

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

NGUYỄN TRUNG HIẾU

**PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TUYẾN TÍNH
VÀ CÁC ỨNG DỤNG**

Chuyên ngành: **Toán Giải tích**

Mã số: **60.46.01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học

TS. Lê Thị Thiên Hương

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH – 2010

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin trân trọng cảm ơn TS. Lê Thị Thiên Hương đã tận tâm hướng dẫn, động viên tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn này.

Xin chân thành cảm ơn Quý thầy cô Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh đã tận tâm truyền đạt kiến thức và kinh nghiệm cho tôi trong suốt khóa học.

Xin cảm ơn Phòng Sau Đại học, Trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh đã tạo điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành khóa học.

Xin cảm ơn Khoa Toán học, Trường Đại học Đồng Tháp đã tạo kiện thuận lợi để tôi có thời gian học tập và thực hiện luận văn.

Cho tôi gửi lời cảm ơn chân thành đến các đồng nghiệp, các bạn học viên cao học Giải tích Khóa 18 đã giúp đỡ tôi trong thời gian học tập và thực hiện luận văn.

Nguyễn Trung Hiếu

MỞ ĐẦU

Nhiều vấn đề trong toán học (phương trình vi phân với điều kiện biên hay điều kiện ban đầu, phương trình đạo hàm riêng), cơ học, vật lý và các ngành kỹ thuật khác dẫn đến những phương trình trong đó hàm chưa biết chứa dưới dấu tích phân. Những loại phương trình đó được gọi là phương trình tích phân. Phương trình tích phân là công cụ toán học hữu ích trong nhiều lĩnh vực nên được quan tâm nghiên cứu theo nhiều khía cạnh khác nhau như sự tồn tại nghiệm, sự xấp xỉ nghiệm, tính chỉnh hay không chỉnh, nghiệm chỉnh hóa,...

Lý thuyết tổng quát về các loại phương trình tích phân tuyến tính được xây dựng ở buổi giao thời của các thế kỷ XIX, XX, chủ yếu là trong các công trình của Volterra, Fredholm và Hilbert. Trong các tài liệu [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], các tác giả đã trình bày một cách tổng quát về phương trình tích phân tuyến tính, chủ yếu phương trình tích phân tuyến tính Fredholm và phương trình tích phân tuyến tính Volterra. Tuy nhiên, các tài liệu này chưa trình bày chi tiết và chưa có những ví dụ minh họa cụ thể.

Với đề tài “*Phương trình tích phân tuyến tính và các ứng dụng*”, chúng tôi khảo sát sự tồn tại nghiệm, dạng nghiệm của phương trình tích phân tuyến tính với nhân suy biến, nhân đối xứng, nhân có bình phương khả tích bất kỳ, nhân liên tục, đồng thời chúng tôi cũng đưa ra một số minh họa cụ thể cho từng vấn đề và một số ứng dụng của phương trình tích phân tuyến tính. Các kết quả trong luận văn là sự tổng hợp từ những tài liệu [4], [5], [9].

Với vấn đề đặt ra, luận văn bao gồm các nội dung sau

Chương 0. Kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày một số không gian hàm và một số kết quả về toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục, làm cơ sở cho các chương sau.

Chương 1. Một số bài toán dẫn đến phương trình tích phân tuyến tính. Chương này trình bày một số khái niệm cơ bản liên quan đến phương trình tích phân tuyến tính và một số bài toán dẫn đến phương trình tích phân tuyến tính.

Chương 2. Phương trình tích phân tuyến tính Fredholm. Chương này trình bày về sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2 trong các trường hợp nhân suy biến, nhân đối xứng, nhân có bình phương khả tích bất kỳ, sử dụng phương pháp xấp xỉ liên tiếp cho phương trình này trong trường hợp nhân liên tục và có bình phương khả tích, xây dựng minh họa cho từng vấn đề.

Chương 3. Phương trình tích phân tuyến tính Volterra. Chương này trình bày phương pháp xấp xỉ liên tiếp cho phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2 và một số phương pháp đưa phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 1 về phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2.

Chương 4. Một số ứng dụng của phương trình tích phân tuyến tính. Chương này trình bày một số ứng dụng của phương trình tích phân tuyến tính trong phương trình vi phân thường với giá trị ban đầu, bài toán biên, phương trình mô tả dao động tự do của dây đàn hồi.

Chương 0. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kết quả làm cơ sở cho các chương sau. Các kết quả này là sự tổng hợp từ [1], [4], [6].

0.1. Một số không gian hàm

Định nghĩa 0.1.1. Kí hiệu $L_2([a, b])$ là không gian những hàm (thực hoặc phức) $\varphi(t)$ xác định trên $[a, b]$ thỏa mãn

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt < \infty.$$

Mệnh đề 0.1.2. Không gian $L_2([a, b])$ là không gian Hilbert với tích vô hướng xác định bởi

$$(\varphi, \phi) = \int_a^b \varphi(t) \overline{\phi(t)} dt.$$

Tích vô hướng sinh ra chuẩn là

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt} \quad \text{với } \varphi \in L_2([a, b]).$$

Mệnh đề 0.1.3. Không gian $L_2([a, b])$ là không gian Hilbert tách được.

Định nghĩa 0.1.4. Cho $\{\phi_k\}$ là tập vô hạn hoặc hữu hạn trong $L_2([a, b])$. Tập $\{\phi_k\}$ được gọi là *trực giao* nếu $(\phi_i, \phi_j) = 0$ với $i \neq j$. Tập $\{\phi_k\}$ được gọi là *trực chuẩn* nếu

$$(\phi_i, \phi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Mệnh đề 0.1.5. Giả sử $\{\psi_k\}$ là hệ hàm độc lập tuyến tính trong $L_2([a, b])$. Khi đó, hệ $\{\phi_k\}$ xác định bởi

$$\phi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}, \quad \phi_k(s) = \frac{\psi_k(s) - \sum_{i=1}^{k-1} (\psi_k, \phi_i) \phi_i}{\|\psi_k(s) - \sum_{i=1}^{k-1} (\psi_k, \phi_i) \phi_i\|}$$

là hệ trực chuẩn trong $L_2([a, b])$.

Định nghĩa 0.1.6. Cho $\{\phi_k\}$ là một hệ trực chuẩn trong $L_2([a, b])$. Với mọi $\psi \in L_2([a, b])$, số $a_i = (\psi, \phi_i)$ được gọi là *hệ số Fourier* của hàm ψ đối với hệ trực chuẩn $\{\phi_k\}$. Chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(s)$ được gọi là *chuỗi Fourier* của ψ theo hệ $\{\phi_k\}$.

Định lí 0.1.7. Giả sử $\{\phi_k\}$ là một hệ trực chuẩn trong $L_2([a, b])$. Với mọi $\psi \in L_2([a, b])$, ta có bất đẳng thức Bessel

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\psi, \phi_i)|^2 \leq \|\psi\|^2.$$

Định lí 0.1.8. (Định lí Riesz – Fischer) Nếu $\{\phi_i\}$ là một hệ trực chuẩn trong $L_2([a, b])$ và dãy $\{\alpha_i\}$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$ thì tồn tại duy nhất hàm $f(s)$ nhận α_i làm hệ số Fourier đối với hệ trực chuẩn $\{\phi_i\}$ và

$$\|f - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Định nghĩa 0.1.9. Hệ trực chuẩn $\{\phi_i\}$ trong $L_2([a, b])$ được gọi là một *cơ sở trực chuẩn* hay *hệ trực chuẩn đầy đủ* nếu mọi hàm $f \in L_2([a, b])$ là tổ hợp tuyến tính của hệ $\{\phi_i\}$.

Định nghĩa 0.1.10. Kí hiệu $L_2([a, b] \times [a, b])$ là không gian các hàm (thực hoặc phức) $\varphi(s, t)$ xác định trên $[a, b] \times [a, b]$ thỏa mãn

$$\int_a^b \int_a^b |\varphi(s, t)|^2 ds dt < \infty.$$

Mệnh đề 0.1.11. Không gian $L_2([a, b] \times [a, b])$ là không gian Hilbert với tích vô hướng xác định bởi

$$(\varphi, \phi) = \int_a^b \int_a^b \varphi(s, t) \overline{\phi(s, t)} ds dt.$$

Tích vô hướng sinh ra chuẩn là

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |\varphi(s, t)|^2 ds dt}.$$

Định lí 0.1.12. Nếu $\{\phi_i\}$ là cơ sở trực chuẩn trong $L_2([a, b])$ thì hệ $\{\phi_i \phi_j\}$ là cơ sở trực chuẩn trong $L_2([a, b] \times [a, b])$.

Định lí 0.1.13. Không gian $C[a, b]$, các hàm liên tục trên $[a, b]$, là không gian định chuẩn với chuẩn $\|x\| = \max\{|x(t)| : a \leq t \leq b\}$.

0.2. Toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục

Định nghĩa 0.2.1. Cho A là toán tử tuyến tính liên tục trong không gian Hilbert H . Toán tử tuyến tính liên tục A được gọi là *đối xứng* nếu $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Định nghĩa 0.2.2. Số λ được gọi là *giá trị riêng* của toán tử A nếu phương trình $Ax = \lambda x$ có nghiệm không tầm thường. Nghiệm đó được gọi là *vector riêng* ứng với giá trị riêng λ .

Định lí 0.2.3. Nếu A là toán tử đối xứng thì các vectơ riêng của A ứng với hai giá trị riêng khác nhau bao giờ cũng trực giao với nhau.

Định lí 0.2.4. Nếu A là toán tử đối xứng thì

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{\|x\|}.$$

Định nghĩa 0.2.5. Toán tử tuyến tính A trong không gian Hilbert H được gọi là *hoàn toàn liên tục* nếu A biến tập bị chặn thành tập hoàn toàn bị chặn.

Định lý 0.2.6. Giả sử A là toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục. Khi đó

(i) Tồn tại một giá trị riêng λ thỏa $\lambda = \|A\|$.

(ii) Tập các giá trị riêng của A cùng lắm là đếm được. Nếu là đếm được thì tập đó lập thành một dãy hội tụ đến 0.

Định lý 0.2.7. Nếu toán tử liên tục A có miền giá trị là không gian con hữu hạn chiều của không gian Hilbert H thì A là *toán tử hoàn toàn liên tục*.

Định lý 0.2.8. Nếu $\{A_n\}$ là dãy các toán tử hoàn toàn liên tục và $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ thì toán tử A cũng là toán tử hoàn toàn liên tục.

Định lý 0.2.9. Trong không gian Hilbert tách được, mọi toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục đều có một hệ trực chuẩn đầy đủ vector riêng.

Chương 1. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TUYẾN TÍNH

1.1. Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1.1. *Phương trình tích phân* là phương trình trong đó hàm cần tìm chứa dưới một hoặc nhiều dấu tích phân.

Ví dụ 1.1.2. Các phương trình sau là phương trình tích phân

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt, \quad (1.1.1)$$

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt, \quad (1.1.2)$$

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)[\varphi(t)]^2 dt, \quad (1.1.3)$$

trong đó $a \leq s \leq b, a \leq t \leq b$, $\varphi(s)$ là hàm cần tìm, các hàm còn lại đã biết.

Người ta còn xét các phương trình tích phân mà hàm cần tìm là hàm nhiều biến.

Ví dụ 1.1.3. Với $s = (s_1, \dots, s_n), t = (t_1, \dots, t_n) \in \square^n, \Omega \subset \square^n$, phương trình sau là phương trình tích phân

$$\varphi(s) = f(s) + \int_{\Omega} K(s, t)\varphi(t)dt. \quad (1.1.4)$$

Định nghĩa 1.1.4. *Phương trình tích phân tuyến tính* là phương trình biểu diễn được dưới dạng

$$L[\varphi(s)] = f(s) \quad (1.1.5)$$

với L là toán tử tuyến tính theo hàm cần tìm $\varphi(s)$.

Ví dụ 1.1.5. Trong Ví dụ 1.1.2, phương trình (1.1.1), (1.1.2) là phương trình tích phân tuyến tính, phương trình (1.1.3) là phương trình tích phân không tuyến tính.

Nhận xét 1.1.6. Phương trình tích phân tuyến tính có dạng

$$h(s)\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \quad (1.1.6)$$

trong đó cận trên của tích phân có thể là biến số hoặc cố định; hàm $f(s), K(s, t)$ đã biết; $\varphi(s)$ là hàm cần tìm, λ là giá trị thực hoặc phức hoặc tham số khác không.

Hàm $K(s, t)$ được gọi là *nhân* của phương trình tích phân.

Định nghĩa 1.1.7. Nếu cố định cận trên là $b, h(s) = 0$ thì (1.1.6) trở thành

$$f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt = 0. \quad (1.1.7)$$

Phương trình (1.1.7) được gọi là *phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 1*.

Nếu cố định cận trên là $b, h(s) = 1$ thì (1.1.6) trở thành

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt. \quad (1.1.8)$$

Phương trình (1.1.8) được gọi là *phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2*.

Nếu $f(s) = 0$ thì phương trình (1.1.8) trở thành

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt. \quad (1.1.9)$$

Phương trình (1.1.9) được gọi là *phương trình thuần nhất* của (1.1.8).

Định nghĩa 1.1.8. Nếu cận trên là biến số s , $h(s) = 0$ thì (1.1.6) trở thành

$$f(s) + \lambda \int_a^s K(s,t)\varphi(t)dt = 0. \quad (1.1.10)$$

Phương trình (1.1.10) được gọi là *phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 1*.

Nếu cận trên là biến số s , $h(s) = 1$ thì (1.1.6) trở thành

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^s K(s,t)\varphi(t)dt. \quad (1.1.11)$$

Phương trình (1.1.11) được gọi là *phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2*.

Nếu $f(s) = 0$ thì phương trình (1.1.11) trở thành

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^s K(s,t)\varphi(t)dt. \quad (1.1.12)$$

Phương trình (1.1.12) được gọi là *phương trình thuần nhất* của (1.1.11).

Định nghĩa 1.1.9. Nhân $K(s,t)$ được gọi là L_2 - nhân nếu nhân $K(s,t)$ thỏa mãn các điều kiện sau

(i) Với mỗi $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, ta có $\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds dt < +\infty$,

(ii) Với mỗi $a \leq s \leq b$, ta có $\int_a^b |K(s,t)|^2 dt < +\infty$,

(iii) Với mỗi $a \leq t \leq b$, ta có $\int_a^b |K(s,t)|^2 ds < +\infty$.

Định nghĩa 1.1.10. Số λ thỏa mãn phương trình (1.1.9) với $\varphi(s)$ khác không được gọi là *giá trị riêng* của nhân $K(s,t)$. Hàm $\varphi(s)$ ứng với giá trị riêng λ thỏa mãn phương trình (1.1.9) được gọi là *hàm riêng* ứng với giá trị riêng λ của nhân $K(s,t)$.

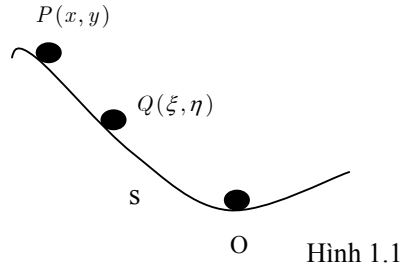
1.2. Một số bài toán dẫn đến phương trình tích phân tuyến tính

Phương trình tích phân tuyến tính là một công cụ toán học hữu ích trong giải tích. Nhiều bài toán trong vật lí, cơ học, khoa học kĩ thuật và cả các bài toán trong toán học dẫn đến phương trình tích phân tuyến tính. Trong phần này, chúng tôi giới thiệu một số bài toán đó.

1.2.1. Bài toán Abel

Cho sợi dây là một đường cong trơn đặt trong mặt phẳng đứng như hình 1.1.

Cho một chất điểm được giữ đứng yên tại P và sau đó được thả chuyển động dọc theo sợi dây dưới tác dụng của trọng lực. Hỏi bao lâu chất điểm tụt xuống vị trí thấp nhất O ?



Lời giải. Chọn O là gốc tọa độ, Ox là trục đứng, chiều dương hướng lên, Oy là trục nằm ngang. Gọi $P(x, y)$, $Q(\xi, \eta)$ và s là độ dài đường cong OQ .

Ta có vận tốc của chất điểm tại Q là $\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(x - \xi)}$. Do đó $t = -\int_P^Q \frac{ds}{\sqrt{2g(x - \xi)}}$.

Vậy tổng thời gian chất điểm tụt xuống đến O là $T = \int_O^P \frac{ds}{\sqrt{2g(x - \xi)}}$.

Vì đường cong đã cho nên ta có thể giả sử $s = u(\xi)$. Khi đó $ds = u(\xi)d\xi$ và

$$T = \int_0^x \frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{2g(x - \xi)}}.$$

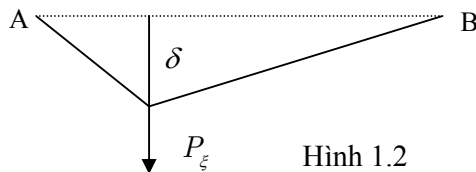
Bài toán của Abel là tìm độ dài đường cong mà thời gian chất điểm tụt hết đường cong là một hàm $f(x)$ cho trước. Khi đó, bài toán trở thành tìm hàm u từ phương trình

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{2g(x - \xi)}}. \quad (1.2.13)$$

Phương trình (1.2.13) là phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 1.

1.2.2. Bài toán về sự cân bằng của dây chịu tải

Xét một sợi dây là một sợi vật chất đàn hồi có độ dài l , có thể uốn tự do nhưng chống lại sự dãn bằng một lực tỉ lệ với độ lớn của sự dãn đó. Giả sử các đầu mút của dây bị giữ chặt tại các điểm $x = 0$ và $x = l$. Khi đó, ở vị trí cân bằng, dây trùng với đoạn thẳng của trục x , $0 \leq x \leq l$. Giả sử tại $x = \xi$ đặt một lực thẳng đứng P_ξ lên dây. Dưới tác dụng của lực này sợi dây bị lệch khỏi vị trí cân bằng và có dạng như hình 1.2.



Tìm độ lớn δ của độ lệch tại điểm ξ dưới tác dụng của lực P_ξ .

Lời giải. Nếu lực P_ξ nhỏ hơn lực căng T_0 của dây không tải thì hình chiếu nằm ngang của lực căng của dây có tải có thể coi bằng T_0 . Khi đó, từ điều kiện căng bằng của dây ta nhận được đẳng thức

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l-\xi} = P_\xi. \text{ Suy ra } \delta = \frac{(l-\xi)\xi}{T_0 l} P_\xi.$$

Giả sử $u(x)$ là độ võng của dây tại điểm x nào đó dưới tác dụng của lực P_ξ . Khi đó

$$u(x) = P_\xi G(x, \xi)$$

trong đó

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l-\xi)}{T_0 l}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{(l-\xi)\xi}{T_0 l}, & \xi < x \leq l. \end{cases}$$

Bây giờ giả sử rằng trên dây tác dụng một lực, phân bố liên tục dọc theo nó với mật độ $p(\xi)$. Nếu lực đó nhỏ thì sự biến dạng phụ thuộc tuyến tính vào lực và dạng của dây có tải được mô tả bởi hàm

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) p(\xi) d\xi. \quad (1.2.14)$$

Như vậy, nếu cho một lực tác dụng lên dây thì công thức (1.2.14) cho biết dạng của dây dưới tác dụng của lực đó. Ngược lại, xét bài toán tìm lực p để dây có dạng u . Bài toán này dẫn đến xét phương trình (1.2.14) trong đó p là hàm cần tìm. Phương trình này là phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 1.

1.2.3. Bài toán về dao động tự do và dao động cưỡng bức của dây

Xét Bài toán 1.2.2 trong trường hợp dây thực hiện một dao động nào đó. Giả sử $u(x, t)$ là vị trí tại thời điểm t của điểm thuộc dây có hoành độ x và mật độ của dây là $\rho = \text{const}$. Khi dây có độ dài dx , lực quán tính tác dụng lên dây là $-\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \rho dx$. Do đó

$$p(\xi) = -\frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} \rho. \quad (1.2.15)$$

Thay (1.2.15) vào (1.2.14), ta được

$$u(x, t) = -\int_0^l G(x, \xi) \rho \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi. \quad (1.2.16)$$

Nếu dây thực hiện dao động điều hòa với tần số ω cố định nào đó và với biên độ $u(x)$, phụ thuộc vào x thì

$$u(x, t) = u(x) \sin \omega t. \quad (1.2.17)$$

Thay (1.2.17) vào phương trình (1.2.16) ta được

$$u(x) = \rho \omega^2 \int_0^l G(x, \xi) u(\xi) d\xi. \quad (1.2.18)$$

Phương trình (1.2.18) là phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 1.

Nếu đây thực hiện dao động cưỡng bức dưới tác dụng của ngoại lực thì ta nhận được phương trình

$$u(x) = f(x) + \rho\omega^2 \int_0^l G(x, \xi)u(\xi)d\xi. \quad (1.2.19)$$

Phương trình (1.2.19) là phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2.

1.2.4. Mối liên hệ giữa phương trình vi phân tuyến tính và phương trình tích phân tuyến tính

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp n

$$\frac{d^n y}{ds^n} + A_1(s) \frac{d^{n-1} y}{ds^{n-1}} + \dots + A_{n-1}(s) \frac{dy}{ds} + A_n(s)y = F(s), \quad (1.2.20)$$

$$\text{với điều kiện ban đầu } y(a) = q_0, \quad y'(a) = q_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = q_{n-1}, \quad (1.2.21)$$

trong đó các hàm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và F liên tục trên $[a, b]$ được cho trước.

$$\text{Đặt} \quad g(s) = \frac{d^n y}{ds^n}. \quad (1.2.22)$$

Từ (1.2.21) và (1.2.22) ta nhận được n phương trình

$$\frac{d^{n-1} y}{ds^{n-1}} = \int_a^s g(t)dt + q_{n-1}, \quad (1.2.23)$$

$$\frac{d^{n-2} y}{ds^{n-2}} = \int_a^s (s-t)g(t)dt + (s-a)q_{n-1} + q_{n-2}, \quad (1.2.24)$$

.....

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} = \int_a^s \frac{(s-t)^{n-2}}{(n-2)!} g(t)dt + \frac{(s-a)^{n-2}}{(n-2)!} q_{n-1} + \frac{(s-a)^{n-3}}{(n-3)!} q_{n-2} \\ + \dots + (s-a)q_2 + q_1. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

$$\begin{aligned} y = \int_a^s \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t)dt + \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} q_{n-1} + \frac{(s-a)^{n-2}}{(n-2)!} q_{n-2} \\ + \dots + (s-a)q_1 + q_0. \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Nhân phương trình (1.2.22) với 1, phương trình (1.2.23) với $A_1(s)$, ..., phương trình cuối với $A_n(s)$, sau đó cộng lại, ta nhận được phương trình

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^s K(s, t)g(t)dt, \quad (1.2.27)$$

trong đó $K(s, t) = -\sum_{k=1}^n A_k(s) \frac{(s-t)^{k-1}}{(k-1)!}$ và

$$\begin{aligned} f(s) = F(s) - q_{n-1}A_1(s) - [(s-a)q_{n-1} + q_{n-2}]A_2(s) \\ - \dots - \left[\frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} q_{n-1} + \dots + (s-a)q_1 + q_0 \right] A_n(s). \end{aligned}$$

Phương trình (1.2.27) là phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2.

Chương 2. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TUYẾN TÍNH FREDHOLM

Trong [3], tác giả đã chứng minh phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 1 không giải được trong trường hợp tổng quát.

Đối với phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2, có nhiều phương pháp khảo sát sự tồn tại nghiệm của phương trình và mỗi phương pháp đó cho ta một dạng nghiệm của phương trình. Phương trình này cũng được khảo sát với nhân suy biến, nhân đối xứng và cả trường hợp nhân là L_2 - nhân bất kì.

Trong chương này chúng tôi chủ yếu trình bày một số phương pháp khảo sát phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2 dựa trên các tài liệu [4], [5], [9].

Nếu không nói gì khác thì các hàm được xét ở Mục 2.1 – 2.3 dưới đây là hàm nhận giá trị thực.

2.1. Phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2 với nhân suy biến

Định nghĩa 2.1.1. Nhân $K(s, t)$ được gọi là *nhân suy biến* nếu $K(s, t)$ là L_2 - nhân và được viết dưới dạng

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^n p_i(s)q_i(t), \quad (2.1.1)$$

trong đó $p_1(s), \dots, p_n(s)$ và $q_1(t), \dots, q_n(t)$ là các hàm trong $L_2([a, b])$.

Chú ý 2.1.2. Có thể giả sử các hàm $p_i(s)$, $q_i(t)$ độc lập tuyến tính trong $L_2([a, b])$. Thật vậy, nếu các $p_i(s)$ không độc lập tuyến tính thì có một $p_{i_0}(s)$ nào đó là tổ hợp tuyến tính của các $p_i(s)$ khác,

tức là $p_{i_0}(s) = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \alpha_i p_i(s)$. Thay tổ hợp tuyến tính này vào $K(s, t)$ ta có

$$K(s, t) = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n p_i(s)q_i(t) + \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \alpha_i p_i(s)q_{i_0}(t) = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n p_i(s)q_i^*(t).$$

Lặp lại quá trình đó một số lần cần thiết, ta thu được một biểu thức có dạng (2.1.1), trong đó các hàm $p_i(s)$ và $q_i(t)$ đều độc lập tuyến tính.

Xét phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2 với nhân suy biến

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt. \quad (2.1.2)$$

Từ (2.1.1) phương trình (2.1.2) trở thành

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^n p_i(s) \int_a^b q_i(t)\varphi(t)dt. \quad (2.1.3)$$

$$\text{Đặt } \xi_i = \int_a^b q_i(t)\varphi(t)dt. \quad (2.1.4)$$

Phương trình (2.1.3) trở thành

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i p_i(s). \quad (2.1.5)$$

Từ (2.1.3) và (2.1.5) suy ra

$$\sum_{i=1}^n \xi_i p_i(s) = \sum_{i=1}^n p_i(s) \left[\lambda \sum_{j=1}^n \xi_j \int_a^b q_i(t) p_j(t) dt + \int_a^b q_i(t) f(t) dt \right]. \quad (2.1.6)$$

Đặt
$$a_{ij} = \int_a^b q_i(t) p_j(t) dt, \quad (2.1.7)$$

$$b_i = \int_a^b q_i(t) f(t) dt. \quad (2.1.8)$$

Từ (2.1.6) – (2.1.8) ta có

$$\sum_{i=1}^n \xi_i p_i(s) = \sum_{i=1}^n p_i(s) [\lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j + b_i]. \quad (2.1.9)$$

Do các hàm $p_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, n$ độc lập tuyến tính nên từ (2.1.9) suy ra

$$\xi_i - \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.10)$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn ξ_i . Giải hệ phương trình tuyến tính (2.1.10), ta tìm được các ξ_i và suy ra φ từ (2.1.5). Do các biến đổi (2.1.2) - (2.1.10) là tương đương nên hàm

$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i p_i(s)$ là nghiệm của phương trình (2.1.2).

Như vậy, việc khảo sát phương trình (2.1.2) tương đương với việc khảo sát hệ phương trình tuyến tính (2.1.10). Ta sẽ khảo sát hệ phương trình (2.1.10).

Đặt
$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.1.11)$$

Nếu $D(\lambda) \neq 0$ thì hệ phương trình (2.1.10) có nghiệm duy nhất là

$$\xi_i = \frac{D_{1i} b_1 + \dots + D_{ni} b_n}{D(\lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1.12)$$

trong đó D_{ki} là phần phụ đại số thứ (k, i) của $D(\lambda)$.

Thay (2.1.12) vào (2.1.5), ta có nghiệm của phương trình (2.1.2) là

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{D_{1i} b_1 + \dots + D_{ni} b_n}{D(\lambda)} p_i(s). \quad (2.1.13)$$

Thay (2.1.8) vào (2.1.13), ta được

$$\varphi(s) = f(s) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^n [D_{1i} q_1(t) + \dots + D_{ni} q_n(t)] p_i(s) \right\} dt. \quad (2.1.14)$$

Đặt

$$D(s, t, \lambda) = - \begin{vmatrix} 0 & p_1(s) & p_2(s) & \cdots & p_n(s) \\ q_1(t) & 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_n(t) & -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (2.1.15)$$

$$\Gamma(s, t, \lambda) = \frac{D(s, t, \lambda)}{D(\lambda)}. \quad (2.1.16)$$

Đại lượng $\Gamma(s, t, \lambda)$ được gọi là *giải thức* của phương trình (2.1.2).

Vậy, nếu $D(\lambda) \neq 0$ thì từ (2.1.13) – (2.1.16) suy ra nghiệm phương trình (2.1.2) là

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b \Gamma(s, t, \lambda) f(t) dt. \quad (2.1.17)$$

Nhận xét 2.1.3. Nếu $D(\lambda) = 0$ thì hệ phương trình tuyến tính (2.1.10) có thể vô nghiệm hoặc vô số nghiệm tùy thuộc vào b_i . Do đó phương trình (2.1.2) có thể vô nghiệm hoặc vô số nghiệm phụ thuộc vào f .

Như vậy, ta cần tìm điều kiện của hàm f để phương trình (2.1.2) có nghiệm trong trường hợp $D(\lambda) = 0$.

Kí hiệu I là ma trận đơn vị cấp n , $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $b = (b_i)$, $\xi = (\xi_i)$ hệ phương trình (2.1.10) được viết ở dạng

$$(I - \lambda A)\xi = b. \quad (2.1.18)$$

Tiếp theo chúng tôi xét phương trình thuần nhất tương ứng phương trình (2.1.2)

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (2.1.19)$$

Nhận xét 2.1.4. Khi $D(\lambda) = 0$ thì tương ứng với mỗi nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$(I - \lambda A)\xi = 0 \quad (2.1.20)$$

có một nghiệm không tầm thường của phương trình thuần nhất (2.1.19).

Nhận xét 2.1.5. Nếu $D(\lambda) = |I - \lambda A|$ có giá trị riêng λ_0 trùng với giá trị λ trong phương trình (2.1.19) và $\text{rank} D(\lambda_0) = p$ với $1 \leq p \leq n$ thì hệ phương trình thuần nhất (2.1.10) có $r = n - p$ nghiệm độc lập tuyến tính. Số r được gọi là chỉ số của λ_0 . Giả sử r nghiệm độc lập tuyến tính đó là $\varphi_{01}(s), \varphi_{02}(s), \dots, \varphi_{0r}(s)$. Khi đó, với λ_0 có chỉ số r , mỗi nghiệm $\varphi_0(s)$ ứng với λ_0 của phương trình thuần nhất (2.1.19) có dạng

$$\varphi_0(s) = \sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi_{0k}(s) \text{ với } \alpha_k \text{ là hằng số.} \quad (2.1.21)$$

Bây giờ xét phương trình liên hợp của phương trình (2.1.2) là

$$\psi(s) = g(s) + \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt \quad (2.1.22)$$

với nhân $K(t, s) = \sum_{i=1}^n p_i(t) q_i(s)$.

Lập luận tương tự các lập luận từ (2.1.2) - (2.1.10), ta suy ra việc khảo sát phương trình (2.1.23) được đưa về việc khảo sát hệ phương trình tuyến tính

$$\eta_i - \lambda \sum_{j=1}^n a_{ji} \eta_j = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1.23)$$

với $a_{ji} = \int_a^b p_i(t) q_j(t) dt$, $c_i = \int_a^b p_i(t) g(t) dt$, $\eta_i = \int_a^b p_i(t) \psi(t) dt$.

Hệ thức $\psi(s) = \sum_{i=1}^n \eta_i q_i(s) + f(s)$ thiết lập một tương ứng 1-1 giữa tập nghiệm của phương trình (2.1.22) với tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (2.1.23).

Kí hiệu A^T là ma trận chuyển vị của A , $c = (c_i)$, $\eta = (\eta_i)$ thì hệ phương trình (2.1.23) được viết dưới dạng

$$(I - \lambda A^T) \eta = c. \quad (2.1.24)$$

Phương trình thuần nhất của phương trình (2.1.22) là

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt. \quad (2.1.25)$$

Nhận xét 2.1.6. Khi $D(\lambda) = 0$ thì với mỗi nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$(I - \lambda A^T) \eta = 0 \quad (2.1.26)$$

có một nghiệm không tầm thường của phương trình thuần nhất (2.1.25)

Nhận xét 2.1.7. Nếu $D(\lambda) = |I - \lambda A|$ có giá trị riêng là λ_0 với chỉ số r thì $D(\lambda) = |I - \lambda A^T|$ cũng có giá trị riêng là λ_0 với chỉ số là r . Suy ra số nghiệm độc lập tuyến tính của (2.1.19) và (2.1.25) là bằng nhau. Giả sử r nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (2.1.25) ứng với giá trị riêng λ_0 là $\psi_{01}(s), \psi_{02}(s), \dots, \psi_{0r}(s)$. Khi đó, với λ_0 có chỉ số r , nghiệm $\psi_0(s)$ ứng với λ_0 của phương trình thuần nhất (2.1.25) có dạng

$$\psi_0(s) = \sum_{k=1}^r \beta_k \psi_{0k}(s) \text{ với } \beta_k \text{ là hằng số.} \quad (2.1.27)$$

Định lí 2.1.8. Nếu $\varphi(s)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (2.1.19) ứng với λ_1 và $\psi(s)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (2.1.25) ứng với λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) thì $\varphi(s)$ và $\psi(s)$ trực giao với nhau.

Chứng minh. Ta có

$$\varphi(s) = \lambda_1 \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt, \quad (2.1.28)$$

$$\psi(s) = \lambda_2 \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt. \quad (2.1.29)$$

Nhân hai vế của (2.1.28) với $\lambda_2 \psi(s)$ và hai vế của (2.1.29) với $\lambda_1 \varphi(s)$ ta được

$$\lambda_2 \psi(s) \varphi(s) = \lambda_1 \lambda_2 \psi(s) \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt, \quad (2.1.30)$$

$$\lambda_1 \varphi(s) \psi(s) = \lambda_1 \lambda_2 \varphi(s) \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt. \quad (2.1.31)$$

Lần lượt lấy tích phân hai vế của (2.1.30) và (2.1.31) theo s từ a đến b , sau đó trừ hai vế của hai đẳng thức nhận được, ta có

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b \varphi(s) \psi(s) ds = 0. \quad (2.1.32)$$

Do $\lambda_1 \neq \lambda_2$ nên từ (2.1.32) suy ra $\int_a^b \varphi(s) \psi(s) ds = 0$ hay φ và ψ trực giao với nhau.

Định lí 2.1.9. *Giả sử $D(\lambda_0) = 0$ và r là chỉ số của λ_0 . Khi đó phương trình (2.1.2) ứng với $\lambda = \lambda_0$ có nghiệm nếu và chỉ nếu $f(s)$ trực giao với r nghiệm ψ_{0i} của phương trình liên hợp thuần nhất (2.1.25).*

Chứng minh. *Điều kiện cần.* Giả sử $\varphi(s)$ là nghiệm của phương trình (2.1.2) ứng với $\lambda = \lambda_0$, tức là

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda_0 \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (2.1.33)$$

Nhân ψ_{0i} vào hai vế của (2.1.33), sau đó lấy tích phân theo s từ a đến b , ta được

$$\int_a^b f(s) \psi_{0i}(s) ds = 0.$$

Do đó $f(s)$ trực giao với r nghiệm ψ_{0i} của phương trình thuần nhất (2.1.25).

Điều kiện đủ. Giả sử $f(s)$ trực giao với r nghiệm ψ_{0i} của phương trình liên hợp thuần nhất (2.1.25). Khi đó, hệ phương trình (2.1.10) có $n - r$ phương trình độc lập tuyến tính và do đó $\text{rank}(I - \lambda A) = n - r$ hay hệ phương trình (2.1.10) giải được. Thay các nghiệm này vào (2.1.5) ta được nghiệm của phương trình (2.1.2).

Từ Nhận xét 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7, Định lí 2.1.8, 2.1.9, ta có định lí sau

Định lí 2.1.10. (Fredholm Alternative Theorem) *Với λ cố định, các phương trình*

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt, \quad (2.1.34)$$

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt, \quad (2.1.35)$$

$$\psi(s) = g(s) + \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt, \quad (2.1.36)$$

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt, \quad (2.1.37)$$

xảy ra hai khả năng

(i) Hoặc phương trình thuần nhất (2.1.35) không có nghiệm nào khác 0. Khi đó, phương trình liên hợp thuần nhất (2.1.37) cũng không có nghiệm khác 0 với mọi $f, g \in L_2([a, b])$ cho trước và mỗi phương trình (2.1.34), (2.1.36) có nghiệm duy nhất.

(ii) Hoặc phương trình thuần nhất (2.1.35) có một số hữu hạn r nghiệm độc lập tuyến tính $\varphi_{01}(s), \varphi_{02}(s), \dots, \varphi_{0r}(s)$. Khi đó phương trình liên hợp thuần nhất (2.1.37) cũng có một số hữu hạn r nghiệm độc lập tuyến tính $\psi_{01}(s), \psi_{02}(s), \dots, \psi_{0r}(s)$ và phương trình (2.1.34) có nghiệm khi và chỉ khi $f(s)$ trực giao với mọi nghiệm $\varphi_{01}(s), \varphi_{02}(s), \dots, \varphi_{0r}(s)$ của (2.1.37); phương trình (2.1.36) có nghiệm khi và chỉ khi $g(s)$ trực giao với mọi nghiệm $\psi_{01}(s), \psi_{02}(s), \dots, \psi_{0r}(s)$ của (2.1.35).

Ví dụ 2.1.11. Giải phương trình tích phân Fredholm loại 2

$$\varphi(s) = s + \int_0^1 (st^2 + s^2t) \varphi(t) dt. \quad (2.1.38)$$

Lời giải. Ta có $K(s, t) = st^2 + s^2t$ là nhân suy biến với

$$p_1(s) = s, \quad p_2(s) = s^2 \quad \text{và} \quad q_1(t) = t^2, \quad q_2(t) = t.$$

Đặt $\xi_1 = \int_0^1 t^2 \varphi(t) dt$ và $\xi_2 = \int_0^1 t \varphi(t) dt$. Khi đó phương trình (2.1.38) trở thành

$$\varphi(s) = s + \xi_1 s + \xi_2 s^2. \quad (2.1.39)$$

Ta có $a_{11} = \int_0^1 q_1(t) p_1(t) dt = \frac{1}{4}$, $a_{12} = \int_0^1 q_1(t) p_2(t) dt = \frac{1}{5}$, $a_{21} = \int_0^1 q_2(t) p_1(t) dt = \frac{1}{3}$,

$$a_{22} = \int_0^1 q_2(t) p_2(t) dt = \frac{1}{4}, \quad b_1 = \int_0^1 q_1(t) f(t) dt = \frac{1}{4}, \quad b_2 = \int_0^1 q_2(t) f(t) dt = \frac{1}{3}.$$

Phương trình (2.1.39) dẫn đến hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} \frac{3}{4} \xi_1 - \frac{1}{5} \xi_2 = \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{3} \xi_1 - \frac{1}{4} \xi_2 = \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (2.1.40)$$

Nghiệm của hệ phương trình (2.1.40) là $\xi_1 = \frac{61}{119}$, $\xi_2 = \frac{80}{119}$.

Do đó nghiệm của phương trình (2.1.38) là

$$\varphi(s) = \frac{61}{119}s + \frac{80}{119}s^2 + s = \frac{180}{119}s + \frac{80}{119}s^2.$$

Ví dụ 2.1.12. Xét phương trình tích phân

$$\varphi(s) = f(s) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\sin(s+t)]\varphi(t)dt. \quad (2.1.41)$$

Chúng minh rằng phương trình (2.1.41) không có nghiệm khi $f(s) = s$ nhưng có nghiệm khi $f(s) = 1$.

Lời giải. Ta có $K(s, t) = \sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t$ là nhân suy biến với

$$p_1(s) = \sin s, \quad p_2(s) = \cos s \quad \text{và} \quad q_1(t) = \cos t, \quad q_2(t) = \sin t.$$

Do đó
$$a_{11} = \int_0^{2\pi} q_1(t)p_1(t)dt = 0, \quad a_{12} = \int_0^{2\pi} q_1(t)p_2(t)dt = \pi,$$

$$a_{21} = \int_0^{2\pi} q_2(t)p_1(t)dt = \pi, \quad a_{22} = \int_0^{2\pi} q_2(t)p_2(t)dt = 0.$$

Ta có $D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda\pi \\ -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2\pi^2$. Khi đó $D(\lambda) = 0$ có nghiệm $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}, \lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$.

Ta nhận thấy phương trình (2.1.41) chứa $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$. Xét phương trình thuần nhất liên hợp của (2.1.41) là

$$\psi(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\sin(s+t)]\psi(t)dt. \quad (2.1.42)$$

Phương trình (2.1.42) tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} \eta_1 - \lambda\pi\eta_2 = 0, \\ -\lambda\pi\eta_1 + \eta_2 = 0. \end{cases} \quad (2.1.43)$$

Với $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$, từ (2.1.43) suy ra $\eta_1 = \eta_2$. Do đó nghiệm của (2.1.42) là

$$\psi(s) = c(\sin s + \cos s) \quad \text{với } c \text{ là hằng số.}$$

Vì $\int_0^{2\pi} s(\sin s + \cos s)ds = -2\pi \neq 0$ và $\int_0^{2\pi} (\sin s + \cos s)ds = 0$ nên theo Định lí 2.1.10 ta có điều phải

chứng minh.

Ví dụ 2.1.13. Giải phương trình tích phân

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 (1-3st)\varphi(t)dt. \quad (2.1.44)$$

Lời giải. Ta có $K(s, t) = 1 - 3st$ là nhân suy biến với

$$p_1(s) = 1, p_2(s) = -3s \quad \text{và} \quad q_1(t) = 1, q_2(t) = t.$$

Ta có $a_{11} = \int_0^1 q_1(t)p_1(t)dt = 1$, $a_{12} = \int_0^1 q_1(t)p_2(t)dt = -\frac{3}{2}$,

$$a_{21} = \int_0^1 q_2(t)p_1(t)dt = \frac{1}{2}, \quad a_{22} = \int_0^1 q_2(t)p_2(t)dt = -1,$$

$$b_1 = \int_0^1 q_1(t)f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt, \quad b_2 = \int_0^1 q_2(t)f(t)dt = -\int_0^1 3tf(t)dt.$$

Đặt $\xi_1 = \int_0^1 \varphi(t)dt$ và $\xi_2 = \int_0^1 t\varphi(t)dt$. Khi đó hệ phương trình tuyến tính tương ứng với phương trình

(2.1.44) là

$$\begin{cases} (1-\lambda)\xi_1 + \frac{3}{2}\lambda\xi_2 = b_1, \\ -\frac{1}{2}\lambda\xi_1 + (1+\lambda)\xi_2 = b_2. \end{cases} \quad (2.1.45)$$

Ta có $D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2}\lambda \\ -\frac{1}{2}\lambda & 1+\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(4-\lambda^2).$

Nếu $\lambda \neq \pm 2$ thì $D(\lambda) \neq 0$. Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\xi_1 = \frac{4(1+\lambda)b_1 - 6\lambda b_2}{4-\lambda^2} \quad \text{và} \quad \xi_2 = \frac{4(1-\lambda)b_2 + 2\lambda b_1}{4-\lambda^2}.$$

Khi đó phương trình (2.1.44) có nghiệm là

$$\varphi(s) = \frac{4(1+\lambda)b_1 - 6\lambda b_2}{4-\lambda^2} - 3 \frac{4(1-\lambda)b_2 + 2\lambda b_1}{4-\lambda^2} s + f(s).$$

Khi $\lambda = 2$ hoặc $\lambda = -2$, xét phương trình liên hợp thuần nhất của (2.1.44) là

$$\psi(s) = \lambda \int_0^1 (1-3st)\psi(t)dt. \quad (2.1.46)$$

Hệ phương trình tuyến tính tương ứng với phương trình (2.1.46) là

$$\begin{cases} (1-\lambda)\eta_1 - \frac{1}{2}\lambda\eta_2 = 0, \\ \frac{3}{2}\lambda\eta_1 + (1+\lambda)\eta_2 = 0. \end{cases} \quad (4.1.47)$$

Với $\lambda = 2$ hệ (2.1.47) trở thành $\eta_1 = -\eta_2$. Khi đó phương trình (2.1.46) có nghiệm

$\psi(s) = c(1-s)$. Do đó phương trình $\varphi(s) = f(s) + 2 \int_0^1 (1-3st)\varphi(t)dt$ có nghiệm khi

$$\int_0^1 (1-s)f(s)ds = 0.$$

Với $\lambda = -2$ hệ (2.1.47) trở thành $\eta_2 = -3\eta_1$. Khi đó phương trình (2.1.46) có nghiệm

$\varphi(s) = c(1-3s)$. Do đó phương trình $\varphi(s) = f(s) - 2 \int_0^1 (1-3st)\varphi(t)dt$ có nghiệm khi

$$\int_0^1 (1-3s)f(s)ds = 0.$$

2.2. Phương pháp xấp xỉ liên tiếp cho phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2

Xét phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \quad (2.2.1)$$

trong đó các hàm f , K cho trước, λ là tham số, φ là hàm cần tìm.

Sử dụng phương pháp xấp xỉ liên tiếp, ta thiết lập điều kiện tồn tại nghiệm cũng như dạng nghiệm của phương trình (2.2.1) khi các hàm f , K thỏa mãn một trong hai giả thiết sau

Giả thiết (A):

(A₁): Hàm $f(t) \neq 0$ và $f(t)$ liên tục trên $[a, b]$,

(A₂): Hàm $K(s, t) \neq 0$, $K(s, t)$ liên tục và $|K(s, t)| \leq M$ trên $[a, b] \times [a, b]$.

Giả thiết (B):

(B₁): Hàm $f \in L_2([a, b])$, $f \neq 0$,

(B₂): Hàm $K(s, t)$ là L_2 -nhân, $K \neq 0$.

Ta xây dựng dãy $\{\varphi_n\}$ như sau

$$\varphi_0(s) = f(s),$$

$$\varphi_1(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi_0(t)dt, \dots,$$

$$\varphi_n(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi_{n-1}(t)dt. \quad (2.2.2)$$

Theo cách xây dựng $\varphi_n(s)$ ta có

$$\varphi_n(s) = f(s) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_a^b K_m(s,t)f(t)dt, \quad (2.2.3)$$

$$\text{với } K_m(s, t) = \int_a^b K(s, x)K_{m-1}(x, t)dx, \quad K_1(s, t) = K(s, t). \quad (2.2.4)$$

Biểu thức (2.2.4) được gọi là *nhân lặp thứ m* của phương trình (2.2.1).

Bổ đề 2.2.1. Với $r \in \mathbb{N}$, $0 < r < m$, ta có

$$K_m(s, t) = \int_a^b K_r(s, x)K_{m-r}(x, t)dx. \quad (2.2.5)$$

Chứng minh. Sử dụng công thức (2.2.4) liên tiếp, ta được

$$\begin{aligned} K_m(s, t) &= \int_a^b K(s, x_1) K_{m-1}(x_1, t) dx_1 \\ &= \int_a^b \dots \int_a^b K(s, x_1) K(x_1, x_2) \dots K_{m-1}(x_{m-1}, t) dx_{m-1} \dots dx_1. \end{aligned}$$

Do đó $K_m(s, t)$ có $m - 1$ dấu tích phân.

Tương tự, $K_r(s, t)$ có $r - 1$ dấu tích phân và $K_{m-r}(s, t)$ có $m - r - 1$ dấu tích phân. Do đó

$$\int_a^b K_r(s, x) K_{m-r}(x, t) dx \text{ có } m - 1 \text{ dấu tích phân. Vậy ta có đẳng thức (2.2.5).}$$

Định lí 2.2.2. Giả sử giả thiết (A) đúng và $|\lambda| M(b - a) < 1$. Khi đó phương trình (2.2.1) có duy nhất nghiệm $\varphi \in C[a, b]$ được cho bởi chuỗi Neumann

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(s, t) f(t) dt. \quad (2.2.6)$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh sự tồn tại nghiệm. Do $f(s)$ liên tục trên $[a, b]$ nên tồn tại $U > 0$ để $|f(s)| \leq U, s \in [a, b]$.

Bằng qui nạp, ta chứng minh được

$$\left| \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt \right| \leq U M^m (b - a)^m \text{ với } m = 1, 2, \dots \quad (2.2.7)$$

Do đó

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \lambda^m \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} U [|\lambda| M(b - a)]^m. \quad (2.2.8)$$

Vì $|\lambda| M(b - a) < 1$ nên chuỗi ở vế phải của (2.2.8) hội tụ. Do đó vế trái của (2.2.8) là chuỗi hội tụ

đều trên $[a, b]$, suy ra chuỗi $f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(s, t) f(t) dt$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[a, b]$.

$$\text{Đặt } \varphi(s) = f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(s, t) f(t) dt. \quad (2.2.9)$$

Theo giả thiết (A) ta có $\varphi \in C[a, b]$.

Mặt khác, từ (2.2.3) và (2.2.9) suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s) = \varphi(s) \text{ với } a \leq s \leq b. \quad (2.2.10)$$

Từ (2.2.2) và (2.2.10) suy ra φ xác định bởi (2.2.9) là nghiệm phương trình (2.2.1).

Bây giờ ta chứng minh sự duy nhất nghiệm. Giả sử φ_1 và φ_2 là hai nghiệm bất kì của phương trình (2.2.1). Đặt $\varphi(s) = \varphi_1(s) - \varphi_2(s)$. Khi đó, φ là nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (2.2.11)$$

Với mọi $a \leq s \leq b$, từ (2.2.11) ta có $|\varphi(s)| = \left| \lambda \int_a^b K(s, t) |\varphi(t)| dt \right| \leq |\lambda| M \|\varphi\| (b-a)$.

Suy ra $[1 - |\lambda| M(b-a)] \|\varphi\| \leq 0$. Do $|\lambda| M(b-a) < 1$ nên $\|\varphi\| = 0$ hay $\varphi = 0$. Vậy nghiệm φ là duy nhất.

Định lí 2.2.3. Giả sử giả thiết (B) đúng và $|\lambda| \cdot \|K\| < 1$. Khi đó phương trình (2.2.1) có duy nhất nghiệm $\varphi \in L_2([a, b])$ xác định bởi

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt. \quad (2.2.12)$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh sự tồn tại nghiệm. Đặt

$$u_m(s) = \lambda^m \int_a^b K_m(s, t) f(t) dt,$$

$$C_m^2 = \sup \left\{ \int_a^b |K_m(s, t)|^2 dt, s \in [a, b] \right\}.$$

Theo bất đẳng thức Schwartz ta có

$$\left| \int_a^b K_m(s, t) f(t) dt \right|^2 \leq \left[\int_a^b |K_m(s, t)|^2 dt \right] \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt \right] \leq C_m^2 \|f\|^2. \quad (2.2.13)$$

Từ Bổ đề 2.2.1 suy ra

$$K_m(s, t) = \int_a^b K_{m-1}(s, x) K(x, t) dx. \quad (2.2.14)$$

Do đó

$$|K_m(s, t)|^2 \leq \left[\int_a^b |K_{m-1}(s, x)|^2 dx \right] \left[\int_a^b |K(x, t)|^2 dx \right]. \quad (2.2.15)$$

Lấy tích phân hai vế của (2.2.15) theo t từ a đến b , ta được $C_m^2 \leq \|K\|^2 C_{m-1}^2$.

Tương tự, ta có dãy các đánh giá

$$C_{m-1}^2 \leq \|K\|^2 C_{m-2}^2, \quad C_{m-2}^2 \leq \|K\|^2 C_{m-1}^2, \dots, C_2^2 \leq \|K\|^2 C_1^2.$$

Do đó

$$C_m^2 \leq \|K\|^2 C_{m-1}^2 \leq \|K\|^2 \|K\|^2 C_{m-2}^2 \leq \dots$$

$$\leq \underbrace{\|K\|^2 \dots \|K\|^2}_{2m-2} C_1^2 = \|K\|^{2m-2} C_1^2. \quad (2.2.16)$$

Từ (2.2.13) và (2.2.16) suy ra

$$\left| \int_a^b K_m(s, t) f(t) dt \right|^2 \leq C_1^2 \|K\|^{2m-2} \|f\|^2. \quad (2.2.17)$$

Vậy

$$|u_m(s)| \leq \|f\| C_1 |\lambda|^m \|K\|^{m-1} = |\lambda| \|f\| C_1 (|\lambda| \|K\|)^{m-1}. \quad (2.2.18)$$

Vì $|\lambda| \cdot \|K\| < 1$ nên chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(s)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[a, b]$.

Do đó chuỗi $f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[a, b]$.

Đặt

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt. \quad (2.2.19)$$

Nhân hai vế của (2.2.19) với $\lambda K(x, s)$, sau đó lấy tích phân theo s từ a đến b , kết hợp với (2.2.19), ta được

$$\lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt = \varphi(x) - f(x).$$

Vậy công thức (2.2.19) là nghiệm của phương trình (2.2.1).

Mặt khác, từ (2.2.18) ta có $u_m \in L_2([a, b])$. Do đó $\varphi \in L_2([a, b])$.

Bây giờ ta chứng minh sự duy nhất nghiệm. Với λ cho trước, giả sử $\varphi_1(s)$ và $\varphi_2(s)$ là hai nghiệm của phương trình (2.2.1). Đặt $\varphi(s) = \varphi_1(s) - \varphi_2(s)$. Khi đó $\varphi(s)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (2.2.20)$$

Sử dụng bất đẳng thức Schwartz, từ (2.2.20) ta có

$$|\varphi(s)|^2 \leq |\lambda|^2 \left[\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \right] \left[\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right]. \quad (2.2.21)$$

Lấy tích phân hai vế của (2.2.21) theo s từ a đến b và biến đổi ta được

$$(1 - |\lambda|^2 B^2) \|\varphi\| \leq 0.$$

Do $|\lambda|B < 1$ nên $\|\varphi\| = 0$, suy ra $\varphi(s) = 0$ hầu hết với $s \in [a, b]$. Do đó phương trình (2.2.1) có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2.2.4. Giải phương trình tích phân

$$\varphi(s) = 1 + \lambda \int_0^{\pi} [\sin(s+t)] \varphi(t) dt. \quad (2.2.22)$$

Lời giải. Ta thiết lập dãy nhân lặp $K_n(s, t)$ như sau

$$K_1(s, t) = K(s, t) = \sin(s+t), \quad K_2(s, t) = \int_0^{\pi} K(s, x) K(x, t) dx = \frac{1}{2} \pi \cos(s-t),$$

$$K_3(s, t) = \int_0^\pi K(s, x)K_2(x, t)dx = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 \sin(s + t), \quad K_4(s, t) = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^3 \cos(s - t),$$

$$K_5(s, t) = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^4 \sin(s + t), \dots \text{ và } \|K\| = \sqrt{\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2(s + t)dsdt} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Điều kiện $|\lambda| \|K\| < 1$ trở thành $\frac{-\sqrt{2}}{\pi} < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

Do đó, với λ thỏa mãn $\frac{-\sqrt{2}}{\pi} < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{\pi}$, nghiệm của phương trình (2.2.22) là

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= 1 + \lambda \int_0^\pi \sin(s + t)dt + \frac{1}{2}\pi\lambda^2 \int_0^\pi \cos(s - t)dt + \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 \lambda^3 \int_0^\pi \sin(s + t)dt + \dots \\ &= 1 + 2\lambda \left[1 + \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{1}{2}\pi\right)^4 \lambda^4 + \dots\right] \cos s \\ &\quad + \lambda^2 \pi \left[1 + \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{1}{2}\pi\right)^4 \lambda^4 + \dots\right] \sin s = 1 + \frac{8\lambda \cos s + 4\lambda^2 \pi \sin s}{4 - \lambda^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Như vậy, trong Định lí 2.2.2 và Định lí 2.2.3 nghiệm của phương trình (2.2.1) được cho bởi công thức (2.2.12). Vấn đề đặt ra là giải thức của phương trình (2.2.1) xác định như thế nào và có tính chất gì đặc biệt? Trong phần kế tiếp, chúng tôi sẽ khảo sát vấn đề này.

Định lí 2.2.5. *Giả sử giả thiết (B) đúng và $|\lambda| \cdot \|K\| < 1$. Khi đó phương trình (2.2.1) có duy nhất giải thức xác định bởi*

$$\Gamma(s, t; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(s, t). \quad (2.2.23)$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh sự tồn tại. Theo chứng minh Định lí 2.2.3, ta có chuỗi sau

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(s, t) f(t) dt.$$

Do đó nghiệm của phương trình (2.2.1) viết được dưới dạng

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(s, t) \right] f(t) dt. \quad (2.2.24)$$

Mặt khác, theo 2.1, nghiệm của phương trình (2.2.1) có dạng

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda) f(t) dt. \quad (2.2.25)$$

So sánh (2.2.24) và (2.2.25), ta được $\Gamma(s, t; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(s, t)$. Ta chứng minh chuỗi

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(s, t) \text{ hội tụ.}$$

Đặt $E^2 = \sup \left\{ \int_a^b |K(s, t)|^2 ds, t \in [a, b] \right\}$. Ta có

$$K_m(s, t) = \int_a^b K_{m-1}(s, x)K(x, t)dx. \quad (2.2.26)$$

Sử dụng bất đẳng thức Schwarts, từ (2.2.26) ta được

$$|K_m(s, t)|^2 \leq \left[\int_a^b |K_{m-1}(s, x)|^2 dx \right] \left[\int_a^b |K(x, t)|^2 dx \right] \leq E^2 C_m^2. \quad (2.2.27)$$

Từ (2.2.16) và (2.2.27), ta có $|K_m(s, t)| \leq C_1 E \|K\|^{m-1}$.

$$\text{Suy ra } |\lambda^{m-1} K_m(s, t)| \leq C_1 E \lambda^{m-1} \|K\|^{m-1}. \quad (2.2.28)$$

Do $|\lambda| \|K\| < 1$ nên $\sum_{m=1}^{\infty} C_1 E \lambda^{m-1} \|K\|^{m-1}$ hội tụ.

Khi đó, từ (2.2.28) suy ra chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(s, t)$ hội tụ tuyệt đối.

Do đó giải thức $\Gamma(s, t; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(s, t)$ tồn tại.

Bây giờ ta chứng minh $\Gamma(s, t; \lambda)$ duy nhất. Giả sử với λ thỏa mãn $|\lambda| \|K\| < 1$, phương trình (2.2.1) có hai giải thức là $\Gamma_1(s, t; \lambda)$ và $\Gamma_2(s, t; \lambda)$. Khi đó phương trình (2.2.1) có hai nghiệm là $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$.

Do tính duy nhất nghiệm của phương trình (2.2.1) nên với mọi $f \in L_2([a, b])$, ta có

$$\int_a^b \Gamma_1(s, t; \lambda) f(t) dt = \int_a^b \Gamma_2(s, t; \lambda) f(t) dt. \quad (2.2.29)$$

Đặt $\Gamma_0(s, t; \lambda) = \Gamma_1(s, t; \lambda) - \Gamma_2(s, t; \lambda)$. Từ (2.2.29), ta suy ra

$$\int_a^b \Gamma_0(s, t; \lambda) f(t) dt = 0 \text{ với bất kì } f \in L_2([a, b]). \quad (2.2.30)$$

Chọn $f(t) = \Gamma_0^*(s, t; \lambda)$ với s cố định, từ (2.2.30) ta có $\int_a^b |\Gamma_0(s, t; \lambda)|^2 dt = 0$.

Suy ra $\Gamma_0(s, t; \lambda) = 0$ với hầu hết $t \in [a, b]$. Vậy giải thức $\Gamma(s, t; \lambda)$ duy nhất.

Định lí 2.2.6. Giả sử giả thiết (B) đúng và $\Gamma(s, t; \lambda)$ là giải thức của phương trình tích phân (2.2.1). Khi đó

$$\Gamma(s, t; \lambda) = K(s, t) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) K(x, t) dx \quad (2.2.31)$$

và

$$\frac{\partial \Gamma(s, t; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) \Gamma(x, t; \lambda) dx. \quad (2.2.32)$$

Chứng minh. Theo Định lí 2.2.5, ta có

$$\Gamma(s, t; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(s, t) = K_1(s, t) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(s, t).$$

Từ (2.2.26), ta suy ra $\Gamma(s, t; \lambda) = K(s, t) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) K(x, t) dx$. Vậy ta có (2.2.31).

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có } \int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) \Gamma(x, t; \lambda) dx &= \int_a^b \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(s, x) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t) dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m+n-2} \int_a^b K_m(s, x) K_n(x, t) dx. \end{aligned}$$

hay

$$\int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) \Gamma(x, t; \lambda) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m+n-2} K_{m+n}(s, t). \quad (2.2.33)$$

Mặt khác, đặt $m + n = p$, ta có

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m+n-2} K_{m+n}(s, t) = \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{p-1} \lambda^{p-2} K_p(s, t) = \sum_{p=2}^{\infty} (p-1) \lambda^{p-2} K_p(s, t).$$

hay

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m+n-2} K_{m+n}(s, t) = \frac{\partial \Gamma(s, t; \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (2.2.34)$$

So sánh (2.2.33) và (2.2.34), ta suy ra (2.2.32).

2.3. Các định lí Fredholm

Trong Mục 2.1 và Mục 2.2, chúng tôi đã mô tả nghiệm của phương trình tích phân Fredholm loại 2

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (2.3.1)$$

là một chuỗi hội tụ đều theo tham số λ với λ thích hợp.

Trong Mục 2.1, chúng tôi khảo sát phương trình (2.3.1) trong trường hợp $K(s, t)$ là nhân suy biến.

Fredholm đã khảo sát phương trình (2.3.1) trong trường hợp $K(s, t)$ là L_2 -nhân bất kì với tham số λ bất kì và ông xem phương trình (2.3.1) như là giới hạn của hệ phương trình tuyến tính. Phương pháp mà Fredholm sử dụng giống phương pháp được áp dụng cho tích phân xác định trên $[a, b]$. Với phương pháp này, Fredholm đưa ra nghiệm của phương trình (2.3.1) rõ ràng hơn Mục 2.1. Trong phần này, chúng tôi trình bày phương pháp khảo sát này thông qua các định lí Fredholm.

Chia $[a, b]$ thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia

$$s_1 = t_1 = a, s_2 = t_2 = a + h, \dots, s_n = t_n = a + (n-1)h, \text{ trong đó } h = \frac{b-a}{n}.$$

Khi đó $\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \approx h \sum_{j=1}^n K(s, s_j)\varphi(s_j)$. Do đó (2.3.1) xấp xỉ phương trình

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda h \sum_{j=1}^n K(s, s_j)\varphi(s_j) \text{ với mọi } s \in [a, b]. \quad (2.3.2)$$

Phương trình (2.3.2) thỏa mãn với mọi $s \in [a, b]$ nên cũng thỏa mãn tại n điểm chia s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, tức là

$$\varphi(s_i) = f(s_i) + \lambda h \sum_{j=1}^n K(s_i, s_j)\varphi(s_j), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Đặt $f_i = f(s_i)$, $\varphi_i = \varphi(s_i)$, $K_{ij} = K(s_i, s_j)$. Khi đó, phương trình (2.3.1) xấp xỉ với mỗi phương trình của hệ phương trình tuyến tính n ẩn $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sau

$$\varphi_i - \lambda h \sum_{j=1}^n K_{ij}\varphi_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3.3)$$

Giải hệ (2.3.3), ta tìm được φ_i là các nghiệm xấp xỉ của phương trình (2.3.1).

Như vậy, việc khảo sát phương trình (2.3.1) quy về khảo sát hệ phương trình (2.3.3).

Xét định thức của hệ phương trình (2.3.3)

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda h K_{11} & -\lambda h K_{12} & \cdots & -\lambda h K_{1n} \\ -\lambda h K_{21} & 1 - \lambda h K_{22} & \cdots & -\lambda h K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda h K_{n1} & -\lambda h K_{n2} & \cdots & 1 - \lambda h K_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Khai triển định thức $D_n(\lambda)$ theo các lũy thừa của $(-\lambda h)$, ta được

$$\begin{aligned} D_n(\lambda) = & 1 - \lambda h \sum_{v=1}^n K_{vv} + \frac{(-\lambda h)^2}{2!} \sum_{p,q=1}^n \begin{vmatrix} K_{pp} & K_{pq} \\ K_{qp} & K_{qq} \end{vmatrix} \\ & + \frac{(-\lambda h)^3}{3!} \sum_{p,q,r=1}^n \begin{vmatrix} K_{pp} & K_{pq} & K_{pr} \\ K_{qp} & K_{qq} & K_{qr} \\ K_{rp} & K_{rq} & K_{rr} \end{vmatrix} \\ & + \frac{(-\lambda h)^n}{n!} \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} & \cdots & K_{p_1 p_n} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} & \cdots & K_{p_2 p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{p_n p_1} & K_{p_n p_2} & \cdots & K_{p_n p_n} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Kí hiệu

$$\begin{vmatrix} K(s_1, t_1) & K(s_1, t_2) & \cdots & K(s_1, t_n) \\ K(s_2, t_1) & K(s_2, t_2) & \cdots & K(s_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(s_n, t_1) & K(s_n, t_2) & \cdots & K(s_n, t_n) \end{vmatrix} = K \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix}. \quad (2.3.6)$$

Khi đó (2.3.5) được viết lại

$$\begin{aligned} D_n(\lambda) = & 1 - \lambda h \sum_{p=1}^n K(s_p, s_p) + \frac{(-\lambda h)^2}{2!} \sum_{p,q=1}^n K \begin{pmatrix} s_p, s_q \\ s_p, s_q \end{pmatrix} \\ & + \frac{(-\lambda h)^3}{3!} \sum_{p,q,r=1}^n K \begin{pmatrix} s_p, s_q, s_r \\ s_p, s_q, s_r \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Khi $n \rightarrow \infty$ thì $h \rightarrow 0$ và mỗi số hạng của tổng (2.3.7) lần lượt tiến về tích phân xác định, tích phân hai lớp, tích phân ba lớp, ... Do đó với mọi tham số λ , ta có $D_n(\lambda)$ tiến về $D(\lambda)$ xác định bởi

$$\begin{aligned} D(\lambda) = & 1 - \lambda \int_a^b K(s, s) ds + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b K \begin{pmatrix} s_1, s_2 \\ s_1, s_2 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \\ & - \frac{\lambda^3}{3!} \int_a^b \int_a^b \int_a^b K \begin{pmatrix} s_1, s_2, s_3 \\ s_1, s_2, s_3 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 ds_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Định lý 2.3.1. Chuỗi $D(\lambda)$ xác định bởi (2.3.8) hội tụ tuyệt đối và hầu khắp theo λ .

Chứng minh. Phép chứng minh được trình bày trong [5, tr.32-33].

Khi $D(\lambda) \neq 0$, ta sẽ tìm nghiệm phương trình (2.3.1) dưới dạng

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda) f(t) dt \quad (2.3.9)$$

$$\text{trong đó } \Gamma(s, t; \lambda) = \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)}. \quad (2.3.10)$$

Như vậy chúng ta cần xác định $D(s, t; \lambda)$.

Theo Định lý 2.2.4, ta có

$$\Gamma(s, t; \lambda) = K(s, t) + \lambda \int_a^b K(s, x) \Gamma(x, t; \lambda) dx. \quad (2.3.11)$$

Thay (2.3.10) vào (2.3.11), ta được

$$D(s, t; \lambda) = K(s, t) D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(s, x) D(x, t; \lambda) dx. \quad (2.3.12)$$

Ta tìm $D(s, t; \lambda)$ dưới dạng chuỗi theo tham số λ như sau

$$D(s, t; \lambda) = C_0(s, t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} C_p(s, t). \quad (2.3.13)$$

Ta viết chuỗi (2.3.8) ở dạng

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} c_p \quad (2.3.14)$$

$$\text{trong đó } c_p = \int_a^b \dots \int_a^b K \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ s_1, s_2, \dots, s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_p. \quad (2.3.15)$$

Thay (2.3.14) và (2.3.13) vào vế phải của (2.3.12), ta được

$$D(s, t; \lambda) = K(s, t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} [c_p K(s, t) - p \int_a^b K(s, x) C_{p-1}(x, t) dx] \quad (2.3.16)$$

So sánh (2.3.13) và (2.3.16), ta được

$$C_0(s, t) = K(s, t), \quad (2.3.17)$$

$$C_p(s, t) = c_p K(s, t) - p \int_a^b K(s, x) C_{p-1}(x, t) dx. \quad (2.3.18)$$

Bổ đề 2.3.2. Số hạng $C_p(s, t)$ thỏa mãn (2.3.18) có dạng

$$C_p(s, t) = \int_a^b \dots \int_a^b K \begin{pmatrix} s, x_1, x_2, \dots, x_p \\ t, x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_p, \quad p \geq 1 \quad (2.3.19)$$

Chứng minh. Ta có

$$K \begin{pmatrix} s, x_1, x_2, \dots, x_p \\ t, x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(s, t) & K(s, x_1) & \dots & K(s, x_p) \\ K(x_1, t) & K(x_1, x_1) & \dots & K(x_1, x_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_p, t) & K(x_p, x_1) & \dots & K(x_p, x_p) \end{vmatrix} \quad (2.3.20)$$

Suy ra

$$K \begin{pmatrix} s, x_1, x_2, \dots, x_p \\ t, x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(s, t) & K(x_1, t) & \dots & K(x_p, t) \\ K(s, x_1) & K(x_1, x_1) & \dots & K(x_p, x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(s, x_p) & K(x_1, x_p) & \dots & K(x_p, x_p) \end{vmatrix} \quad (2.3.21)$$

Khai triển định thức trong vế phải của (2.3.21) theo cột thứ nhất, ta được

$$\begin{aligned} K \begin{pmatrix} s, x_1, x_2, \dots, x_p \\ t, x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} &= K(s, t) K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{p-1} \\ x_1, x_2, \dots, x_{p-1} \end{pmatrix} + K(s, x_1) K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{p-1} \\ t, x_2, \dots, x_{p-1} \end{pmatrix} \\ &+ K(s, x_2) K \begin{pmatrix} x_2, x_1, x_3, \dots, x_{p-1} \\ t, x_1, x_3, \dots, x_{p-1} \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Lấy tích phân hai vế của (2.3.22) lần lượt theo các biến $x_1, x_2, \dots, x_p$ và sử dụng kí hiệu (2.3.15), ta có (2.3.19).

Khi đó, từ (2.3.13), (2.3.17) và (2.3.19), ta được

$$D(s, t; \lambda) = K(s, t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} s, x_1, x_2, \dots, x_p \\ t, x_1, x_2, \dots, x_p \end{matrix} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_p. \quad (2.3.23)$$

Định lí 2.3.3. Chuỗi $D(s, t; \lambda)$ xác định bởi (2.3.23) hội tụ tuyệt đối và hầu khắp theo tham số λ .

Chứng minh. Phép chứng minh được trình bày trong [5, tr.33-34].

Cuối cùng, chúng ta kiểm tra rằng công thức $\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda) f(t) dt$ với $\Gamma(s, t; \lambda)$ xác định bởi (2.3.10), $D(\lambda)$ xác định bởi (2.3.8), $D(s, t; \lambda)$ xác định bởi (2.3.23) là nghiệm của phương trình (2.3.1) và nghiệm này là duy nhất.

Nhân $\Gamma(s, t; \lambda)$ vào hai vế phương trình (2.3.1), ta được

$$\begin{aligned} \int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) \varphi(x) dx &= \int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) f(x) dx \\ &+ \lambda \int_a^b \left[\int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) K(x, t) dx \right] \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Thay (2.3.11) vào vế trái của (2.3.24), ta có

$$\begin{aligned} \int_a^b [K(s, x) + \lambda \int_a^b K(s, t) \Gamma(t, x; \lambda) dt] \varphi(x) dx &= \int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) f(x) dx \\ &+ \lambda \int_a^b \left[\int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) K(x, t) dx \right] \varphi(t) dt \end{aligned}$$

hay

$$\int_a^b K(s, x) \varphi(x) dx = \int_a^b \Gamma(s, x; \lambda) f(x) dx \quad (2.3.25)$$

Kết hợp (2.3.1) và (2.3.25), ta được

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda) f(t) dt \quad (2.3.26)$$

Công thức (2.3.26) là nghiệm của phương trình (2.3.1) và nghiệm này là duy nhất.

Từ các kết quả trên, ta có định lí sau

Định lí 2.3.4. (Định lí Fredholm thứ nhất)

Nếu $D(\lambda) \neq 0$ thì phương trình (2.3.1) với $f \in L_2([a, b])$, $K(s, t)$ bị chặn và $K(s, t)$ là L_2 -nhân, có nghiệm duy nhất được cho bởi

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda) f(t) dt \quad (2.3.27)$$

trong đó giải thức $\Gamma(s, t; \lambda)$ xác định bởi

$$\Gamma(s, t; \lambda) = \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)} \quad (2.3.28)$$

với

$$D(s, t; \lambda) = K(s, t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} s, x_1, x_2, \dots, x_p \\ t, x_1, x_2, \dots, x_p \end{matrix} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_p \quad (2.3.29)$$

và

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ s_1, s_2, \dots, s_p \end{matrix} \right) ds_1 ds_2 \dots ds_p. \quad (2.3.30)$$

Nhận xét 2.3.5. Với các kí hiệu như (2.3.15) và (2.3.19) ta có

$$(i) \ c_p = \int_a^b C_p(s, s) ds. \quad (2.3.31)$$

(ii) Nếu kí hiệu $c_0 = 1$ thì giải thức (2.3.28) được viết dưới dạng

$$\Gamma(s, t; \lambda) = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} C_p(s, t)}{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} c_p}. \quad (2.3.32)$$

Ví dụ 2.3.6. Giải phương trình tích phân Fredholm loại 2

$$\varphi(s) = 1 + \lambda \int_0^{\pi} \sin(s+t) \varphi(t) dt. \quad (2.3.33)$$

Lời giải. Ta có $c_0 = 1$, $C_0(s, t) = K(s, t) = \sin(s+t)$,

$$c_1 = \int_0^{\pi} C_0(s, s) ds = 0, \quad C_1(s, t) = c_1 K(s, t) - \int_0^{\pi} K(s, x) C_0(x, t) dx = -\frac{1}{2} \pi \cos(s-t)$$

$$c_2 = \int_0^{\pi} C_1(s, s) ds = -\frac{1}{2} \pi^2, \quad C_2(s, t) = c_2 K(s, t) - 2 \int_0^{\pi} K(s, x) C_1(x, t) dx = 0.$$

Từ (2.3.31) suy ra $c_p = 0$ với $p \geq 2$.

Do đó, từ (2.3.18) suy ra $C_p(s, t) = 0$ với $p \geq 2$.

Khi đó, với $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}$, phương trình (2.3.33) có nghiệm là

$$\varphi(s) = 1 + 4\lambda \int_0^{\pi} \frac{\sin(s+t) + \frac{1}{2} \pi \lambda \cos(s-t)}{4 - \pi^2 \lambda^2} dt = 1 + \frac{8\lambda \cos s + 4\pi \lambda^2 \sin s}{4 - \pi^2 \lambda^2}.$$

Định lí Fredholm thứ nhất không đúng khi λ là nghiệm của phương trình $D(\lambda) = 0$. Khi nhân $K(s, t)$ suy biến và λ là nghiệm của phương trình $D(\lambda) = 0$ thì theo 2.1 phương trình thuần nhất

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (2.3.34)$$

có nghiệm không tầm thường.

Khi $K(s, t)$ là L_2 - nhân thì kết quả trên còn đúng không? Ta sẽ khảo sát vấn đề này.

Bổ đề 2.3.7. Không điểm của $D(\lambda)$ là cực của giải thức (2.3.28) và cấp của cực này không quá cấp của không điểm $D(\lambda)$.

Chứng minh. Lấy đạo hàm hai vế của (2.3.30) và so sánh với (2.3.29), ta được

$$D'(\lambda) = -\int_a^b D(s, s, \lambda). \quad (2.3.35)$$

Nếu λ_0 là không điểm cấp k của $D(\lambda)$ thì λ_0 là không điểm cấp $k-1$ của $D'(\lambda)$.

Khi đó, từ (2.3.35) suy ra λ_0 là không điểm của $D(s, t, \lambda)$ có cấp không quá $k-1$.

Do đó λ_0 là cực của giải thức (2.3.28) có cấp không quá k .

Bổ đề 2.3.8. Nếu λ_0 là không điểm cấp 1 của $D(\lambda)$ thì $D(s, t, \lambda_0)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\varphi(s) = \lambda_0 \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (2.3.36)$$

Hơn nữa, nếu $D(s, t, \lambda_0)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (2.3.36) thì $\alpha D(s, t, \lambda_0)$ cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất (2.3.36).

Chứng minh. Nếu λ_0 là không điểm cấp 1 của $D(\lambda)$ thì $D(\lambda_0) = 0$, $D'(\lambda_0) \neq 0$.

Từ (2.3.35) suy ra $D(s, t, \lambda_0) \neq 0$. Do đó, từ (2.3.12) suy ra $D(s, t, \lambda_0)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (2.3.36).

Bây giờ chúng ta khảo sát trường hợp λ_0 là không điểm cấp m của $D(\lambda)$.

Theo Bổ đề 2.3.7, ta có

$$D(\lambda_0) = 0, \dots, D^{(r)}(\lambda_0) = 0, D^{(m)}(\lambda_0) \neq 0 \text{ với } r = 1, \dots, m-1. \quad (2.3.37)$$

Đặt

$$D_n \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{matrix} \middle| \lambda \right) = K \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{matrix} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \\ \times \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_p, x_1, x_2, \dots, x_p \\ t_1, t_2, \dots, t_p, x_1, x_2, \dots, x_p \end{matrix} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_p \quad (2.3.38)$$

trong đó $\{s_i\}$ và $\{t_i\}$, $i = 1, \dots, n$, là hai dãy bất kì.

Do chuỗi (2.3.29) và (2.3.30) hội tụ với mọi tham số λ nên chuỗi (2.3.38) cũng hội tụ với mọi tham số λ .

Bổ đề 2.3.9. Nếu λ_0 là không điểm cấp m của $D(\lambda)$ thì

$$D_m \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_m \\ t_1, t_2, \dots, t_m \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right) \neq 0 \quad (2.3.39)$$

Khi đó tồn tại những D_r với $r < m$ mà $D_r \neq 0$.

Chứng minh. Lấy đạo hàm hai vế (2.3.30) n lần và so sánh với (2.3.38), ta suy ra

$$\frac{d^n D(\lambda)}{d\lambda^n} = (-1)^n \int_a^b \dots \int_a^b D_n \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{matrix} \middle| \lambda \right) ds_1 ds_2 \dots ds_n. \quad (2.3.40)$$

Do đó, nếu λ_0 là không điểm cấp m của $D(\lambda)$ thì từ (2.3.40) suy ra

$$D_m \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_m \\ t_1, t_2, \dots, t_m \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right) \neq 0.$$

Với kí hiệu (2.3.6), ta có

$$K \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_p, x_1, x_2, \dots, x_p \\ t_1, t_2, \dots, t_p, x_1, x_2, \dots, x_p \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} K(s_1, t_1) & K(s_1, t_2) & \dots & K(s_1, t_n) & K(s_1, x_1) & K(s_1, x_2) & \dots & K(s_1, x_p) \\ K(s_2, t_1) & K(s_2, t_2) & \dots & K(s_2, t_n) & K(s_2, x_1) & K(s_2, x_2) & \dots & K(s_2, x_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K(s_n, t_1) & K(s_n, t_2) & \dots & K(s_n, t_n) & K(s_n, x_1) & K(s_n, x_2) & \dots & K(s_n, x_p) \\ K(x_1, t_1) & K(x_1, t_2) & \dots & K(x_1, t_n) & K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \dots & K(x_1, x_p) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K(x_p, t_1) & K(x_p, t_2) & \dots & K(x_p, t_n) & K(x_p, x_1) & K(x_p, x_2) & \dots & K(x_p, x_p) \end{vmatrix} \quad (2.3.41)$$

Khai triển định thức (2.3.41) theo dòng thứ nhất, sau đó lấy tích phân bội p lần lượt đối với $x_1, x_2, \dots, x_p$ ($p \geq 1$), ta được

$$\begin{aligned} & \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_p, x_1, x_2, \dots, x_p \\ t_1, t_2, \dots, t_p, x_1, x_2, \dots, x_p \end{matrix} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_p \\ &= \sum_{h=1}^n (-1)^{h+1} K(s_1, t_h) \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} s_2, \dots, s_h, \dots, s_n, x_1, \dots, x_p \\ t_1, \dots, t_{h-1}, t_{h+1}, \dots, t_n, x_1, \dots, x_p \end{matrix} \right) dx_1 \dots dx_p \\ &+ \sum_{h=1}^p (-1)^{h+n-1} K(s_1, x_h) \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} s_2, \dots, s_n, x_1, \dots, x_h, \dots, x_p \\ t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_p \end{matrix} \right) dx_1 \dots dx_p. \quad (2.3.42) \end{aligned}$$

Ta nhận thấy, trong tổng thứ hai của (2.3.42) nếu chuyển giá trị x_h ở dòng thứ nhất đến vị trí thứ nhất thì các số hạng trong tổng thứ hai này bằng nhau. Do đó (2.3.42) trở thành

$$\begin{aligned} & \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_p, x_1, x_2, \dots, x_p \\ t_1, t_2, \dots, t_p, x_1, x_2, \dots, x_p \end{matrix} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_p \\ &= \sum_{h=1}^n (-1)^{h+1} K(s_1, t_h) \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} s_2, \dots, s_h, \dots, s_n, x_1, \dots, x_p \\ t_1, \dots, t_{h-1}, t_{h+1}, \dots, t_n, x_1, \dots, x_p \end{matrix} \right) dx_1 \dots dx_p \end{aligned}$$

$$-p \int_a^b K(s_1, x) \left[\int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} x, s_2, \dots, s_n, x_1, \dots, x_{p-1} \\ t_1, t_2, \dots, t_n, x_1, \dots, x_{p-1} \end{matrix} \right) dx_1 \dots dx_p \right] dx. \quad (2.3.43)$$

Thay (2.3.43) vào (2.3.38), ta được

$$\begin{aligned} D_n \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{matrix} \middle| \lambda \right) &= \sum_{h=1}^n (-1)^{h+1} K(s_1, t_h) D_{n-1} \left(\begin{matrix} s_2, \dots, s_h, \dots, s_n \\ t_1, \dots, t_{h-1}, t_{h+1}, \dots, t_n \end{matrix} \middle| \lambda \right) \\ &\quad + \lambda \int_a^b K(s_1, x) D_n \left(\begin{matrix} x, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{matrix} \middle| \lambda \right) dx. \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

Ngoài ra, nếu khai triển (2.3.41) theo cột thứ nhất và thực hiện các phép biến đổi tương tự như trên, ta sẽ được

$$\begin{aligned} D_n \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{matrix} \middle| \lambda \right) &= \sum_{h=1}^n (-1)^{h+1} K(s_h, t_1) D_{n-1} \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_{h-1}, s_{h+1}, \dots, s_n \\ t_2, \dots, t_h, \dots, t_n \end{matrix} \middle| \lambda \right) \\ &\quad + \lambda \int_a^b K(x, t_1) D_n \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ x, t_2, \dots, t_n \end{matrix} \middle| \lambda \right) dx. \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

Theo Bổ đề 2.3.9, nếu λ_0 là không điểm cấp m của $D(\lambda)$ thì $D_m \neq 0$ và do đó có những $D_1, D_2, \dots, D_{m-1}$ cũng không bị triệt tiêu. Giả sử D_r là số hạng đầu tiên trong dãy $D_1, D_2, \dots, D_{m-1}$ mà $D_r \neq 0$ (số r được gọi là *chỉ số* của λ_0). Khi đó $D_{r-1} = 0$ và từ (2.3.44) ta có

$$D_r \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_r \\ t_1, t_2, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right) = \lambda_0 \int_a^b K(s_1, x) D_r \left(\begin{matrix} x, s_2, \dots, s_r \\ t_1, t_2, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right) dx. \quad (2.3.46)$$

Từ (2.3.46) suy ra phương trình thuần nhất (2.3.34) có một nghiệm là

$$\varphi_1(s) = D_r \left(\begin{matrix} s, s_2, \dots, s_r \\ t_1, t_2, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right). \quad (2.3.47)$$

Lần lượt thay đổi vị trí của s trong dòng thứ nhất của D_r , ta nhận được r nghiệm của phương trình thuần nhất xác định bởi

$$\varphi_i(s) = D_r \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \dots, s_r \\ t_1, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right), \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.3.48)$$

Đặt

$$\Phi_i(s) = \frac{D_r \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \dots, s_r \\ t_1, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}{D_r \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_r \\ t_1, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.3.49)$$

Khi đó $\Phi_i(s)$, $i = 1, \dots, r$, là những nghiệm của phương trình thuần nhất (2.3.34).

Mặt khác, nếu dãy $s_1, s_2, \dots, s_p, x_1, x_2, \dots, x_p$ có hai giá trị s_i nào đó bằng nhau thì định thức (2.3.41) có hai dòng giống nhau nên bằng 0. Suy ra

$$\Phi_k(s_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \quad (2.3.50)$$

Do đó, nếu $\sum_{k=1}^r \alpha_k \Phi_k(s) = 0$ thì lần lượt chọn $s = s_i$, kết hợp với (2.3.50), ta được $\alpha_i = 0$ với $i = 1, \dots, r$. Vậy $\Phi_i(s)$ là những nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (2.3.34). Do đó mọi tổ hợp tuyến tính của $\Phi_i(s)$ đều là nghiệm của phương trình (2.3.34).

Bổ đề 2.3.10. Mọi nghiệm của phương trình (2.3.34) đều là tổ hợp tuyến tính của những nghiệm độc lập tuyến tính $\Phi_i(s)$ xác định bởi (2.3.49).

Chứng minh. Đặt

$$H(s, t; \lambda) = \frac{D_{r+1} \left(\begin{matrix} s, s_1, \dots, s_r \\ t, t_1, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}{D_r \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_r \\ t_1, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}.$$

Trong (2.3.45), lấy $n = r$ và bổ sung thêm hai giá trị s và t , ta được

$$\begin{aligned} D_{r+1} \left(\begin{matrix} s, s_1, \dots, s_r \\ t, t_1, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right) &= \sum_{h=1}^n (-1)^{h+1} K(s_h, t_1) D_r \left(\begin{matrix} s, s_1, \dots, s_{h-1}, s_{h+1}, \dots, s_r \\ t, t_2, \dots, t_h, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right) \\ &\quad + \lambda_0 \int_a^b K(x, t) D_{r+1} \left(\begin{matrix} s, s_1, \dots, s_r \\ x, t_1, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right) dx. \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

Đối với D_r trong (2.3.51), chuyển s vào giữa s_{h-1} và s_{h+1} , sau đó chia hai vế cho

$$D_r \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_r \\ t_1, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right) \neq 0$$

ta được

$$H(s, t; \lambda) - K(s, t) - \lambda_0 \int_a^b H(s, x; \lambda) K(x, t) dx = - \sum_{h=1}^r K(s_h, t) \Phi_h(s). \quad (2.3.52)$$

Giả sử $\varphi(s)$ là nghiệm của phương trình (2.3.34). Khi đó, nhân $\varphi(t)$ vào hai vế của phương trình (2.3.34) và lấy tích phân theo t , ta được

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t) H(s, t; \lambda) dt - \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt - \lambda_0 \int_a^b H(s, x; \lambda) \left[\int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \right] dx \\ = - \sum_{h=1}^r \left[\int_a^b K(s_h, t) \varphi(t) dt \right] \Phi_h(s) \end{aligned}$$

hay

$$\int_a^b \varphi(t)H(s, t; \lambda)dt - \frac{\varphi(s)}{\lambda_0} - \int_a^b H(s, x; \lambda)\varphi(x)dx = -\sum_{h=1}^r \frac{\varphi(s_h)}{\lambda_0} \Phi_h(s). \quad (2.3.53)$$

$$\text{Vậy } \varphi(s) = \sum_{h=1}^r \varphi(s_h) \Phi_h(s). \quad (2.3.54)$$

Từ Bổ đề 2.3.7 – 2.3.10 ta có định lí sau

Định lí 2.3.11. (Định lí Fredholm thứ hai)

Nếu λ_0 là không điểm cấp m của $D(\lambda)$ thì phương trình thuần nhất (2.3.34) có ít nhất một nghiệm và nhiều nhất m nghiệm khác không, độc lập tuyến tính, xác định bởi

$$\varphi_i(s) = D_r \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \dots, s_r \\ t_1, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right) \quad i = 1, \dots, r, \quad 1 \leq r \leq m \quad (2.3.55)$$

Hơn nữa, mọi nghiệm khác của phương trình (2.3.34) đều là tổ hợp tuyến tính của các nghiệm $\varphi_i(s)$.

Định lí Fredholm thứ nhất chứng tỏ rằng phương trình

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \quad (2.3.56)$$

có nghiệm duy nhất nếu λ thỏa mãn $D(\lambda) \neq 0$.

Định lí Fredholm thứ hai khảo sát nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt \quad (2.3.57)$$

với λ thỏa mãn $D(\lambda) = 0$.

Tiếp theo, chúng ta khảo sát điều kiện để phương trình (2.3.56) có nghiệm trong trường hợp λ thỏa mãn $D(\lambda) = 0$. Các lập luận và kết quả trong phần này tương tự

trường hợp nhân suy biến nhưng công thức nghiệm được cho rõ ràng hơn.

Bây giờ, ta xét phương trình liên hợp với phương trình (2.3.56) là

$$\psi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(t, s)\psi(t)dt. \quad (2.3.58)$$

Lập luận tương tự định lí Fredholm thứ nhất, ta nhận được định lí sau

Định lí 2.3.13. *Nếu $D(\lambda) \neq 0$ thì phương trình (2.3.58) có nghiệm duy nhất và nghiệm được cho bởi*

$$\psi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \Gamma(t, s; \lambda) f(t)dt \quad (2.3.59)$$

trong đó giải thức $\Gamma(t, s; \lambda)$ xác định bởi

$$\Gamma(t, s; \lambda) = \frac{D(t, s; \lambda)}{D(\lambda)} \quad (2.3.60)$$

với

$$D(t, s; \lambda) = K(t, s) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} t, x_1, x_2, \dots, x_p \\ s, x_1, x_2, \dots, x_p \end{matrix} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_p \quad (2.3.61)$$

và

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ s_1, s_2, \dots, s_p \end{matrix} \right) ds_1 ds_2 \dots ds_p \quad (2.3.62)$$

Đối với phương trình thuần nhất của phương trình (2.3.58) ta có kết quả

Định lí 2.3.14. Với λ_0 là không điểm của $D(\lambda)$ có chỉ số r thì phương trình thuần nhất

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt \quad (2.3.63)$$

có r nghiệm độc lập tuyến tính xác định bởi

$$\Psi_i(s) = \frac{D_r \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_r \\ t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}{D_r \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_r \\ t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.3.64)$$

trong đó các giá trị $s_1, \dots, s_r$ và $t_1, \dots, t_r$ được chọn sao cho mẫu không bị triệt tiêu.

Điều kiện có nghiệm của phương trình (2.3.56) với λ thỏa mãn $D(\lambda) = 0$ thể hiện qua định lí sau

Định lí 2.3.15. Giả sử λ_0 là cực điểm cấp m của $D(\lambda)$. Khi đó phương trình (2.3.56) ứng với λ_0 có nghiệm nếu và chỉ nếu $f(s)$ trực giao với mọi nghiệm $\Psi_i(s)$ của phương trình (2.3.63) ứng với λ_0 .

Chứng minh. Giả sử phương trình (2.3.56) có nghiệm là $\varphi(s)$ ứng với λ_0 , tức là

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda_0 \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (2.3.65)$$

Nhân hai vế của (2.3.65) với $\Psi_k(s)$ ($k = 1, \dots, r$), sau đó lấy tích phân theo s , ta được

$$\int_a^b f(s) \Psi_k(s) ds = 0. \text{ Suy ra là } f(s) \text{ trực giao với mọi nghiệm } \Psi_i(s).$$

Ngược lại, giả sử $f(s)$ trực giao với mọi nghiệm $\Psi_i(s)$ của phương trình (2.3.63) ứng với λ_0 . Ta chứng minh nghiệm của phương trình (2.3.56) ứng với λ_0 cho bởi

$$\varphi_0(s) = f(s) + \lambda_0 \int_a^b H(s, t; \lambda) f(t) dt \quad (2.3.66)$$

với giả thức $H(s, t; \lambda)$ được cho bởi (2.3.51). Thật vậy, thay (2.3.66) vào phương trình (2.3.56), ta nhận được

$$\int_a^b f(t) [H(s, t; \lambda) - K(s, t) - \lambda_0 \int_a^b K(s, x) H(x, t; \lambda) dx] dt = 0. \quad (2.3.67)$$

$$\text{Thay (2.3.52) vào (2.3.67), ta được } \sum_{h=1}^r K(s, t_h) \int_a^b \Psi_h(t) f(t) dt = 0. \quad (2.3.68)$$

Do $f(s)$ trực giao với mọi nghiệm $\Psi_i(s)$ nên (2.3.68) thỏa mãn.

Vậy công thức (2.3.66) là một nghiệm của phương trình (2.3.56) ứng với λ_0 .

Nhận xét 2.3.16. Do hiệu hai nghiệm bất kì của phương trình (2.3.56) ứng với λ_0 là nghiệm của phương trình thuần nhất (2.3.34) ứng với λ_0 nên nghiệm của phương trình (2.3.56) ứng với λ_0 có dạng

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda_0 \int_a^b H(s, t; \lambda) f(t) dt + \sum_{h=1}^r \alpha_h \Phi_h(s).$$

Từ Định lý 2.3.15 và Nhận xét 2.3.16 ta có định lý sau

Định lý 2.3.17. (Định lý Fredholm thứ ba)

Cho phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda_0 \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (2.3.69)$$

với $D(\lambda_0) = 0$.

Phương trình (2.3.69) có nghiệm khi và chỉ khi $f(s)$ trực giao với mọi nghiệm $\Psi_i(s)$ của phương trình liên hợp thuần nhất của phương trình (2.3.69)

$$\psi(s) = \lambda_0 \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt. \quad (2.3.70)$$

Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình (2.3.69) có dạng

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda_0 \int_a^b H(s, t; \lambda) f(t) dt + \sum_{h=1}^r \alpha_h \Phi_h(s) \quad (2.3.71)$$

trong đó giải thức $H(s, t; \lambda)$ xác định bởi

$$H(s, t; \lambda) = \frac{D_{r+1} \left(\begin{matrix} s, s_1, \dots, s_r \\ t, t_1, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}{D_r \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_r \\ t_1, \dots, t_r \end{matrix} \middle| \lambda_0 \right)}. \quad (2.3.72)$$

2.4. Phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2 với nhân đối xứng

Trong mục này chúng tôi khảo sát phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2 với nhân đối xứng

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (2.4.1)$$

Ở trường hợp này, nghiệm của phương trình được biểu diễn qua các giá trị riêng và hàm riêng của nhân $K(s, t)$.

Định nghĩa 2.4.1. Nhân $K(s, t)$ được gọi là *nhân đối xứng* nếu $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$.

Bổ đề 2.4.2. Nếu $K(s, t)$ là nhân đối xứng thì nhân lặp $K_n(s, t)$, $n \geq 2$ đối xứng.

Chứng minh. Dễ dàng chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

Bây giờ ta xây dựng toán tử như sau: Với $\varphi \in L_2([a, b])$, $K(s, t)$ là L_2 -nhân, xét toán tử K xác định bởi

$$K\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt. \quad (2.4.2)$$

Toán tử liên hợp của toán tử K xác định bởi

$$\overline{K}\psi = \int_a^b \overline{K(t, s)}\psi(t)dt. \quad (2.4.3)$$

Định lý 2.4.3. Công thức (2.4.2) xác định toán tử hoàn toàn liên tục trong $L_2([a, b])$.

Chứng minh. Với $\varphi \in L_2([a, b])$, $t \in [a, b]$, ta có

$$|K\varphi(s)|^2 \leq \int_a^b |K(s, t)|^2 dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt = \|\varphi\|^2 \int_a^b |K(s, t)|^2 dt. \quad (2.4.4)$$

Lấy tích phân hai vế của (2.4.4) theo s từ a đến b , ta được

$$\int_a^b |K\varphi(s)|^2 ds \leq \|\varphi\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dt ds < +\infty. \quad (2.4.5)$$

Suy ra $K\varphi \in L_2([a, b])$ hay toán tử K hoàn toàn xác định.

Từ (2.4.5) ta cũng có $\|K\varphi\| \leq \|\varphi\| \left(\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \right)^{1/2}$. Suy ra $\|A\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \right)^{1/2}$.

Ta thấy K là tuyến tính và do đó K là toán tử tuyến tính liên tục.

Việc chứng minh K là toán tử hoàn toàn liên tục được chia thành hai bước.

Bước 1: Nếu nhân $K(s, t)$ suy biến thì toán tử K hoàn toàn liên tục trong $L_2([a, b])$.

Do nhân $K(s, t)$ suy biến nên $K(s, t)$ được viết dưới dạng

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^n p_i(s)q_i(t) \text{ với } p_i, q_i \in L_2([a, b]).$$

$$\text{Khi đó } K\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n p_i(s)q_i(t)\varphi(t)dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b q_i(t)\varphi(t)p_i(s)dt = \sum_{i=1}^n (\varphi(t), \overline{q_i(t)})p_i(s)$$

Điều này có nghĩa là miền giá trị của K nằm trong không gian con sinh bởi n vector $p_i(s)$ hay K là toán tử suy biến, do đó K là toán tử hoàn toàn liên tục.

Bước 2: Nhân $K(s, t)$ là L_2 -nhân.

Giả sử $\{e_i\}$ là hệ trực chuẩn đầy đủ trong $L_2([a, b])$. Suy ra hệ $\{e_i e_j\}$ là hệ trực chuẩn đầy đủ trong $L_2([a, b] \times [a, b])$.

Do $K \in L_2([a, b] \times [a, b])$ nên $K(s, t) = \sum_{i,j} a_{ij} e_i(s) e_j(t)$.

Gọi $K_{m,n}$ là toán tử sinh bởi nhân $K_{m,n}(s, t) = \sum_i^m \sum_j^n a_{ij} e_i(s) e_j(t)$.

Khi đó, $K_{m,n}$ là dãy nhân suy biến và do đó theo bước 1 ta có $K_{m,n}$ là toán tử hoàn toàn liên tục trong $L_2([a, b])$.

Ta có

$$\|K\varphi(s) - K_{m,n}\varphi(s)\| \leq \int_a^b |K(s, t) - K_{m,n}(s, t)| |\varphi(t)| dt \leq \|\varphi\| \sqrt{\int_a^b |K(s, t) - K_{m,n}(s, t)|^2 dt}.$$

Suy ra

$$\|K\varphi(s) - K_{m,n}\varphi(s)\|^2 \leq \|\varphi\|^2 \int_a^b |K(s, t) - K_{m,n}(s, t)|^2 dt. \quad (2.4.6)$$

Lấy tích phân hai vế của (2.4.6) theo s từ a đến b , ta được

$$\|K\varphi - K_{m,n}\varphi\|^2 = \int_a^b |K\varphi(s) - K_{m,n}\varphi(s)|^2 ds \leq \|\varphi\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(s, t) - K_{m,n}(s, t)|^2 dt ds. \quad (2.4.7)$$

Suy ra $\|K - K_{m,n}\| \rightarrow 0$ khi $m, n \rightarrow \infty$. Theo Định lí 0.2.8 suy ra K là toán tử hoàn toàn liên tục trong $L_2([a, b])$.

Định lí 2.4.4. Giả sử $K(s, t)$ là L_2 - nhân đối xứng. Khi đó toán tử K xác định bởi (2.4.2) là toán tử đối xứng, tự liên hợp trong $L_2([a, b])$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} (K\varphi, \psi) &= \int_a^b \overline{\psi(s)} \left[\int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \right] ds \\ &= \int_a^b \varphi(t) \left[\int_a^b K(s, t) \overline{\psi(s)} ds \right] dt = \int_a^b \varphi(s) \left[\int_a^b K(t, s) \overline{\psi(t)} dt \right] ds \\ &= \int_a^b \varphi(s) \left[\int_a^b \overline{K(t, s) \psi(t)} dt \right] ds = (\varphi, \overline{K\psi}). \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Nếu $K(s, t)$ là nhân đối xứng thì từ (2.4.9) ta có $(K\varphi, \psi) = (\varphi, K\psi)$ hay K là toán tử đối xứng. Khi đó $K = \overline{K}$ hay K là toán tử tự liên hợp.

Nhận xét 2.4.5. Theo phần chứng minh Định lí 2.4.4 ta có $(K\varphi, \varphi) = \overline{(K\varphi, \varphi)}$ nên tích vô hướng $(K\varphi, \varphi)$ là số thực.

Với kí hiệu toán tử trong (2.4.2), phương trình thuần nhất của (2.4.1) được viết dưới dạng

$$\varphi = \lambda K \varphi. \quad (2.4.10)$$

Nhận xét 2.4.6. Số $\lambda \neq 0$ là giá trị riêng của nhân $K(s, t)$ khi và chỉ khi $\frac{1}{\lambda}$ là giá trị riêng của toán tử K .

Dựa vào những kết quả về giá trị riêng, vector riêng của toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục ta suy ra một số tính chất của giá trị riêng và hàm riêng của nhân đối xứng $K(s, t)$ như sau

Định lý 2.4.7. Giả sử $K(s, t)$ là L_2 - nhân đối xứng. Khi đó

(i) Nếu $\varphi_1(s)$ và $\varphi_2(s)$ lần lượt là hai hàm riêng ứng với hai giá trị riêng λ_1, λ_2 của $K(s, t)$ thì $\varphi_1(s)$ trực giao với $\varphi_2(s)$.

(ii) Nhân $K(s, t)$ luôn có ít nhất một giá trị riêng. Hơn nữa, nếu λ_1 là giá trị riêng nhỏ nhất của $K(s, t)$ thì

$$\lambda_1^{-1} = \max \left\{ \left| \int_a^b \int_a^b K(s, t) \varphi(t) \overline{\varphi(s)} dt ds \right|, \|\varphi\|^{-1} \right\}.$$

(iii) Số giá trị riêng của $K(s, t)$ cùng lắm là một dãy đếm được $\{\lambda_n\}$ có giới hạn vô hạn.

(iv) Nhân $K(s, t)$ luôn có hệ trực chuẩn gồm các hàm riêng.

Chứng minh. Phép chứng minh được trình bày trong [4, tr.139-142]. Ở đây chúng tôi trình bày cách chứng minh khác.

(i) Suy ra từ Định lý 0.2.3.

(ii) Suy ra từ Định lý 0.2.4 và Định lý 0.2.6 (i).

(iii) Suy ra từ Định lý 0.2.6 (ii).

(iv) Suy ra từ Mệnh đề 0.1.3 và Định lý 0.2.9.

Ngoài ra, tính chất của giá trị riêng và hàm riêng của nhân đối xứng $K(s, t)$ còn được thể hiện qua định lý sau

Định lý 2.4.8. Giả sử $K(s, t)$ là L_2 - nhân đối xứng. Khi đó

(i) Giá trị riêng của nhân đối xứng là số thực.

(ii) Các giá trị riêng của nhân lặp $K_n(s, t)$ chính là lũy thừa bậc n giá trị riêng của nhân $K(s, t)$.

(iii) Số bội của mỗi giá trị riêng của $K(s, t)$ là hữu hạn.

Chứng minh. (i) Giả sử λ là giá trị riêng và $\varphi(s)$ là hàm riêng tương ứng với giá trị riêng λ , tức là

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0. \quad (2.4.11)$$

Nhân hai vế của (2.4.11) với $\overline{\varphi(s)}$, sau đó lấy tích phân theo s , ta có

$$\int_a^b |\varphi(s)|^2 ds - \lambda \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \right] \overline{\varphi(s)} ds = 0. \quad (2.4.12)$$

Từ (2.4.12) và nhận xét 2.4.5 ta được $\lambda = \frac{||\varphi||}{(K\varphi, \varphi)}$ là số thực.

(ii) Ta chứng minh cho trường hợp $n = 2$. Giả sử λ là giá trị riêng của $K(s, t)$ và $\varphi(s)$ là hàm riêng ứng với giá trị riêng λ , tức là $\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt = 0$ hay

$$(I - \lambda K)\varphi = 0. \quad (2.4.13)$$

Tác động hai vế (2.4.13) với toán tử $I + \lambda K$, ta được $\phi(s) - \lambda^2 \int_a^b K_2(s, t)\phi(t)dt = 0$.

Điều này có nghĩa λ^2 là giá trị riêng của nhân $K_2(s, t)$.

Ngược lại, giả sử $\mu = \lambda^2$ là giá trị riêng của nhân $K_2(s, t)$ và $\phi(s)$ là hàm riêng ứng với giá trị riêng λ^2 . Khi đó $(I - \lambda^2 K^2)\phi = 0$ hay

$$(I + \lambda K)(I - \lambda K)\phi = 0. \quad (2.4.14)$$

Nếu λ là giá trị riêng của $K(s, t)$ thì ta có điều phải chứng minh. Ngược lại, giả sử

$$(I - \lambda K)\phi = \psi. \quad (2.4.15)$$

Từ (2.4.14) và (2.4.15), ta có $(I + \lambda K)\psi = 0$. Vì λ không là giá trị riêng của $K(s, t)$ nên $\psi(s) \equiv 0$.

Khi đó $(I + \lambda K)\phi = 0$ hay $-\lambda$ là giá trị riêng của $K(s, t)$. Suy ra λ là giá trị riêng của $K(s, t)$.

(iii) Giả sử $\varphi_{1\lambda}(s), \varphi_{2\lambda}(s), \dots, \varphi_{n\lambda}(s), \dots$ là những hàm riêng ứng với giá trị riêng $\lambda \neq 0$. Bằng phép trực giao Gram – Schmidt, ta tìm được hệ trực chuẩn $\{u_{k\lambda}(s)\}$. Khi đó hệ $\{\overline{u_{k\lambda}(s)}\}$ cũng là hệ trực chuẩn.

Với s cố định, ta có $K(s, t) \square \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{u_{i\lambda}(t)}$ với $a_i = \int_a^b K(s, t)u_{i\lambda}(t)dt = \lambda^{-1}u_{i\lambda}(s)$.

Sử dụng bất đẳng thức Bessel, ta có

$$\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \geq \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda^{-1})^2 |u_{i\lambda}(s)|^2. \quad (2.4.16)$$

Lấy tích phân hai vế của (2.4.16) theo s , ta được

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \geq \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda^{-1})^2 = m(\lambda^{-1})^2 \text{ với } m \text{ là số bội của } \lambda.$$

Do $\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt < \infty$ nên m hữu hạn.

Bây giờ ta xét $K(s, t)$ là L_2 - nhân đối xứng khác rỗng có hữu hạn hoặc vô hạn giá trị riêng. Ta sắp xếp các giá trị riêng thành dãy sao cho mỗi giá trị riêng có số lần lặp lại bằng với số bội của chúng

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (2.4.17)$$

Đánh số các giá trị riêng này sao cho trị tuyệt đối của chúng thỏa mãn

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}| \leq \dots$$

Giả sử

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots \quad (2.4.18)$$

là dãy các hàm riêng ứng với các giá trị riêng trong dãy (2.4.17), được sắp xếp sao cho chúng không lặp lại và mỗi nhóm các hàm riêng ứng với cùng giá trị riêng là độc lập tuyến tính. Do đó, mỗi giá trị riêng λ_k trong (2.4.17) ứng với một hàm riêng trong (2.4.18). Theo Định lý 2.4.7(iv), ta có thể giả sử các hàm riêng này trực chuẩn.

Định lý 2.4.9. Giả sử $\{\varphi_k(s)\}$ là hệ trực chuẩn các hàm riêng của L_2 - nhân đối xứng $K(s, t)$ ứng

với các giá trị riêng $\{\lambda_k\}$. Khi đó, chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k}$ hội tụ và

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k} \leq \sup \left\{ \int_a^b |K(s, t)|^2 dt, s \in [a, b] \right\}.$$

Chứng minh. Với s cố định, hệ số Fourier a_k của $K(s, t)$ đối với hệ trực chuẩn $\{\overline{\varphi_k(s)}\}$ là

$$a_k = \int_a^b K(s, t) \varphi_k(t) dt = \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Bessel, ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2} \leq \int_a^b |K(s, t)|^2 dt \text{ với mọi } s \in [a, b]. \quad (2.4.19)$$

Từ (2.4.19) ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ ta xây dựng dãy nhân “cụt” như sau

Lấy λ_1 là giá trị riêng nhỏ nhất của $K(s, t)$ và $\varphi_1(s)$ là hàm riêng ứng với λ_1 .

Khi đó, nhân “cụt” đối xứng (“truncated” symmetric kernel) xác định bởi

$$K^{(2)}(s, t) = K(s, t) - \frac{\varphi_1(s)\varphi_1(t)}{\lambda_1}$$

là nhân khác rỗng. Theo Định lý 2.4.7(ii), ta có thể chọn một giá trị riêng nhỏ nhất của $K^{(2)}(s, t)$

là λ_2 và hàm riêng tương ứng là $\varphi_2(s)$. Hơn nữa, ta có $\varphi_1(s) \neq \varphi_2(s)$. Thật vậy

$$\int_a^b K^{(2)}(s, t) \varphi_1(t) dt = \int_a^b K(s, t) \varphi_1(t) dt - \frac{\varphi_1(s)}{\lambda_1} \int_a^b |\varphi_1(t)|^2 dt = 0.$$

Suy ra $\varphi_1(s)$ không là hàm riêng của nhân $K^{(2)}(s, t)$. Do đó $\varphi_1(s) \neq \varphi_2(s)$.

Lập luận tương tự, ta có nhân “cụt” thứ ba xác định bởi

$$K^{(3)}(s, t) = K^{(2)}(s, t) - \frac{\varphi_2(s)\varphi_2(t)}{\lambda_2} = K(s, t) - \sum_{i=1}^2 \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$$

có giá trị riêng nhỏ nhất là λ_3 và hàm riêng tương ứng là $\varphi_3(s)$.

Kết quả của quá trình trên thể hiện qua định lí sau

Định lí 2.4.10. Giả sử $\{\varphi_k(s)\}$ là hệ trực chuẩn các hàm riêng của L_2 - nhân đối xứng $K(s, t)$ ứng với các giá trị riêng $\{\lambda_k\}$. Khi đó, nhân “cụt” thứ $n + 1$

$$K^{(k+1)}(s, t) = K(s, t) - \sum_{m=1}^k \frac{\overline{\varphi_m(s)}\varphi_m(t)}{\lambda_m} \quad (2.4.20)$$

có các giá trị riêng là $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots$ với các hàm riêng tương ứng là $\varphi_{k+1}(s), \varphi_{k+2}(s), \dots$. Hơn nữa, nhân $K^{(k+1)}(s, t)$ không có giá trị riêng và hàm riêng nào khác.

Chứng minh. Với $j \geq k + 1$, ta có

$$\varphi_j(s) - \lambda_j \int_a^b K(s, t)\varphi_j(t)dt = 0. \quad (2.4.21)$$

Thay (2.4.20) vào (2.4.21), ta được

$$\varphi_j(s) - \lambda_j \sum_{m=1}^k \frac{\overline{\varphi_m(s)}\varphi_m(t)}{\lambda_m}(\varphi_j, \varphi_m) - \lambda_j \int_a^b K^{(k+1)}(s, t)\varphi_j(t)dt = 0. \quad (2.4.22)$$

$$\text{Do } j \geq k + 1 > m \text{ nên } (\varphi_j, \varphi_m) = 0. \quad (2.4.23)$$

Từ (2.4.22) và (2.4.23), ta có

$$\varphi_j(s) - \lambda_j \int_a^b K^{(k+1)}(s, t)\varphi_j(t)dt = 0.$$

Điều này có nghĩa là $K^{(k+1)}(s, t)$ có các giá trị riêng là $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots$ với các hàm riêng tương ứng là $\varphi_{k+1}(s), \varphi_{k+2}(s), \dots$.

Giả sử $K^{(k+1)}(s, t)$ có giá trị riêng là λ và hàm riêng tương ứng là $\varphi(s)$

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt + \lambda \sum_{m=1}^k \frac{\overline{\varphi_m(s)}\varphi_m(t)}{\lambda_m}(\varphi, \varphi_m) = 0. \quad (2.4.24)$$

Nhân hai vế của (2.4.24) với $\overline{\varphi_j(s)}$, $j \leq k$, sau đó lấy tích phân theo s , ta được

$$(\varphi, \varphi_j) - \lambda(K\varphi, \varphi_j) + \frac{\lambda}{\lambda_j}(\varphi, \varphi_j) = 0. \text{ Mà } (K\varphi, \varphi_j) = (\varphi, K\varphi_j) = \frac{1}{\lambda_j}(\varphi, \varphi_j). \text{ Do đó}$$

$$(\varphi, \varphi_j) = 0. \quad (2.4.25)$$

Thay (2.4.25) vào (2.4.24), ta có $\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt = 0$. Điều này có nghĩa λ là giá trị riêng và $\varphi(s)$ hàm riêng tương ứng của nhân $K(s, t)$ mà $\varphi \neq \varphi_j$, $j \leq k$. Hơn nữa, φ trực giao mọi với φ_j , $j \leq k$ nên $\varphi(s)$ và λ là hàm riêng và giá trị riêng trong dãy $\{\varphi_j(s)\}$ và $\{\lambda_j\}$ với $j \geq k + 1$.

Nhận xét 2.4.11. Từ Định lí 2.4.10, ta nhận thấy nếu nhân đối xứng $K(s, t)$ có hữu hạn các giá trị riêng thì $K^{(k+1)}(s, t)$ không có giá trị riêng hay $K^{(k+1)}(s, t) \equiv 0$. Do đó

$$K(s, t) = \sum_{m=1}^k \frac{\varphi_m(s) \overline{\varphi_m(t)}}{\lambda_m}.$$

Theo Mục 2.1, nhân suy biến có hữu hạn các giá trị riêng và hàm riêng nên từ Nhận xét 2.4.11 ta có định lý sau

Định lý 2.4.12. *Điều kiện cần và đủ để nhân $K(s, t)$ suy biến là $K(s, t)$ có hữu hạn các giá trị riêng.*

Dựa vào Định lý 2.4.10 và Định lý 2.4.11 ta chứng minh được định lý Hilbert – Schmidt. Kết quả của định lý này là cơ sở quan trọng để thiết lập dạng nghiệm của phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2 với $K(s, t)$ là L_2 - nhân đối xứng.

Định lý 2.4.13. (Định lý Hilbert – Schmidt) *Nếu $f \in L_2([a, b])$ biểu diễn được dưới dạng*

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)h(t)dt \quad (2.4.26)$$

trong đó $K(s, t)$ là L_2 - nhân đối xứng, $h \in L_2([a, b])$ thì $f(s)$ được khai triển thành chuỗi Fourier hội tụ tuyệt đối và đều đối với hệ trực chuẩn $\{\varphi_n(s)\}$ của nhân $K(s, t)$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(s) \quad \text{với } f_n = (f, \varphi_n)$$

trong đó hệ số Fourier f_n của f xác định bởi $f_n = \frac{h_n}{\lambda_n}$ với $h_n = (h, \varphi_n)$, λ_n là giá trị riêng ứng với hàm riêng $\varphi_n(s)$.

Chứng minh. Sử dụng tính tự liên hợp của toán tử K và $\lambda_n K \varphi_n = \varphi_n$, ta có hệ số Fourier của hàm $f(s)$ đối với hệ trực chuẩn $\{\varphi_n(s)\}$ là

$$(f, \varphi_n) = (Kh, \varphi_n) = (h, K\varphi_n) = \lambda_n^{-1}(h, \varphi_n).$$

Khi đó chuỗi Fourier của hàm $f(s)$ là $f(s) \square \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \phi_n(s)$.

Ta có

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (h, \varphi_k) \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |(h, \varphi_k)|^2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |(h, \varphi_k)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2}. \quad (2.4.27)$$

Đặt $M = \sup \left\{ \int_a^b |K(s, t)|^2 dt, s \in [a, b] \right\}$, theo Định lý 2.4.9, ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2} \leq M. \quad (2.4.28)$$

Sử dụng bất đẳng thức Bessel, ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h, \varphi_k)|^2 \leq \|h\|^2 < \infty \quad \text{hay chuỗi } \sum_{k=1}^{\infty} |(h, \varphi_k)|^2 \text{ hội tụ.}$$

Suy ra với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n_0 sao cho với mọi $p \geq n_0$, ta có

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |(h, \varphi_k)|^2 < \frac{\varepsilon}{M}. \quad (2.4.29)$$

Từ (2.4.27) – (2.4.29), ta có

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (h, \varphi_k) \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right|^2 < \varepsilon \text{ với } p \geq n_0.$$

Suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(s)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[a, b]$.

Đặt $\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(s)$. Ta chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(s)$ hội tụ đến $f(s)$.

Đặt $\psi_n(s) = \sum_{m=1}^n \frac{(h, \varphi_m)}{\lambda_m} \varphi_m(s)$. Ta có

$$\|\psi_n(s) - \psi(s)\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty. \quad (2.4.30)$$

Ta lại có

$$f(s) - \psi_n(s) = Kh - \sum_{m=1}^n \frac{(h, \varphi_m)}{\lambda_m} \varphi_m(s) = K^{(n+1)}h.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \|f(s) - \psi_n(s)\|^2 &= \|K^{(n+1)}h\|^2 = (K^{(n+1)}h, K^{(n+1)}h) \\ &= (h, K^{(n+1)}K^{(n+1)}h) = (h, K_2^{(n+1)}h). \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

Từ Định lí 2.4.8(ii) và Định lí 2.4.10 suy ra giá trị riêng nhỏ nhất của nhân $K_2^{(n+1)}(s, t)$ là $\lambda_{(n+1)}^2$.

Theo Định lí 2.4.7(ii), ta có

$$\frac{1}{\lambda_{(n+1)}^2} = \max \frac{(h, K_2^{(n+1)}h)}{(h, h)}. \quad (2.4.32)$$

Từ (2.4.31) và (2.4.32), ta được $\|f(s) - \psi_n(s)\|^2 = (h, K_2^{(n+1)}h) \leq \frac{(h, h)}{\lambda_{(n+1)}^2}$.

Theo định lí 2.4.7(iii), ta có $\lambda_{(n+1)} \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$. Do đó

$$\|f(s) - \psi_n(s)\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty. \quad (2.4.33)$$

Từ (2.4.30) và (2.4.33), suy ra

$$\|f(s) - \psi(s)\| \leq \|f(s) - \psi_n(s)\| + \|\psi_n(s) - \psi(s)\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

hay $\|f(s) - \psi(s)\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Vậy $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(s)$.

Nghiệm của phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2 với $K(s, t)$ là L_2 - nhân đối xứng được thể hiện qua định lí sau

Định lí 2.4.14. Xét phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (2.4.34)$$

với $f \in L_2([a, b])$, $K(s, t)$ là L_2 - nhân đối xứng.

Giả sử $\{\lambda_k\}$ là dãy các giá trị riêng và $\{\varphi_k(s)\}$ là dãy các hàm riêng trực chuẩn của nhân $K(s, t)$ và được sắp xếp dưới dạng (2.4.25), (2.4.26). Khi đó

(i) Nếu λ không là giá trị riêng của nhân $K(s, t)$ thì phương trình (2.4.42) có nghiệm là

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(s) \text{ với } a_k = \int_a^b f(s) \overline{\varphi_k(s)} ds. \quad (2.4.35)$$

(ii) Nếu λ là giá trị riêng bội m của nhân $K(s, t)$ thì điều kiện cần và đủ để phương trình (2.4.42) có nghiệm là $f(s)$ trực giao với $\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_{i+m}$. Khi đó, nghiệm của phương trình là

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{k \notin H} \frac{a_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(s) + \sum_{k \in H} \alpha_k \varphi_k(s), \quad (2.4.36)$$

với $a_k = \int_a^b f(s) \overline{\varphi_k(s)} ds$, α_k là hằng số,

$$H = \{k \text{ là chỉ số của } \lambda_k \text{ sao cho } \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \dots = \lambda_{i+m} = \lambda\}.$$

Chứng minh. Từ (2.4.34), ta có

$$\varphi(s) - f(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (2.4.37)$$

Phương trình (2.4.37) có dạng (2.4.26) nên theo Định lí 2.4.13, ta có

$$\varphi(s) - f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(s). \quad (2.4.38)$$

trong đó hệ số Fourier của $\varphi(s) - f(s)$ là

$$c_k = \int_a^b [\varphi(s) - f(s)] \overline{\varphi_k(s)} ds = b_k - a_k. \quad (2.4.39)$$

$$\text{với } b_k = \int_a^b \varphi(s) \overline{\varphi_k(s)} ds, \quad a_k = \int_a^b f(s) \overline{\varphi_k(s)} ds \text{ và } c_k = \frac{\lambda b_k}{\lambda_k}. \quad (2.4.40)$$

(i) Nếu λ không là giá trị riêng của nhân $K(s, t)$ thì từ (2.4.39) và (2.4.40), ta có

$$c_k = \frac{\lambda a_k}{\lambda_k - \lambda}. \quad (2.4.41)$$

Từ (2.4.38) và (2.4.41), ta có (2.4.35).

(ii) Giả sử λ là giá trị riêng bội m của nhân $K(s, t)$. Đặt $\lambda = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+m}$.

Nếu $\lambda_k \notin \{\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{i+m}\}$ thì hệ số c_k trong (2.4.38) xác định.

Nếu $\lambda_k \in \{\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{i+m}\}$ thì ta phải có $a_k = 0$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để phương trình (2.4.34) có nghiệm là $f(s)$ trực giao với $\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_{i+m}$. Lúc đó, nghiệm của phương trình (2.4.34) có dạng (2.4.36).

Ví dụ 2.4.15. Giải phương trình tích phân

$$\varphi(s) = (s+1)^2 + \int_{-1}^1 (st + s^2 t^2) \varphi(t) dt. \quad (2.4.42)$$

Lời giải. Nhân $K(s, t) = st + s^2 t^2$ có giá trị riêng là $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ và hàm riêng trực chuẩn lần

lượt tương ứng là $\varphi_1(s) = \frac{\sqrt{6}s}{2}$, $\varphi_2(s) = \frac{\sqrt{10}s^2}{2}$.

Ta có $a_1 = \int_{-1}^1 (t^2 + 2t + 1) \frac{\sqrt{6}t}{2} dt = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $a_2 = \int_{-1}^1 (t^2 + 2t + 1) \frac{\sqrt{10}t^2}{2} dt = \frac{8\sqrt{6}}{15}$.

Do $\lambda = 1$ không là giá trị riêng của $K(s, t)$ nên nghiệm của phương trình (2.4.42) là

$$\varphi(s) = \frac{25}{9}s^2 + 6s + 1.$$

Ví dụ 2.4.16. Giải phương trình tích phân

$$\varphi(s) = 1 + s^2 + \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (st + s^2 t^2) \varphi(t) dt. \quad (2.4.43)$$

Lời giải. Nhân $K(s, t) = st + s^2 t^2$ có giá trị riêng là $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ và hàm riêng trực chuẩn lần

lượt tương ứng là $\varphi_1(s) = \frac{\sqrt{6}s}{2}$, $\varphi_2(s) = \frac{\sqrt{10}s^2}{2}$.

Do $\lambda = \frac{3}{2}$ là giá trị riêng của $K(s, t)$ và $f(s) = 1 + s^2$ trực giao với $\varphi_1(s)$ nên nghiệm của (2.4.43) có dạng (2.4.36).

Ta có $a_1 = 0$, $a_2 = \int_{-1}^1 (t^2 + 2t + 1) \frac{\sqrt{10}t^2}{2} dt = \frac{8\sqrt{6}}{15}$.

Nghiệm của phương trình (2.4.43) là $\varphi(s) = 5s^2 + cs + 1$ với c là hằng số.

Đối với phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 1

$$f(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt \quad (2.4.44)$$

với $K(s, t)$ là L_2 -nhân đối xứng, ta có kết quả sau:

Định lí 2.4.17. Giả sử $\{\lambda_k\}$ là dãy các giá trị riêng và $\{\varphi_k(s)\}$ là dãy các hàm riêng trực chuẩn của L_2 -nhân đối xứng $K(s, t)$ và được sắp xếp dưới dạng (2.4.17), (2.4.18). Khi đó, nếu chuỗi

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \lambda_k^2$ phân kì thì phương trình (2.4.52) không có nghiệm, trường hợp ngược lại, phương trình (2.4.44) có nghiệm được cho bởi

$$\varphi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \varphi_k(s) \text{ với } a_k = \int_a^b f(s) \overline{\varphi_k(s)} ds.$$

Chứng minh. Với các kí hiệu như trong Định lí 2.4.14, theo Định lí Hilbert – Schmidt ta có

$$a_k = \frac{b_k}{\lambda_k} \text{ hay } b_k = a_k \lambda_k.$$

Áp dụng Định lí Riesz – Fischer ta có điều phải chứng minh.

Chương 3. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TUYẾN TÍNH VOLTERRA

Phương trình tích phân tuyến tính Volterra được xem là trường hợp riêng của phương trình tích phân tuyến tính Fredholm với nhân thỏa mãn $K(s, t) = 0, t > s$. Tuy nhiên, phương trình tích phân tuyến tính Volterra có một vài tính chất riêng biệt. Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kết quả riêng biệt đó. Cũng như phương trình tích phân tuyến tính Fredholm, phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2 cũng có những kết quả phong phú hơn phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 1 và được ưu tiên trình bày trước.

Trong chương này, nếu không nói gì khác thì các hàm được xét là hàm thực.

3.1. Phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2

Xét phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^s K(s, t)\varphi(t)dt \quad \text{với } a \leq s \leq b \quad (3.1.1)$$

trong đó các hàm f, K cho trước, λ là tham số, φ là hàm cần tìm.

Sử dụng phương pháp xấp xỉ liên tiếp, ta thiết lập điều kiện tồn tại nghiệm cũng như dạng nghiệm của phương trình (3.1.1) khi các hàm f, K thỏa mãn một trong hai giả thiết sau.

Giả thiết (C):

(C₁): Hàm $f(t) \neq 0$ và $f(t)$ liên tục trên $[a, b]$,

(C₂): Với $a \leq s \leq b, K(s, t) \neq 0, K(s, t)$ liên tục trên $[a, b] \times [a, s]$.

Giả thiết (D):

(D₁): Hàm $f \in L_2([a, b]), f \neq 0$,

(D₂): Hàm $K(s, t)$ là L_2 -nhân, $K \neq 0$.

Ta xây dựng dãy $\{\varphi_n\}$ như sau

$$\begin{aligned} \varphi_0(s) &= f(s), \\ \varphi_1(s) &= f(s) + \lambda \int_a^s K(s, t)\varphi_0(t)dt, \dots, \\ \varphi_n(s) &= f(s) + \lambda \int_a^s K(s, t)\varphi_{n-1}(t)dt. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Theo cách xây dựng của $\varphi_n(s)$, ta có

$$\varphi_n(s) = f(s) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_a^s K_m(s, t)f(t)dt \quad (3.1.3)$$

$$\text{với } K_m(s, t) = \int_t^s K(s, x)K_{m-1}(x, t)dx, K_1(s, t) = K(s, t). \quad (3.1.4)$$

Biểu thức (3.1.4) được gọi là *nhân lặp thứ m* của phương trình (3.1.1).

Định lí 3.1.1. Giả sử giả thiết (C) đúng. Khi đó phương trình (3.1.1) luôn có duy nhất nghiệm $\varphi \in C[a, b]$ được cho bởi

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt. \quad (3.1.5)$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh sự tồn tại nghiệm. Xem $K(s, t) = 0$ với $t > s$ thì nhân $K(s, t)$ liên tục với $t \neq s$.

Khi đó, $|K(s, t)| \leq M = \max\{|K(s, t)|, a \leq s, t \leq b, s \neq t\}$. Đặt $N = \int_a^b |f(s)| ds$.

Bằng qui nạp ta chứng minh được

$$\left| \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt \right| \leq NM^m \frac{(s-a)^{m-1}}{(m-1)!}. \quad (3.1.6)$$

Từ (3.1.6) ta có

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \lambda^m \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda|^m NM^m \frac{(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}. \quad (3.1.7)$$

Do chuỗi ở vế phải của (3.1.7) hội tụ nên vế trái của (3.1.7) là chuỗi hội tụ đều trên $[a, b]$. Suy ra

chuỗi $f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[a, b]$.

$$\text{Đặt } \varphi(s) = f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt. \quad (3.1.8)$$

Theo giả thiết (C), ta có $\varphi \in C[a, b]$.

Mặt khác, từ (3.1.3) và (3.1.8) suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(s) = \varphi(s) \text{ với } a \leq s \leq b. \quad (3.1.9)$$

Khi đó, từ (3.1.2) và (3.1.9) suy ra φ là nghiệm của phương trình (3.1.1).

Bây giờ ta chứng minh sự duy nhất nghiệm. Giả sử φ_1 và φ_2 là hai nghiệm bất kì của phương trình (3.1.1). Đặt $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Khi đó, φ là nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^s K(s, t) \varphi(t) dt \text{ với } a \leq s \leq b. \quad (3.1.10)$$

Bằng qui nạp ta chứng minh được

$$|\varphi(s)| \leq \|\varphi\| \frac{M^n (s-a)^n}{n!} \text{ với } a \leq s \leq b, n = 0, 1, \dots$$

Cho $n \rightarrow \infty$, ta được $|\varphi(s)| = 0$ với $a \leq s \leq b$ hay $\|\varphi\| = 0$. Do đó $\varphi_1 = \varphi_2$.

Định lí 3.1.2. Giả sử giả thiết (D) đúng. Khi đó phương trình (3.1.1) luôn có duy nhất nghiệm $\varphi \in L_2([a, b])$ được cho bởi

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt. \quad (3.1.11)$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh sự tồn tại nghiệm. Đặt

$$A^2(s) = \int_a^b K^2(s, x) dx, \quad B^2(t) = \int_a^b K^2(t, x) dx.$$

Bằng qui nạp ta chứng minh được

$$K_{n+2}^2(s, t) \leq A^2(s) B^2(t) F_n(s, t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1.12)$$

với $F_1(s, t) = \int_t^s A^2(x) dx$, $F_2(s, t) = \int_t^s A^2(x) F_1(x, t) dx$ và

$$F_n(s, t) = \int_t^s A^2(x) F_{n-1}(x, t) dx, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.1.13)$$

Bằng qui nạp ta chứng minh được

$$F_n(s, t) = \frac{1}{n!} F_1^n(s, t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1.14)$$

Thật vậy, hiển nhiên (3.1.14) đúng với $n = 1$.

Giả sử (3.1.14) đúng với $n = k - 1 \geq 1$. Ta chứng minh (3.1.14) đúng với $n = k$.

Từ (3.1.13) ta có

$$\begin{aligned} F_n(s, t) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_t^s A^2(x) F_1^{n-1}(x, t) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^s F_1^{n-1}(x, t) \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{1}{n} F_1^n(x, t) \right]_{x=t}^{x=s} = \frac{1}{n!} F_1^n(s, t). \end{aligned}$$

Vậy (3.1.13) được chứng minh.

$$\text{Do } \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \leq N^2 \text{ nên } 0 \leq F_1(s, t) \leq \int_a^b A^2(x) dx \leq N^2. \quad (3.1.15)$$

$$\text{Từ (3.1.14) và (3.1.15), ta có } 0 \leq F_n(s, t) \leq \frac{1}{n!} N^{2n}. \quad (3.1.16)$$

Từ (3.1.12) và (3.1.16), ta có

$$|K_{n+2}(s, t)| \leq A(s) B(t) \frac{N^n}{\sqrt{n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.17)$$

Suy ra

$$|\lambda^{m+2} K_{m+2}(s, t)| \leq |\lambda|^2 A(s) B(t) \frac{(N|\lambda|)^m}{\sqrt{m!}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.18)$$

Do chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda|^2 A(s) B(t) \frac{(N|\lambda|)^m}{\sqrt{m!}}$ luôn hội tụ hầu hết trên $[a, b] \times [a, b]$ nên từ (3.1.18) suy ra chuỗi

$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m K_m(s, t)$ hội tụ tuyệt đối hầu hết trên $[a, b] \times [a, b]$.

Do đó $f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^s K_m(s, t) f(t) dt = f(s) + \int_a^s \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m K_m(s, t) f(t) dt$ hội tụ.

Lập luận tương tự phần chứng minh Định lý 3.1.1, ta có (3.1.11) là nghiệm của phương trình (3.1.1). Do $K \in L_2([a, b] \times [a, b])$ nên $K_n \in L_2([a, b] \times [a, b])$. Do đó $\varphi \in L_2([a, b])$.

Bây giờ ta chứng minh sự duy nhất nghiệm. Giả sử φ_1 và φ_2 là hai nghiệm bất kì của phương trình (3.1.1). Đặt $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Khi đó, φ là nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^s K(s, t) \varphi(t) dt \quad \text{với } a \leq s \leq b. \quad (3.1.19)$$

Ta có đánh giá $\varphi^2(s) \leq |\lambda|^2 \int_a^s K^2(s, t) dt \int_a^s \varphi^2(t) dt \leq |\lambda|^2 A^2(s) \|\varphi\|^2$. (3.1.20)

Từ (3.1.19) và (3.1.20), ta có

$$\begin{aligned} \varphi^2(s) &\leq |\lambda|^2 \int_a^s K^2(s, t) dt \int_a^s \varphi^2(t) dt \leq |\lambda|^4 \|\varphi\|^2 \int_a^s K^2(s, t) dt \int_a^s A^2(t) dt \\ &= |\lambda|^4 \|\varphi\|^2 A^2(s) \int_a^s A^2(t) dt. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Từ (3.1.19) và 3.1.21), ta có

$$\begin{aligned} \varphi^2(s) &\leq |\lambda|^2 \int_a^s K^2(s, t) dt \int_a^s \varphi^2(t) dt \leq |\lambda|^6 \|\varphi\|^2 \int_a^s K^2(s, t) dt \int_a^s A^2(t) dt \int_a^t A^2(x) dx \\ &= |\lambda|^6 \|\varphi\|^2 A^2(s) \int_a^s A^2(t) dt \int_a^t A^2(x) dx. \end{aligned}$$

Tổng quát ta được $\varphi^2(s) \leq |\lambda|^6 \|\varphi\|^2 A^2(s) \int_a^s A^2(t_1) dt_1 \int_a^{t_1} \dots \int_a^{t_n} A^2(t_n) dt_n$. (3.1.22)

Mặt khác, theo (3.1.14), ta có

$$\int_a^s A^2(t_1) dt_1 \int_a^{t_1} \dots \int_a^{t_n} A^2(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left[\int_a^s A^2(x) dx \right]^n \leq \frac{1}{n!} N^{2n}. \quad (3.1.23)$$

Từ (3.1.2) và (3.1.23), ta có $\varphi^2(s) \leq |\lambda|^2 \|\varphi\|^2 A^2(s) \frac{(|\lambda|^2 N^2)^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Suy ra $\varphi(s) = 0$. Do đó $\varphi_1 = \varphi_2$ hầu hết trên $[a, b]$. Vậy nghiệm của phương trình (3.1.11) là duy nhất.

Ví dụ 3.1.3. Giải phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2 a

$$\varphi(s) = 1 + s + \lambda \int_0^s (s-t)\varphi(t)dt. \quad (3.1.24)$$

Lời giải. Dãy nhân lặp được xác định như sau

$$K_1(s, t) = s - t, \quad K_2(s, t) = \int_t^s K(s, x)K(x, t)dx = \frac{(s-t)^3}{3!},$$

$$K_3(s, t) = \int_t^s K(s, x)K_2(x, t)dx = \frac{(s-t)^5}{5!}, \dots$$

Tiếp tục như vậy, ta nhận được dạng nghiệm của phương trình (3.1.24) là

$$\varphi(s) = 1 + s + \lambda \left(\frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} \right) + \lambda^2 \left(\frac{s^4}{4!} + \frac{s^5}{5!} \right) + \dots$$

Nếu $\lambda = 1$ thì nghiệm của phương trình (3.1.24) là $\varphi(s) = e^s$.

Ví dụ 3.1.4. Xét phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^s e^{s-t}\varphi(t)dt. \quad (3.1.25)$$

Lời giải. Dãy nhân lặp được xác định như sau

$$K_1(s, t) = e^{s-t}, \quad K_2(s, t) = \int_t^s K(s, x)K(x, t)dx = (s-t)e^{s-t},$$

$$K_3(s, t) = \int_t^s K(s, x)K_2(x, t)dx = \frac{(s-t)^2}{2!}e^{s-t}, \dots$$

Tổng quát ta được

$$K_m(s, t) = \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!}e^{s-t}.$$

Do đó nghiệm của phương trình (3.1.25) được cho bởi

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}(s-t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{s-t} = f(s) + \lambda \int_0^s e^{(\lambda+1)(s-t)} f(t)dt.$$

3.2. Phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 1

Xét phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 1

$$f(s) + \lambda \int_a^s K(s, t)\varphi(t)dt = 0. \quad (3.2.1)$$

Với điều kiện thích hợp của $K(s, t)$ và $f(s)$, phương trình (3.2.1) được đưa về phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2. Từ đó, việc khảo sát phương trình (3.2.1) được quy về việc khảo sát phương trình tích phân tuyến tính loại 2 tương ứng. Trong phần này, ta trình bày hai cách biến đổi đưa về phương trình tích phân loại 2.

Định lý 3.2.1. Nếu giả thiết (C) đúng, $\lambda \neq 0$, $K(s, s) \neq 0$, các hàm $f'(s)$, $K'_s(s, t)$ tồn tại và liên tục thì phương trình (3.2.1) được đưa về phương trình tích phân tuyến tính loại 2 có dạng

$$\varphi(s) = -\frac{f'(s)}{\lambda K(s,s)} - \int_a^s \frac{K'_s(s,t)}{K(s,s)} \varphi(t) dt. \quad (3.2.2)$$

Chứng minh. Lấy đạo hàm hai vế của phương trình (3.2.1) theo s , ta được

$$f'(s) + \lambda K(s,s)\varphi(s) + \lambda \int_a^s K'_s(s,t)\varphi(t) dt = 0. \quad (3.2.3)$$

Chia hai vế (3.2.3) cho $\lambda K(s,s)$, ta được (3.2.2).

Định lý 3.2.2. Nếu giả thiết (C) đúng, $\lambda \neq 0$, $K(s,s) \neq 0$, $K'_t(s,t)$ tồn tại và liên tục thì phương trình (3.2.1) được đưa về phương trình tích phân tuyến tính loại 2 có dạng

$$\Phi(s) = -\frac{f(s)}{\lambda K(s,s)} + \int_a^s \frac{K'_t(s,t)}{K(s,s)} \Phi(t) dt \quad \text{với} \quad \Phi(s) = \int_0^s \varphi(t) dt. \quad (3.2.4)$$

Chứng minh. Sử dụng tích phân từng phần, phương trình (3.2.1) trở thành

$$f(s) + \lambda \left[K(s,t)\Phi(t) \right]_{t=a}^{t=s} - \lambda \int_a^s K'_t(s,t)\Phi(t) dt = 0.$$

hay

$$f(s) + \lambda K(s,s)\Phi(s) - \lambda \int_a^s K'_t(s,t)\Phi(t) dt = 0. \quad (3.2.5)$$

Chia hai vế của (3.2.5) cho $\lambda K(s,s)$, ta được (3.2.4).

Ví dụ 3.2.3. Giải phương trình tích phân Volterra loại 1

$$s + \int_0^s e^{s-t} \varphi(t) dt = 0. \quad (3.2.6)$$

Lời giải. So sánh phương trình (3.2.6) với phương trình (3.2.1), ta có $f(s) = s$, $K(s,t) = e^{s-t}$. Ta chuyển phương trình (3.2.6) về phương trình tích phân Volterra loại 2.

Cách 1: Theo (3.2.3), ta có phương trình tích phân Volterra loại 2

$$\varphi(s) = -1 - \int_0^s e^{s-t} \varphi(t) dt. \quad (3.2.7)$$

Theo Ví dụ 3.1.4, suy ra nghiệm của (3.2.7) là $\varphi(s) = -1 + \int_0^s dt = -1 + s$.

Vậy (3.2.6) có nghiệm là $\varphi(s) = -1 + s$.

Cách 2: Theo (3.2.4), ta có phương trình tích phân Volterra loại 2

$$\Phi(s) = -s - \int_0^s e^{s-t} \Phi(t) dt \quad (3.2.8)$$

Theo Ví dụ 3.1.4, suy ra nghiệm của (3.2.8) là $\Phi(s) = -s + \int_0^s t dt = -s + \frac{s^2}{2}$.

Do đó $\int_0^s \varphi(t) dt = -s + \frac{s^2}{2}$ hay $\varphi(s) = -1 + s$. Vậy (3.2.6) có nghiệm là $\varphi(s) = -1 + s$.

Chương 4. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TUYẾN TÍNH

Chương này trình bày ứng dụng của phương trình tích phân tuyến tính trong một số bài toán giá trị ban đầu, bài toán biên đơn giản, bài toán dao động tự do của dây đàn hồi. Tuy nhiên, chúng tôi chỉ mới đưa được bài toán đang xét về một phương trình tích phân tuyến tính thích hợp, còn việc thiết lập nghiệm của các phương trình tích phân này chưa được trình bày.

4.1. Bài toán giá trị ban đầu cho phương trình vi phân thường

Bài toán 4.1.1. Tìm hàm $y(s)$ thỏa mãn

$$y''(s) + A(s)y'(s) + B(s)y(s) = F(s), \quad a \leq s \leq b \quad (4.1.1)$$

$$y(a) = q_0, \quad y'(a) = q_1, \quad (4.1.2)$$

trong đó A, B, F là các hàm liên tục trên $[a, b]$ cho trước.

Sử dụng một số phép biến đổi ta đi tìm mối liên hệ giữa Bài toán (4.1.1) – (4.1.2) với một phương trình tích phân tuyến tính nào đó.

Bổ đề 4.1.2. Với F là hàm liên tục trên $[a, b]$, n là số nguyên dương và $s, s_1, \dots, s_n \in [a, b]$, ta có

$$\int_a^s \int_a^{s_1} \dots \int_a^{s_{n-1}} F(s_1) ds_1 ds_2 \dots ds_{n-1} ds_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^s (s-t)^{n-1} F(t) dt. \quad (4.1.3)$$

Chứng minh. Đặt $I_n(s) = \int_a^s (s-t)^{n-1} F(t) dt,$ (4.1.4)

$$f(s, t) = (s-t)^{n-1} F(t). \quad (4.1.5)$$

Với $n = 1$, theo (4.1.4) ta có $\frac{dI_1}{ds} = F(s).$ (4.1.6)

Với $n > 1$, sử dụng công thức đạo hàm tích phân phụ thuộc tham số, ta được

$$\frac{dI_n}{ds} = (n-1) \int_a^s (s-t)^{n-2} F(t) dt + \left[(s-t)^{n-1} F(t) \right]_{t=s} = (n-1) I_{n-1}. \quad (4.1.7)$$

Từ (4.1.7), suy ra $\frac{d^k I_n}{ds^k} = (n-1)(n-2)\dots(n-k) I_{n-k}$ với $n > k$. (4.1.8)

Với $k = n-1$, ta được $\frac{d^{n-1} I_n}{ds^{n-1}} = (n-1)! I_1.$ (4.1.9)

Lấy vi phân hai vế của (4.1.9), kết hợp với (4.1.6), ta được

$$\frac{d^n I_n}{ds^n} = (n-1)! F(s). \quad (4.1.10)$$

Từ (4.1.4) và (4.1.9) suy ra $I_n(s)$ và các đạo hàm của nó triệt tiêu tại $s = a$. Khi đó, từ (4.1.7) và (4.1.11), ta có

$$I_1(s) = \int_a^s F(s_1)ds_1, \quad I_2(s) = \int_a^s I_1(s_2)ds_2 = \int_a^s \int_a^{s_2} F(s_1)ds_1ds_2, \dots,$$

$$I_n(s) = (n-1)! \int_a^s \int_a^{s_1} \dots \int_a^{s_{n-1}} F(s_1)ds_1ds_2 \dots ds_{n-1}ds_n. \quad (4.1.11)$$

So sánh (4.1.4) và (4.1.11) ta có (4.1.3). Vậy Bổ đề 4.1.2 được chứng minh.

Bây giờ ta khảo sát bài toán (4.1.1) – (4.1.2).

Lấy tích phân hai vế của (4.1.1) từ a đến s , kết hợp với (4.1.2), ta được

$$y'(s) - q_1 = -A(s)y(s) - \int_a^s [B(s_1) - A'(s_1)]y(s_1)ds_1 + \int_a^s F(s_1)ds_1 + A(a)q_0. \quad (4.1.12)$$

Lấy tích phân hai vế của (4.1.12) từ a đến s , kết hợp với (4.1.2), ta được

$$y(s) - q_0 = -\int_a^s A(s_1)y(s_1)ds_1 - \int_a^s \int_a^{s_2} [B(s_1) - A'(s_1)]y(s_1)ds_1ds_2$$

$$+ \int_a^s \int_a^{s_2} F(s_1)ds_1ds_2 + [A(a)q_0 + q_1](s-a). \quad (4.1.13)$$

Theo Bổ đề 4.1.2, ta có

$$\int_a^s \int_a^{s_2} F(s_1)ds_1ds_2 = \int_a^s (s-t)F(t)dt, \quad (4.1.14)$$

$$\int_a^s \int_a^{s_2} [B(s_1) - A'(s_1)]y(s_1)ds_1ds_2 = \int_a^s (s-t)[B(t) - A'(t)]y(t)dt. \quad (4.1.15)$$

Thay (4.1.14) và (4.1.15) vào (4.1.13), ta được

$$y(s) = q_0 + [A(a)q_0 + q_1](s-a) + \int_a^s (s-t)F(t)dt$$

$$- \int_a^s \{A(t) + (s-t)[B(t) - A'(t)]\}y(t)dt. \quad (4.1.16)$$

Đặt

$$K(s,t) = -\{A(t) + (s-t)[B(t) - A'(t)]\}, \quad (4.1.17)$$

$$f(s) = q_0 + [A(a)q_0 + q_1](s-a) + \int_a^s (s-t)F(t)dt. \quad (4.1.18)$$

Từ (4.1.16) – (4.1.17), ta nhận được phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2 như sau

$$y(s) = f(s) + \int_a^s K(s,t)y(t)dt. \quad (4.1.19)$$

Ngược lại, dễ dàng kiểm tra mọi nghiệm $y(s)$ của phương trình (4.1.19) đều là nghiệm của Bài toán (4.1.1) – (4.1.2).

Ví dụ 4.1.3. Tìm hàm $y(s)$ thỏa mãn

$$y''(s) + \lambda y(s) = F(s), \quad (4.1.20)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (4.1.21)$$

Lời giải. So sánh Bài toán (4.1.20) – (4.1.21) với Bài toán (4.1.1) – (4.1.2), ta có

$$A(s) = 0, \quad B(s) = \lambda.$$

Bài toán (4.1.20) – (4.1.21) dẫn đến phương trình tích phân tuyến tính Volterra loại 2 sau

$$y(s) = 1 + \int_0^s (s-t)F(t)dt + \lambda \int_0^s (t-s)y(t)dt.$$

4.2. Bài toán biên cho phương trình vi phân thường

Bài toán 4.2.1. Tìm hàm $y(s)$ thỏa mãn

$$y''(s) + A(s)y'(s) + B(s)y(s) = F(s), \quad a \leq s \leq b \quad (4.2.1)$$

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \quad (4.2.2)$$

trong đó A, B, F là các hàm liên tục trên $[a, b]$ cho trước.

Sử dụng một số phép biến đổi ta đi tìm mối liên hệ giữa Bài toán (4.2.1) – (4.2.2) với một phương trình tích phân tuyến tính nào đó.

Lấy tích phân hai vế của (4.2.1) từ a đến s , kết hợp điều kiện biên $y(a) = y_0$, ta được

$$y'(s) = C + \int_a^s F(s)ds - A(s)y(s) + A(a)y_0 + \int_a^s [A'(s) - B(s)]y(s)ds \quad (4.2.3)$$

với C là hằng số.

Lấy tích phân hai vế của (4.2.3) từ a đến s , ta được

$$\begin{aligned} y(s) - y_0 &= [C + A(a)y_0](s-a) + \int_a^s \int_a^{s_2} F(s_1)ds_1ds_2 \\ &\quad - \int_a^s A(s_1)y(s_1)ds_1 + \int_a^s \int_a^{s_2} [A'(s_1) - B(s_1)]y(s_1)ds_1ds_2. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Sử dụng Bổ đề 4.1.2, từ (4.2.4) ta được

$$\begin{aligned} y(s) - y_0 &= [C + A(a)y_0](s-a) + \int_a^s (s-t)F(t)dt \\ &\quad - \int_a^s \{A(t) - (s-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Trong (4.2.5), thay $s = b$, kết hợp với điều kiện biên $y(b) = y_1$, ta được

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= [C + A(a)y_0](b-a) + \int_a^b (b-t)F(t)dt \\ &\quad - \int_a^b \{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Từ (4.2.6), suy ra

$$C + A(a)y_0 = \frac{s-a}{b-a} \{ (y_1 - y_0) - \int_a^b (b-t)F(t)dt \}$$

$$+ \int_a^b \{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt\}. \quad (4.2.7)$$

Từ (4.2.5) và (4.2.7), ta được

$$\begin{aligned} y(s) = & y_0 + \int_a^s (s-t)F(t)dt + \frac{s-a}{b-a}[(y_1 - y_0) - \int_a^b (b-t)F(t)dt] \\ & - \int_a^s \{A(t) - (s-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt \\ & + \int_a^b \frac{s-a}{b-a} \{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt\}. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Đặt

$$f(s) = y_0 + \int_a^s (s-t)F(t)dt + \frac{s-a}{b-a}[(y_1 - y_0) - \int_a^b (b-t)F(t)dt], \quad (4.2.9)$$

$$K(s, t) = \begin{cases} \frac{s-a}{b-a} \{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\}, & t \geq s, \\ A(t) \left[\frac{s-a}{b-a} - 1 \right] - \frac{(t-a)(b-s)}{b-a} [A'(t) - B(t)], & t < s. \end{cases} \quad (4.2.10)$$

Từ (4.2.9) và (4.2.10) ta đưa (4.2.8) về dạng phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2

$$y(s) = f(s) + \int_a^b K(s, t)y(t)dt. \quad (4.2.11)$$

Ví dụ 4.2.2. Tìm hàm $y(s)$ thỏa mãn

$$y''(s) + \lambda P(s)y(s) = Q(s), \quad (4.2.12)$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (4.2.13)$$

Lời giải. So sánh Bài toán (4.2.12) – (4.2.13) với Bài toán (4.2.1) – (4.2.2), ta có

$$A(s) = 0, \quad B(s) = \lambda P(s), \quad F(s) = Q(s), \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0.$$

Thay các kết quả này vào (4.2.9), (4.2.10), ta được

$$f(s) = \int_a^s (s-t)Q(t)dt - \frac{s-a}{b-a} \int_a^b (b-t)Q(t)dt, \quad (4.2.14)$$

$$K(s, t) = \begin{cases} \frac{\lambda(s-a)(b-t)P(t)}{b-a}, & t \geq s, \\ \frac{\lambda(t-a)(b-s)P(t)}{b-a}, & t < s. \end{cases} \quad (4.2.15)$$

Bài toán (4.2.12) – (4.2.13) dẫn đến phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2

$$y(s) = f(s) + \int_a^b K(s, t)y(t)dt.$$

Ví dụ 4.2.3. Giải phương trình tích phân Fredholm loại 1

$$f(s) = \int_0^1 K(s, t)\varphi(t)dt \quad (4.2.16)$$

trong đó
$$K(s, t) = \begin{cases} s(1-t), & s < t, \\ (1-s)t, & s > t. \end{cases}$$

Lời giải. Phương trình (4.2.16) – (4.2.17) có nhân đối xứng, ta khảo sát phương trình này dựa vào kết quả của Định lý 2.4.16.

Từ Ví dụ 4.2.2 suy ra bài toán biên

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (4.2.17)$$

tương đương với phương trình

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^1 K(s, t)\varphi(t)dt. \quad (4.2.18)$$

Bài toán (4.2.17) có các giá trị riêng là

$$\lambda_1 = \pi^2, \quad \lambda_2 = 2^2 \pi^2, \dots, \quad \lambda_n = n^2 \pi^2, \dots \quad (4.2.19)$$

và các hàm riêng trực chuẩn tương ứng là

$$\varphi_1(s) = \sqrt{2} \sin \pi s, \quad \varphi_2(s) = \sqrt{2} \sin 2\pi s, \dots, \quad \varphi_n(s) = \sqrt{2} \sin n\pi s, \dots \quad (4.2.20)$$

Do đó $K(s, t)$ có các giá trị riêng là (4.2.19) và hàm riêng trực chuẩn là (4.2.20).

Ta có $a_k = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \sin k\pi t dt$. Theo Định lý 2.4.17, phương trình (4.2.16) có nghiệm khi và chỉ khi

chuỗi $\pi^4 \sum_{k=1}^{\infty} k^4 a_k^2$ hội tụ. Lúc đó, nghiệm của (4.2.16) là

$$\varphi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^4 \sqrt{2} \sum_{k=1}^n k^4 a_k^2 \sin n\pi s.$$

4.3. Bài toán dao động tự do của dây đàn hồi

Dao động tự do của dây đàn hồi được mô tả bởi bài toán: Tìm hàm $y(x, t)$ thỏa mãn

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{với } c \text{ là hằng số,} \quad (4.3.1)$$

$$y(0, t) = 0, \quad y(1, t) = 0, \quad (4.3.2)$$

$$y(x, 0) = g(x), \quad y_t(x, 0) = 0. \quad (4.3.3)$$

Bằng phương pháp tách biến, ta có nghiệm của bài toán (4.3.1) – (4.3.3) là

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\pi ct) \sin(n\pi x) \quad \text{với } b_n = 2 \int_0^1 g(x) \sin n\pi x dx.$$

Ở đây ta đưa bài toán (4.3.1) – (4.3.3) về phương trình tích phân. Việc khảo sát bài toán (4.3.1) – (4.3.3) được quy về khảo sát phương trình tích phân.

Đặt $y(x, t) = u(x)\varphi(t)$. Bài toán (4.3.1) – (4.3.3) dẫn đến hai bài toán sau:

Bài toán biên (4.3.3) – (4.3.4)

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad (4.3.3)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (4.3.4)$$

Bài toán giá trị ban đầu (4.3.5) – (4.3.6)

$$\varphi''(t) + \lambda c^2 \varphi(t) = 0, \quad (4.3.5)$$

$$\varphi(0) = \frac{u(x)}{g(x)}, \quad \varphi'(0) = 0. \quad (4.3.6)$$

Từ Ví dụ 4.2.3, ta có Bài toán biên (4.3.3) – (4.3.4) tương đương với phương trình tích phân thuần nhất

$$u(s) = \lambda \int_0^1 K(s, t) u(t) dt \quad (4.3.7)$$

trong đó
$$K(s, t) = \begin{cases} s(1-t), & s < t, \\ (1-s)t, & s > t. \end{cases}$$

Sử dụng kết quả Bài toán (4.1.1) – (4.1.2), suy ra Bài toán (4.3.5) – (4.3.6) tương đương với phương trình tích phân Volterra

$$\varphi(t) = \frac{g(x)}{u(x)} + \lambda \int_0^t c^2(s-t) \varphi(s) ds. \quad (4.3.8)$$

Khảo sát phương trình tích phân (4.3.7) và (4.3.8), ta có kết quả của Bài toán (4.3.1) – (4.3.3).

KẾT LUẬN

Trên cơ sở tổng hợp, phân tích các tài liệu tham khảo, luận văn đạt được một số kết quả sau đây

Thứ nhất, luận văn hệ thống và chi tiết hóa các kết quả về điều kiện tồn tại nghiệm, dạng nghiệm của phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2 với nhân suy biến, nhân đối xứng, L_2 -nhân bất kì; sử dụng phương pháp xấp xỉ liên tiếp khảo sát điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại 2 và Volterra loại 2 trong trường hợp nhân liên tục và L_2 -nhân.

Thứ hai, luận văn xây dựng ví dụ minh họa cho các vấn đề trên và một số ứng dụng đơn giản của phương trình tích phân tuyến tính.

Qua luận văn này, tác giả đã thật sự làm quen với công tác nghiên cứu khoa học một cách nghiêm túc và có hệ thống. Tác giả cũng học tập được phương pháp nghiên cứu tài liệu, phương pháp làm việc nhóm. Những kiến thức, kinh nghiệm đạt được trong quá trình nghiên cứu là rất quý báu đối với bản thân tác giả. Tuy nhiên, do năng lực và kiến thức còn hạn chế nên khó tránh khỏi những sai sót. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo của quý Thầy cô và các bạn, xin chân thành cảm ơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đâu Thế Cấp (2002), *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [2] T.A.Burton (1983), *Volterra Intergral and Differential Equations*, Academic Press, New York.
- [3] N.Kolmogorov, S.V Fomine, (1983), *Cơ sở lý thuyết hàm và giải tích hàm*, tập Nhà xuất bản Giáo dục.
- [4] Ram.P.Kanwal (1971), *Linear Intergal equations: theory and technique*, Academic Press, New York.
- [5] William Vernon Lovitt (1950), *Linear Intergal equations*, Dover Publications Inc., New York.
- [6] Hoàng Tụy, *Hàm thực và Giải tích hàm*, Nhà xuất bản ĐHQG Hà Nội.
- [7] Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, (2005), *Phương trình tích phân*, Nhà xuất bản ĐHQG TP.Hồ Chí Minh.
- [8] Cấn Văn Tuất (2005), *Phương trình vi phân và phương trình tích phân*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.
- [9] F. G. Tricomi (1957), *Intergal equations*, Interscience Publishers, Inc., New York.
- [10] V. S. Vladimirov (1984), *Equations of Mathematical*, Mir Publishers, Moscow.