BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

TRẦN THỊ THƯƠNG

PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH NGHIỆM NGUYÊN

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng – Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. LÊ HOÀNG TRÍ

Phản biện 1: TS. Lê Hải Trung

Phản biện 2: PGS. TS Nguyễn Gia Định

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 26 tháng 11 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin – Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Phương trình vô định nghiệm nguyên là phương trình đại số với hệ số nguyên và số ẩn bất kỳ, nghiệm của nó được tìm trong tập hợp số nguyên, số nguyên dương.

Phương trình vô định nói chung và phương trình vô định nghiệm nguyên nói riêng có một vai trò quan trọng trong toán học và trong thực tế, nó đã được các nhà toán học trên thế giới nghiên cứu từ rất lâu, được đề cập tới trong bất kỳ một cuốn sách Số học cơ bản nào và hiện nay nó vẫn chiếm một vị trí quan trọng trong nghiên cứu và học tập.

Vì vậy, tôi đã chọn nghiên cứu đề tài "Phương trình vô định nghiệm nguyên" với mong muốn tích lũy thêm vốn kiến thức cho bản thân và làm cơ sở phục vụ cho việc giảng dạy của mình.

2. Mục đích nghiên cứu

Nắm được các phương pháp tìm nghiệm nguyên của phương trình bậc nhất hai ẩn và phương pháp giải phương trình vô định bậc nhất nhiều ẩn.

Nắm phương pháp tìm nghiệm của phương trình vô định bậc hai hai ẩn trên cơ sở tiếp cận phương trình Pell.

Tìm hiểu phương trình vô định dạng đặc biệt: Phương trình Pythagore.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

4. Phương pháp nghiên cứu

5. Cấu trúc luận văn

Mở đầu.

Chương I: Hệ thống những kiến thức cơ bản.

Chương II: Điều kiện có nghiệm và các phương pháp giải phương trình vô định bậc nhất hai ẩn, điều kiện tồn tại nghiệm và quy trình tìm nghiệm của phương trình bậc nhất nhiều ẩn với các ví dụ minh họa.

Chương III: Thông qua phương trình Pell để đưa ra phương pháp giải phương trình vô định bậc hai hai ẩn, đồng thời tìm hiểu một dạng phương trình đặc biệt - Phương trình Pythagore.

Kết luận.

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.1 Liên phân số

a) Định nghĩa liên phân số hữu hạn

b) Định nghĩa liên phân số vô hạn

1.2 Phi-hàm Euler

Định nghĩa Phi-hàm Euler

Các định lý liên quan đến Phi-hàm Euler

Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH BẬC NHẤT

2.1 Phương trình vô định bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 2.1. Dạng tổng quát của phương trình vô định bậc nhất hai ẩn x và y là

$$ax + by + c = 0 \tag{2.1}$$

ở đây a, b, c là những số nguyên gọi là hệ số của phương trình.

Mỗi cặp số (x_0, y_0) thỏa mãn đẳng thức (2.1), nghĩa là $ax_0 + by_0 + c = 0$ gọi là nghiệm của phương trình (2.1)

Định lý 2.1. *Điều kiện cần và đủ để phương trình (2.1) có ít nhất một nghiệm số nguyên là ước số chung lớn nhất của các số a và b là ước số của c.*

Định lý 2.2. *Nếu (x_0, y_0) là một nghiệm nguyên của (2.1) và $(a, b) = 1$ thì khi đó mọi nghiệm nguyên của (2.1) có dạng:*

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$$

ở đây t là số nguyên tùy ý.

2.2 Phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình bậc nhất

2.2.1 Phương pháp biến số nguyên

Ví dụ 2.1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$12x - 19y + 21 = 0.$$

Lời giải

Từ phương trình $12x - 19y + 21 = 0$, suy ra:

$$x = \frac{19y - 21}{12} = y - 1 + \frac{7y - 9}{12}.$$

Để x nguyên thì $\dfrac{7y-9}{12} = z \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = \dfrac{12z+9}{7} = z + 1 + \dfrac{5z+2}{7}$.

Để y nguyên thì $\dfrac{5z+2}{7} = t \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = \dfrac{7t-2}{5} = t + 2.\dfrac{t-1}{5}$.

Vì $z \in \mathbb{Z}$ nên $\dfrac{t-1}{5} = u \Rightarrow t = 5u + 1$

$\Rightarrow z = 5u + 1 + 2u = 7u + 1$

$\Rightarrow y = 7u + 1 + 1 + 5u + 1 = 12u + 3$

$\Rightarrow x = 12u + 3 - 1 + 7u + 1 = 19u + 3.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases} x = 19u + 3 \\ y = 12u + 3 \end{cases}, u \in \mathbb{Z}.$$

2.2.2 Phương pháp hàm Euler

Ví dụ 2.2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$12x - 19y + 21 = 0.$$

Lời giải

Ta có: $12x - 19y + 21 = 0$

$\Leftrightarrow 12x + 19y' + 21 = 0$, với $y' = -y$.

Do 19 là số nguyên tố nên $\varphi(19) = 19 - 1 = 18$. Do đó:

$$\begin{cases} x_0 = -21.12^{\varphi(19)-1} = -21.12^{17} \\ y_0 = 21.\dfrac{12^{\varphi(19)} - 1}{19} = 21.\dfrac{12^{18} - 1}{19} \end{cases}$$

là một nghiệm riêng của phương trình $12x + 19y' + 21 = 0$. Suy ra tất cả các nghiệm của phương trình này có dạng:

$$\begin{cases} x = -21.12^{17} + 19t \\ y' = 21.\dfrac{12^{18} - 1}{19} - 12t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình $12x - 19y + 21 = 0$ có nghiệm là:

$$\begin{cases} x = -21.12^{17} + 19t \\ y = -21.\dfrac{12^{18} - 1}{19} + 12t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}.$$

2.2.3 Phương pháp dùng liên phân số

Ví dụ 2.3**.** Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$12x - 19y + 21 = 0.$$

Lời giải

Ta có: $12x - 19y + 21 = 0 \Leftrightarrow 12x - 19y = -21.$

Ta sẽ tìm một nghiệm riêng của phương trình

$$12x - 19y = 1.$$

Khai triển $\dfrac{12}{19}$ thành liên phân số:

Ta có: $12 = 0.19 + 12$

$19 = 1.12 + 7$

$12 = 1.7 + 5$

$7 = 1.5 + 2$

$5 = 2.2 + 1$

$2 = 2.1$

Vậy $\dfrac{12}{19} = (0, 1, 1, 1, 2, 2)$. Ta có $n = 5$ và

$p_0 = a_0 = 0;$ $q_0 = 1;$

$p_1 = a_0a_1 + 1 = 1;$ $q_1 = a_1 = 1;$

$p_2 = a_2p_1 + p_0 = 1;$ $q_2 = a_2q_1 + q_0 = 2;$

$p_3 = a_3p_2 + p_1 = 2;$ $q_3 = a_3q_2 + q_1 = 3;$

$p_4 = a_4p_3 + p_2 = 5;$ $q_4 = a_4q_3 + q_2 = 8.$

Do $b = -19 < 0$, nên phương trình $12x - 19y = 1$ có một nghiệm riêng là:

$$\begin{cases} x_0 = (-1)^4 q_4 = 8 \\ y_0 = (-1)^4 p_4 = 5 \end{cases}$$

Vậy phương trình $12x - 19y + 21 = 0$ nhận

$$\begin{cases} x_1 = -8.21 = -168 \\ y_1 = -5.21 = -105 \end{cases}$$

là một nghiệm riêng.

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình $12x - 19y + 21 = 0$ là:

$$\begin{cases} x = -168 - 19t \\ y = -105 - 12t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình vô định bậc nhất k ẩn có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = b, \tag{2.31}$$

trong đó $k \geq 2; a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ là những số nguyên và $a_i \neq 0, \forall i = \overline{1, k}$.

2.2.4 Điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình vô định bậc nhất nhiều ẩn

Định lý 2.3**.** *Điều kiện cần và đủ để phương trình (2.31) có ít nhất một nghiệm nguyên là ước chung lớn nhất của những số $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là ước của b.*

2.2.5 Qui trình tìm nghiệm của phương trình vô định bậc nhất nhiều ẩn

Từ phương trình vô định k ẩn ta đưa về phương trình vô định $k - 1$ ẩn và tiếp tục như vậy cuối cùng nhận được phương trình vô định 2 ẩn. Mỗi lần giảm số ẩn như thế ta lại giải phương trình 2 ẩn qua tham số. Cuối cùng ta được hệ nghiệm phụ thuộc vào $k - 1$ tham số.

Ví dụ 2.4**.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định

$$2x + 3y + 4z + 6w = 5.$$

Lời giải

Ta đưa vào ẩn mới $u = 2z + 3w$, phương trình đã cho viết lại $2x + 3y + 2u = 5$. Phương trình sau lại đưa vào ẩn mới $v = 3y + 2u$ và nhận được phương trình $2x + v = 5$.

Giải phương trình $2z + 3w = u$ trong số nguyên đối với z, w, ta có nghiệm riêng $z_0 = -u, w_0 = u \Rightarrow$ tất cả các nghiệm là:

$$\begin{cases} z = -u + 3t_1 \\ w = u - 2t_1 \end{cases}$$

với $t_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Nghiệm nguyên y, u của phương trình $3y + 2u = v$ với một nghiệm riêng $y_0 = v, u_0 = -v$ là

$$\begin{cases} y = v + 2t_2 \\ u = -v - 3t_2 \end{cases}$$

với $t_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Tất cả những nghiệm nguyên của $2x + v = 5$ với một nghiệm riêng $x_0 = 1, v_0 = 3$ là

$$\begin{cases} x = 1 + t_3 \\ v = 3 - 2t_3 \end{cases}$$

với $t_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Từ đây suy ra nghiệm của phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} x = 1 + t_3 \\ y = v + 2t_2 = 3 - 2t_3 + 2t_2 \\ z = -u + 3t_1 = v + 3t_2 + 3t_1 = 3 - 2t_3 + 3t_2 + 3t_1 \\ w = u - 2t_1 = -v - 3t_2 - 2t_1 = -3 + 2t_3 - 3t_2 - 2t_1 \end{cases}$$

với $t_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; t_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; t_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH BẬC HAI HAI ẨN

Trước khi tìm hiểu dạng và cách giải phương trình vô định bậc hai hai ẩn, ta xét dạng đặc biệt của phương trình này đó là phương trình Pell.

3.1 Phương trình Pell loại I

Định nghĩa 3.1. Phương trình Pell loại I là phương trình có dạng:

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{3.1}$$

ở đây d là số nguyên.

Khi nói đến nghiệm của phương trình Pell, ta luôn luôn hiểu đó là nghiệm nguyên dương. Sau đây ta sẽ khảo sát các tính chất cơ bản nhất của phương trình Pell loại I.

Tính chất 3.1. Nếu d là số chính phương $(d = m^2)$ thì (3.1) không có nghiệm nguyên dương.

Tính chất 3.2. Nếu d là số nguyên âm thì (3.1) không có nghiệm nguyên dương.

Tính chất 3.3. (Điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình Pell loại I). Phương trình Pell loại I có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi d là số nguyên dương và không phải là số chính phương.

Tính chất 3.4. *(Công thức nghiệm của phương trình Pell loại I)*. Xét dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

$$\begin{cases} x_0 = 1;\ x_1 = a;\ x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n, \text{ với } n = 0, 1, \ldots \\ y_0 = 0;\ y_1 = b;\ y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_n, \text{ với } n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

trong đó (a, b) là nghiệm nguyên dương bé nhất của phương trình Pell loại I.

Khi đó (x_n, y_n) với $n = 1, 2, \ldots$ là tất cả các nghiệm dương của phương trình Pell loại I.

Ví dụ 3.1. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn những bộ ba số nguyên liên tiếp mà mỗi số trong đó đều là tổng của hai số chính phương.

Lời giải

Bằng phép thử trực tiếp, ta thấy bộ ba số nguyên liên tiếp thỏa mãn yêu cầu đề bài là 8, 9, 10 ($8 = 2^2 + 2^2; 9 = 3^2 + 0^2; 10 = 3^2 + 1^2$). Điều này gợi ý đến việc ta xét bộ ba số liên tiếp: $x^2 - 1, x^2, x^2 + 1$.

Vì $x^2 = x^2 + 0^2; x^2 + 1 = x^2 + 1^2$. Do vậy nếu như $x^2 - 1 = y^2 + z^2$ thỏa mãn với vô hạn bộ số nguyên (x, y, z) thì ta chứng minh được bài toán này. Trên cơ sở đó ta xét trường hợp đặc biệt khi $z = y$. Cụ thể ta tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^2 - 1 = 2y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2y^2 = 1. \tag{3.30}$$

(3.30) là phương trình Pell loại I với $d = 2$. Rõ ràng phương trình này tồn tại vô hạn nghiệm nguyên dương.

Tóm lại, tồn tại vô hạn những bộ ba số nguyên liên tiếp mà mỗi số trong đó đều là tổng của hai số chính phương.

$*$ *Nhận xét:*

Ta có thể chỉ ra cụ thể vô hạn những bộ ba ấy, bằng cách giải phương trình (3.30).

Ta thấy $(x, y) = (3, 2)$ là nghiệm nguyên dương bé nhất của (3.30), nên phương trình (3.30) có dãy nghiệm sau:

$$x_0 = 1; x_1 = 3; x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n; n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_0 = 0; y_1 = 2; y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Vậy tồn tại ít nhất bộ ba số hạn: $x_i^2 - 1; x_i^2; x_i^2 + 1$ với $i = 1, 2, \ldots$ các bộ ba đầu tiên được cho trong bảng sau:

i	1	2	3	...
Bộ ba	8,9,10	288,289,290	9800,9801,9802	...

3.2 Phương trình Pell loại II

Định nghĩa 3.2**.** Phương trình Pell loại II là phương trình có dạng:

$$x^2 - dy^2 = -1 \tag{3.38}$$

ở đây d là số nguyên dương. Cũng giống như khi xét phương trình Pell loại I, ở đây ta chỉ quan tâm đến việc tìm nghiệm nguyên dương của phương trình này.

Tính chất 3.5**.** Nếu d là số chính phương $(d = m^2)$ thì phương trình Pell loại II không có nghiệm nguyên dương.

Tính chất 3.6**.** Phương trình Pell loại II không có nghiệm khi d có ước nguyên tố $p = 4k + 3$.

Tính chất 3.7**.** Nếu d là số nguyên tố thì phương trình Pell loại II

$$x^2 - dy^2 = -1 \tag{3.40}$$

có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi d không có dạng $4k + 3$.

Tính chất 3.8**.** *(Điều kiện để phương trình Pell loại II có nghiệm).* Gọi (a, b) là nghiệm nhỏ nhất của phương trình Pell liên kết với phương trình Pell loại II. Khi đó phương trình Pell loại II

$$x^2 - dy^2 = -1 \tag{3.44}$$

có nghiệm khi và chỉ khi hệ sau:

$$\begin{cases} a = x^2 + dy^2 & (3.45) \\ b = 2xy & (3.46) \end{cases}$$

có nghiệm nguyên dương.

Tính chất 3.9**.** *(Công thức nghiệm của phương trình Pell loại II).* Xét phương trình Pell loại II:

$$x^2 - dy^2 = -1 \tag{3.57}$$

Xét phương trình Pell loại I liên kết với nó:

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{3.58}$$

Giả sử (a, b) là nghiệm nguyên bé nhất của (3.58). Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + dy^2 = a & (3.59) \\ 2xy = b & (3.60) \end{cases}$$

Giả thiết rằng hệ (3.59) - (3.60) có nghiệm và (u, v) là nghiệm duy nhất của nó. Xét hai dãy số nguyên dương $\{x_n\}, \{y_n\}$ sau đây:

$$\begin{cases} x_0 = u;\ x_1 = u^3 + 3duv^2;\ x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n,\ n = 0, 1, 2, \dots \\ y_0 = v;\ y_1 = dv^3 + 3u^2v;\ y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_n,\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Khi đó (x_n, y_n) là tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình Pell loại II.

Ví dụ 3.2. Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất $n^2 + (n+1)^2$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử n là số nguyên dương phải tìm. Khi đó ta có:

$$n^2 + (n+1)^2 = y^2$$
$$\Rightarrow 2n^2 + 2n + 1 = y^2$$
$$\Rightarrow 4n^2 + 4n + 2 = 2y^2$$
$$\Rightarrow (2n+1)^2 - 2y^2 = -1. \tag{3.73}$$

Đặt $x = 2n + 1$. Khi đó từ (3.73) dẫn đến phương trình Pell loại II:

$$x^2 - 2y^2 = -1. \tag{3.74}$$

Liên kết với (3.74) là phương trình Pell loại I sau:

$$x^2 - 2y^2 = 1 \tag{3.75}$$

Phương trình (3.75) có nghiệm dương nhỏ nhất là $x = 3, y = 2$. (Theo lý thuyết phương trình Pell loại II, thì trong trường hợp này $a = 3, b = 2$).

Xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 = 3 \\ 2uv = 2 \end{cases}$$

Dễ thấy $(u, v) = (1, 1)$ là nghiệm dương bé nhất của hệ này.

Theo lý thuyết xây dựng dãy thì phương trình Pell loại II (3.74) có nghiệm là:

$$\begin{cases} x_0 = 1;\ x_1 = 7;\ x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n,\ n = 0, 1, 2, \dots \\ y_0 = 1;\ y_1 = 5;\ y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n,\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ta thấy $x_k \equiv 1 (\ mod\ 2), \forall k = 0, 1, \dots$. Từ đó suy ra dãy nghiệm $\{n_k\} : n_k = \dfrac{x_k - 1}{2}$ các số nguyên dương cần tìm (với $k = 1, 2, \dots$) được cho theo công thức:

$$n_0 = 0;\ n_1 = 3;\ n_{k+2} = 6n_{k+1} - n_k + 2.$$

(Thật vậy, từ

$$x_{k+2} = 6x_{k+1} - x_k \Rightarrow 2n_{k+2} + 1 = 6(2n_{k+1} + 1) - (2n_k + 1)$$

$$\Rightarrow n_{k+2} = 6n_{k+1} - n_k + 2).$$

Ba kết quả đầu tiên phải tìm là: $n = 3;\ n = 20;\ n = 119$.

3.3 Phương trình Pell với tham số n

Phương trình Pell với tham số n là phương trình có dạng:

$$x^2 - dy^2 = n$$

ở đây d là số nguyên dương và không phải là số chính phương, còn n là số nguyên.

Nếu $n = 1$ hoặc $n = -1$ thì tương ứng ta có phương trình Pell loại I và loại II.

Tính chất 3.10**.** Xét phương trình Pell với tham số n

$$x^2 - dy^2 = n \tag{3.82}$$

Phương trình (3.82) hoặc vô nghiệm, hoặc có vô số nghiệm.

Tính chất 3.11**.** Xét phương trình Pell với tham số n

$$x^2 - dy^2 = n. \tag{3.85}$$

Giả sử (3.85) có nghiệm và gọi (x_0, y_0) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của nó. Khi đó ta có:

$$y_0^2 \leq \max\left\{nb^2;\ \frac{-na^2}{d}\right\}$$

ở đây (a, b) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell loại I tương ứng:

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{3.86}$$

Tính chất 3.12**.** Xét phương trình Pell với tham số n:

$$x^2 - dy^2 = n \tag{3.89}$$

Giả sử (3.89) có nghiệm và gọi $(\alpha_1, \beta_1); (\alpha_2, \beta_2); \ldots; (\alpha_m, \beta_m)$ là tất cả các nghiệm của (3.89) thỏa mãn bất đẳng thức

$$\beta_i^2 \leq \max\left\{nb^2;\ \frac{-na^2}{d}\right\}$$

Xét m dãy sau đây. Dãy thứ i : $\left\{x_{n,i}\ , y_{n,i}\right\}$, với $i = \overline{1,m}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_{0,i} = \alpha_i,\ y_{0,i} = \beta_i \\ x_{n+1,i} = x_{n,i}a + dy_{n,i}b \\ y_{n+1,i} = x_{n,i}b + y_{n,i}a \end{cases}$$

ở đây (a, b) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell loại I tương ứng:

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{3.90}$$

Khi đó các dãy $\left\{x_{n,i}\ , y_{n,i}\right\}$ sẽ vét cạn hết nghiệm của phương trình Pell với tham số n.

Ví dụ 3.3**.** Chứng minh rằng tất cả những nghiệm của phương trình

$$x^2 + x + 1 = 3y^2$$

trong những số tự nhiên x, y, nhận được thông qua công thức hồi quy sau với $x_0 = y_0 = 1$

$$x_n = 7x_{n-1} + 12y_{n-1} + 3;\ y_n = 4x_{n-1} + 7y_{n-1} + 2.$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & x^2 + x + 1 = 3y^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 + 4x + 4 = 12y^2 \\ \Leftrightarrow\ & (2x+1)^2 - 12y^2 = -3. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Đặt $u = 2x + 1, v = y$ thì phương trình (3.96) thành:

$$u^2 - 12v^2 = -3 \tag{3.97}$$

(3.97) chính là phương trình Pell với tham số $n = -3$.

Phương trình Pell loại I liên kết với nó là:

$$u^2 - 12v^2 = 1. \tag{3.98}$$

Phương trình (3.98) có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $(a, b) = (7, 2)$. Khi đó:

$$\max\left\{nb^2;\ \frac{-na^2}{d}\right\} = \max\left\{-3.2^2;\ \frac{3.7^2}{12}\right\} = \frac{3.49}{12} = \frac{49}{4}$$

Số nguyên dương β lớn nhất thỏa mãn $\beta^2 \leq \dfrac{49}{4}$ là $\beta = 3$. Xét phương trình (3.97):

$$u^2 - 12v^2 = -3$$

Với $v = 1 \Rightarrow u = 3;\ v = 2, 3$ thì (3.97) không dẫn đến u nguyên.

Như thế bằng cách thử trực tiếp nói trên, ta thấy (3,1) là nghiệm duy nhất của phương trình (3.97) thỏa điều kiện

$$\beta^2 \le \max\left\{nb^2;\ \frac{-na^2}{d}\right\}$$

Theo tính chất 3.12, phương trình Pell ứng với $n = -3$:

$$u^2 - 12v^2 = -3$$

có dãy nghiệm sau:

$$u_0 = 3; v_0 = 1; u_n = 7u_{n-1} + 24v_{n-1}; v_n = 2u_{n-1} + 7v_{n-1}.$$

Mà $u = 2x + 1, v = y$, suy ra:

$x_0 = \dfrac{u_0 - 1}{2} = 1$

$y_0 = v_0 = 1$

$(2x_n + 1) = 7(2x_{n-1} + 1) + 24y_{n-1} \Leftrightarrow x_n = 7x_{n-1} + 12y_{n-1} + 3$

$y_n = 2(2x_{n-1} + 1) + 7y_{n-1} \Leftrightarrow y_n = 4x_{n-1} + 7y_{n-1} + 2.$

Như vậy, tất cả các nghiệm của phương trình

$$x^2 + x + 1 = 3y^2$$

trong những số tự nhiên x, y, nhận được thông qua công thức hồi quy:

$$x_n = 7x_{n-1} + 12y_{n-1} + 3;\ y_n = 4x_{n-1} + 7y_{n-1} + 2$$

với $x_0 = y_0 = 1$.

Bây giờ ta quay lại xét phương trình vô định bậc hai.

Định nghĩa 3.3**.** Phương trình vô định bậc hai dạng tổng quát có dạng:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{3.110}$$

với $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$.

Ta gọi $D = b^2 - ac$ là định thức của phương trình (3.110).

3.4 Phương pháp giải phương trình vô định bậc hai hai ẩn

3.4.1 Phương trình dạng elip

Với $D < 0$, (3.110) được gọi là phương trình dạng elip.

$*$ Cách giải:

Viết lại (3.110) dưới dạng phương trình bậc hai theo ẩn x, ta có:

$$(3.110) \Leftrightarrow ax^2 + 2(by + d)x + (cy^2 + 2ey + f) = 0 \tag{3.111}$$

Ta có: $\Delta' = (by + d)^2 - a(cy^2 + 2ey + f)$
$= b^2y^2 + 2bdy + d^2 - acy^2 - 2aey - af$
$= (b^2 - ac)y^2 + 2(bd - ae)y + (d^2 - af)$
$= Dy^2 + 2my + n$

với $m = bd - ae, n = d^2 - af$.

Để phương trình (3.111) có nghiệm x thì $\Delta' = Dy^2 + 2my + n \geq 0$.

Vì $D < 0$ nên bất đẳng thức trên đúng trong một khoảng $y \in [y_1, y_2]$ nào đó mà chỉ có hữu hạn số nguyên, và với những giá trị nguyên này của y thì số x xác định bằng công thức:

$$x = \frac{-(by + d) \pm \sqrt{Dy^2 + 2my + n}}{a}$$

là số thực và ta kết hợp với điều kiện x nguyên nữa thì sẽ tìm được các nghiệm nguyên của phương trình (3.110).

Ví dụ 3.4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$2x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \tag{3.112}$$

Lời giải

Ta có $a = 2, b = -1, c = 3, d = -1, e = -1, f = -1$ nên $D = b^2 - ac = 1 - 6 = -5 < 0 \Rightarrow$ đây là phương trình dạng elip.

Viết lại phương trình (3.112) dưới dạng phương trình bậc hai theo ẩn x:

$$2x^2 - 2(y + 1)x + 3y^2 - 2y - 1 = 0 \tag{3.113}$$

Ta có $\Delta' = Dy^2 + 2my + n$, với $m = bd - ae, n = d^2 - af$

Phương trình (3.112) có nghiệm (x, y) nguyên khi phương trình (3.113) có nghiệm x nguyên.

Như vậy $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow -5y^2 + 6y + 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-3 + 2\sqrt{6}}{-5} \leq y \leq \dfrac{-3 - 2\sqrt{6}}{-5}$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y = 0$ hoặc $y = 1$.

$*$ Với $y = 0$, ta có:

$$x = \frac{(y + 1) \pm \sqrt{-5y^2 + 6y + 3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Ta loại trường hợp này vì $x \notin \mathbb{Z}$.

$*$ Với $y = 1$, ta có:

$$x = \frac{(y+1) \pm \sqrt{-5y^2 + 6y + 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{2}$$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Tóm lại các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là: $x = 0, y = 1$ và $x = 2, y = 1$.

3.4.2 Phương trình dạng parabol

Với $D = 0$, (3.110) được gọi là phương trình dạng parabol.

$*$ Cách giải:

Giải phương trình (3.110) theo ẩn x, ta có biểu thức

$$x = \frac{-(by + d) \pm \sqrt{2my + n}}{a}$$

với $m = bd - ae; n = d^2 - af$.

Đặt $ax + by + d = z$, khi đó phương trình (3.110) có dạng

$$z^2 - n = 2my$$

Bây giờ chỉ còn tìm những giá trị nguyên của z sao cho $z^2 - n$ chia hết cho $2m$. Từ đây ta sẽ tìm được các nghiệm nguyên của phương trình.

Ví dụ 3.5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 4x + 6y + 3 = 0 \tag{3.114}$$

Lời giải

Ta có $a = 9, b = 12, c = 16, d = 2, e = 3, f = 3 \Rightarrow D = b^2 - ac = 12^2 - 9.16 = 0$. Đây là phương trình dạng parabol.

Giải phương trình (3.114) theo ẩn x, ta có:

$$x = \frac{-(12y + 2) \pm \sqrt{-6y - 23}}{9}$$

Đặt $9x + 12y + 2 = z$ thì phương trình (3.114) có dạng:

$$z^2 + 23 = -6y \tag{3.115}$$

Bây giờ ta cần tìm những giá trị nguyên của z để $z^2 + 23$ chia hết cho 6.

Vì một số nguyên z bất kì thuộc một trong các dạng sau: $z = 6t; z = 6t+1; z =$

$6t+2; z=6t+3; z=6t+4$ hoặc $z=6t+5$ trong đó $t \in \mathbb{Z}$. Ta thấy chỉ có $z=6t+1$ và $z=6t+5$ thỏa điều kiện $z^2+23 \,\vdots\, 6$.

$*$ Với $z_1 = 6t+1 \Rightarrow y_1 = \dfrac{z^2+23}{-6} = \dfrac{(6t+1)^2+23}{-6} = -6t^2-2t-4$

$*$ Với $z_2 = 6t+5 \Rightarrow y_1 = \dfrac{z^2+23}{-6} = \dfrac{(6t+5)^2+23}{-6} = -6t^2-10t-8$

Từ (3.115) suy ra $x = \dfrac{z-12y-2}{9}$. Từ đây ta có:

$$x_1 = \frac{z_1-12y_1-2}{9} = \frac{(6t+1)-12(-6t^2-2t-4)-2}{9}$$
$$= \frac{72t^2+30t+47}{9} \text{ (loại vì } x_1 \notin \mathbb{Z})$$
$$x_2 = \frac{z_2-12y_1-2}{9} = \frac{(6t+5)-12(-6t^2-2t-4)-2}{9}$$
$$= \frac{72t^2+30t+51}{9} \text{ (loại vì } x_2 \notin \mathbb{Z})$$
$$x_3 = \frac{z_1-12y_2-2}{9} = \frac{(6t+1)-12(-6t^2-10t-8)-2}{9}$$
$$= \frac{72t^2+126t+95}{9} \text{ (loại vì } x_3 \notin \mathbb{Z})$$
$$x_4 = \frac{z_2-12y_2-2}{9} = \frac{(6t+5)-12(-6t^2-10t-8)-2}{9}$$
$$= \frac{72t^2+126t+99}{9} = 8t^2+14t+11$$

Vậy nghiệm của phương trình (3.114) là

$$\begin{cases} x = 8t^2+14t+11 \\ y = -6t^2-10t-8 \end{cases}, t \in .$$

3.4.3 Phương trình dạng hyperbol

Với $D > 0$, (3.110) được gọi là phương trình dạng hyperbol. Ta xét hai trường hợp sau:

a) Nếu $D = k^2$, thì ta biến đổi về dạng:

$$[k(ax+by+d)-(m+k^2y)][k(ax+by+d)+(m+k^2y)]$$
$$= a(c-f)D - ac(b-d)^2 \quad (3.116)$$

Thực tế, để biến đổi từ dạng (3.110) sang dạng (3.116), ta thực hiện bằng cách thêm vào hai vế của phương trình (3.110) đại lượng λ, mà nó để xác định sao cho vế trái của (3.110) có thể phân tích thành hai thừa số. Sau đó hai biểu thức $k(ax+by+d) \pm (m+k^2y)$ cần phải là những số nguyên, nên ta so sánh mọi khả năng có thể có những cặp số mà nó có tích bằng $a(c-f)D - ac(b-d)^2$. Suy ra trong trường hợp này phương trình vô định bậc hai chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên.

Ví dụ 3.6. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$y^2 = x^2 + x + 4$$

Lời giải

Ta viết phương trình đã cho về dạng: $x^2 + x + 4 - y^2 + \lambda = \lambda$ và giải phương trình $x^2 + x + 4 - y^2 + \lambda = 0$ đối với x, ta có:

$$\Delta = 1 - 4(4 - y^2 + \lambda) = 4y^2 - 4\lambda - 15$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{4y^2 - 4\lambda - 15}}{2}.$$

Chọn $\lambda = -\dfrac{15}{4} \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4y^2}}{2}$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} + y \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2} - y.$$

Khi đó phương trình đã cho có dạng

$$(x + \frac{1}{2} - y)(x + \frac{1}{2} + y) = -\frac{15}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2x - 2y + 1)(2x + 2y + 1) = -15$$

Mà $-15 = 1.(-15) = (-1).15 = 3.(-5) = (-3).5$

Vậy ta xét các trường hợp sau:

$*$ Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = 1 \\ 2x + 2y + 1 = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases}$$

$*$ Trường hợp 2:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = -15 \\ 2x + 2y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases}$$

$*$ Trường hợp 3:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = -1 \\ 2x + 2y + 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$*$ Trường hợp 4:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = 15 \\ 2x + 2y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

$*$ Trường hợp 5:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = -5 \\ 2x + 2y + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$*$ Trường hợp 6:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = 3 \\ 2x + 2y + 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$*$ Trường hợp 7:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = 5 \\ 2x + 2y + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

$*$ Trường hợp 8:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = -3 \\ 2x + 2y + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Như vậy các nghiệm nguyên của phương trình đã cho ở trên là:

$$(-4, -4); (-4, 4); (3, -4); (3, 4); (-1, -2); (-1, 2); (0, -2); (0, 2)$$

b) Nếu $D \neq k^2$, khi đó viết lại phương trình đã cho dưới dạng phương trình bậc hai đối với x, còn y là tham số:

$$ax^2 + 2(by + d)x + cy^2 + 2ey + f = 0$$

Điều kiện cần để có x nguyên là biệt số:

$$\Delta' = (by + d)^2 - a(cy^2 + 2ey + f)$$

là một số chính phương, nghĩa là $\Delta' = h^2$ (h nguyên, không âm), hay:

$$\begin{aligned} &b^2y^2 + 2bdy + d^2 - acy^2 - 2aey - af = h^2 \\ \Leftrightarrow\ &(b^2 - ac)y^2 + 2(bd - ae)y + d^2 - af - h^2 = 0 \end{aligned}$$

Vì $b^2 - ac = D > 0$, ta xem đây là phương trình bậc hai theo y. Để phương trình này có nghiệm y nguyên thì điều kiện là biệt số

$$\delta' = (bd - ae)^2 - (b^2 - ac)(d^2 - af - h^2)$$

là một số chính phương m^2 (m là số nguyên không âm).

Đẳng thức $\delta' = m^2$ là phương trình vô định có dạng:

$$m^2 - Dh^2 = C, \text{ với } C = a^2e^2 - 2abde + ab^2f + acd^2 - a^2cf.$$

Đây chính là phương trình Pell với tham số n mà chúng ta đã biết cách giải.

Ví dụ 3.7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x + 6y - 8 = 0 \tag{3.121}$$

Lời giải

Ta có $a = 1, b = 2, c = 2, d = 2, e = 3, f = -8$ nên $D = b^2 - ac = 4 - 2 = 2 > 0$.

Viết lại phương trình (3.121) dưới dạng phương trình bậc hai đối với x:

$$x^2 + 4(y+1)x + 2y^2 + 6y - 8 = 0 \tag{3.122}$$

Ta có: $\Delta' = 4(y+1)^2 - (2y^2 + 6y - 8)$
$= 4y^2 + 8y + 4 - 2y^2 - 6y + 8$
$= 2y^2 + 2y + 12.$

Điều kiện cần để có x nguyên là biệt số Δ' là một số chính phương, hay:

$2y^2 + 2y + 12 = h^2$, (h nguyên, không âm)

$\Leftrightarrow 2y^2 + 2y + 12 - h^2 = 0.$

Để có y nguyên thì biệt số:

$\delta' = 1 - 2(12 - h^2) = m^2$ (m là số nguyên không âm). Hay:

$$m^2 - 2h^2 = -23 \tag{3.123}$$

(3.123) chính là phương trình Pell với tham số $n = -23$

Phương trình Pell loại I liên kết với nó có dạng:

$$m^2 - 2h^2 = 1. \tag{3.124}$$

Phương trình (3.124) có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $(a, b) = (3, 2)$. Khi đó:

$$\max\left\{nb^2; \frac{-na^2}{d}\right\} = \max\left\{-23.2^2; \frac{23.3^2}{2}\right\} = \frac{23.9}{2}$$

Số nguyên dương β lớn nhất thỏa mãn $\beta^2 \leq \dfrac{23.9}{2}$ là $\beta = 10$. Xét phương trình (3.123):

$m^2 - 2h^2 = -23$. Nếu $h = 4 \Rightarrow m = 3; h = 6 \Rightarrow m = 7; h = 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10$ thì (3.123) không dẫn đến m nguyên.

Như thế bằng cách thử trực tiếp, ta thấy có hai nghiệm $(3, 4); (7, 6)$ của phương trình (3.123) thỏa mãn điều kiện:

$$\beta_i^2 \leq \max\left\{nb^2; \frac{-na^2}{d}\right\}$$

Vậy phương trình (3.123) có hai dãy nghiệm sau:

$$\begin{cases} m_{0,1} = 3; h_{0,1} = 4; m_{n,1} = 3m_{n-1,1} + 4h_{n-1,1}; h_{n,1} = 2m_{n-1,1} + 3h_{n-1,1} \\ m_{0,2} = 7; h_{0,1} = 6; m_{n,2} = 3m_{n-1,2} + 4h_{n-1,2}; h_{n,2} = 2m_{n-1,2} + 3h_{n-1,2} \end{cases}$$

Khi đó phương trình

$$2y^2 + 2y + 12 - h^2 = 0$$

có nghiệm $y = \dfrac{-1 \pm m}{2}$

$*$ Với $y = \dfrac{-1 + m}{2}$

$\Rightarrow x = -2(y + 1) \pm h = -2(\dfrac{-1 + m}{2} + 1) \pm h = -1 - m \pm h.$

$*$ Với $y = \dfrac{-1 - m}{2}$

$\Rightarrow x = -2(y + 1) \pm h = -2(\dfrac{-1 - m}{2} + 1) \pm h = -1 + m \pm h.$

Cụ thể, dãy các nghiệm nguyên của phương trình (3.121) là:

$$x_{n,1} = -1 - m_{n,1} \pm h_{n,1}\ ;\ y_{n,1} = \frac{-1 + m_{n,1}}{2}$$

$$x_{n,2} = -1 - m_{n,2} \pm h_{n,2}\ ;\ y_{n,2} = \frac{-1 + m_{n,2}}{2}$$

$$x_{n,1} = -1 + m_{n,1} \pm h_{n,1}\ ;\ y_{n,1} = \frac{-1 - m_{n,1}}{2}$$

và

$$x_{n,2} = -1 + m_{n,2} \pm h_{n,2}\ ;\ y_{n,2} = \frac{-1 - m_{n,2}}{2}$$

trong đó $(m_{n,1}, h_{n,1}); (m_{n,2}, h_{n,2})$ là các nghiệm của phương trình (3.123) đã có công thức nghiệm ở trên.

3.5 Phương trình Pythagore

Định nghĩa 3.4. Phương trình (tìm nghiệm nguyên)

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{3.125}$$

gọi là phương trình Pythagore. Bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn (3.125) gọi là một bộ ba Pythagore.

Ta nhận thấy rằng nếu $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ là một bộ ba Pythagore thì với mọi d nguyên dương, bộ ba $(d\overline{x}, d\overline{y}, d\overline{z})$ cũng là một bộ ba Pythagore. Vì lẽ đó ta chỉ cần quan tâm đến những bộ ba Pythagore (x, y, z) mà ở đó $(x, y, z) = 1$. Khi ấy (x, y, z) được gọi là một bộ ba Pythagore nguyên thủy.

Định lý 3.1**.** *Cho phương trình Pythagore*

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{3.125}$$

Giả sử $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ là một bộ ba Pythagore nguyên thủy. Khi đó:

a) $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

b) $\overline{x}, \overline{y}$ không cùng tính chẵn, lẻ và $\overline{z}$ là số lẻ.

Định lý 3.2**.** *Cho phương trình Pythagore*

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{3.125}$$

Với $\overline{y}$ chẵn. Bộ ba $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ là một bộ ba Pythagore nguyên thủy khi và chỉ khi chúng có dạng sau:

$$\begin{cases} \overline{x} = m^2 - n^2 \\ \overline{y} = 2mn \\ \overline{z} = m^2 + n^2 \end{cases}$$

ở đây m, n nguyên dương, $m > n, (m, n) = 1$ và m, n không cùng tính chẵn, lẻ.

Định lý 3.3**.** *Mỗi số trong những số $3, 4, 5$ là ước số ít nhất của một trong những thành phần $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ của một nghiệm $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ tùy ý của phương trình Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$.*

Ví dụ 3.8**.** Tìm nghiệm nguyên dương $x \neq y$ của phương trình:

$$x^2 + y^2 = 2z^2.$$

Lời giải

Nếu $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ là một nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \tag{3.149}$$

và giả sử $d = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, thì $(\frac{\overline{x}}{d}, \frac{\overline{y}}{d}, \frac{\overline{z}}{d})$ cũng là một nghiệm của (3.149). Vì lẽ đó ta chỉ cần tìm các nghiệm nguyên dương (x, y, z) của (3.149) mà $(x, y, z) = 1$. Lúc đó cũng giống như phương trình Pythagore, ta gọi (x, y, z) là một nghiệm nguyên thủy của (3.149) và ta chỉ quan tâm đến việc tìm nghiệm nguyên thủy của (3.149) mà thôi.

Giả sử (x_0, y_0, z_0) là một nghiệm nguyên thủy của (3.149) thì: $x_0^2 + y_0^2 = 2z_0^2$. Ta thấy rằng x_0, y_0 không thể cùng chẵn. Thật vậy, nếu $x_0 = 2x_1, y_0 = 2y_1$, từ $x_0^2 + y_0^2 = 2z_0^2$, ta đi đến:

$$4x_1^2 + 4y_1^2 = 2z_0^2 \Leftrightarrow 2x_1^2 + 2y_1^2 = z_0^2 \tag{3.150}$$

Từ (3.150) suy ra z_0 chẵn, tức $z_0 = 2z_1$. Thay lại vào (3.150), ta có:

$$2x_1^2 + 2y_1^2 = 4z_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = 2z_1^2$$

Như vậy (x_1, y_1, z_1) cũng là một nghiệm nguyên dương của (3.149), trong đó $x_0 = 2x_1, y_0 = 2y_1, z_0 = 2z_1$, điều này mâu thuẫn với $(x_0, y_0, z_0) = 1$. Do đó x_0, y_0 không thể cùng chẵn.

Giả sử x_0 lẻ. Từ $x_0^2 + y_0^2 = 2z_0^2$, mà x_0 lẻ, nên suy ra y_0 cũng lẻ. Đặt $x_0 = 2\overline{x} + 1, y_0 = 2\overline{y} + 1$, ta có:

$$4\overline{x}^2 + 4\overline{x} + 4\overline{y}^2 + 4\overline{y} + 2 = 2z_0^2 \Rightarrow 2(\overline{x}^2 + \overline{x} + \overline{y}^2 + \overline{y}) + 1 = z_0^2 \tag{3.151}$$

Từ (3.151) đi đến z_0 cũng là số lẻ.

Tóm lại ta có nhận xét sau: Nếu (x_0, y_0, z_0) là một nghiệm nguyên thủy của (3.149) thì x_0, y_0, z_0 ***đều là số lẻ***.

Ta chứng minh tiếp rằng $(x_0, y_0) = 1$. Thật vậy, nếu $(x_0, y_0) > 1$ thì tồn tại số nguyên tố p mà $x_0 \vdots p$ và $y_0 \vdots p$. Từ đó dựa vào $x_0^2 + y_0^2 = 2z_0^2$, suy ra $2z_0^2 \vdots p^2$. Do x_0, y_0 là số lẻ nên p là số nguyên tố lẻ, từ đó $(2, p^2) = 1 \Rightarrow z_0^2 \vdots p^2$, hay $z_0 \vdots p$. Từ x_0, y_0, z_0 đều chia hết cho p suy ra mâu thuẫn với $(x_0, y_0, z_0) = 1$. Vì thế $(x_0, y_0) = 1$.

Ta luôn có thể cho là $x_0 > y_0$ (vì $x_0 \neq y_0$ và do vai trò bình đẳng giữa x_0 và y_0).

Đặt $u = \dfrac{x_0 + y_0}{2}; v = \dfrac{x_0 - y_0}{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 = 2z_0^2 &\Leftrightarrow 2x_0^2 + 2y_0^2 = 4z_0^2 \\ &\Leftrightarrow (x_0 + y_0)^2 + (x_0 - y_0)^2 = 4z_0^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{2}\right)^2 = z_0^2 \\ &\Leftrightarrow u^2 + v^2 = z_0^2 \end{aligned} \tag{3.152}$$

Từ $(x_0, y_0) = 1$ và do $x_0 = u + v; y_0 = u - v$, nên suy ra $(u, v) = 1$. Vì lẽ đó (u, v, z_0) là bộ ba Pythagore nguyên thủy. Do đó tồn tại các số m, n nguyên dương với $m > n; (m, n) = 1$ và m, n không cùng tính chẵn, lẻ sao cho:

$$\begin{cases} u = m^2 - n^2 \\ v = 2mn \\ z_0 = m^2 + n^2 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} u = 2mn \\ v = m^2 - n^2 \\ z_0 = m^2 + n^2 \end{cases}$$

Từ đó ta đi đến (do vai trò bình đẳng giữa x_0 và y_0):

$$\begin{cases} x_0 = (m + n)^2 - 2n^2 \\ y_0 = (m + n)^2 - 2m^2 \\ z_0 = m^2 + n^2 \end{cases}$$

Đó chính là cấu trúc nghiệm nguyên thủy của phương trình $x^2 + y^2 = 2z^2$ với $x \neq y$.

$*$ Từ kết quả của ví dụ này, ta có bài toán: Tìm tất cả các số nguyên dương phân biệt a, b, c sao cho a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng. Cách giải bài toán này như sau:

Vì $\div a^2, b^2, c^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2$ nên bài toán này quy về bài toán: Tìm các nghiệm nguyên dương (x, y, z) với $x \neq y$ sao cho $x^2 + y^2 = 2z^2$ mà ta đã giải ở trên.

KẾT LUẬN

Tóm lại, luận văn "Phương trình vô định nghiệm nguyên" đã đề cập đến các vấn đề sau:

1) Nghiên cứu các phương pháp giải phương trình vô định bậc nhất hai ẩn và qui trình tìm nghiệm của phương trình vô định bậc nhất nhiều ẩn.

2) Nghiên cứu các dạng và cách giải của phương trình vô định bậc hai hai ẩn trên cơ sở tiếp cận phương trình Pell.

3) Tìm hiểu một phương trình dạng đặc biệt - Phương trình Pythagore.