).
- $K(t,s) \geq \alpha(1-\beta) > 0, \forall (t,s) \in G_0 \times G_0$ (hiển nhiên).
- $K(t,s) \geq \varepsilon_0 K(u,s), \forall t \in G_0 = [\alpha, \beta], \forall u, s \in G$,
với $\varepsilon_0 = \alpha(1-\beta) \in (0,1)$.

Thật vậy, với mọi $t \in [\alpha, \beta]$, ta có

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s) \geq \alpha(1-s) & , \beta \leq s \leq 1 \\ t(1-s) \text{ hay } s(1-t) \geq \alpha(1-\beta) & , \alpha < s < \beta \\ s(1-t) \geq s(1-\beta) & , 0 \leq s \leq \alpha \end{cases}$$

Mà $K(u,s) \leq s(1-s), \forall s \in G, \forall u \in G$

nên $K(t,s) \geq \alpha(1-\beta)K(u,s), \forall t \in [\alpha, \beta], \forall u, s \in G$.

Xét các trường hợp sau đây:

- Trường hợp 1 : $\forall s \in [0, \alpha], \forall t \in [\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} K(t,s) &= s(1-t) \geq s(1-\beta) \geq \alpha(1-\beta)s(1-s) \\ &\geq \alpha(1-\beta)K(u,s), \forall u \in G. \end{aligned}$$

- Trường hợp 2 : $\forall s \in (\alpha, \beta), \forall t \in [\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} K(t,s) &\geq \alpha(1-\beta) \geq \alpha(1-\beta)s(1-s) \\ &\geq \alpha(1-\beta)K(u,s), \forall u \in G. \end{aligned}$$

- Trường hợp 3 : $\forall s \in [\beta, 1], \forall t \in [\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} K(t,s) &= t(1-s) \geq \alpha(1-s) \geq \alpha(1-\beta)s(1-s) \\ &\geq \alpha(1-\beta)K(u,s), \forall u \in G. \end{aligned}$$

Đặt $\varepsilon_0 = \alpha(1-\beta) \in (0,1)$ thì $K(t,s) \geq \varepsilon_0 K(u,s), \forall t \in G_0, \forall u, s \in G$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán (3.4) có nghiệm bằng cách áp dụng các định lý 2.1, 2.2, 2.3 trong chương 2.

Định lý 3.1

Giả sử $a_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) là các hàm liên tục và không âm trên $G = [0,1]$.

(a) Nếu $\alpha_i < 1$ hay $\alpha_i > 1$ và các hàm $a_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) không đồng nhất bằng không trên G thì bài toán (3.4) có ít nhất một nghiệm không âm, không tầm thường $x \in C^2([0, 1])$ và $x(t) > 0$, $\forall t \in (0, 1)$.

(b) Nếu $\sum_{i=1}^m \left(\int_0^1 a_i(t) dt \right) < 4$ $\left(\max_{0 \leq t, s \leq 1} K(t, s) = \frac{1}{4} \right)$ và

tồn tại $i_0, i_1 \in \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho $\alpha_{i_0} < 1$, $\alpha_{i_1} > 1$ và $a_{i_0}(t)$, $a_{i_1}(t)$ không đồng nhất bằng không trên G thì bài toán (3.4) có ít nhất hai nghiệm $x_1, x_2 \in C^2([0, 1])$ và $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$, $\forall t \in (0, 1)$.

Chứng minh

Tương tự cách chứng minh định lý 2.1, 2.2.

Hiển nhiên hàm $K(t, s)$ thỏa mãn điều kiện (H2). Ta chứng minh nó cũng thỏa mãn điều kiện (H3).

Ta có $\int_0^1 K(t, s) ds = \int_0^t s(1-t) ds + \int_t^1 t(1-s) ds = \frac{1}{2}t(1-t)$.

Với bất kỳ $\xi, \eta \in (0, 1)$ và $\xi < \eta$, ta có

$$\int_{\xi}^{\eta} K(t, s) ds \begin{cases} = \int_{\xi}^{\eta} s(1-t) ds \geq \xi(\eta - \xi)(1-t) & , \eta \leq t \leq 1 \\ \geq \int_{\xi}^{\eta} \xi(1-\eta) ds = \xi(1-\eta)(\eta - \xi) & , \xi < t < \eta \\ = \int_{\xi}^{\eta} t(1-s) ds \geq (1-\eta)(\eta - \xi)t & , 0 \leq t \leq \xi \end{cases}$$

Suy ra $\int_{\xi}^{\eta} K(t, s) ds \geq 2\xi(1-\eta)(\eta - \xi) \frac{1}{2}t(1-t)$, $\forall t \in [0, 1]$

hay $\int_{\xi}^{\eta} K(t, s) ds \geq 2\xi(1-\eta)(\eta - \xi) \int_0^1 K(t, s) ds$, $\forall t \in [0, 1]$.

Đặt $\varepsilon^* = 2\xi(1-\eta)(\eta - \xi)$ thì $\varepsilon^* \in (0, 1)$

và $T = [\xi, \eta] \subset (0, 1) = G^\circ$.

Vậy hàm $K(t, s)$ thỏa mãn điều kiện (H3).

Từ định lý 2.4 ta có định lý sau đây.

Định lý 3.2

Giả sử $a_i(t)$ ($i=1,2,\dots,m$) là các hàm liên tục, không âm, thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^m a_i(t) > 0$, $\forall t \in [0,1]$ và $\alpha_i < 1$ ($i=1,2,\dots,m$). Khi đó, bài toán (3.4) có duy nhất nghiệm $x^* \in C^2([0,1])$ và $x^*(t) > 0$, $\forall t \in [0,1]$. Hơn nữa, nếu ta xây dựng dãy hàm xác định bởi:

$$x_n(t) = (1-t) \int_0^t s \left(\sum_{i=1}^m a_i(s) [x_{n-1}(s)]^{\alpha_i} \right) ds + t \int_0^t (1-s) \left(\sum_{i=1}^m a_i(s) [x_{n-1}(s)]^{\alpha_i} \right) ds, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

với điều kiện đầu $x_0(t)$ là hàm liên tục, không âm, không đồng nhất bằng không bất kỳ trên $[0,1]$, thì dãy hàm $\{x_n(t)\}_n$ sẽ hội tụ đều về hàm $x^*(t)$ trên $[0,1]$.

Từ định lý 2.5 ta có định lý sau:

Định lý 3.3

Giả sử $\alpha_i > 1$ và $a_i(t)$ ($i=1,2,\dots,m$) là các hàm liên tục, không âm thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^m a_i(t) > 0$, $\forall t \in [0,1]$. Khi đó, bài toán (3.4) không thể có hai nghiệm không tầm thường trong $C^2([0,1])$ và so sánh được với nhau.

KẾT LUẬN

Luận văn khảo sát sự tồn tại nghiệm không âm, không tầm thường và liên tục của phương trình tích phân phi tuyến thuộc dạng sau:

$$u(x) = \int_G K(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (*)$$

trong đó G là tập compact trong $\mathbb{R}^n$ và $f(x, u) = \sum_{i=1}^m a_i(x) u^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$.

Nội dung chính của luận văn nằm ở chương hai và chương ba.

Trong chương hai, dựa vào các định lý điểm bất động trên nón trong không gian Banach thực, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm không âm, không tầm thường và liên tục của phương trình (*). Ngoài ra, dựa trên các điều kiện đối với hàm $K(x, y)$ và các hàm $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), sử dụng kỹ thuật lặp đơn điệu, chúng tôi chứng minh được phương trình (*) có nghiệm duy nhất bằng cách xây dựng một dãy lặp thích hợp và chỉ ra giới hạn của dãy đó chính là nghiệm duy nhất của phương trình tích phân phi tuyến đã cho.

Trong chương ba chúng tôi nêu một số bài toán cụ thể. Chương này chủ yếu khảo sát bài toán hai điểm biên cho phương trình vi phân cấp hai. Ở đây chúng tôi sử dụng phương pháp biên thiên hằng số để chuyển phương trình vi phân sang phương trình tích phân và sử dụng các định lý trong chương hai để khảo sát sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân cấp hai.

Qua luận văn này, tác giả thực sự làm quen với việc đọc tài liệu và công việc nghiên cứu khoa học một cách nghiêm túc và có hệ thống. Tác giả cũng học tập được công cụ của giải tích hàm phi tuyến để khảo sát sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân phi tuyến, chẳng hạn như: phương pháp điểm bất động, kỹ thuật lặp đơn điệu. Tuy nhiên, với sự hiểu biết còn hạn chế của bản thân, tác giả rất mong nhận được sự đóng góp, chỉ bảo của Quý Thầy, Cô trong và ngoài Hội đồng.

PHỤ LỤC

1. Định lý thác triển

Cho E_1, E_2 là hai không gian Banach thực và D là tập con đóng của E_1 .

Giả sử $A: D \rightarrow E_2$ là toán tử hoàn toàn liên tục. Khi đó, tồn tại toán tử hoàn toàn liên tục

$$\tilde{A}: E_1 \rightarrow E_2 \text{ sao cho } \tilde{A}(x) = A(x), \forall x \in D \text{ và } \tilde{A}(E_1) \subset \overline{coA(D)}$$

với $\overline{coA(D)}$ là bao lồi đóng của $A(D)$.

2. Định lý Ascoli – Azela

Cho K là tập compact trong không gian định chuẩn E .

a) Tập $M \subset C(K)$ được gọi là bị chặn đều nếu và chỉ nếu tồn tại $c \geq 0$

$$\text{sao cho } \|x\| \leq c, \forall x \in M \left(\|x\| = \max_{t \in K} |x(t)| \right).$$

b) Tập $M \subset C(K)$ được gọi là đẳng liên tục nếu và chỉ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t, t' \in K \left(\|t - t'\| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(t')| < \varepsilon \right), \forall x \in M.$$

Định lý

Tập $M \subset C(K)$ là tập compact tương đối nếu và chỉ nếu M đẳng liên tục và bị chặn đều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh (2005), *Phương trình tích phân*
NXB Đại Học Quốc Gia TP Hồ Chí Minh.
- [2] Cần Văn Tuất (2005), *Phương trình vi phân và phương trình tích phân*
NXB Đại Học Sư Phạm Hà Nội.
- [3] Hoàng Tụy (2005), *Hàm thực và giải tích hàm*, NXB Đại Học Quốc Gia
Hà Nội.

Tiếng Anh

- [4] S.R.Bernfeld and V.Lakshmikantham (1974), *An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems*, Academic Press, New York.
- [5] K.Deimling (1985), *Nonlinear Functional Analysis*, Springer – Verlag,
New York.
- [6] Dugundji (1951), “An extension of Tietze’s Theorem”, *Pacific J. Math*
pp.353 – 367.
- [7] D.Guo and V.Lakshmikantham (1988), *Nonlinear Problems in Abstract Cone*, Academic Press,
New York.
- [8] Hardy, Littlewood and Polya (1934), *Inequalities*, Cambridge University Press.