

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Võ Quốc Ấn

Q – ĐIỂM TRONG DENDROID

Chuyên ngành: Hình học và Tôpô

Mã số: 60 46 10

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. NGUYỄN HÀ THANH

Thành phố Hồ Chí Minh – 2011

DANH MỤC CÁC KÍ HIỆU

B^n : quả cầu đơn vị n – chiều trong $\mathbb{R}^n$.

I^n : hình lập phương n – chiều trong $\mathbb{R}^n$.

$E(X)$: tập các điểm cuối của X .

$S(X)$: tập các điểm cuối và đỉnh của X .

$CL(X)$: siêu không gian gồm các tập con đóng và khác rỗng của X .

2^X : siêu không gian gồm các tập con đóng, khác rỗng, compact của X .

$C(X)$: siêu không gian gồm các tập con đóng, khác rỗng, compact, liên thông của X .

$Ord_p X$: bậc của điểm p (theo nghĩa thông thường) của điểm p trong continuum X .

pq : cung nối hai điểm p và q trong dendroid.

$\limsup A_n$: giới hạn trên của dãy các tập A_n .

$\liminf A_n$: giới hạn dưới của dãy các tập A_n .

$\lim A_n$: giới hạn của dãy các tập A_n .

$N_d(r, A)$: quả cầu suy rộng tâm là tập A , bán kính r .

H_d : metric Hausdorff cảm sinh bởi metric d .

F_H : quật điều hòa.

F_C : quật Cantor.

$\leq_p$: thứ tự điểm cắt yếu tương ứng với điểm p (trong dendroid).

$\leq$: thứ tự điểm cắt yếu (trong dendroid) khi không sợ nhầm lẫn.

$\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_k$: kí hiệu cho $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là phân hoạch của α .

$Cl(A)$: bao đóng của tập A .

$Fr(A)$: tập các điểm biên của tập A .

MỤC LỤC

DANH MỤC CÁC KÍ HIỆU.....	1
MỤC LỤC.....	3
MỞ ĐẦU	5
CHƯƠNG 1: MỞ ĐẦU VỀ LÝ THUYẾT CONTINUUM VÀ SIÊU KHÔNG GIAN	8
1.1. Các khái niệm mở đầu trong lý thuyết continuum . ([18] và [8]).....	8
1.1. 1. Định nghĩa continuum.....	8
1.1. 2. Ví dụ.....	8
1.2.3. Các khái niệm liên quan.....	9
1.1.4. Dendroid và quật.....	10
1.2. Vài khái niệm cơ bản trong siêu không gian. ([14])	12
1.2.1. Các siêu không gian thường gặp.....	12
1.2.2. Tôpô trên siêu không gian.....	12
1.2.3. Ví dụ đơn giản về siêu không gian.	12
1.2.4. Cơ sở của tôpô trên siêu không gian.....	12
1.2.5. Metric trên siêu không gian.....	13
1.3. Giới hạn trên, giới hạn dưới và giới hạn của dãy các tập hợp trong continuum.....	14
1.3.1. Định nghĩa.	14
1.3.2. Các định lý và mệnh đề.....	15
1.4. Q – điểm	16
CHƯƠNG 2 : TÍNH CO RÚT ĐƯỢC CỦA DENDROID	18
2.1. Các khái niệm mở đầu.....	18
2.1.1. Định nghĩa. ([8]).....	18
2.1.2. Một vài tính chất của quật và dendroid qua các ánh xạ	19
2.1.3. Định nghĩa.	19
2.1.4. Định nghĩa.....	20

2.1.5. Định lí.....	20
2.1.6. Định lí.....	20
2.1.7. Định nghĩa.	21
2.1.8. Định lí.....	21
2.1.9. Một số kết quả trên quạt Cantor. ([8] và [7])	21
2.2. Tính co rút và các tính chất liên quan.....	22
2.2.1. Tính trơn và tính co rút.	22
2.2.2. R –cung, R –điểm và Ri –continuum và tính co rút.	22
2.2.3. Dendroid kiểu N và tính co rút.....	23
2.2.4. Quạt có tính chất P , Q – điểm và tính co rút.....	23
2.2.5. Tính trơn từng khúc và tính co rút.....	26
2.2.6. Sự tồn tại zig – zag và tính co rút.	26
2.2.7. Định lí.....	26
2.2.8. Hàm tập hợp T và tính co rút.....	27
2.2.9. Tính chất giao cong và tính co rút.	29
2.2.10. Tính chọn được và tính co rút.....	33
CHƯƠNG 3: SỰ TỒN TẠI Q – ĐIỂM TRONG DENDROID	35
3.1. Các định lí về sự tồn tại Q – điểm.....	35
3.2. Các ví dụ.....	37
KẾT LUẬN	47
TÀI LIỆU THAM KHẢO	48

MỞ ĐẦU

Lí thuyết continuum và siêu không gian là một bộ phận của hình học tôpô. Trong toán học hiện đại, tôpô có vai trò vô cùng quan trọng. Những ứng dụng vô cùng lớn của nó đã được dùng không những các ngành của toán học thuần túy như giải tích, đại số mà còn trong cơ học lí thuyết, cơ học lượng tử, vật lí hạt nhân,....

Một continuum (hay continua) là một không gian compact liên thông Hausdorff. Khái niệm continuum được giới thiệu lần đầu tiên bởi Georg Cantor vào năm 1893. Trong [16], tác giả đã chứng minh khái niệm về continuum của Georg Cantor và định nghĩa continuum là một. Những tính chất cơ bản của một continua được suy từ các tính liên thông của không gian tôpô. Từ khi khái niệm về continuum của Georg Cantor ra đời cho đến nay, nhiều nhà toán học tên tuổi đã nghiên cứu về nó và thu được những kết quả quan trọng có ứng dụng cao trong toán học và thực tiễn. Cho đến nay, nhiều bài toán trong lí thuyết continuum vẫn còn là các bài toán mở. Giải quyết các bài toán này sẽ mở ra những hướng nghiên cứu mới và những ứng dụng to lớn. Do đó việc nghiên cứu về lí thuyết continuum đang rất thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học.

Một continuum X được gọi là có tính chất unicoherent nếu với hai continuum con A, B bất kì của X , ta luôn có $A \cap B$ liên thông. Một continuum X liên thông đường có tính chất unicoherent di truyền được gọi là dendroid. Một dendroid có đúng một điểm phân chia được gọi là một quạt. Một trong những tính chất quan trọng trong nghiên cứu continuum là tính co rút được của dendroid và quạt. Tính co rút của một không gian là khái niệm ta đã biết từ lý thuyết đồng luân: một không gian tôpô X được gọi là co rút được nếu có một đồng luân $H: X \times I \rightarrow X$ sao cho với điểm $p \in X$ nào đó và với mỗi $x \in X$ ta có $H(x, 0) = x$ và $H(x, 1) = p$. Có nhiều khái niệm được đưa ra để phục vụ cho việc nghiên cứu tính co rút được của dendroid và quạt. Cụ thể trong [1], D. P. Bellamy và J. J. Charatonik đã sử dụng hàm tập hợp T để nghiên cứu tính co rút cho continuum; trong [17], Taejin Lee đã dùng tính chất giao con để nghiên cứu tính co rút cho quạt; trong [9], J. J. Charatonik đã đưa ra mối quan hệ giữa hàm chọn liên tục và tính co rút,

Một trong những công cụ vô cùng hiệu quả được sử dụng để nghiên cứu tính co rút là Q – điểm. Khái niệm Q – điểm được giới thiệu bởi Raph Bennett, trong đó ông đã dùng Q – điểm để chứng minh cho tính không co rút được của các dendroid. Từ đó Q – điểm được dùng để tìm điều kiện không co rút được trong các dendroid. Đối với các quạt, khi trong quạt có chứa Q – điểm thì quạt đó không co rút được. Điều này đã được chứng minh bởi Lex G. Oversteegen. Trong [20], Lex G. Oversteegen đã sử

dụng Q – điểm để đưa ra các đặc trưng cho quạt không co rút được. Một câu hỏi lớn được đưa ra một cách tự nhiên là: “Có phải dendroid có Q – điểm thì không co rút được?”. Đây là bài toán quan trọng nhất về Q – điểm và cho đến nay vẫn còn là một bài toán mở. Khi tiến hành tìm lời giải cho bài toán trên, một cách tự nhiên, người ta đưa ra câu hỏi: “Nếu quạt có Q – điểm, liệu rằng đỉnh của quạt đó là Q – điểm?”, “Nếu quạt không liên thông địa phương tại đỉnh của nó thì đỉnh của nó có phải là Q – điểm?”. Người ta đã tìm được quạt mà đỉnh của quạt đó không phải là Q – điểm nhưng có một dãy các Q – điểm hội tụ về đỉnh nên hai câu hỏi trên đã được giải quyết. Tuy nhiên nếu ta thay điều kiện quạt bởi điều kiện mạnh hơn là quạt phẳng, ta có các bài toán mới: “Nếu một quạt phẳng có một Q – điểm thì Q – điểm đó có phải là đỉnh của quạt không?”; “Nếu một quạt phẳng không liên thông tại đỉnh thì đỉnh có phải là Q – điểm hay không?”; “Nếu quạt không liên thông địa phương tại đỉnh thì quạt đó có Q – điểm hay không?”,

Như vậy cho đến nay, nhiều bài toán trong lí thuyết continuum và siêu không gian vẫn còn là những bài toán mở. Giải quyết được những bài toán mở này sẽ tạo ra những ứng dụng lớn trong thực tiễn. Tuy nhiên muốn giải quyết được những bài toán mở này không đơn giản. Khái niệm Q – điểm được đưa vào nhằm góp phần giải quyết các bài toán mở đó. Với những lí do trên, chúng tôi quyết định chọn đề tài về Q – điểm để nghiên cứu.

Như đã nói ở trên, với mong muốn tiến gần hơn bài toán mở về Q – điểm trong dendroid: “Có phải dendroid có Q – điểm thì không co rút được?”, mà ta đã có kết quả “Nếu một quạt có Q – điểm thì quạt đó không co rút được”, ta nên xuất phát từ việc nghiên cứu Q – điểm trong các quạt, từ đó sẽ mở rộng việc nghiên cứu này trên các dendroid với hữu hạn điểm phân chia và dendroid tổng quát. Do đó tên đề tài luận văn mà chúng tôi lựa chọn là : “ Q – điểm trong dendroid”.

Nội dung của luận văn gồm ba chương. Chương 1 trình bày các khái niệm cơ bản về lí thuyết continuum và siêu không gian. Những kiến thức được đưa ra trong chương 1 hầu hết rất đơn giản đủ giúp chúng ta hiểu được các khái niệm các phần sau. Chương 2 chủ yếu trình bày các khái niệm liên quan đến tính co rút của dendroid và mối liên quan giữa các khái niệm đó với tính co rút được của dendroid. Chương 3 chỉ ra sự tồn tại của Q – điểm trong dendroid và trả lời cho một số vấn đề được nêu ở trên. Trong phần kết luận, ta sẽ trình bày nhận xét và các hướng mở rộng cho luận văn.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Tiến sĩ Nguyễn Hà Thanh. Trong quá trình học tập và làm luận văn, thầy luôn động viên giúp tác giả tiếp cận với những hướng mới trong toán học hiện đại, các vấn đề lớn và các bài toán mở trong toán. Sự động viên và sự hướng dẫn tận tình

của thầy không những giúp tác giả trong việc hoàn thành luận văn mà còn giúp tác giả có thêm những cách nhìn nhận mới trong các lĩnh vực khác của cuộc sống xã hội. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn đến giáo sư Felix Capulín, Universidad Autónoma Del Estado De México; Facultad De Ciencias, Departamento De Matemáticas; Instituto Literario No 100, Col. Centro; Código Postal 50 000, Toluca, Edo. de México, México đã giúp đỡ và hỗ trợ một số tài liệu phục vụ cho luận văn và những góp ý giúp tác giả hoàn thành luận văn. Xin chân thành cảm ơn các thầy trong Tổ Hình học, Khoa Toán – Tin Trường Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh đã giúp đỡ tác giả nâng cao trình độ chuyên môn và phương pháp làm việc hiệu quả trong quá trình học cao học. Chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Tổ Chức Hành chính, Phòng Khoa học Công nghệ và Sau đại học, Phòng Kế hoạch – Tài chính Trường Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh đã giúp đỡ, tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành luận văn này.

CHƯƠNG 1: MỞ ĐẦU VỀ LÝ THUYẾT CONTINUUM VÀ SIÊU KHÔNG GIAN

Trong chương đầu tiên này, chúng ta sẽ đưa ra cơ sở lý thuyết nhằm phục vụ cho các chương tiếp theo. Các kiến thức chủ yếu trong chương này là các khái niệm cơ bản trong lý thuyết continuum và siêu không gian.

Hầu hết các kiến thức được đưa ra rất ngắn gọn để hiểu được các khái niệm trong phần sau. Để tìm hiểu chi tiết, ta có thể tham khảo thêm trong các tài liệu [8], [14] và [18].

Sau đây là các khái niệm nhập môn trong lý thuyết continuum.

1.1. Các khái niệm mở đầu trong lý thuyết continuum . ([18] và [8])

1.1. 1. Định nghĩa continuum.

Một *continuum* (hay *continua*) là một không gian compact liên thông Hausdorff.

Nếu continuum đang xét là một không gian metric thì ta gọi continuum đó là *continuum metric*.

Continuum có nhiều hơn một điểm được gọi là continuum *không suy biến*.

Sau đây là các ví dụ về continuum :

1.1. 2. Ví dụ.

Một *cung* được hiểu là ảnh qua một phép đồng phôi nào đó của đoạn $[0,1]$ của đường thẳng thực. Vì $[0,1]$ là một continuum, hơn nữa tính compact, liên thông và Hausdorff bất biến qua phép đồng phôi nên một cung là một continuum.

Giả sử h là đồng phôi giữa $[0,1]$ và cung đã cho. Khi đó giả sử $p = h(0)$ và $q = h(1)$ thì ta gọi p và q là các điểm cuối của cung đó.

Trong không gian $\mathbb{R}^n$, quả cầu đơn vị được ta kí hiệu là $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ với $\|x\|$ kí hiệu cho chuẩn Euclide của x . Một không gian được tạo thành bởi ảnh của B^n qua một phép đồng phôi nào đó được gọi là một n – tế bào. Vì B^n là một continuum nên n – tế bào cũng là một continuum.

Trong $\mathbb{R}^n$, ta có $B^n \approx I^n = \prod_{i=1}^n [0,1]_i$ nên trong nhiều tài liệu các tác giả định nghĩa n – tế bào là không gian đồng phôi với I^n .

1.2.3. Các khái niệm liên quan.

Một $(n - 1)$ – *mặt cầu* là một không gian đồng phôi với ∂B^n hay ∂I^n .

Một *hình lập phương Hilbert* là một không gian đồng phôi với $I^\infty = \prod_{i=1}^\infty [0,1]_i$.

Đây cũng là các continuum.

Nếu trong một không gian nào đó, bất kì hai điểm nào cũng được nối với nhau bởi một cung nằm trong không gian đó thì không gian đó được gọi là không gian *liên thông cung* (hay *liên thông đường*).

Một không gian được gọi là *liên thông cung đều* nếu không gian đó liên thông cung và với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn tồn tại số tự nhiên k sao cho mỗi cung trong đó có k điểm chia cung đó ra thành các cung con có đường kính nhỏ hơn ε .

Một tính chất $\mathcal{P}$ nào đó được gọi là *di truyền* trên không gian X nếu mỗi tập con (đóng, mở) của X cũng có tính chất $\mathcal{P}$.

Hợp của ba cung xuất phát từ một điểm v được gọi là một *triiod đơn* nếu giao của hai cung bất kì trong ba cung đó luôn là v . Khi đó v được gọi là *đỉnh* của triiod đơn đó và các cung đó gọi là các *cánh tay*.

Cho không gian X là hợp của các cung theo nghĩa mỗi điểm của X nằm trong một cung nào đó chứa trong X . Một điểm x trong X được gọi là một *điểm cuối* của X nếu x là một điểm cuối của một cung nào đó trong X chứa x . Khi đó tập các điểm cuối của X được kí hiệu là $E(X)$.

Một điểm x của X được gọi là *điểm phân chia* nếu có một triiod đơn nào đó chứa trong X và nhận x làm đỉnh.

Một continuum được gọi là *phẳng* nếu có một đồng phôi giữa X với mặt phẳng Euclide.

Một điểm p của continuum X liên thông cung được gọi là có bậc k (theo nghĩa thông thường) nếu điểm p đó là điểm cuối của đúng k cung nối điểm p với các điểm khác đồng thời các cung này phải nằm trong X . Khi đó ta kí hiệu $Ord_p X = k$.

Khi đó ta có p là điểm cuối của X khi và chỉ khi $\text{Ord}_p X = 1$ và p là điểm phân chia của X khi và chỉ khi $\text{Ord}_p X \geq 3$.

Một continuum X được gọi là có tính chất *unicoherent* nếu với hai continuum con A, B bất kì của X , ta luôn có $A \cap B$ liên thông.

Định nghĩa sau đây cùng với các tính chất trên đó liên quan trực tiếp đến nội dung chính của luận văn.

1.1.4. Dendroid và quạt.

Định nghĩa. Một continuum X liên thông đường có tính chất unicoherent di truyền được gọi là *dendroid*.

Định nghĩa. Một dendroid có đúng một điểm phân chia được gọi là một *quạt*.

Điểm phân chia trong định nghĩa được gọi là *đỉnh* của quạt.

Một quạt được gọi là *hữu hạn* (đếm được, không đếm được) nếu số điểm cuối của quạt đó *hữu hạn* (đếm được, không đếm được).

Ta cũng kí hiệu $E(X)$ cho tập các điểm cuối của quạt X và $S(X) = E(X) \cup \{v\}$ trong đó v là đỉnh của quạt.

Giả sử quạt X có đỉnh là v là e là điểm cuối của X . Khi đó ta có thể kí hiệu $X = \bigcup_{e \in E(X)} ve$.

Sau đây là các ví dụ về quạt:

Ví dụ 1. Cho H bao đóng của dãy điều hòa các số thực, nghĩa là $H = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Khi đó nón trên H là:

$$F_H = (H \times [0,1]) / (H \times \{0\})$$

là một quạt và ta gọi đó là *quạt điều hòa*.

Thông thường ta hiểu quạt điều hòa như không gian con trong mặt phẳng Euclide $\mathbb{R}^2$. Đặt $v = (0,0)$, $e_0 = (0,1)$, $e_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có thể viết

$$F_H = \bigcup \{ve_n : n \in \{0,1,2, \dots\}\}.$$

Quạt điều hòa là quạt đếm được.

Ví dụ 2. Cho tập Cantor

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{3^{m-1}-1} \left(\frac{3^{k+1}}{3^m}, \frac{3^{k+2}}{3^m} \right).$$

Nón trên tập Cantor C là

$$F_C = (C \times [0,1]) / (C \times \{0\})$$

là một quạt và được gọi là *quạt Cantor*.

Quạt Cantor là quạt không đếm được.

Quạt Cantor có vai trò quan trọng trong lý thuyết continuum. Vai trò đó sẽ được trình bày ở phần sau của luận văn.

Cho p, q là hai điểm trong dendroid X . Nếu $p \neq q$, ta kí hiệu cung duy nhất nối p và q là pq . Trong trường hợp $p = q$, ta quy ước $pq = \{p\}$.

Định nghĩa. Một không gian tôpô X được gọi là *liên thông địa phương* tại $p \in X$ nếu mỗi lân cận mở G của p đều chứa một lân cận liên thông nào đó của p .

Định nghĩa. Một continuum liên thông địa phương được gọi là *continuum Peano*.

Định nghĩa. Một dendroid liên thông địa phương được gọi là một *dendrite*.

Một dendrite có hữu hạn các điểm cuối được gọi là một *cây*.

Định nghĩa. Continuum A được gọi là *bất khả quy* giữa hai điểm p, q nếu không có continuum con thật sự nào của A chứa cả p và q . (để hiểu rõ hơn ta có thể xem thêm trong [16])

Từ định nghĩa trên ta thấy rằng một cung luôn là continuum bất khả quy giữa các điểm cuối của nó.

Định nghĩa. Cho A, B là các continuum con của dendroid X . Một cung pq thỏa $pq \cap P = \{p\}$ và $pq \cap Q = \{q\}$ được gọi là *đường nối bất khả quy* giữa P và Q hay *cung bất khả quy* giữa P, Q .([9]).

Định nghĩa. Cho X là một quạt và điểm $p \in X$. Khi đó thứ tự điểm cắt yếu (tương ứng với p) (được kí hiệu $\leq_p$ hay $\leq$ nếu không sợ nhầm lẫn) được xác định trên X như sau: $x \leq_p y$ nếu và chỉ nếu $x \in py$. Ta có thể gọi thứ tự điểm cắt yếu là thứ tự riêng.

1.2. Vài khái niệm cơ bản trong siêu không gian. ([14])

1.2.1. Các siêu không gian thường gặp.

Cho không gian tôpô X với tôpô T cho trước, các tập

$$CL(X) = \{A : A \text{ là tập con đóng và khác rỗng của } X\},$$

$$2^X = \{A \in CL(X) : A \text{ compact}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ liên thông}\}$$

được gọi là các siêu không gian của X .

Sau đây ta sẽ trang bị một tôpô trên $CL(X)$ và ta gọi tôpô này là T_V .

1.2.2. Tôpô trên siêu không gian.

Định nghĩa. Tôpô T_V trên $CL(X)$ là tôpô nhỏ nhất có tính chất tự nhiên sau : $\{A \in CL(X) : A \subset U\} \in T_V$ nếu $U \in T$ và $\{A \in CL(X) : A \subset U\}$ là tập đóng nếu U đóng trong X .

Như vậy $CL(X)$ trở thành không gian tôpô với tôpô T_V và ta gọi T_V là tôpô Vietoris của siêu không gian $CL(X)$.

1.2.3. Ví dụ đơn giản về siêu không gian.

Cho $X = \{0; 1\}$ với tôpô $T = \{X, \{0\}, \emptyset\}$. Khi đó các tập đóng trong X là $X, \{1\}, \emptyset$. Do đó siêu không gian của X là $CL(X) = \{\{1\}, X\}$ và tôpô Vietoris trên $CL(X)$ là $T_V = \{\emptyset, CL(X)\}$. Đây là tôpô thô.

1.2.4. Cơ sở của tôpô trên siêu không gian.

Sau đây ta sẽ chỉ ra một cơ sở β_V của T_V .

Với hữu hạn các tập $S_1, S_2, \dots, S_n$ là các tập con của X , ta kí hiệu

$$\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle = \{A \in CL(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^n S_i \text{ và } A \cap S_i \neq \emptyset \text{ với mọi } i\}.$$

Định lí . ([14]) Cho (X, T) là không gian tôpô và cho

$$\beta_V = \{\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle : U_i \in T \text{ với mỗi } i \text{ và } n < \infty\}.$$

Khi đó β_V là một cơ sở của T_V .

Ta có định lí cơ bản trên siêu không gian:

Định lí . Nếu $X \approx Y$ thì $CL(X) \approx CL(Y)$.

Chứng minh.

Giả sử $h: X \rightarrow Y$ là một phép đồng phôi. Ta xác định ánh xạ h^* trên $CL(X)$ như sau:

$$h^*: CL(X) \rightarrow CL(Y)$$

$$h^*(A) = h(A)$$

với mỗi $A \in CL(X)$.

Vì h là ánh xạ đồng phôi nên h^* biến $CL(X)$ thành $CL(Y)$.

Với mọi $B \in CL(Y)$, ta có $h^{-1}(B) \in CL(X)$ và $h^*(h^{-1}(B)) = B$ nên h^* là toàn ánh.

Do h đơn ánh nên h^* cũng là một đơn ánh.

Vậy h^* là một phép đồng phôi giữa $CL(X)$ và $CL(Y)$.

1.2.5. Metric trên siêu không gian.

Bây giờ ta giả sử X là một không gian metric với metric d . Ta sẽ xây dựng một metric trên $CL(X)$ và như thế $CL(X)$ cũng trở thành một không gian metric.

Với $x \in X$ và $A \in CL(X)$, ta gọi khoảng cách từ x đến A là

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}.$$

Định nghĩa. Với $r > 0$ và $A \in CL(X)$, ta định nghĩa $N_d(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$ và ta gọi đây là *quả cầu mở suy rộng tâm A bán kính r* .

Khi trong không gian đang xét không có metric nào khác ngoài metric d hay khi không quan tâm đến metric d , ta có thể kí hiệu quả cầu suy rộng tâm A bán kính r là $N(r, A)$ hay $N(A, r)$ thay cho $N_d(r, A)$.

Định nghĩa . Cho (X, d) là không gian metric bị chặn. Khi đó metric Hausdorff được sinh bởi metric d được kí hiệu là H_d được xác định như sau : với mọi $A, B \in CL(X)$

$$H_d(A, B) = \inf \{r > 0 : A \subset N_d(r, B) \text{ và } B \subset N_d(r, A)\}.$$

Chúng minh H_d là metric đã được trình bày trong [14], tr. 11-12 .

Định lí. ([14]) Cho không gian metric (X, d) . Khi đó $(2^X, T_V)$ metric hóa được và $T_V = T_{H_d}$. Trong đó T_{H_d} là tôpô sinh bởi metric H_d .

Chú ý. Khi X là một continuum, vì một tập đóng trong không gian compact luôn là tập compact nên ta có $CL(X) \equiv 2^X$. Do đó khi xét siêu không gian của continuum, ta chỉ xét hai siêu không gian là 2^X và $C(X)$.

1.2.7. Thêm một ví dụ về siêu không gian.

Nếu S^1 là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức thì $C(S^1)$ là 2 – tế bào ([19], tr. 369).

Ta biết rằng S^1 luôn đồng phôi với một đường cong đóng, do đó nếu X là một đường cong đóng thì ta có $C(X) \approx C(S^1)$ nên $C(X)$ cũng là 2 – tế bào.

1.3. Giới hạn trên, giới hạn dưới và giới hạn của dãy các tập hợp trong continuum.

1.3.1. Định nghĩa.

Cho một dãy các tập khác rỗng $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ của X . Khi đó

$$\begin{aligned} \limsup A_n &= \{p \in X : \text{mỗi lân cận } U \text{ của } p \text{ trong } X \text{ ta đều có } U \cap A_n \\ &\neq \emptyset \text{ với nhiều vô hạn các số nguyên dương } n\} \end{aligned}$$

được gọi là giới hạn trên của $\{A_n\}_{n=1}^\infty$.

$$\begin{aligned} \liminf A_n &= \{p \in X : \text{mỗi lân cận } U \text{ của } p \text{ trong } X \text{ ta đều có } U \cap A_n \\ &\neq \emptyset \text{ với nhiều hữu hạn các số nguyên dương } n\}. \end{aligned}$$

được gọi là giới hạn dưới của $\{A_n\}_{n=1}^\infty$.

Nếu $\limsup A_n = \liminf A_n = A$. Ta định nghĩa $\lim A_n = A$ được gọi là giới hạn của $\{A_n\}_{n=1}^\infty$.

1.3.2. Các định lí và mệnh đề.

Mệnh đề. Cho không gian tôpô X , $\{A_i\}_{i=1}^n$ là dãy các tập con trong X và A là một tập con của X . Khi đó (1) và (2) dưới đây tương đương.

$$(1) \lim A_i = A.$$

$$(2) \limsup A_i \subset A \text{ và } \liminf A_i \supset A.$$

Chứng minh.

Từ (1) suy ra (2) là hiển nhiên.

Theo định nghĩa của $\limsup A_i$ và $\liminf A_i$ ta luôn có $\liminf A_i \subset \limsup A_i$ nhưng từ (2) ta có $\limsup A_i \subset \liminf A_i$ nên $\liminf A_i = \limsup A_i = \lim A_i = A$. Vậy ta cũng được (2) suy ra (1) nên mệnh đề được chứng minh xong.

Định lí. ([14]) Cho (X, d) là không gian metric compact và $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ là dãy các tập compact khác rỗng trong X . Khi đó $\lim A_i = A$ nếu và chỉ nếu $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ hội tụ về A trong 2^X tương ứng với metric Hausdorff H_d .

Mệnh đề. ([3], tr. 6) Cho X là continuum có tính chất unicoherent di truyền và A_n là dãy các continuum con trong X . Khi đó $\limsup A_n$ và $\liminf A_n$ là các continuum.

Mệnh đề. ([3], tr. 7) Cho X là một dendroid và a_n, b_n là dãy các điểm trong X hội tụ. Khi đó $\liminf a_n b_n$ hội tụ và nếu $\lim a_n = a$ và $\lim b_n = b$ thì $ab \subset \liminf a_n b_n$.

Định nghĩa. Một quạt X với đỉnh v được gọi là *tron* nếu một dãy các điểm a_n nào đó trong X hội tụ về a thì dãy các cung va_n hội tụ và $\lim va_n = va$.

Tổng quát hóa định nghĩa này, ta có định nghĩa dendroid tron.

Định nghĩa. Dendroid X được gọi là *tron* nếu tồn tại một điểm p thuộc X sao cho với mỗi dãy các điểm a_n nào đó hội tụ và $\lim a_n = a$ thì ta có dãy các cung pa_n hội tụ và $\lim pa_n = pa$.

Điểm p trong định nghĩa trên được gọi là *điểm đầu* của X . Tập tất cả các điểm đầu trong X được gọi là *tập gốc* của X .

Từ định nghĩa về quạt tròn và dendroid tròn, ta có mỗi quạt tròn đều là dendroid tròn và không có quạt không tròn nào là dendroid tròn.

Định lí. ([3], [4]) Tính tròn là tính chất di truyền trên quạt và dendroid. Điều này có nghĩa là nếu X là quạt tròn (dendroid tròn) thì mỗi quạt con (dendroid con) của X cũng tròn.

Định lí. ([3], tr. 7) Quạt X với đỉnh v là tròn nếu và chỉ nếu với hai dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ các điểm của X hội tụ thỏa $\lim a_n = a, \lim b_n = b$ và với mỗi n ta có $a_n b_n \setminus \{v\}$ liên thông ta suy ra $\lim a_n b_n = ab$.

Định lí. ([3], tr. 9) Nếu quạt X với đỉnh v tròn và nếu với hai dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ các điểm của X hội tụ thỏa $\lim a_n = a, \lim b_n = b$ và với mỗi n ta có $a_n b_n \setminus \{v\}$ liên thông thì ta có $ab \setminus \{v\}$ liên thông.

Ví dụ.

Xét quạt X đỉnh v trong mặt phẳng gồm đoạn thẳng ab , trong đó $a = (0,1), b(0,-1)$ và dãy các đường gấp khúc $a_n b_n c_n v$ trong đó $a_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right), b_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{n+1}{n}\right), c_n = \left(-\frac{1}{n}, -\frac{n+1}{n}\right), v = (0,0)$. Khi đó ta có $\lim a_n = a, \lim b_n = b, \lim a_n b_n = ab$ và $a_n b_n \setminus \{v\}$ liên thông nhưng $ab \setminus \{v\}$ không liên thông. Từ đó ta thấy được giả thiết X tròn trong định lí trên là cần thiết.

1.4. Q – điểm

Định nghĩa . Một điểm p của dendroid X được gọi là một Q – điểm của X nếu có một dãy $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ về p sao cho $\limsup pp_n \neq \{p\}$ và nếu với mỗi $m \geq 1, q_m$ là điểm duy nhất trong $\limsup pp_n$ sao cho $p_m q_m \cap \limsup pp_n = \{q_m\}$ thì $\lim q_n = p$.

Ta có định nghĩa tương đương với định nghĩa trên như sau: Một điểm p của dendroid X được gọi là một Q – điểm của X nếu có một dãy $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ về p sao cho $\limsup pp_n \neq \{p\}$ và nếu $p_n q_n$ là cung bất khả quy giữa p_n với $\limsup pp_n$ thì $\lim q_n = p$.

Khái niệm Q – điểm được đưa ra bởi Ralph Bennet trong bài viết dưới dạng preprint “On some classes of non-contractible dendroid” của ông . Ông đã dùng khái niệm này để chứng minh cho tính không co rút được của một vài dendroid. Từ đó đến nay, nhiều nhà toán học đã sử dụng hiệu quả khái niệm này để tìm điều kiện không co rút được và không chọn được cho dendroid. Một trong những kết quả quan trọng khi sử dụng khái niệm Q – điểm để nghiên cứu về tính co rút của dendroid là “Mỗi quạt chứa Q – điểm là quạt không co rút được”. Tuy nhiên liệu kết quả này có đúng trên dendroid bất kì không thì vẫn còn là một bài toán mở.

Trong môn tôpô đại cương, ta đã nghiên cứu các bất biến qua phép đồng phôi như tính đóng, mở, compact, liên thông, Hausdorff,..., từ đó giúp quá trình phân loại các không gian thuận lợi và do các không gian đồng phôi với nhau có thể xem như là một nên chỉ cần nghiên cứu tính chất của một không gian nào đó, ta có thể suy ra tính chất của các không gian thuộc cùng lớp đồng phôi. Tuy nhiên lớp các không gian đồng phôi khá hẹp, cùng với đó là nhiều bài toán không thể giải quyết được với tôpô thuần túy dẫn đến nhiều nhánh mới của tôpô học ra đời. Một trong các môn học xuất phát từ thực tế đó là lí thuyết đồng luân. Ta đã biết rằng các không gian đồng phôi với nhau luôn có cùng kiểu đồng luân và phép đồng luân không quá khắt khe như phép đồng phôi nên lớp các không gian đồng luân đã được mở rộng, từ đó người ta tiến hành quá trình phân loại các không gian có cùng kiểu đồng luân. Một trong các lớp không gian có cùng kiểu đồng luân được tập trung nghiên cứu là không gian có cùng kiểu đồng luân với không gian gồm chỉ một điểm do các ứng dụng rộng rãi của nó trong giải tích, đại số, cơ học,... . Những không gian đó còn được gọi là không gian co rút được.

Trong lí thuyết về continuum và siêu không gian cũng không ngoại lệ. Tính co rút được tập trung nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học nổi tiếng. Tập trung chủ yếu là nghiên cứu về tính co rút của quạt và dendroid. Dù hiệu quả nhưng Q – điểm không phải là công cụ duy nhất trong việc nghiên cứu tính co rút của dendroid. Trong chương dưới đây, ta sẽ đưa ra vài mối liên hệ giữa tính co rút của các không gian với các khái niệm có liên quan đến tính co rút.

CHƯƠNG 2 : TÍNH CO RÚT ĐƯỢC CỦA DENDROID

Như đã đề cập ở trên, nội dung chính của chương hai sẽ tập trung đề cập đến tính co rút của dendroid cùng với những khái niệm liên quan đến tính co rút như tính trơn, dendroid kiểu N , quạt có tính chất P , tính trơn từng khúc, sự tồn tại zig – zag, hàm tập hợp T , R – điểm, R – continuum, R – cung, tính chất giao cong, tính chọn được. Những kiến thức này sẽ được đưa ra trong phần 2.2 của chương này.

Trước khi đưa ra các khái niệm đó và sử dụng các khái niệm đó cho việc nghiên cứu tính co rút của dendroid, trong phần đầu của chương hai, ta sẽ giới thiệu các khái niệm liên quan phục vụ cho phần sau và vài tính chất trên dendroid và quạt.

2.1. Các khái niệm mở đầu.

2.1.1. Định nghĩa. ([8])

Cho X, Y là các continuum. Một phép biến đổi liên tục $f: X \rightarrow Y$ được gọi là:

Một đồng phôi địa phương nếu mỗi điểm trong X có một lân cận mở U sao cho $f(U)$ mở trong Y và $f|_U : U \rightarrow f(U)$ là một đồng phôi.

Ánh xạ trong tại $x \in X$ nếu với mỗi tập mở U chứa x , $f(x)$ là một điểm trong của $f(U)$.

Mở nếu f biến mỗi tập mở trong X thành một tập mở trong Y (chú ý rằng f mở nếu và chỉ nếu f là ánh xạ trong tại mỗi điểm $x \in X$).

Đơn điệu nếu với mỗi continuum con Q của Y , $f^{-1}(Q)$ là một continuum con trong X . Điều này tương đương với : với X là một continuum, ảnh ngược của mỗi điểm trong Y liên thông.

Đơn điệu tương đối với $x \in X$ nếu với mỗi continuum con Q của Y thỏa $f(x) \in Q$ ta có $f^{-1}(Q)$ liên thông.

Hầu như đơn điệu nếu với mỗi continuum con Q của Y có phần trong khác rỗng, $f^{-1}(Q)$ có hữu hạn các thành phần và mỗi thành phần trong số đó qua f biến thành Q .

Suy biến nếu với mỗi continuum con Q của Y , mỗi thành phần của $f^{-1}(Q)$ qua f biến thành Q .

Suy biến yếu nếu với mỗi continuum con Q của Y có một thành phần của $f^{-1}(Q)$ qua f biến thành Q .

Nửa suy biến nếu với mỗi continuum con Q của Y và với hai thành phần liên thông bất kì C_1 và C_2 của $f^{-1}(Q)$ thì ta có hoặc $f(C_1) \subset f(C_2)$ hoặc $f(C_2) \subset f(C_1)$.

Suy biến địa phương nếu mỗi điểm của Y có một lân cận đóng V sao cho $f|_{f^{-1}(V)}$ toàn ánh suy biến từ $f^{-1}(V)$ vào V .

Nhẹ nếu ảnh ngược của mỗi điểm trong Y có số chiều bằng không.

2.1.2. Một vài tính chất của quạt và dendroid qua các ánh xạ.

Mệnh đề. ([7]) Nếu dendroid X chứa điểm p và một dãy các điểm hội tụ $\{a_n\}$ sao cho dãy các cung pa_n hội tụ thì continuum $\lim pa_n$ liên thông địa phương di truyền.

Mệnh đề. ([7]) Nếu toàn ánh liên tục $f: X \rightarrow Y$ từ quạt X với đỉnh v vào quạt Y với đỉnh v' là ánh xạ suy biến thì với mỗi điểm $x \in X$, ánh xạ hạn chế $f|_{vx}$ là ánh xạ đơn điệu và ánh xạ này biến cung vx thành $v'f(x)$ (có thể xảy ra trường hợp suy biến).

Mệnh đề. ([7]) Nếu toàn ánh liên tục $f: X \rightarrow Y$ giữa quạt X và quạt Y là ánh xạ suy biến thì $f(S(X)) = S(Y)$.

Mệnh đề. ([7]) Cho $f: X \rightarrow Y$ là toàn ánh mở liên tục trên quạt tron X với đỉnh v . Nếu Y là quạt với đỉnh v' thì $f^{-1}(v') = \{v\}$ và $f(E(X)) = E(Y)$.

2.1.3. Định nghĩa.

Một đồng luân từ X vào Y là một phép biến đổi liên tục $H: X \times I \rightarrow Y$.

Hai ánh xạ liên tục $f, g: X \rightarrow Y$ được gọi là *đồng luân* với nhau theo đồng luân H nếu tồn tại một ánh xạ liên tục $H: X \times I \rightarrow Y$ sao cho $H(x, 0) = f(x)$ và $H(x, 1) = g(x)$ với mỗi $x \in X$.

Nếu $X \subset Y$ và đồng luân $H: X \times I \rightarrow Y$ thỏa $H(x, 0) = x$ với mọi $x \in X$ thì H được gọi là phép biến dạng của X trong Y . Nếu $X \equiv Y$ thì H được gọi là *phép biến dạng* trong X .

Phép biến dạng $H: X \times I \rightarrow Y$ được gọi là *phép co rút* nếu $H(x, 1) = p$ cố định với mọi $x \in X$.

2.1.4. Định nghĩa.

Một không gian X được gọi là *co rút được* nếu ánh xạ đồng nhất i trên X đồng luân với ánh xạ hằng $c: X \rightarrow X$ theo đồng luân $H: X \times I \rightarrow X$.

Một không gian X được gọi là *co rút suy biến yếu* nếu ánh xạ đồng nhất i trên X đồng luân với ánh xạ hằng $c: X \rightarrow X$ theo đồng luân H sao cho $H|_{X \times \{t\}}$ suy biến yếu với mỗi $t \in I$.

Một không gian X được gọi là *co rút suy biến* nếu ánh xạ đồng nhất i trên X đồng luân với ánh xạ hằng $c: X \rightarrow X$ theo đồng luân H sao cho $H|_{X \times \{t\}}$ suy biến với mỗi $t \in I$.

Một không gian X được gọi là *co rút đơn điệu* nếu ánh xạ đồng nhất i trên X đồng luân với ánh xạ hằng $c: X \rightarrow X$ theo đồng luân H sao cho $H|_{X \times \{t\}}$ đơn điệu với mỗi $t \in I$.

2.1.5. Định lí.

Mỗi không gian co rút được luôn liên thông đường.

Chứng minh.

Giả sử X là không gian co rút được, khi đó ánh xạ đồng nhất i trên X đồng luân với ánh xạ hằng $c: X \rightarrow X$. Giả sử $H: X \times I \rightarrow X$ là phép co rút tương ứng và do đó ta có $H(x, 0) = x$ và $H(x, 1) = c(x) = x_0$.

Với $p \in X$ tùy ý, đặt $f(t) = H(p, t)$. Khi đó f liên tục trên I và ta có:

$$f(0) = H(p, 0) = p ; \quad f(1) = H(p, 1) = x_0.$$

Vậy f là đường trong X nối p với x_0 . Như vậy mọi điểm trong X đều có thể được nối với x_0 bởi một đường nào đó nên với hai điểm bất kì trong X , ta luôn có đường nối giữa chúng hay X là không gian liên thông đường.

2.1.6. Định lí.

Giả sử không gian X có hai tập A, B thỏa $A \neq \emptyset, B \neq X$ và với mỗi phép biến dạng $H: X \times I \rightarrow X$, ta có $H(A \times I) \subset B$ thì X không co rút được.

Chứng minh.

Ta sử dụng phản chứng, giả sử X có rút được, nghĩa là tồn tại phép co rút $H: X \times I \rightarrow X$ thỏa $H(A \times I) \subset B$ và $H(x, 1) = y$ với mọi $x \in X$. Theo định lý trên ta có X liên thông đường nên ta có thể chọn y là điểm tùy ý trong X . Trong trường hợp này, ta lấy $y \in X \setminus B$. Khi đó với $x \in A$, vì $H(A \times I) \subset B$ nên ta có $H(x, 1) = y \in B$. Điều này mâu thuẫn với cách lấy y nên ta có điều phải chứng minh.

2.1.7. Định nghĩa.

Một tập con khác rỗng A của không gian X được gọi là *bất động đồng luân* nếu với mỗi phép biến dạng $H: X \times I \rightarrow X$, ta có $H(A \times I) \subset A$.

2.1.8. Định lý.

Nếu không gian X chứa một tập con thật sự A bất động đồng luân thì không gian X không co rút được.

Chứng minh.

Do A là tập con thật sự của X nên $A \neq \emptyset$ và $A \neq X$. Hơn nữa do A bất động đồng luân nên với mỗi phép biến dạng $H: X \times I \rightarrow X$ ta có $H(A \times I) \subset A$. Do vậy theo định lý trên (áp dụng với tập $B = A$) ta có X không co rút được.

2.1.9. Một số kết quả trên quạt Cantor. ([8] và [7])

Mệnh đề. Một quạt trơn nếu và chỉ nếu quạt đó có thể được nhúng vào quạt Cantor.

Hệ quả. Mỗi quạt trơn có thể được biểu diễn như hợp của các đoạn thẳng trong mặt phẳng.

Mệnh đề. Cho Y là continuum không suy biến. Khi đó các điều kiện sau tương đương:

- i) Y là ảnh của quạt Cantor dưới phép biến đổi liên tục nhẹ.
- ii) Y là ảnh của quạt Cantor dưới phép biến đổi liên tục.
- iii) Y liên thông đường đều.

Hệ quả. Mỗi quạt trơn là ảnh của quạt Cantor dưới một phép biến đổi liên tục nhẹ.

Sau đây sẽ là nội dung chính của chương hai. Trong đó ta sẽ trình bày các tính chất liên quan phục vụ cho việc nghiên cứu tính co rút của dendroid và quạt.

2.2. Tính co rút và các tính chất liên quan.

2.2.1. Tính trơn và tính co rút.

Sau đây ta có mối liên hệ giữa tính trơn với tính co rút của dendroid.

Định lí. ([6]) Nếu một dendroid trơn thì dendroid đó co rút được di truyền.

Định lí. ([6]) Nếu một quạt co rút di truyền thì quạt đó trơn.

Từ hai định lí trên ta có hệ quả sau:

Hệ quả. Một quạt trơn nếu và chỉ nếu quạt đó co rút di truyền.

2.2.2. R –cung, R –điểm và R^i –continuum và tính co rút.

Cho X là dendroid. Xét một cung ab tùy ý trong X và một điểm $x \in X$. Nếu với $\varepsilon > 0$ nào đó, ta có $x \in \text{Cl}(N(ab, \varepsilon))$ và tập $xa \cap \text{Cl}(N(ab, \varepsilon))$ không liên thông, ta kí hiệu $x(\varepsilon)$ là điểm đầu tiên của cung xa được sắp thứ tự từ x đến a nằm trong $\text{Fr}(N(ab, \varepsilon))$, điều này có nghĩa là $x(\varepsilon) \in xa \cap \text{Fr}(N(ab, \varepsilon))$ và $xx(\varepsilon) \cap \text{Fr}(N(ab, \varepsilon)) = \{x(\varepsilon)\}$.

Định nghĩa. Cung ab trong dendroid X được gọi là R – cung nếu:

- i) Có hai dãy $\{u_n\}, \{v_n\}$ các điểm cuối trong X sao cho $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$.
- ii) Tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với hầu hết số nguyên dương n , các tập $u_nb \cap \text{Cl}(N(ab, \varepsilon))$ và $v_na \cap \text{Cl}(N(ab, \varepsilon))$ không liên thông (do đó các điểm $u_n(\varepsilon)$ và $v_n(\varepsilon)$ được xác định hợp lí) và các tập $u_nu_n(\varepsilon) \setminus \{u_n(\varepsilon)\}$ và $v_nv_n(\varepsilon) \setminus \{v_n(\varepsilon)\}$ không chứa điểm phân chia của X .
- iii) $\lim u_nu_n(\varepsilon) \cap \lim v_nv_n(\varepsilon) = ab$.

Định nghĩa vẫn được chấp nhận trong trường hợp R –cung suy biến, nghĩa là trong trường hợp $a = b$.

Định lí. ([6]) Mỗi R –cung chứa trong dendroid X là tập bất động đồng luân.

Ta đã biết rằng mỗi không gian chứa một con thật sự bất động đồng luân thì không gian đó không co rút được nên theo định lí trên ta có định lí sau như hệ quả của định lí trên:

Định lí. ([6]) Nếu dendroid X chứa một R – cung thì X không co rút được.

Định nghĩa. Cho X là dendroid. Một tập con thật sự A của X được gọi là $R^i - \text{continuum}$ ($i = 1; 2$ hoặc 3) nếu tồn tại tập mở U chứa A và hai dãy $\{C_n^1\}$ và $\{C_n^2\}$ của các thành phần liên thông của U sao cho:

$$A = \begin{cases} \limsup C_n^1 \cap \limsup C_n^2 & \text{với } n = 1 \\ \lim C_n^1 \cap \lim C_n^2 & \text{với } n = 2 \\ \liminf C_n^1 & \text{với } n = 3 \end{cases}$$

Nếu $R^1 - \text{continuum}$ A là tập chỉ gồm một điểm đơn $\{p\}$ thì p được gọi là $R - \text{điểm}$. ([11])

Mệnh đề. ([12]) Mỗi $R^i - \text{continuum}$ của một dendroid X là một tập con bất động đồng luân của X .

Định lí sau là hệ quả của mệnh đề trên.

Định lí. ([22], định lí 9, tr. 78) Nếu dendroid X chứa một $R^i - \text{continuum}$ ($i = 1; 2$ hoặc 3) nào đó thì X không co rút được.

Vì $R - \text{điểm}$ là trường hợp đặc biệt của $R^1 - \text{continuum}$ nên ta có hệ quả sau:

Hệ quả. Nếu dendroid X chứa một $R - \text{điểm}$ thì dendroid đó không co rút được.

2.2.3. Dendroid kiểu N và tính co rút.

Định nghĩa dendroid kiểu N . Một dendroid X được gọi là có kiểu N nếu tồn tại một cung $A \subset X$ với điểm cuối là p, q , hai dãy các cung $A_n, B_n \subset X$ với các điểm cuối lần lượt là p_n, p'_n và q_n, q'_n và các điểm $q''_n \in A_n \setminus \{p_n, p'_n\}$, $p''_n \in B_n \setminus \{q_n, q'_n\}$ sao cho thỏa các điều kiện sau:

$$A = \lim A_n = \lim B_n$$

$$p = \lim p_n = \lim p'_n = \lim p''_n$$

$$q = \lim q_n = \lim q'_n = \lim q''_n.$$

Định lí. ([21]) Nếu X là một dendroid có kiểu N thì X không co rút được.

2.2.4. Quạt có tính chất $P, Q - \text{điểm}$ và tính co rút.

Định nghĩa. Một quạt X được gọi là có tính chất P nếu mỗi dãy các điểm $\{x_i\}$ trong X ($i = 1, 2, \dots$) hội tụ về đỉnh v của X thì ta có $\limsup vx_i = v$.

Từ định nghĩa trên ta suy ra ngay kết quả là nếu quạt X có tính chất P thì đỉnh v của X không là một Q – điểm.

Ta có định lí sau:

Định lí. ([22]) Nếu X là một quạt có đỉnh v thì hai mệnh đề sau tương đương:

- i) X có tính chất P .
- ii) X liên thông địa phương tại đỉnh v .

Định lí. ([23]) Nếu X là một quạt co rút được có đỉnh là v thì X liên thông địa phương tại v .

Và như thế ta có được kết quả là nếu X là quạt co rút được thì X có tính chất P và đỉnh v của X không là Q – điểm.

Ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề. Nếu một quạt co rút được chứa một Q – điểm thì Q – điểm đó phải là đỉnh của quạt .

Trước khi chứng minh mệnh đề này, ta giới thiệu bổ đề dưới đây, bổ đề này được đưa ra bởi Charatonik.

Bổ đề. Nếu X là một dendroid co rút được và $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ là các dãy trong X lần lượt hội tụ về a_0, b_0 . Khi đó $\limsup a_n b_n$ liên thông địa phương di truyền.

Chứng minh bổ đề.

Do X co rút được nên tồn tại một phép co rút $F: [0,1] \times X \rightarrow X$ sao cho $F(0, x) = x, \forall x \in X$ và $F(1, x)$ không đổi, giả sử $F(1, x) = z$. Giả sử với mỗi $n \in \mathbb{N}$, zx_n là cung bất khả quy giữa z với $a_n b_n$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \limsup a_n b_n &\subset \limsup (x_n a_n \cup x_n b_n) \subset \limsup x_n a_n \cup \limsup x_n b_n \\
 &\subset \limsup (zx_n \cup x_n a_n) \cup \limsup (zx_n \cup x_n b_n) \\
 &= \limsup za_n \cup \limsup zb_n \subset \limsup F([0,1] \times a_n) \cup \limsup F([0,1] \times b_n) \\
 &\subset \limsup F([0,1] \times a_n) \cup ([0,1] \times b_n) \\
 &= F(\limsup \{([0,1] \times a_n) \cup ([0,1] \times b_n)\})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F(\limsup([0,1] \times a_n)) \cup F(\limsup([0,1] \times b_n)) \\
&= F([0,1] \times \{a\}) \cup F([0,1] \times \{b\}).
\end{aligned}$$

Do $F([0,1] \times \{a\}) \cup F([0,1] \times \{b\})$ liên thông địa phương và có tính chất unicoherent di truyền nên liên thông địa phương di truyền. Do đó $\limsup a_n b_n$ liên thông địa phương di truyền.

Chứng minh mệnh đề.

Ta giả sử X là quạt co rút được với các điểm cuối $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ và đỉnh của quạt X là v .

Ta sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng. Giả sử x là Q – điểm và $x \neq v$. Ta sẽ chỉ ra sự mâu thuẫn.

Do x là Q – điểm nên có một dãy nào đó các điểm $(x_n)_{n=1}^\infty$ hội tụ về x trong đó x_n thuộc các cung khác nhau trong số các cung ve_α sao cho $\limsup xx_n \neq x$ và nếu $x_n y_n$ là cung bất khả quy giữa x_n với $\limsup xx_n$ thì $\lim y_n = x$. Từ đó ta có x và v đều thuộc vào $\limsup xx_n$.

Theo bổ đề trên, ta có $\limsup xx_n$ liên thông địa phương di truyền nên $\text{Cl}\{\bigcup_{n=1}^\infty v y_n\}$ liên thông địa phương. Vì $x \in \text{Cl}\{\bigcup_{n=1}^\infty v y_n\}$ nên có một lân cận mở U của x nằm trong $\text{Cl}\{\bigcup_{n=1}^\infty v y_n\}$ sao cho U liên thông và không chứa v . Tuy nhiên U phải chứa y_n với hầu hết n và do đó phải chứa cung $y_n x$ với hầu hết mọi n . Điều này dẫn đến $y_n \in vx \setminus \{x\}$ với hầu hết mọi n . Khi đó cung $x_n v$ là continuum con thật sự của $x_n y_n$ nối x_n với $\limsup xx_n$ với hầu hết mọi n . Điều này mâu thuẫn với sự lựa chọn y_n . Mệnh đề được chứng minh.

Mệnh đề trên tương đương với mệnh đề sau:

Mệnh đề. Nếu X là một quạt co rút được với đỉnh v thì không có điểm nào của $X \setminus \{v\}$ là một Q – điểm.

Định lí. Nếu X là một quạt co rút được với đỉnh v thì X không chứa bất kì Q – điểm nào.

Chứng minh.

Do X là quạt co rút được với đỉnh v nên ta có X liên thông địa phương tại v . Do đó quạt X có tính chất P nên đỉnh v của quạt X không phải là Q – điểm.

Theo mệnh đề trên, do X là quạt co rút được nên không có điểm nào của $X \setminus \{v\}$ là Q – điểm.

Vậy X không chứa bất kì Q – điểm nào.

2.2.5. Tính trơn từng khúc và tính co rút.

Định nghĩa. Cho X là một dendroid và r là một điểm trong X . Giả sử có hai dãy các điểm trong X r_{1n} và r_{2n} hội tụ về r . Ta nói rằng dãy trước *trội hơn* dãy sau nếu có một điểm s trong X và một dãy s_{1n} hội tụ về s thỏa tính chất sau nếu các cung $r_{1n}s_{1n}$ hội tụ về cung rs thì ta cũng có các cung một dãy s_{2n} hội tụ về s sao cho cung $r_{2n}s_{2n}$ hội tụ về rs theo từng cung.

Định nghĩa. Một dendroid được gọi là *trơn từng khúc* nếu có đồng thời hai dãy cùng hội tụ về một điểm thì có một dãy trội hơn dãy còn lại.

Mệnh đề. ([13]) Mỗi quạt co rút đơn điệu yếu đều trơn từng khúc.

Định lí sau là hệ quả của mệnh đề trên.

Định lí. Nếu X là một quạt co rút được thì X trơn từng khúc.

2.2.6. Sự tồn tại zig – zag và tính co rút.

Định nghĩa. Một dendroid X được gọi là chứa một *zig – zag* nếu có một cung A với các điểm cuối p, q và một dãy các cung A_i ($i = 1, 2, \dots$) với các điểm cuối p_i, q_i và các điểm $p'_i, q'_i \in A_i \setminus \{p_i, q_i\}$ sao cho:

- i) $\lim A_i = A$,
- ii) $p = \lim p_i = \lim p'_i$,
- iii) $q = \lim q_i = \lim q'_i$,
- iv) $p_i q'_i \subset p_i p'_i$.

Từ đó ta thấy rằng nếu dendroid X chứa một zig – zag thì X có kiểu N . Vì một dendroid kiểu N không co rút được nên đó ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề. ([20]) Nếu X là dendroid chứa một zig – zag thì X không co rút được.

2.2.7. Định lí.

Cho X là quạt. Khi đó các phát biểu sau tương đương:

- (i) X co rút được.
- (ii) X không chứa Q – điểm, không có kiểu N và trơn từng khúc.

- (iii) X không chứa Q – điểm, không có zig – zag và trơn từng khúc.
- (iv) X co rút đơn điệu.
- (v) X co rút suy biến.
- (vi) X co rút suy biến yếu.

Chứng minh.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Khi X là quạt co rút được, theo các định lí đã đưa ra ở trên, ta có X không chứa Q – điểm và X trơn từng khúc.

Vì quạt cũng là dendroid, dendroid kiểu N thì không co rút được nên X không có kiểu N do X co rút được.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Theo kết quả trên ta có nếu X chứa một zig – zag thì X có kiểu N . Theo giả thiết X không có kiểu N nên X không thể chứa bất kì zig – zag nào.

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

[13; định lí 3.10].

(iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (i)

Hiển nhiên một quạt co rút đơn điệu thì co rút suy biến, một quạt co rút suy biến thì co rút suy biến yếu và một quạt co rút suy biến yếu thì co rút được nên ta có điều phải chứng minh.

2.2.8. Hàm tập hợp T và tính co rút.

Định nghĩa. Với continuum X cho trước và một tập $A \subset X$, ta kí hiệu $T(A)$ (hay $T_X(A)$ nếu ta xét nhiều hơn một continuum) là tập các điểm x của X sao cho mỗi continuum con của X chứa x ở trong phần trong của nó phải có giao với A .

Ta có kết quả $T(a)$ luôn là continuum con của X với mỗi $a \in X$.

Định lí sau được giáo sư Ralph Bennett đưa ra và đã được chứng minh bởi ông.

Định lí. Nếu một dendroid X chứa hai điểm p, q sao cho

- i) $T(p) \cap T(q) \neq \emptyset$
- ii) $p \in X \setminus T(q)$ và $q \in X \setminus T(p)$.

thì X không co rút được.

Ta có kết quả tổng quát hơn và ta có thể xem như một hệ quả của định lý trên.

Hệ quả. Cho S là một continuum và A, B là các tập con đóng của X sao cho $A \cap T(B) = \emptyset$ và $B \cap T(A) = \emptyset$. Khi đó S không co rút được.

Ta có kết quả sau:

Định lý. ([1]) Tồn tại một dendroid phẳng X với một dendroid $M \subset X$ và hai điểm p, q sao cho:

- i) $T_M(p) \cap T_M(q) \neq \emptyset$,
- ii) $p \in M \setminus T_M(q)$ và $q \in X \setminus T_M(p)$

nhưng X co rút được.

Định lý. Cho X là một quạt với đỉnh v và $M \subset X$ là một quạt con của X . Giả sử có hai điểm $p, q \in M$ thỏa mãn hai điều kiện:

- i) $T_M(p) \cap T_M(q) \neq \emptyset$,
- ii) $p \in M \setminus T_M(q)$ và $q \in X \setminus T_M(p)$.

Khi đó X không co rút được.

Chứng minh.

Để chứng minh quạt X không co rút được, ta sẽ chứng minh M không liên thông địa phương từ đó suy ra X không liên thông địa phương tại đỉnh v .

Vì $T_M(p) \cap T_M(q) \neq \emptyset$ và $T_M(p), T_M(q)$ là các continuum con của M nên tồn tại $r \in pq \cap T_M(p) \cap T_M(q)$. Ta khẳng định được $v \in pq$ vì nếu điều này không đúng thì $p \in qv$ hoặc $q \in pv$. Ta giả sử rằng $p \in qv$ và xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu M liên thông địa phương tại q thì $T_M(q) = q$ và vì vậy theo (i) ta có $q \in T_M(p)$. Điều này mâu thuẫn với (ii).

Trường hợp 2: Nếu M không liên thông địa phương tại q . Khi đó $q \in T_M(p)$. Điều này mâu thuẫn với (ii).

Vậy $v \in pq$. Do $r \in pq$ nên $r \in vp$ hoặc $r \in vq$. Ta giả sử $r \in vq$. Từ $r \in T_M(p)$ và X có tính chất unicoherent di truyền ta suy ra M không liên thông địa phương tại v nên ta có điều phải chứng minh.

2.2.9. Tính chất giao cong và tính co rút.

Định nghĩa. Cho A là một continuum con của continuum X chứa một tập con B . Nếu có hai dãy continuum con A_n và A'_n trong X thỏa các điều kiện sau

- i) $A_n \cap A'_n \neq \emptyset$ với mọi $n \in N$,
- ii) $A = \lim A_n = \lim A'_n$,
- iii) $B = \lim(A_n \cap A'_n)$.

thì ta nói B là một *tập cong* của A .

Định nghĩa. Một continuum X được gọi là có *tính chất giao cong* nếu mỗi continuum con A của X , giao của các tập cong của A khác rỗng.

Từ định nghĩa trên, ta có các kết quả sau:

Mệnh đề. Nếu dendroid X chứa Q – điểm p thì có một continuum con A của X sao cho A có $\{p\}$ như một tập cong của nó.

Mệnh đề. Nếu dendroid X có tính chất giao cong thì X không có kiểu N .

Định lí sau cho ta điều kiện đủ để một quạt nào đó có tính chất giao cong.

Định lí. Nếu quạt X không chứa Q – điểm và không có kiểu N thì quạt X có tính chất giao cong.

Trước khi chứng minh định lí, ta cần vài kết quả sau. Trong các kết quả đó, bổ đề 1 và bổ đề 2 là hiển nhiên.

Bổ đề 1. Cho X là là quạt với đỉnh v và A, B là các hai cung trong X sao cho $A \cap B \neq \emptyset$ và $v \notin A \cap B$. Khi đó $A \cup B$ là một cung.

Bổ đề 2. Cho X là một quạt với đỉnh v và $\leq$ là thứ tự điểm cắt yếu tương ứng với v . Cho A, B là hai cung trong X thỏa $A \cap B = \emptyset$, $v \notin A \cap B$ và $A \setminus B \neq \emptyset \neq B \setminus A$. Lấy điểm z bất kì trong $A \cap B$. Khi đó $z \leq x$ với mỗi $x \in A \setminus B$ hoặc $z \leq y$ với mỗi $y \in B \setminus A$.

Bổ đề 3. Nếu quạt X với đỉnh v không chứa bất kì Q – điểm nào và nếu A là continuum con của X chứa v thì giao của tất cả các tập con của A phải chứa v .

Chứng minh.

Ta sử dụng phản chứng, giả sử tồn tại một continuum con A của X chứa v có tập con B không chứa v . Ta chứng minh v là Q – điểm của X .

Vì B là tập con của A nên có hai dãy các continuum con A_n, A'_n của X thỏa

$A_n \cap A'_n \neq \emptyset$ với mọi $n \in \mathbb{N}$;

$$A = \lim A_n = \lim A'_n$$

$$B = \lim (A_n \cap A'_n)$$

Do đó vì $v \in A \setminus B$ nên tồn tại hai tập dãy các điểm p_n và p'_n sao cho $p_n \in A_n \setminus A'_n$ và $p'_n \in A'_n \setminus A_n$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và $v = \lim p_n = \lim p'_n$.

Lấy một điểm $c \in B$ và một dãy $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ với $c_n \in A_n \cap A'_n$ ($n \in \mathbb{N}$) hội tụ về c . Khi đó theo bổ đề 2, ta có thể chọn một trong hai dãy $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{p'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, chẳng hạn $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sao cho với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có $c_n \leq p_n$ ($\leq$ là thứ tự điểm cắt yếu tương ứng với v). Vì vậy $c_n p_n \subset v p_n$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và do đó $\lim c_n p_n \subset \lim v p_n$. Hơn nữa vì $\lim p_n = v$ và $\lim c_n = c$ nên ta có $cp \subset \lim c_n p_n \subset \lim v p_n$ và do đó $\lim v p_n \neq \{v\}$ vì $c \neq v$. Vì vậy điểm v là Q – điểm của X . Điều này mâu thuẫn với giả thiết nên ta có điều cần chứng minh.

Bổ đề 4. Cho X là quạt với đỉnh v không chứa zig – zag. Khi đó với mỗi cung $A = pq \subset X \setminus \{v\}$ và với mỗi tập con B của A , ta có $p \in B$ hoặc $q \in B$.

Chứng minh.

Cho $\leq$ là thứ tự điểm cắt yếu tương ứng với v . Ta chứng minh định lí này bằng phản chứng. Giả sử tồn tại một cung $A = pq \subset X \setminus \{v\}$ và một tập con B của A sao cho $p, q \notin B$. Theo định nghĩa, tồn tại hai dãy các cung A_n, A'_n của X thỏa

$A_n \cap A'_n \neq \emptyset$ với mọi $n \in \mathbb{N}$;

$$A = \lim A_n = \lim A'_n$$

$$B = \lim(A_n \cap A'_n)$$

Vì $p, q \in A$ nên do $A = \lim A_n = \lim A'_n$ và $B = \lim(A_n \cap A'_n)$, tồn tại bốn dãy các điểm p_n, p'_n, q_n, q'_n sao cho với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có $p_n, p'_n \in A_n \setminus A'_n$, $q_n, q'_n \in A'_n \setminus A_n$ và

$$\lim p_n = \lim p'_n = p$$

$$\lim q_n = \lim q'_n = q$$

Ta biết rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cup A'_n$ là một cung (bổ đề 1) và $\lim A_n = \lim A'_n = A$. Ta xét hai trường hợp. Trường hợp thứ nhất, nếu $p_n \leq q_n$ với nhiều vô hạn các chỉ số $n \in \mathbb{N}$ thì bằng cách lấy hai dãy thích hợp nếu cần thiết, ta có thể thấy rằng $\lim p_n q_n = \lim q_n p'_n = \lim p'_n q'_n = pq$ và do đó ta có X chứa một zig – zag. Trường hợp thứ hai, giả sử với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có $q_n \leq p_n$. Vì $\lim p_n p'_n$ là một cung con của pq nên ta có thể đặt

$$\lim p_n p'_n = pb \subset pq.$$

Theo bổ đề 1.1 của ([13], tr. 79), ta tìm được các điểm $b_n \in q_n p_n$ với $\lim b_n = b$ sao cho $\lim b_n p_n \subset pb$. Vì $p, b \in \lim b_n p_n$ nên ta có $\lim b_n p_n = pq$. Lấy một dãy các điểm $b'_n \in p_n p'_n$ với $b = \lim b'_n$ và chú ý rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có $p_n \leq b'_n$ và $b'_n \leq p'_n$. Khi đó do $\lim p_n p'_n = pb \subset pq$ ta có $\lim b_n p_n = \lim p_n b'_n = \lim b'_n p'_n = pq$, và vì vậy X lại chứa một zig – zag.

Như vậy trong hai trường hợp ta đều suy ra được X chứa một zig – zag. Điều này mâu thuẫn với giả thiết nên ta có điều phải chứng minh.

Chứng minh định lí.

Giả sử quạt X có đỉnh là v . Theo giả thiết ta có X không chứa Q – điểm nên theo bổ đề 3, mọi continuum con A của X chứa v thì giao của các tập con của A phải chứa v . Do đó để chứng minh định lí, ta chỉ xét các continuum con của X không chứa v và chứng minh giao của các tập con của continuum đó khác rỗng.

Giả sử tồn tại một cung $A = pq$ nào đó không chứa v và hai tập con của nó là B_1, B_2 thỏa $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Theo giả thiết, X không có kiểu N nên không chứa zig – zag. Do đó theo bổ đề 4, không

mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $p \in B_1$ và $q \in B_2$. Khi đó từ định nghĩa của tập con, tồn tại dãy các cung A_n, A'_n và C_n, C'_n ($n \in \mathbb{N}$) thỏa

$$A_n \cap A'_n = \emptyset, C_n \cap C'_n \neq \emptyset \text{ với mỗi } n \in \mathbb{N},$$

$$A = \lim A_n = \lim A'_n = \lim C_n = \lim C'_n,$$

$$B_1 = \lim(A_n \cap A'_n); B_2 = \lim(C_n \cap C'_n).$$

Hơn nữa, vì $p \in A \setminus B_2$ và $q \in A \setminus B_1$ nên theo các tính chất của tập con, ta có thể lấy dãy các điểm p_n, p'_n và q_n, q'_n sao cho với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có:

$$p_n \in C_n \setminus C'_n \text{ và } p'_n \in C'_n \setminus C_n,$$

$$q_n \in A_n \setminus A'_n \text{ và } q'_n \in A'_n \setminus A_n$$

thỏa

$$\lim p_n = \lim p'_n = p$$

$$\lim q_n = \lim q'_n = q$$

Ta cũng có thể lấy hai dãy các điểm p''_n và q''_n trong $A_n \cap A'_n$ và $C_n \cap C'_n$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\lim p''_n = p$ và $\lim q''_n = q$.

Mặc khác do $A_n \cap A'_n = \emptyset, C_n \cap C'_n \neq \emptyset$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và bổ đề 1, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, các cung $p_n p'_n$ và $q_n q'_n$ lần lượt chứa trong $A_n \cup A'_n$ và $C_n \cap C'_n$ và do $\{A_n \cup A'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ và $\{C_n \cap C'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ đều hội tụ về $A = pq$ nên các dãy $\{p_n p'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ và $\{q_n q'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cũng hội tụ về $A = pq$. Kết hợp với $p_n \in C_n \setminus C'_n$ và $p'_n \in C'_n \setminus C_n, q_n \in A_n \setminus A'_n$ và $q'_n \in A'_n \setminus A_n$ và $\lim p_n = \lim p'_n = \lim p''_n = p$ và $\lim q_n = \lim q'_n = \lim q''_n = q$ ta có X có kiểu N . Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Định lí được chứng minh.

Định lí. Mỗi quạt co rút được đều có tính chất giao con.

Chứng minh.

Do X co rút nên X không chứa Q – điểm, không có kiểu N và trơn từng khúc. Do đó theo định lí trên, X có tính chất giao con. Định lí được chứng minh.

Ngược lại của định lý trên không đúng, nghĩa là tồn tại một quạt không co rút được nhưng có tính chất giao con. Quạt đó được chỉ ra trong ([9], mệnh đề 4, tr. 111). Trong mệnh đề này, tác giả đã chỉ ra quạt chọn được nhưng không co rút được. Nhưng một quạt chọn được luôn có tính chất giao con nên ta có quạt cần tìm.

2.2.10. Tính chọn được và tính co rút.

Định nghĩa. Cho X là một continuum. Một *hàm chọn liên tục* trên siêu không gian $C(X)$ của X là hàm $\sigma: C(X) \rightarrow X$ sao cho $\sigma(A) \in A$ với mỗi $A \in C(X)$.

Nếu ta thêm vào điều kiện: “ $\sigma(B) \in B \subset A \Rightarrow \sigma(B) = \sigma(A)$ với mỗi $A, B \in C(X)$ ” thì σ được gọi là một *hàm chọn cứng*.

Định nghĩa. Một continuum X được gọi là *chọn được* nếu có một hàm chọn liên tục trên $C(X)$.

Ta có một số kết quả trên các siêu không gian.

Mệnh đề. ([15]) Cho X là continuum. Khi đó các siêu không gian 2^X và $C(X)$ trên X là ảnh liên tục của quạt Cantor và do đó 2^X và $C(X)$ liên thông đường.

Mệnh đề. Nếu S^1 là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức thì không tồn tại bất kỳ hàm chọn liên tục nào trên S^1 .

Chứng minh.

Ta sử dụng phản chứng, giả sử tồn tại một hàm chọn liên tục $\sigma: C(S^1) \rightarrow S^1$. Ta đã có được $C(S^1)$ là 2 – tế bào nên σ là một phép co rút của $C(S^1)$ lên biên của nó. Tuy nhiên ta biết rằng không thể tồn tại một phép co rút như vậy nên ta có điều mâu thuẫn. Mệnh đề được chứng minh.

Mệnh đề. Mỗi continuum chọn được metric hóa được phải là một dendroid.

Chứng minh.

Theo kết quả ở trên, ta biết rằng với mỗi continuum X , $C(X)$ liên thông đường. Do đó nếu tồn tại một hàm chọn liên tục $\sigma: C(X) \rightarrow X$ thì X phải là không gian liên thông đường. Do đó để chứng minh X là một dendroid, ta cần chứng minh X có tính chất unicoherent di truyền.

Ta sử dụng phản chứng. Giả sử X không có tính chất unicoherent di truyền. Khi đó tồn tại hai continuum con A, B trong X sao cho $A \cap B$ không liên thông. Giả sử x, y là hai điểm thuộc hai thành

phần liên thông khác nhau của $A \cap B$. Vì $A = \sigma(C(A))$ nên A liên thông đường và do đó có một cung J_A trong A nối x với y . Tương tự như vậy ta cũng có một cung J_B trong B nối x với y . Khi đó $J_A \cup J_B$ là một đường cong đóng S nên $\sigma|_{C(S)}$ là một hàm chọn liên tục. Nhưng theo mệnh đề trên ta biết rằng không tồn tại hàm chọn liên tục nào trên đường cong đóng S nên ta có điều mâu thuẫn. Mệnh đề được chứng minh.

Vì một dendrite là một dendroid liên thông địa phương nên ta có hệ quả sau:

Hệ quả. Một continuum liên thông địa phương là chọn được nếu và chỉ nếu continuum đó là một dendrite.

Mệnh đề. ([9]) Mỗi dendroid chọn được luôn là ảnh liên tục của quật Cantor nên liên thông cung đều.

Mệnh đề. Một quật X co rút được di truyền nếu và chỉ nếu trên $C(X)$ có một hàm chọn cứng.

Chứng minh.

Ta có quật X co rút di truyền nếu và chỉ nếu quật X trơn.

Quật X trơn nếu và chỉ nếu trên $C(X)$ có hàm chọn cứng. ([24], định lí 2, tr. 1043)

Do đó ta có điều phải chứng minh.

CHƯƠNG 3: SỰ TỒN TẠI Q – ĐIỂM TRONG DENDROID

Trong chương 2, chúng ta đã nghiên cứu tính co rút của dendroid và các khái niệm, tính chất liên quan đến tính co rút và Q – điểm là một trong các khái niệm đó. Đối với quạt bất kì, nếu ta chỉ ra được sự tồn tại của một Q – điểm trong quạt đó, ta có thể kết luận ngay quạt đó không co rút được. Vì vậy việc xem xét sự tồn tại của Q – điểm đã trở thành vấn đề đáng lưu ý khi nghiên cứu tính co rút. Tuy nhiên, một câu hỏi được đặt ra là điểm nào của quạt đó là Q – điểm hay có khả năng là Q – điểm. Trong các quạt đã gặp trước đây, Q – điểm thường là đỉnh của quạt, vậy điều này có đúng trong quạt bất kì không hay một quạt cần điều kiện gì để Q – điểm là đỉnh của quạt. Khi trả lời được các câu hỏi này, việc xem xét sự tồn tại Q – điểm sẽ được rút ngắn rất nhiều.

Nội dung chính của chương 3 này gồm hai phần, chủ yếu cho chúng ta câu trả lời cho các câu hỏi vừa nêu lên ở trên. Trong phần 3.1, định lí 3.1.1 và định lí 3.1.3 sẽ cho ta điều kiện để một quạt có Q – điểm thì Q – điểm đó phải là đỉnh của quạt và định lí 3.1.2 sẽ cho chúng ta điều kiện để một dendroid không có Q – điểm. Trong phần 3.2, ta sẽ đưa ra ví dụ 3.2.1 để chứng tỏ chiều đảo của định lí 3.1.3 không đúng và ví dụ 3.2.2 chỉ ra một quạt có đỉnh không phải là Q – điểm nhưng có một dãy các Q – điểm trong quạt đó hội tụ về đỉnh.

3.1. Các định lí về sự tồn tại Q – điểm.

3.1.1. Định lí. Cho X là một quạt với đỉnh v , p là một Q – điểm và $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy như trong định nghĩa về Q – điểm. Giả sử continuum $L = \limsup pp_n$ liên thông địa phương tại p . Khi đó $p = v$.

Chứng minh.

Giả sử $p \neq v$. Cho e là một điểm cuối của X sao cho $p \in ve$.

Nếu có một cung A trong X và một số nguyên dương N sao cho $p_n \in A$ với mọi $n > N$ thì do $\lim p_n = p$ nên $L = \{p\}$ (mâu thuẫn vì theo định nghĩa Q – điểm thì $L = \limsup pp_n \neq \{p\}$).

Vì vậy với mỗi cung A trong X , tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho $p_n \in A$.

Vì X là quặt nên ta có thể xây dựng dãy con $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ của dãy $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho với mỗi $k \geq 1$ ta có $p_{n_k} \notin ve$, $vp_{n_k} \cap vp_{n_m} = \{v\}$ nếu $k \neq m$ và dãy $\{pp_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ. Từ đó ta được với $k \geq 1$, $v \in pp_{n_k}$. Vì vậy $v \in \lim pp_{n_k} \subset L$.

Với $m \geq 1$ cho trước ta có $q_m \in xp_m$ với mọi $x \in L$. Nói riêng ta có $q_m \in vp_m$. Vì $p \neq v$ và $\lim q_n = p$ nên ta có thể giả thiết $q_m \neq v$. Với $k \geq 1$ cho trước, vì $p_{n_k} \neq ve$ nên $v \in q_{n_k}p$. Mặc khác vì L liên thông địa phương tại p nên tồn tại lân cận mở liên thông E của p trong L sao cho $v \notin E$. Vì dãy q_m chứa trong L nên tồn tại $k_0 \geq 1$ sao cho $v \notin E$. Vì X là dendroid nên $pq_{n_{k_0}} \subset E$. Từ đó ta có $v \in E$ (mâu thuẫn).

3.1.2. Định lí. Cho X là một dendroid. Giả sử X liên thông địa phương tại mỗi điểm trong bao đóng của tập các điểm phân chia của X . Khi đó X không có Q – điểm.

Chứng minh.

Ta giả sử ngược lại trong X có một Q – điểm p nào đó. Cho $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ là các dãy trong định nghĩa Q – điểm. Đặt $L = \limsup pp_n$. Ta đã biết rằng L là continuum con của X .

Trước tiên ta chứng minh L không phải là một cung. Giả sử ngược lại L là một cung. Cho U là một tập con mở của X sao cho $p \in U$, $\text{Cl}_X(U)$ chứa ít nhất một điểm cuối của L và U không chứa điểm phân chia nào của X . Nếu tồn tại $N \geq 1$ sao cho $p_n \in L$ hay $pp_n \subset U$ với mỗi $n > N$, gọi V là một tập con mở của X sao cho $p \in V \subset U$ và $V \cap L$ liên thông. Cho $M \geq 1$ thỏa $p_n \in V$ với mỗi $n \geq M$. Vì vậy với mỗi $n \geq M$, $pp_n \subset U$ nên ta có được $L \subset \text{Cl}_X(U)$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn U . Vì vậy tồn tại một dãy con $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ của $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho $q_{n_k} \in U$, $p_{n_k} \notin L$ và $pp_{n_k} \not\subset U$ với mỗi $k \geq 1$. Với $k \geq 1$ cho trước, q_{n_k} không phải là điểm phân chia của X , $q_{n_k} \in L$ và $p_{n_k}q_{n_k} \cap L = \{q_{n_k}\}$. Điều này suy ra q_{n_k} là một điểm cuối của L . Vì vậy p là một điểm cuối của L và $q_{n_k} = p$ với mỗi $k \geq 1$. Chú ý rằng $L \cup p_{n_1}q_{n_1}$ là một cung nhưng p không phải là điểm cuối của cung này. Vì vậy tồn tại một điểm $z \in p_{n_1}q_{n_1} \setminus \{p_{n_1}, q_{n_1}\} = p_{n_1}p \setminus \{p_{n_1}, p\} \subset X \setminus L$ sao cho $pz \subset U$. Chú ý rằng $L_1 = L \cup pz$ là một cung và p không là điểm cuối của cung đó.

Với $k \geq 1$ cho trước, đặt $r_k \in L_1$ là điểm thỏa $p_{n_k}r_k \cap L_1 = \{r_k\}$. Vì $p_{n_k}q_{n_k} \cap L = \{q_{n_k}\}$ nên ta có $r_k \in p_{n_k}q_{n_k} \cap pz$. Vì $pz \subset U$ nên r_k không phải là điểm phân chia của X . Vì vậy $r_k = z$. Vì vậy

$pz \subset p_{n_k}q_{n_k} = p_{n_k}p$. Điều này cho ta $z \in L$ (mâu thuẫn với $z \notin L$). Vì vậy ta đã chứng minh được L không phải là một cung.

Vì L là một dendroid nên L chứa một điểm phân chia a nào đó và ta cũng có $p \neq a$. Do đó tồn tại các điểm $b, c \in L \setminus \{a\}$ sao cho hai cung trong các cung ba, ca, pa giao nhau bằng $\{a\}$. Vì $b \in L$ nên tồn tại một dãy con $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ của $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ và các điểm $b_k \in pp_{n_k}$ sao cho $b = \lim b_k$. Ta giả sử rằng các dãy $\{p_{n_k}b_k\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ về continuum con R của X . Chú ý rằng $pb \subset R$. Vì $a \in pb$ nên tồn tại một dãy a_k các điểm trong X sao cho với mỗi $k \geq 1$, $a_k \in p_{n_k}b_k$ và $\lim a_k = a$. Theo giả thiết ta có X liên thông địa phương tại a . Vì vậy tồn tại các lân cận đóng rời nhau V của a và W của b sao cho V liên thông và $W \cap ap = \emptyset$. Cho $k \geq 1$ sao cho $a_k \in V$ và $b_k \in W$. Khi đó $aa_k \subset V$. Vì $pp_{n_k} \subset pa \cup a_kp_{n_k}$ nên ta được $b_k \notin pp_{n_k}$ (mâu thuẫn).

3.1.3. Định lí. Cho X là một quạt với đỉnh w . Nếu tồn tại một dãy các điểm $\{z_r\}_{r=1}^{\infty}$ hội tụ về w , $\lim wz_r \neq \{w\}$ và $\lim wz_r$ liên thông địa phương thì w là một Q – điểm.

Chứng minh.

Cho $L = \lim wz_r$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, cho $q_n \in L$ sao cho $z_nq_n \cap L = \{q_n\}$. Để chứng minh w là Q – điểm ta cần chứng minh $\lim q_n = w$.

Giả sử $\lim q_n \neq w$. Ta giả thiết rằng $\lim q_n = q$ với $q \in L \setminus \{w\}$ nào đó. Lấy một tập con đóng liên thông A của L sao cho $q \in \text{int}_L(A)$ và $w \notin A$. Vì X là quạt nên A là một cung và tồn tại $y \in X$ sao cho $A \subset wy \setminus \{w\}$ và y là một điểm cuối của X .

Cố định điểm $x \in wq \setminus \{w, q\}$. Ta có thể giả thiết $q_n \in A$ và $q_n \in xy$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$. Với $n \in \mathbb{N}$ cho trước, vì L liên thông nên $wq_n \subset L$, vì thế $z_n \in q_ny \subset xy$. Từ đó ta được $w \in xy$ (mâu thuẫn).

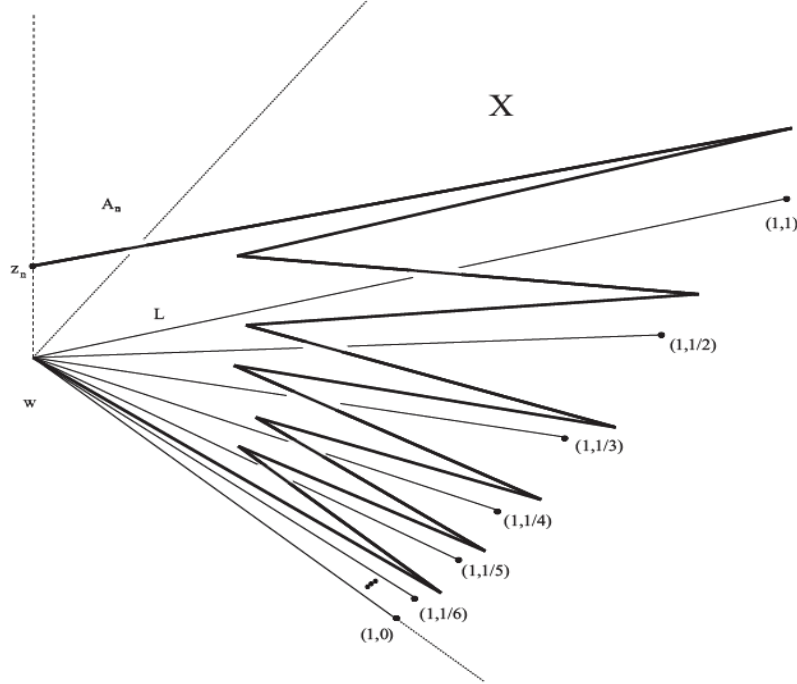
Vì vậy w phải là một Q – điểm của X .

Như vậy một câu hỏi được đặt ra là liệu chiều đảo lại của định lí trên có đúng không? Ví dụ 3.2.1 dưới đây sẽ cho chúng ta câu trả lời.

3.2. Các ví dụ.

3.2.1. Ví dụ.

Cho $w = (0,0)$ và L là quạt điều hòa được xác định trong $\mathbb{R}^2$ như sau $L = w(0,1) \cup \left(\cup \left\{ w \left(1, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\} \right)$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, cho A_n là một cung trong $\mathbb{R}^3$ nối điểm w với z_n sao cho $H(A_n, L) < \frac{1}{n}$ (H là metric Hausdorff), $\lim z_n = w$, $A_n \cap A_m = \{w\}$ với $n \neq m$ và $A_n \cap L = \{w\}$ với mọi n . Đặt $X = L \cup \left(\cup \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \right)$ (hình vẽ). Khi đó X là một quạt với đỉnh w sao cho có một dãy các điểm $\{z_r\}_{r=1}^\infty$ hội tụ về w , $\lim w z_r \neq \{w\}$, w là Q – điểm của X nhưng $\lim w z_r$ không liên thông địa phương.



Hình 1.

Tiếp theo đây, ta sẽ chỉ ra một ví dụ về một quạt X với đỉnh của X không phải là Q – điểm nhưng có một dãy các Q – điểm hội tụ về đỉnh.

3.2.2. Ví dụ.

Do tính phức tạp của ví dụ nên ta quy ước lại một số kí hiệu. Trước hết ta đồng nhất mặt phẳng Euclide $\mathbb{R}^2$ với không gian con $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ của $\mathbb{R}^3$. Với mỗi $i \in \{1,2,3\}$, gọi $\pi_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ là phép chiếu lên thành phần thứ i . Cho p, q là hai điểm trong $\mathbb{R}^3$, ta kí hiệu pq là đoạn thẳng lồi trong $\mathbb{R}^3$ nối p và q . Trong chương 1, ta đã định nghĩa quả cầu suy rộng tâm A , bán kính ε là $N_d(\varepsilon, A)$. Ứng với không gian metric $\mathbb{R}^3$ với metric thông thường, với tập con compact khác rỗng của $\mathbb{R}^3$ và với số thực $\varepsilon > 0$, ta kí hiệu $N_d(r, A)$ trở thành $N(\varepsilon, A) = \{q \in \mathbb{R}^3: \text{tồn tại } p \in \mathbb{R}^3 \text{ sao cho } |p - q| < \varepsilon\}$. Đặt $V = \{p \in \mathbb{R}^3: \pi_2(p) > \pi_3(p)\}$.

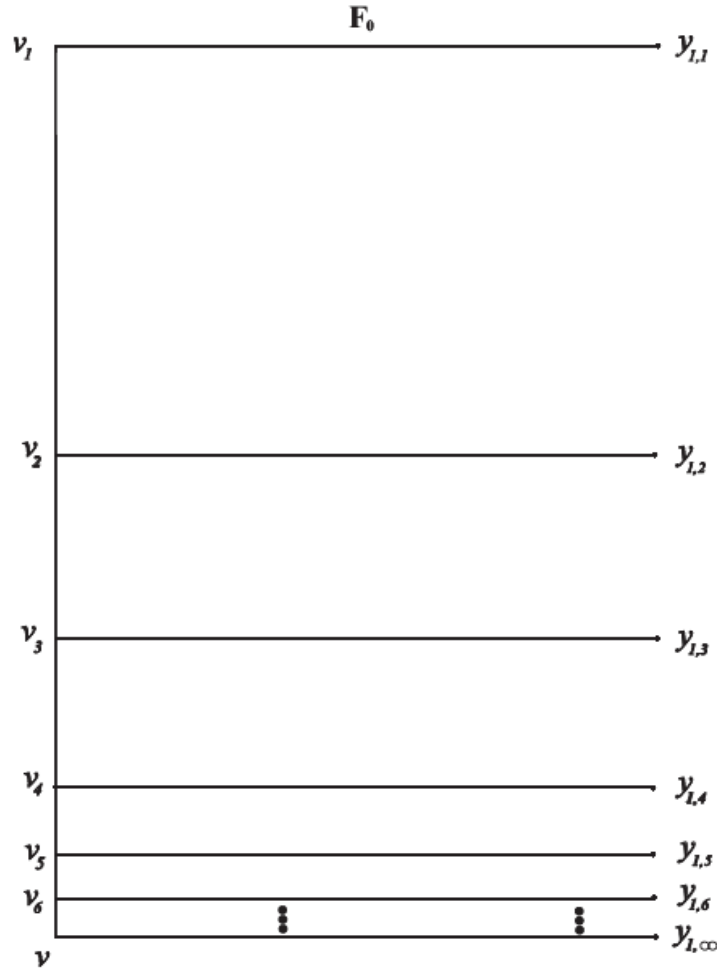
Cho $v = (0,0)$ và $y_{1,\infty} = (0,1)$ và với mỗi $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$, cho $y_{n,m} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$, $v_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $x_{n,m} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^{2n+2^2(m+1)}}, \frac{1}{m}\right)$, và $x_{n,\infty} = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$. Ta thấy rằng với n cố định, dãy $\{x_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ hội tụ về điểm $x_{n,\infty}$ và dãy $\{x_{n,\infty}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ về v .

Trước khi đưa ra quạt X , ta xây dựng một continuum con của Y của $\mathbb{R}^3$. Xét dendroid F_0 (hình 2) như sau:

$$F_0 = \cup \{v_n y_{1,n} \cup v y_{1,\infty} \cup v v_1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Continuum Y sẽ là kết quả của sự thay thế mỗi một đoạn thẳng lồi $x_{n,m} y_{n,m}$ bởi một cung thích hợp $A(n, m)$ trong đó cung $A(n, m)$ nối $x_{n,m}$ với $y_{n,m}$ (với mỗi $n < m$).

Với α là một cung nào đó trong $\mathbb{R}^3$ nối hai điểm p, q , ta thấy rằng một dãy hữu hạn các cung con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ của α được gọi là một phân hoạch của α nếu $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_k$ trong đó α_i là các cung nối điểm p_{i-1} với p_i , $p_0 = p$ và $p_k = q$. Ta có thể viết $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_k$ để kí hiệu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ của α được gọi là một phân hoạch của α .

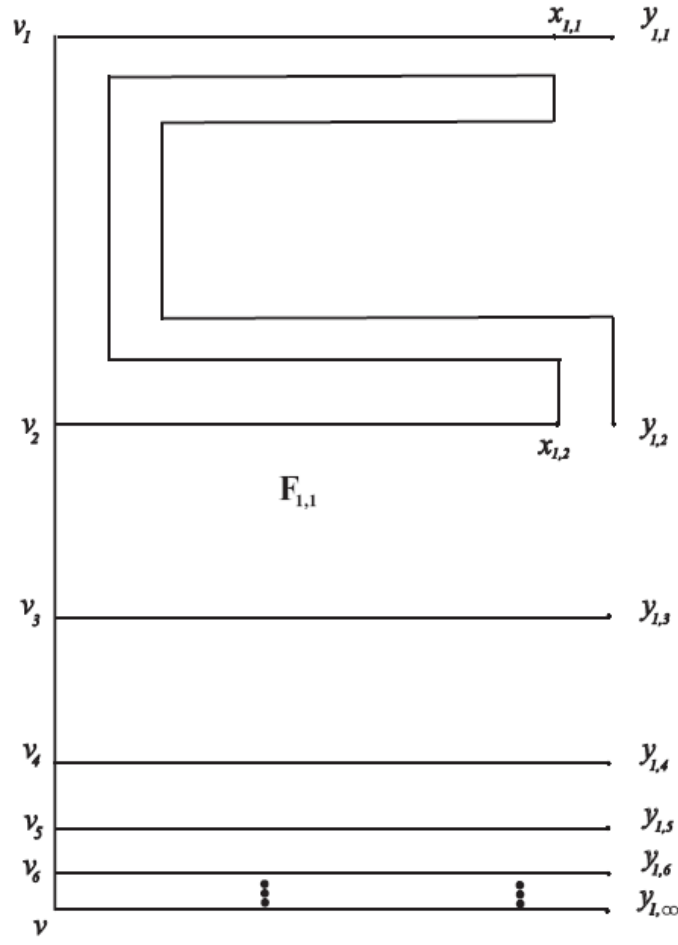


Hình 2.

Với số thực dương ε nào đó và các tập con compact khác rỗng $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ và $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ của $\mathbb{R}^3$. Bất đẳng thức $H^*(\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_k, \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k) < \varepsilon$ có nghĩa là $H(\alpha_i, \beta_i) < \varepsilon$ với mỗi $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Do đó từ bất đẳng thức này ta có $H(\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_k, \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k) < \varepsilon$.

Sau đây ta sẽ đưa ra các bước biến đổi liên tiếp trên F_0 .

Bước 1. Ta kí hiệu cung con duy nhất trên F_0 nối $x_{1,2}$ với $x_{1,1}$ là $[x_{1,2}; x_{1,1}]$. Ta thay thế đoạn thẳng lồi $x_{1,2}y_{1,2}$ (chứa trong $v_2y_{1,2}$) bởi một cung $A(1,2)$ nối $x_{1,2}$ với $y_{1,2}$ (như hình 3 bên dưới) thỏa $A(1,2) = \alpha_1 \cup \alpha_2$ trong đó $x_{1,2} \in \alpha_1$ và $y_{1,2} \in \alpha_2$.



Hình 3.

Hơn nữa ta có

$$H^*(\alpha_1 \cup \alpha_2, [x_{1,2}; x_{1,1}] \cup [x_{1,2}; x_{1,1}]) < \frac{1}{2^4}$$

và

$$A(1,2) \subset \left([0,1] \times \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \times [0,1] \right) \cap V.$$

Như vậy sau bước một ta thu được dendroid mới và ta kí hiệu dendroid này là $F_{1,1}$.

Bước 2. Ta kí hiệu cung con duy nhất trên $F_{1,1}$ nối $x_{2,3}$ với $x_{2,2}$ là $[x_{2,3}; x_{2,2}]$. Ta thay thế đoạn thẳng lồi $x_{2,3}y_{2,3}$ (chứa trong $v_3y_{1,3}$) bởi một cung $A(2,3)$ nối $x_{2,3}$ với $y_{2,3}$ (như hình 4 bên dưới) và thỏa $A(2,3) = \alpha_1 \cup \alpha_2$ trong đó $x_{2,3} \in \alpha_1$ và $y_{2,3} \in \alpha_2$.

Hơn nữa ta có

$$H^*(\alpha_1 \cup \alpha_2, [x_{2,3}; x_{2,2}] \cup [x_{2,3}; x_{2,2}]) < \frac{1}{2^6}$$

và

$$A(2,3) \subset \left(\left[0, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \times [0,1] \right) \cap V.$$

Như vậy sau bước hai ta thu được dendroid mới và ta kí hiệu dendroid này là $F_{1,2}$.

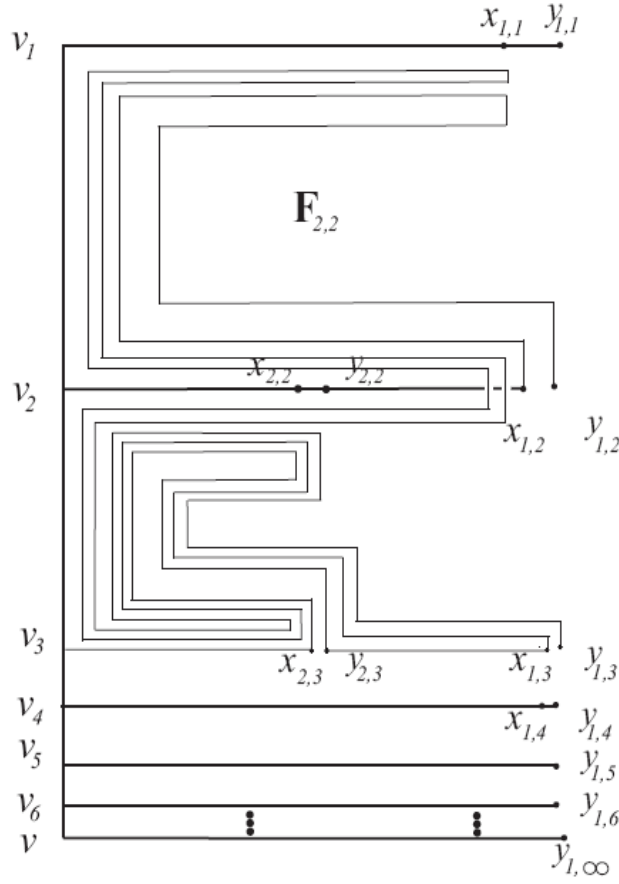
Bước 3. Ta kí hiệu cung con duy nhất trên $F_{1,2}$ nối $x_{1,3}$ với $x_{1,2}$ là $[x_{1,3}; x_{1,2}]$ và $x_{1,2}$ với $x_{1,1}$ là $[x_{1,2}; x_{1,1}]$. Ta thay thế đoạn thẳng lời $x_{1,3}y_{1,3}$ ($x_{1,3}y_{1,3} \subset y_{2,3}y_{1,3} \subset F_{1,2}$) bởi một cung $A(1,3)$ trong $\mathbb{R}^3$ nối $x_{1,3}$ với $y_{1,3}$ (hình 4) và thỏa $A(1,3) = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4$ trong đó $x_{1,3} \in \alpha_1$ và $y_{1,3} \in \alpha_4$.

Hơn nữa ta có

$$H^*(\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4, [x_{1,3}; x_{1,2}] \cup [x_{1,2}; x_{1,1}] \cup [x_{1,2}; x_{1,1}] \cup [x_{1,3}; x_{1,2}]) < \frac{1}{2^6}$$

và

$$A(1,3) \subset \left([0,1] \times \left[\frac{1}{3}, 1 \right] \times [0,1] \right) \cap V.$$



Hình 4.

Như vậy sau bước ba ta thu được dendroid mới và ta kí hiệu dendroid này là $F_{2,2}$.

Bước 4. Giả sử rằng ta đã xây dựng được dendroid $F_{i,j}$ với $1 \leq i \leq j \leq n-1$ và $n \geq 3$. Bây giờ ta sẽ xây dựng $F_{1,n}, F_{2,n}, \dots, F_{1,n}$. Để xây dựng dendroid $F_{1,n}$, ta gọi cung con duy nhất trên $F_{n-1,n-1}$ nối $x_{n,n+1}$ với $x_{n,n}$ là $[x_{n,n+1}; x_{n,n}]$. Ta thay thế đoạn thẳng lời $x_{n,n+1}y_{n,n+1}$ (chứa trong $v_{n+1}y_{1,n+1}$) bởi một cung $A(n, n+1)$ nối $x_{n,n+1}$ với $y_{n,n+1}$ và thỏa $A(n, n+1) = \alpha_1 \cup \alpha_2$ trong đó $x_{n,n+1} \in \alpha_1$ và $y_{n,n+1} \in \alpha_2$.

Hơn nữa ta có

$$H^*(\alpha_1 \cup \alpha_2, [x_{n,n+1}; x_{n,n}] \cup [x_{n,n+1}; x_{n,n}]) < \frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

và

$$A(n, n+1) \subset \left(\left[0, \frac{1}{n} \right] \times \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \times [0, 1] \right) \cap V.$$

Như vậy ta đã thu được dendroid $F_{1,n}$.

Tiếp theo ta xây dựng dendroid $F_{2,n}$. Gọi cung con duy nhất trên $F_{1,n}$ nối $x_{n-1,n+1}$ với $x_{n-1,n}$ là $[x_{n-1,n+1}; x_{n-1,n}]$ và $x_{n-1,n}$ với $x_{n-1,n-1}$ là $[x_{n-1,n}; x_{n-1,n-1}]$. Ta thay thế đoạn thẳng nối $x_{n-1,n+1}y_{n-1,n+1}$ (chứa trong $y_{n,n+1}y_{1,n+1}$) bởi một cung $A(n-1, n+1)$ nối $x_{n-1,n+1}$ với $y_{n-1,n+1}$ và thỏa $A(n-1, n+1) = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4$ trong đó $x_{n-1,n+1} \in \alpha_1$ và $y_{n-1,n+1} \in \alpha_4$.

Hơn nữa ta có:

$$H^*(\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4, [x_{n-1,n+1}; x_{n-1,n}] \cup [x_{n-1,n}; x_{n-1,n-1}] \cup [x_{n-1,n}; x_{n-1,n-1}] \cup [x_{n-1,n+1}; x_{n-1,n}]) < \frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

và

$$A(n-1, n+1) \subset \left(\left[0, \frac{1}{n-1}\right] \times \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right] \times [0,1] \right) \cap V.$$

Ta thu được dendroid $F_{2,n}$.

Tiếp theo ta xây dựng dendroid $F_{i+1,n}$ với $2 \leq i \leq n-1$. Với mỗi $j \in \{n-i, \dots, n\}$, ta gọi cung con duy nhất trên $F_{i,n}$ nối $x_{n-i,j}$ với $y_{n-i,j+1}$ là $[x_{n-i,j}; x_{n-i,j+1}]$. Ta thay thế đoạn thẳng nối $x_{n-i,n+1}y_{n-i,n+1}$ (chứa trong $y_{n-i+1,n+1}y_{1,n+1}$) bởi một cung $A(n-i, n+1)$ nối $x_{n-i,n+1}$ với $y_{n-i,n+1}$ và thỏa $A(n-i, n+1) = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_{2(i+1)}$ trong đó $x_{n-i,n+1} \in \alpha_1$ và $y_{n-i,n+1} \in \alpha_{2(i+1)}$.

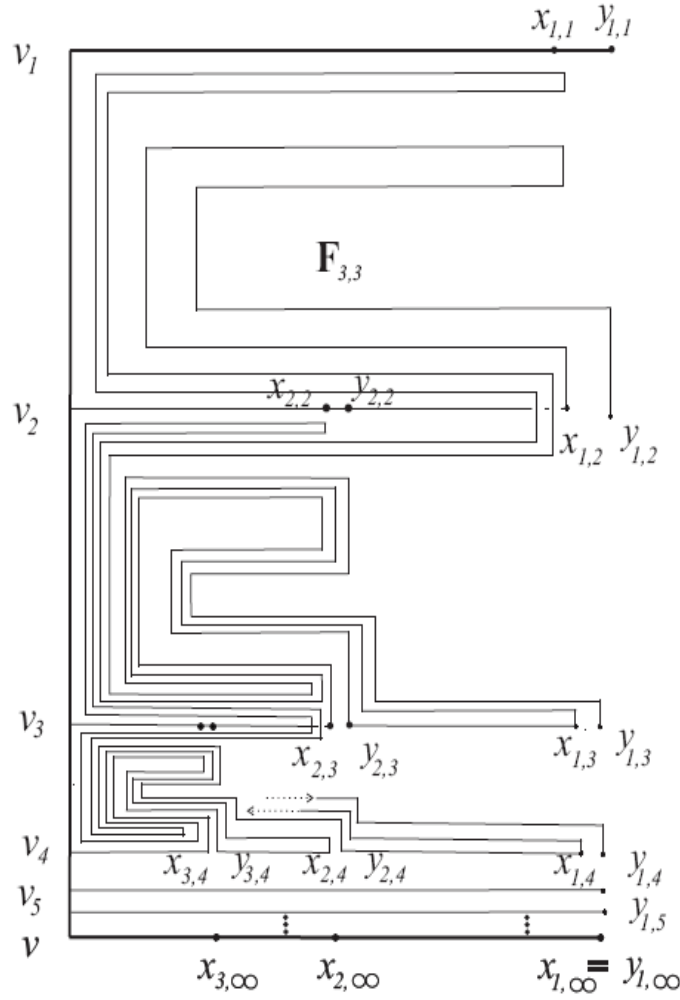
Hơn nữa ta có:

$$H^*(\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_{2(i+1)}, [x_{n-i,n+1}; x_{n-i,n}] \cup \dots \cup [x_{n-i,n-i+1}; x_{n-i,n-i}] \cup [x_{n-i,n-i+1}; x_{n-i,n-i}] \cup \dots \cup [x_{n-i,n+1}; x_{n-i,n}]) < \frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

và

$$A(n-i, n+1) \subset \left(\left[0, \frac{1}{n-i}\right] \times \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-i}\right] \times [0,1] \right) \cap V.$$

Ta thu được dendroid $F_{i+1,n}$ và như vậy ta đã hoàn thành việc xây dựng các dendroid $\{F_{i,j}; 1 \leq i \leq j\}$. Dendroid $F_{3,3}$ được cho như hình bên dưới (hình 5).



Hình 5.

Với mỗi $1 \leq n \leq m$, ta gọi cung duy nhất trong $F_{m-1,m-1}$ nối v_m với $x_{n,m}$ là $[v_m; x_{n,m}]$ và v_m với $y_{n,m}$ là $[v_m; y_{n,m}]$. Khi đó $[v_m; y_{n,m}] = [v_m; x_{n,m}] \cup A(n, m)$ và ta thấy rằng các cung $[v_m; x_{n,m}]$ và $[v_m; y_{n,m}]$ không thay đổi trong quá trình xây dựng dendroid $F_{r,s}$ với mỗi $s \geq m, r \geq n$. Vì vậy các cung đó cũng là các cung con của dendroid $F_{r,s}$ (với mỗi $s \geq m, r \geq n$). Với mỗi $1 \leq n \leq m$, cho $[x_{n,m}, x_{n,m+1}] = [v_m; x_{n,m}] \cup v_{m,m+1} \cup [v_{m+1}; x_{n,m+1}]$.

Cuối cùng ta xác định dendroid Y như sau:

$$Y = v y_{1,\infty} \cup v v_1 \cup \left(\bigcup \{ [v_m; y_{1,m}]: m \in \mathbb{N} \} \right).$$

Ta chứng minh được Y compact (chứng minh được trình bày trong [2], tr. 97) và hiển nhiên Y liên thông cung nên Y là continuum con của $\mathbb{R}^3$. Tiếp theo ta sẽ xác định quạt X như đã nêu ra.

Trên continuum Y , ta đồng nhất của cung vv_1 thành một điểm. Khi đó ta gọi X là không gian mới được tạo thành từ phép đồng nhất đó. Giả sử phép đồng nhất tự nhiên đó là $\varphi: Y \rightarrow X$. Đặt $w = \varphi(v)$, $w_\infty = \varphi(y_{1,\infty})$ và với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $w_n = \varphi(y_{1,n})$. Theo [18, định lí 3.9], ta có X là continuum liên thông đường.

Trong X , với hai điểm p, q phân biệt; gọi pq là cung duy nhất trong X nối hai điểm p, q . Với mỗi $1 \leq n \leq m$, đặt $u_{n,m} = \varphi(x_{n,m})$, $w_{n,m} = \varphi(y_{n,m})$, $u_{n,\infty} = \varphi(x_{n,\infty})$, $W_n = \varphi(Y_n)$ và $F_n = \varphi(S_n)$. Chú ý rằng $u_{n,m}w_{n,m} = \varphi(A(n, m))$.

Ta chứng minh được X là một quạt với đỉnh w ; w không là Q – điểm; với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có $u_{n,\infty}$ là Q – điểm và dãy $\{u_{n,\infty}\}_{n=1}^\infty$ hội tụ về w (chứng minh được trình bày trong [2]).

Ta đã chỉ ra một quạt X với đỉnh của X không phải là Q – điểm nhưng có một dãy các Q – điểm hội tụ về đỉnh.

KẾT LUẬN

Phần đầu của luận văn được dành cho việc giới thiệu các kiến thức cơ bản về lí thuyết continuum và siêu không gian. Những vấn đề mở cần nghiên cứu trong lí thuyết continuum và siêu không gian rất nhiều, trong nội dung của luận văn, chúng tôi chủ yếu tập trung đề cập đến tính co rút.

Tiếp theo luận văn đã trình bày các khái niệm liên quan phục vụ cho việc nghiên cứu tính co rút như tính trơn, các khái niệm R – điểm, R – cung, R^i –continua, dendroid kiểu N , quạt có tính chất P , tính trơn từng khúc, sự tồn tại zig – zag, hàm tập hợp T , tính chất giao cong, tính chọn được và Q – điểm. Luận văn chủ yếu nghiên cứu về Q – điểm và sự liên quan giữa Q – điểm với tính co rút của dendroid, luận văn đã cho kết quả là: “Nếu một quạt có Q – điểm thì không co rút được”.

Nội dung chính của luận văn là nghiên cứu Q – điểm và sự tồn tại của Q – điểm trong dendroid. Trong đó định lí 3.1.1 và 3.1.3 đã cho ta điều kiện để Q – điểm là đỉnh của quạt, định lí 3.1.2 đã đưa ra điều kiện để dendroid không tồn tại Q – điểm. Trong ví dụ 3.2.2 ta đã chỉ ra một ví dụ về một quạt có đỉnh không phải là Q – điểm nhưng có một dãy các Q – điểm hội tụ về đỉnh. Do đó ta đã trả lời được cho câu hỏi đã được đưa ra là: “Nếu một quạt có Q – điểm thì Q – điểm đó có phải là đỉnh của quạt?” và “Nếu một quạt không liên thông địa phương tại đỉnh thì đỉnh của quạt đó có phải là Q – điểm?”.

Tuy đã trả lời được câu hỏi trên nhưng điều đó cũng đặt ra các bài toán mở mới cần nghiên cứu, ví dụ như:

- Bài toán 1. Nếu một quạt phẳng có một Q – điểm thì Q – điểm đó có phải là đỉnh của quạt không?
- Bài toán 2. Nếu một quạt phẳng không liên thông tại đỉnh thì đỉnh có phải là Q – điểm hay không?
- Bài toán 3. Nếu quạt không liên thông địa phương tại đỉnh thì quạt đó có Q – điểm hay không ?

Với những kết quả đạt được, ta có thể tiếp cận với bài toán lớn nhất về Q – điểm: “Có phải dendroid có Q – điểm thì không co rút được?”

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] D. P. Bellamy, J. J. Charatonik, *The set function T and contractibility of continua*, Bull. Acad. Polon. Sci Ser. Sci. Math. Astronom, Phys., 25 (1997), 47–49.
- [2] Felix Capulín, Alejandro Illanes, Fernando Orozco-Zitli, Isabel Puga, and Pavel Pyrih, *Q - Points in Fans*, Topology Proceedings Volume 36 (2010), 85–105.
- [3] J. J. Charatonik, *On fans*, Diss. Math. , 54, Warszawa 1967.
- [4] J. J. Charatonik, Carl Eberhart, *On smooth dendroids*, Fund. Math. 67 (1970), pp. 297-322.
- [5] J. J. Charatonik, Carl Eberhart, *On contractible dendroids*, Colloq. Math. 25 (1972), pp. 89-98.
- [6] J. J. Charatonik, Z. Grabowsky, *Homotopically fixed arcs and contractibility of dendroids*, Fund. Math. 100 (1978), 229–239.
- [7] J. J. Charatonik, W.J. Charatonik, *Images of the Cantor fan*, Topology and its applications 33 (1989), pp. 163-172.
- [8] J.J. Charatonik, W.J. Charatonik, and S. Miklos, *Confluent Mapping of Fan*, Dissertationes Math. Rozprawy Mat. 301. Warszawa : Instytut Matematyczny PAN, 1990.
- [9] J.J. Charatonik, *Contractibility and continuous selections*, Fund. Math. 108 (1990), no.2, 109 – 118.
- [10] J.J. Charatonik, *Condition related to selectibility*, Math, Balkania (N.S) 5 (1991), no.4, 359 – 372 (1992).
- [11] J. J. Charatonik, T. J. Lee, and K. Omiljanowski, *Interrelations between some noncontractibility conditions*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **41** (1992), no. 1, 31–54. [12] S. T. Czuba, *R^i – continua and contractibility*, Proceedings of the International Conference on Geometric Topology, PWN Warszawa 1980; 75-79.
- [13] Barry Glenn Graham, *On contractible fans*, Fund. Math. **111** (1981), no. 1, 77–93.
- [14] Alejandro Illanes and Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
- [15] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), pp. 22-36.

- [16] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, Acad. Press, New York, 1968.
- [17] Taejin Lee, *Every contractible fan has the bend intersection property*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **36** (1988), no. 7-8, 413–417 (1989).
- [18] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158. New York: Marcel Dekker, Inc., 1992.
- [19] Sam B. Nadler and L. E. Ward, Jr. , *Concerning continuous selection*, Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), pp. 369-374.
- [20] Lex G. Oversteegen, *Internal characterizations of contractibility for fans*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sr. Sci. Math. **27** (1979), no. 5, 391–395.
- [21] Lex G. Oversteegen, *Non-contractibility of continua*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math.
- [22] Lex G. Oversteegen, *Fan and embedding in the plane*.
- [23] Lex G. Oversteegen, *Several properties of contractible fan*.
- [24] L. E. Ward, Jr. , *Rigid selections on smooth dendroids*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **19** (1971), pp. 1041-1043.
- [25] H. Whitney, *Regular families of curves*, Ann. of Math. **34** (1933), pp. 244-270.