

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH**

Hoàng Trọng Vĩnh

**QUAN ĐIỂM VECTO TRONG DẠY HỌC
PHÉP BIẾN HÌNH
Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG**

**Chuyên ngành : Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán
Mã số : 60 14 10**

LUẬN VĂN THẠC SĨ GIÁO DỤC HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS.LÊ THỊ HOÀI CHÂU**

Thành phố Hồ Chí Minh - 2009

LỜI CẢM ƠN

Với tình cảm chân thành, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS.TS.Lê Thị Hoài Châu, giảng viên khoa Toán- Tin của trường Đại học sư phạm thành phố Hồ Chí Minh. Cô là người đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi hoàn thành Luận văn đúng thời hạn.

Xin chân thành cảm ơn trường Đại học sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, Khoa Toán- Tin, Phòng Khoa học công nghệ - sau đại học trường Đại học sư phạm thành phố Hồ Chí Minh đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho chúng tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và làm Luận văn.

Xin trân trọng biết ơn các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy, hướng dẫn giúp đỡ lớp Cao học khoá 17 chuyên ngành “Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán”.

Xin chân thành cảm ơn các cấp lãnh đạo, giáo viên, công nhân viên trường Trung học phổ thông Chu Văn An tỉnh Đồng Nai đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn thành Luận văn này.

Sau cùng tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến những người thân yêu trong gia đình tôi, những bạn bè thân thiết của tôi đã luôn động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm Luận văn.

Do điều kiện thời gian và năng lực, chắc chắn Luận văn còn nhiều khiếm khuyết, chúng tôi kính mong các thầy giáo, cô giáo và các đồng nghiệp góp ý để Luận văn được hoàn chỉnh.

Tác Giả

Hoàng Trọng Vĩnh

MỞ ĐẦU

1. Ghi nhận ban đầu và câu hỏi xuất phát

Kể từ cuộc cải cách giáo dục bắt đầu thực hiện trên toàn quốc từ năm 1980 theo hình thức cuốn chiếu và do đó trực tiếp ảnh hưởng đến chương trình trung học phổ thông (THPT) vào năm 1990, vectơ được xem là một đối tượng giảng dạy ở lớp 10. Như tác giả Lê Thị Hoài Châu (1997) đã phân tích, việc đưa vectơ vào tạo nên một sự thay đổi cơ bản trong chương trình môn toán dạy ở THPT. Nếu như trước đó học sinh chỉ biết đến phương pháp tổng hợp trong tiếp cận hình học sơ cấp thì giờ đây họ đã được trang bị thêm phương pháp vectơ và phương pháp tọa độ. Nhờ có công cụ vectơ mà nhiều định lý đã được chứng minh một cách gọn gàng. Phương pháp vectơ (cũng giống như phương pháp tọa độ) mang lại tính khái quát cao cho việc giải quyết nhiều bài toán phức tạp của hình học sơ cấp. Điều này cũng được các tác giả viết sách giáo khoa khẳng định :

“...Với công cụ vectơ, học sinh sẽ tập làm quen với việc nghiên cứu hình học phẳng bằng một phương pháp khác, gọn gàng, có hiệu quả và mang tầm khái quát cao....” (Trần Văn Hạo, Nguyễn Mộng Hy, SGK Hình Học 10, NXBGD, 2006, trang 7).

Không những thế trong Sách giáo viên các tác giả còn giải thích :

“Việc đưa “vectơ và phương pháp tọa độ” vào chương trình Hình học 10 giúp cho học sinh sớm tiếp cận với một phương pháp tư duy hiện đại mang tính khoa học cao, giúp cho học sinh có thêm những công cụ mới để suy luận và tư duy một cách chặt chẽ và chính xác, tránh được các hiểu lầm do trực giác mang tới”

Chương trình 1990 đã được chỉnh lý vào năm 2000. Trong chương trình thứ hai này, vai trò của vectơ không thay đổi.

Đến năm 2006, chương trình phân ban được áp dụng trên toàn quốc. Trong chương trình mới, có một sự dịch chuyển về vị trí của chương *Phép biến hình*: trước kia, nó được dạy ở chương 3, chương cuối trong hình học lớp 10, sau chương *Vectơ* và chương *Hệ thức lượng*, còn giờ đây, nó được đẩy ra sau chương *Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng* (vốn trước trình bày ở lớp 12). Sự thay đổi này có làm biến đổi vai trò của vectơ trong nghiên cứu các phép biến hình hay không ? nếu có thì đó là sự biến đổi nào? và điều đó có ảnh hưởng gì đến việc dạy học các phép biến hình hay không?

Những câu hỏi trên đã dẫn chúng tôi đến với đề tài *Quan điểm vectơ trong dạy học phép biến hình ở trường phổ thông*.

2. Khung lý thuyết tham chiếu

Thuật ngữ *quan điểm vector* được chúng tôi sử dụng theo nghĩa khai thác vector cho việc nghiên cứu hình học sơ cấp, mà trong trường hợp của chúng tôi là các phép biến hình.

Đặt trong khuôn khổ các lý thuyết của Didactic, chúng tôi thấy câu hỏi về *vai trò của vector* trong dạy học phép biến hình liên quan đến khái niệm *quan hệ thể chế* của Thuyết nhân học do Chevallard đặt nền móng. Câu hỏi về *ảnh hưởng của sự thay đổi chương trình lên hoạt động dạy học* lại liên quan đến khái niệm *quan hệ cá nhân* cũng của lý thuyết này. Sau đây chúng tôi sẽ trình bày tóm tắt một số khái niệm cơ bản mà chúng tôi sử dụng của lý thuyết ấy và cố gắng chỉ ra tính thỏa đáng cho sự lựa chọn phạm vi lý thuyết của mình. Các khái niệm này, chúng tôi trích từ những bài giảng đã được công bố trong cuốn sách song ngữ *Những yếu tố cơ bản của Didactic toán*.

2.1. Quan hệ thể chế đối với một đối tượng tri thức. Cách tiếp cận sinh thái

Một đối tượng là một cái gì đó tồn tại ít nhất đối với một cá nhân. Mỗi cá nhân lại tồn tại ít nhất trong một thể chế nào đó. Quan điểm được thừa nhận trong thuyết nhân học là :

“Một tri thức không tồn tại “lơ lửng” trong một xã hội rộng : mọi tri thức đều xuất hiện ở một thời điểm nhất định, trong một xã hội nhất định, như là được cắm sâu vào một hoặc nhiều thể chế.”

(Chevallard, 1989)

Như thế, một đối tượng O không thể tồn tại độc lập trong bất cứ thể chế nào. Nói cách khác, O sống trong mối quan hệ chằng chịt với những đối tượng khác. O sinh ra, tồn tại và phát triển trong mối quan hệ ấy. Theo cách tiếp cận sinh thái (écologie) thì O chỉ có thể phát triển nếu nó có một lý do tồn tại (raison d'être), nếu nó được nuôi dưỡng trong những quan hệ, những ràng buộc với các đối tượng khác. Chevallard đã dùng thuật ngữ *quan hệ thể chế I với tri thức O*, ký hiệu $R(I, O)$, để chỉ tập hợp các mối ràng buộc mà thể chế I có với tri thức O . $R(I, O)$ cho biết O xuất hiện ở đâu, bằng cách nào, tồn tại ra sao, đóng vai trò gì trong I , ...

Trở lại với câu hỏi xuất phát về *vai trò của vector trong dạy học các phép biến hình theo chương trình 2006*, chúng tôi thấy ngay sự cần thiết của việc xem xét quan hệ của thể chế mà chúng tôi quan tâm đối với phép biến hình, hay nói chính xác hơn là đối với việc khai thác công cụ vector trong việc nghiên cứu các phép biến hình. Cụ thể, theo cách tiếp cận trường sinh thái, câu hỏi xuất phát của chúng tôi đòi hỏi một nghiên cứu về sự tồn tại và phát triển của đối tượng *vector* trong mối quan hệ với *phép biến hình*.

2.2. Tổ chức toán học

Vấn đề là làm thế nào để nghiên cứu quan hệ của một thể chế I với một đối tượng O ? Theo Bosch M. và Chevallard Y., điều đó có thể được tiến hành thông qua việc nghiên cứu các tổ chức toán học gắn liền với O :

“Mỗi quan hệ thể chế với một đối tượng [...] được định hình và biến đổi bởi một tập hợp những nhiệm vụ mà cá nhân [chiếm một vị trí nào đó trong thể chế này] phải thực hiện, nhờ vào những kỹ thuật xác định (tham khảo Bosch M. và Chevallard Y., 1999).

Ở đây, một tổ chức toán học (organisation mathématique) – còn gọi là praxéologie toán học (praxéologie mathématique), là một bộ gồm 4 thành phần $[T, \tau, \theta, \Theta]$, trong đó T là một kiểu nhiệm vụ, τ là kỹ thuật cho phép giải quyết T , θ là công nghệ giải thích cho kỹ thuật τ , Θ là lý thuyết giải thích cho θ , nghĩa là công nghệ của công nghệ θ .

Việc O xuất hiện trong một hay một số tổ chức toán học nào đó sẽ giải thích lý do tồn tại của O, sẽ phản ánh vai trò, mối quan hệ của O với những đối tượng khác cùng có mặt trong thể chế.

2.3. Quan hệ cá nhân với đối tượng O

Quan hệ cá nhân của một cá nhân X với một đối tượng tri thức O, ký hiệu $R(X,O)$, là tập hợp những tác động qua lại mà X có thể có với O. $R(X, O)$ cho biết X nghĩ gì về O, X hiểu như thế nào O, có thể thao tác O ra sao.

Theo quan điểm này thì việc học tập của cá nhân X về đối tượng tri thức O là sự điều chỉnh mối quan hệ của X đối với O. Cụ thể, việc học tập xảy ra nếu quan hệ $R(X, O)$ bắt đầu được thiết lập (nếu nó chưa từng tồn tại), hoặc bị biến đổi (nếu nó đã tồn tại).

Hiển nhiên, mỗi cá nhân bao giờ cũng phải tồn tại, hoạt động trong ít nhất một thể chế nào đó. Trong thể chế I mà cá nhân X tồn tại và hoạt động, quan hệ $R(X, O)$ hình thành hay thay đổi dưới các ràng buộc của $R(I, O)$. Chính vì thế, muốn trả lời câu hỏi thứ hai về *ảnh hưởng của sự thay đổi cấu trúc chương trình đến việc dạy học phép biến hình*, chúng tôi cần phải nghiên cứu trước hết là quan hệ của thể chế và sau đó là quan hệ cá nhân.

Cũng theo Bosch M. và Chevallard Y., việc nghiên cứu các tổ chức toán học gắn liền với O không chỉ giúp chỉ rõ quan hệ thể chế đối với O mà còn cho phép hình dung được một số yếu tố của quan hệ cá nhân của một chủ thể X tồn tại trong O, bởi vì:

“Chính việc thực hiện những nhiệm vụ khác nhau mà cá nhân phải làm trong suốt cuộc đời mình trong những thể chế khác nhau, ở đó nó là một chủ thể (lần lượt hay đồng thời), dẫn tới làm nảy sinh mối quan hệ cá nhân của nó với đối tượng nói trên”.

3. Trình bày lại câu hỏi nghiên cứu. Phương pháp nghiên cứu và cấu trúc của luận văn

Vấn đề của chúng tôi là nghiên cứu quan điểm vectơ trong dạy học các phép biến hình ở trường phổ thông. Chúng tôi nhắc lại : thuật ngữ quan điểm vectơ được dùng theo nghĩa khai thác công cụ vectơ. Trong phạm vi *thuyết nhân học*, chúng tôi trình bày lại những câu hỏi được đặt ra ban đầu như sau:

- **Q1.** Gọi đối tượng O là *phép biến hình*, I là thể chế dạy học ở trường phổ thông theo chương trình hiện hành. Đây là những đặc trưng của quan hệ thể chế $R(I, O)$? Trong quan hệ ấy, công cụ vectơ xét có vai trò gì? Vai trò ấy tạo ra những điều kiện thuận lợi, hay ngược lại, những khó khăn, cho việc dạy học các phép biến hình như thế nào?
- **Q2.** Sự lựa chọn của thể chế ảnh hưởng ra sao đến quan hệ cá nhân của học sinh đối với O ?

Ở đây, cần phải nói rõ rằng trong một thể chế dạy học thì giáo viên và học sinh là hai trong những đối tượng chủ chốt. Nhưng, do thời gian có hạn, chúng tôi sẽ không xem xét X ở cương vị giáo viên mà chỉ thu hẹp về nghiên cứu quan hệ cá nhân của học sinh đối với O .

Tuy nhiên, để phân tích quan hệ $R(I, O)$, cần phải có một nghiên cứu về bản thân O ở cấp độ một tri thức khoa học, bởi vì, để tồn tại trong một thể chế, đối tượng O phải bị biến đổi cho phù hợp với những điều kiện và ràng buộc của thể chế. Điều đó dẫn đến chỗ thường tồn tại một khoảng cách (đôi khi khá lớn) giữa tri thức khoa học (được thừa nhận trong cộng đồng các nhà toán học) với tri thức xác định trong chương trình, trình bày trong sách giáo khoa (tri thức cần dạy). Thiếu hiểu biết về O ở cấp độ tri thức khoa học thì sẽ không hình dung được khoảng cách này và do đó khó mà có một hiểu biết đầy đủ về $R(I, O)$.

Vì lý do trên, trước khi nghiên cứu quan hệ thể chế $R(I, O)$, chúng tôi cần phải tìm hiểu O (phép biến hình) ở cấp độ một tri thức khoa học. Thông thường, một nghiên cứu tri thức luận về đối tượng toán học O có thể giúp chúng ta làm rõ nhiều vấn đề : trong lịch sử O được hình thành từ việc giải quyết bài toán gì ? việc hình thành đó có gặp phải trở ngại gì hay có gắn liền với điều kiện gì không (chẳng hạn phải có một sự thay đổi quan niệm hay sự tác động của một đối tượng nào đó) ? đến lượt mình, O lại phát triển như thế nào, ảnh hưởng ra sao đến lịch sử toán học, v.v. Đó là một nghiên cứu đòi hỏi nhiều thời gian và tư liệu, vượt quá khả năng của chúng tôi. Vì thế, chúng tôi sẽ chỉ tìm kiếm một vài công trình trong đó có phân tích lịch sử hình thành và phát triển của đối tượng *phép biến hình*. Trong trường

hợp cần thiết, chúng tôi sẽ nghiên cứu thêm các giáo trình đại học hoặc những cuốn sách có trình bày một cách hệ thống về đối tượng này (dành cho giáo viên, sinh viên các trường đại học sư phạm). Mục đích xem xét các tư liệu đó là tìm những yếu tố trả lời câu hỏi Q0 mà như chúng tôi đã nói là cần thiết để làm tham chiếu cho việc nghiên cứu quan hệ thể chế :

- **Q0.** Trong lịch sử, lý thuyết các phép biến hình đã trải qua những giai đoạn phát triển nào? Đặc trưng của từng giai đoạn là gì? Khái niệm phép biến hình được hình thành trong điều kiện nào (phải có sự thay đổi gì trong quan niệm hay trong toán học)? Vector có vai trò gì trong việc nghiên cứu các phép biến hình? Những kết luận sư phạm nào có thể được rút ra từ lịch sử?

Kết quả thu được qua việc nghiên cứu các loại tài liệu nêu trên sẽ được trình bày trong chương 1 của luận văn với tiêu đề: *Phép biến hình và quan điểm vector : một điều tra khoa học luận.*

Nghiên cứu thực hiện ở chương 1 là một cơ sở cho việc xem xét phép biến hình ở cấp độ tri thức cần dạy. Ở đây, chúng tôi sẽ tìm câu trả lời cho câu hỏi Q1. Điều đó được thực hiện qua việc phân tích chương trình và sách giáo khoa hiện hành, kèm theo nó là sách bài tập, sách giáo viên. Phân tích này được đặt trong khuôn khổ của thuyết nhân học. Với câu hỏi Q1 thì khi phân tích quan hệ thể chế với phép biến hình chúng tôi sẽ đặt trọng tâm vào việc tìm hiểu vai trò của công cụ vector trong xây dựng các kiến thức về phép biến hình. Phân tích đó được chúng tôi trình bày trong chương 2 của luận văn – *Phép biến hình và quan điểm vector: một nghiên cứu thể chế.*

Phân tích quan hệ thể chế sẽ cho phép chúng tôi hình thành nên những giả thuyết liên quan đến câu hỏi Q3, Q4. Để kiểm chứng (hay bác bỏ) các giả thuyết này, chúng tôi sẽ xây dựng một thực nghiệm tiến hành với học sinh lớp 11, sau khi các em đã hoàn tất phần chương trình về *phép biến hình*. Chương 3 của luận văn – *Một nghiên cứu thực nghiệm*, là chương trình bày nghiên cứu thực nghiệm này.

Chương 1

PHÉP BIẾN HÌNH VÀ QUAN ĐIỂM VECTO:

MỘT ĐIỀU TRA KHOA HỌC LUẬN

1.1. Phép biến hình : một điều tra khoa học luận

1.1.1. Lịch sử hình thành và phát triển lý thuyết các phép biến hình

Trong điều kiện hạn chế về tư liệu lịch sử, chúng tôi xin được trích dẫn phần lớn nội dung lịch sử phép biến hình từ cuốn giáo trình *Phương pháp dạy học hình học ở trường trung học phổ thông* của Lê Thị Hoài Châu. Trong giáo trình này, tác giả tóm lược lại những kết quả chính của nghiên cứu tri thức luận về phép biến hình mà Jahn A. P. đã thực hiện qua phân tích lịch sử (Jahn A. P. , 1998¹).

Lịch sử hình thành lý thuyết về các phép biến hình gắn liền với những cách hiểu khác nhau về các hình hình học. Vì thế, để phân tích lịch sử hình thành lý thuyết biến hình ta không thể không nói đến sự tiến triển trong quan niệm về hình.

Về các phép biến hình, lịch sử đã trải qua 4 giai đoạn. Dưới đây, chúng tôi sẽ trình bày tóm lược 4 giai đoạn đó.

Giai đoạn thứ nhất : phép biến hình xuất hiện ngầm ẩn trong khái niệm “hình bằng nhau”

Hình học sơ cấp đã hình thành từ thời cổ xa, nhưng chỉ thực sự trở thành một khoa học suy diễn từ công trình của Euclide. Nhà toán học vĩ đại này đã tập trung những kiến thức về hình học mà loài người có được cho đến thế kỷ thứ 3 trước công nguyên và xây dựng nên lý thuyết hình học theo tư tưởng của phương pháp tiên đề. Trong hình học của Euclid, hình được xác định bởi ba yếu tố: vị trí, hình dạng và số đo. Sự thay đổi vị trí không ảnh hưởng gì đến hai yếu tố kia. Các hình là những đối tượng cứng, được xem xét trong tổng thể về hình dạng và kích thước. Người ta có thể nói về “điểm trên một đường”, hay “điểm trên một hình”, nhưng không quan niệm rằng hình được tạo thành từ một tập hợp điểm, mà chỉ xem nó như cái giá và có thể đặt các điểm lên trên đó.

Liên quan đến *phép biến hình*, với con mắt của toán học ngày nay, ta có thể đọc mệnh đề IV của Euclid như là sự mô tả kết quả của việc dịch chuyển một tam giác, dẫn nó

¹ Jahn A. P., 1998, *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre, relation entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de seconde*, Thèse en didactique des mathématiques. Université Joseph Fourier.

đến trùng với một tam giác khác. Điều này đưa đến chỗ xem tam giác thứ hai là ảnh của tam giác thứ nhất qua một phép dời hình.

Nhưng sự dịch chuyển (ngầm ẩn) ở đây là sự dịch chuyển hình chứ không phải là phép biến hình thực hiện trong không gian được xem xét với tư cách là một tập hợp điểm. Do đó thao tác dịch chuyển không được xem như một phép biến hình theo nghĩa nó có thể làm biến đổi hình dạng của hình.

Tóm lại, trong hình học của Eucid, đối tượng nghiên cứu là các hình được xét trong tổng thể với tư cách là một hình dạng. Phép biến hình không phải là đối tượng nghiên cứu, chỉ ngầm ẩn xuất hiện trong tình huống so sánh hai hình, và cũng chỉ được hiểu theo nghĩa là phép chuyển dời hình từ vị trí này sang vị trí khác, chưa được xem xét như một tác động lên không gian các điểm.

Giai đoạn thứ hai : Phép biến hình – Công cụ nghiên cứu các đường cônic

Vấn đề biểu diễn các đối tượng không gian và bóng của chúng chiếm sự quan tâm của nhiều họa sĩ thế kỷ 15. Các nghệ sĩ thời Phục hưng như Durer, Léonard de Vinci, Brunelleschi tìm cách biểu diễn chính xác lên mặt phẳng các hình không gian sao cho có thể tạo nên những hình vẽ “trung thành” nhất của thực tế. Nghiên cứu của họ đã dẫn đến chỗ sáng tạo ra một số quy tắc hình học của phép phối cảnh.

Nhiều cuốn sách bàn về phép phối cảnh xuất hiện vào đầu thế kỷ XVI. Thoạt tiên chúng chỉ được giới hạn ở phạm vi nghệ thuật, sau đó thì phép chiếu bắt đầu được đưa vào hình học nhờ các công trình của Girard Desargues (1591 – 1661), một kiến trúc sư người Pháp. Theo Desargues, những nguyên lý làm cơ sở cho kỹ thuật vẽ phối cảnh không chỉ cho phép tạo ra một hình từ một hình khác mà còn mang những tính chất của hình ban đầu vào hình nhận được. Nghiên cứu của Desargues liên quan chủ yếu đến các đường cônic. Những đường này được xem như giao của mặt phẳng với một hình nón tròn xoay. Sau đó, nhờ phép chiếu mà chúng được giải thích như hình chiếu phối cảnh của một đường tròn lên những mặt phẳng không song song:

Desargues tưởng tượng là phép chiếu này chuyển một số tính chất hình học của đường tròn vào các đường cônic có thể được suy ra (không cần một phép chứng minh mới) từ tính chất của đường tròn.

Tiếp theo, Pascal (1623 – 1662) đã sử dụng lại phép chiếu của Desargues để trình bày cuốn sách về các đường cônic của ông. Cũng xem các đường cônic là ảnh của đường tròn như Desargues, nhưng Pascal đã thiết lập giữa hai hình một tương ứng điểm: “Mọi

điểm của đường tròn chiếu ảnh của nó lên mặt phẳng bức tranh”. Như vậy, Pascal tưởng tượng mỗi điểm của đường conic là ảnh của một điểm thuộc đường tròn qua phép chiếu. Điều đó dẫn ông đến cho phân loại các đường conic theo số điểm (của đường tròn) không có ảnh “ở một khoảng cách xác định” (tức là ảnh ở vô hạn).

Ta thấy, ngay từ gốc của nó, phép biến hình đã xuất hiện như là công cụ để chứng minh, theo nghĩa nó cho phép khẳng định các tính chất của những đối tượng hình học phức tạp hơn các hình tạo ảnh của nó (với cách sử dụng này thì vấn đề là vạch rõ các tính chất bất biến qua phép biến hình). Tuy nhiên, phép biến hình chỉ được xét trong ngữ cảnh các đường conic, và cũng chỉ có duy nhất phép chiếu được sử dụng. Các phép chiếu này được tiếp cận ở dạng tổng thể, mặc dù quan niệm xem nó như ánh xạ điểm đã xuất hiện, nhưng chỉ để lập luận trong một số phép chứng minh hay dựng hình.

Như thế, cho đến tận cuối thế kỷ XVII, phép biến hình vẫn chỉ xuất hiện như một công cụ ngầm ẩn để chuyển các tính chất hình học (bất biến) từ hình này sang hình kia. Nó chưa được xem là đối tượng nghiên cứu của toán học.

Kế thừa tư tưởng Desargues và Pascal, các nhà toán học Mydorge (1585 – 1647), Grégoire de St.Vincent (1584 – 1667), De La Hir (1640 – 1718), Newton ... tiếp tục sử dụng phép biến hình như một công cụ để nghiên cứu các đường conic.

De La Hir quan tâm đến vấn đề tạo ra các đường conic từ một đường tròn. Chính ở đây ông đã nói đến phương pháp biến đổi các hình thành những hình đơn giản hơn thuộc cùng một loại. Điều quan trọng là ở De La Hir ta thấy xuất hiện những phép biến hình được định nghĩa qua việc dựng từng điểm.

Như vậy, tư tưởng về các ánh xạ điểm đã xuất hiện ở De La Hir. Tuy nhiên, cũng cần phải thận trọng mà nói rõ rằng đó chưa phải là phép biến hình từ mặt phẳng lên chính nó: De La Hir không nhằm biến đổi mặt phẳng, chỉ giới hạn vào tập hợp điểm của một đường cong.

Mười ba năm sau, Newton (1642 – 1727) cũng sử dụng phép biến hình vào mục đích nghiên cứu các đường conic. Vấn đề xác định một số quỹ đạo buộc Newton phải giải một lớp bài toán liên quan đến các đường conic. Khó khăn gặp phải khi giải nhiều bài toán đã dẫn ông đến với tư tưởng tìm những phép biến hình cho phép chuyển bài toán vào việc nghiên cứu trên những hình đơn giản hơn.

Newton đã đưa ra quy trình dựng một hình thuộc cùng một loại với hình ban đầu nhưng đơn giản hơn. Ở quy trình đó, cũng như De La Hir, ông mô tả tường minh phép biến hình qua việc dựng từng điểm.

Tóm lại, cho đến thế kỷ XVII, XVIII phép biến hình đã được sử dụng để giải một số bài toán, nhưng vẫn chưa phải là đối tượng nghiên cứu. Từ “phép biến hình” được đưa vào như một thuật ngữ được mô tả chứ không phải như một đối tượng của toán học.

Giai đoạn thứ ba : Phép biến hình – Đối tượng nghiên cứu của Toán học

Phép biến hình bắt đầu trở thành đối tượng nghiên cứu với Le Poivre (1652 – 1710). Từ việc giải một số bài toán, Le Poivre đã đưa ra các định nghĩa, định lý, hệ quả liên quan đến các phép biến hình. Điều đáng lưu ý là trong các định nghĩa về phép chiếu và đường conic của Le Poivre ta đã thấy xuất hiện sự tương ứng giữa các điểm của hai hình. Ông cũng đưa vào khái niệm ảnh của một đường, chứng minh rằng ảnh của đường thẳng là đường thẳng, xem xét sự tương ứng của các giao điểm, sự bảo toàn tính song song...

Nghiên cứu một cách hệ thống về đối tượng “phép biến hình” được Bellavitis (1803 – 1880) trình bày trong Lý thuyết về các hình của ông và sau đó được một số nhà toán học khác bổ sung thêm. Không phân tích chi tiết, ta chỉ cần nói vắn tắt rằng ở giai đoạn này phép biến hình đã trở thành đối tượng nghiên cứu của toán học.

Ở giai đoạn này, phép biến hình đã được xem là ánh xạ từ không gian lên chính nó. Quan niệm như vậy về phép biến hình gắn liền với quan niệm xem hình là một tập hợp điểm, mà hình học giải tích đóng vai trò quan trọng trong việc hình thành quan niệm đó.

Thực ra thì trong hình học cổ các thuật ngữ “điểm thuộc đường thẳng”, điểm nằm trên mặt phẳng”... đã được sử dụng, và một số quỹ tích hình học đã được nghiên cứu. Tuy nhiên, qua nhiều thế kỷ, cho đến tận thời Euclid và thậm chí sau đó nữa, từ “quỹ tích” luôn được hiểu là một đường (thẳng hoặc cong), hay một mặt, mà mọi điểm có cùng một tính chất nào đó đều thuộc nó. Ta không tìm thấy ở đây quan niệm xem hình là một tập hợp điểm. Có thể thấy rõ điều này qua các định nghĩa về quỹ tích của Platon, Aristée, Pappus, Crolus.

“Trong hình học giải tích, nhằm sử dụng các kỹ thuật của đại số để đem lại một phương pháp khái quát cho phép giải mọi bài toán hình học, Descartes và Fermat đã tìm cách chuyển các đối tượng và quan hệ hình học thành đối tượng và quan hệ đại số. Hai nhà toán học này xem mặt phẳng là một tập hợp điểm, gắn mỗi điểm của mặt phẳng với một cặp số (gọi là tọa độ) và mỗi đường cong với một phương trình, tức là một liên hệ đại số giữa các tọa độ, đặc trưng cho sự liên thuộc của điểm vào

đường cong. Từ đó, việc nghiên cứu tính chất của đường cong được thay thế bằng việc nghiên cứu tính chất đại số của những phương trình tương ứng.

Phương pháp của Descartes và Fermat đã đem lại một sự thay đổi rất quan trọng trong quan niệm về hình, nó cho phép chuyển từ cách nhìn các hình trong tổng thể vào cách nhìn từng điểm. Nói một cách cụ thể hơn, việc thiết lập mối liên hệ giải tích giữa điểm với tọa độ tất yếu dẫn đến chỗ phải hiểu hình là một tập hợp điểm.” (Lê Thị Hoài Châu, 2004)

Quan niệm hình như một tập hợp điểm đã đóng vai trò quan trọng trong lịch sử hình thành và phát triển lý thuyết về các phép biến hình.

“Khái niệm phép biến hình chỉ xuất hiện rõ ràng với sự phát triển của đại số và giải tích. Chính là từ phương pháp đại số mà Poncelet và Chasles đưa ra được một nghĩa thuần túy hình học cho các điểm, các đường thẳng ở vô hạn, rồi áp dụng một số kết quả đại số và hình học. Hơn thế, nhờ việc gắn liền chuyển động cũng như sự đối xứng của hình với vấn đề đối các trục tọa độ, và bằng cách diễn đạt tính đối xứng qua ngôn ngữ giải tích mà Euler đã chứng minh được rằng phép dời hình trong mặt phẳng là một phép quay, hoặc một phép tịnh tiến, hoặc tích của một phép đối xứng và một phép tịnh tiến.” (Lê Thị Hoài Châu, 2004)

Giai đoạn thứ tư: Phép biến hình – Phương pháp cơ bản để nghiên cứu Hình học

Cùng với việc trở thành đối tượng nghiên cứu của toán học, vào cuối thế kỷ XVIII, phép biến hình đã mang lại cho hình học một phương pháp mới có hiệu quả trong việc giải nhiều bài toán. Ta có thể thấy điều đó qua các nghiên cứu của Poncelet (1788 – 1867), Chasles (1793 – 1880), Mobius (1790 – 1966) ... Cho đến lúc này những tư tưởng của Desargues, Pascal và các phép biến hình mới thực sự được nhiều nhà toán học quan tâm.

Bên cạnh phép chiếu và phép vị tự được sử dụng một cách có hệ thống thì những phép biến hình khác như phép afin, phép quay, phép đối xứng, phép tịnh tiến cũng được Poncelet nghiên cứu. Ông đã phát triển một phương pháp mới để nghiên cứu hình học. Các công trình của ông kéo theo nhiều nghiên cứu sâu sắc khác về các phép biến hình của Mobius, Steiner, Von Staudt, Plucker, Gergonne và Chasles.

Đến cuối thế kỷ XIX thì phép biến hình đã được sử dụng vào một mục đích khác, không chỉ đơn thuần là công cụ để dựng hình hay chứng minh các tính chất của hình nữa. Vấn đề sắp xếp các tính chất bất biến của phép biến hình đã dẫn đến khái niệm nhóm các phép biến hình. Như chúng ta biết, lý thuyết nhóm ra đời từ những nghiên cứu của Galois (1811 – 1832) về vấn đề giải các phương trình đại số. Với khái niệm nhóm, Galois đã phân loại các phương trình đại số và thiết lập nên những điều kiện để chúng có thể giải được bằng căn thức. Chính từ công trình của Galois mà Klein (1849 – 1925) muốn nghiên cứu một cách hệ thống mối quan hệ giữa hình học với lý thuyết nhóm. Ông đã phân loại các tính chất

hình học theo những phép biến hình bảo toàn các tính chất đó. Với các công trình của ông, mỗi hình học được đặc trưng bởi các bất biến của một kiểu các phép biến hình xác định.

Hình học afin là hình học của nhóm các phép biến đổi afin (tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm, vị tự ... là những ví dụ về phép biến đổi afin). Một tính chất của hình H sẽ được gọi là tính chất afin hay bất biến afin nếu nó vẫn được giữ nguyên trong hình H' là ảnh của H qua một phép biến đổi afin bất kỳ nào đó.

Hình học Euclid là hình học tương ứng với nhóm các phép dời hình (tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm, quay ... là những ví dụ về phép dời hình – còn gọi là phép đẳng cự). Hình học này nghiên cứu những tính chất không thay đổi qua các phép dời hình, gọi là tính chất Euclid hay bất biến Euclid.

Tập hợp các phép dời hình lập thành một nhóm con của nhóm các phép biến đổi afin. Vì thế, các bất biến afin cũng là bất biến Euclid. Điều đó có nghĩa hình học afin là một bộ phận của hình học Euclid, hình học Euclid rộng hơn, phong phú hơn hình học afin.

Hình học xạ ảnh thì tương ứng với nhóm các phép biến đổi xạ ảnh (phép chiếu xuyên tâm trong không gian hai, ba chiều là một ví dụ về phép biến đổi xạ ảnh). Những tính chất không thay đổi qua các phép biến đổi xạ ảnh gọi là bất biến xạ ảnh. Hình học xạ ảnh là hình học nghiên cứu các bất biến xạ ảnh.

1.1.2. Kết luận sơ phạm rút ra từ phân tích lịch sử

1.1.2.1. Những cấp độ khác nhau của việc hiểu các phép biến hình

Từ phân tích lịch sử, ta có thể nói về bốn cấp độ khác nhau trong việc hiểu khái niệm *phép biến hình*.

- Cấp độ 1: Phép biến hình gắn liền với mối liên hệ về hình dáng giữa hai hình hoặc giữa hai phần của một hình (đặc trưng hàm hoàn toàn vắng mặt)
- Cấp độ 2: Phép biến hình được hiểu là ánh xạ từ mặt phẳng, hay tổng quát hơn, từ không gian, lên chính nó, ở đó mặt phẳng và không gian được nghiên cứu với tư cách là các tập hợp điểm.
- Cấp độ 3: Phép biến hình được xem như một công cụ giải toán hình học.
- Cấp độ 4: Phép biến hình được xem là phần tử của một nhóm và được dùng để phân loại các lý thuyết hình học.

Trong việc dạy – học chủ đề các phép biến hình ở trường phổ thông, nếu như người ta không yêu cầu phải đạt đến cấp độ 4 (mà chỉ mong muốn ngấm tạo nên biểu tượng về một cấu trúc đại số, làm chỗ dựa để sau này học sinh tiếp cận với toán học hiện đại) thì cấp

độ 2 lại là một trọng tâm, còn cấp độ 3 được đòi hỏi cao thấp thế nào là tùy từng thể chế dạy học. (Lê Thị Hoài Châu, 2004)

1.1.2.2. Điểm hóa các hình hình học – vai trò của hình học giải tích

Trong bốn cấp độ trên thì hai cấp độ đầu tiên liên quan đến phương diện “đối tượng” của khái niệm phép biến hình. Tương ứng với chúng là hai mức độ quan niệm về các hình hình học. Ở cấp độ đầu, hình được nghiên cứu trong tổng thể về hình dạng, còn ở cấp độ sau thì nó phải được hiểu là một tập hợp điểm.

“Phân tích khoa học luận cho ta thấy lịch sử hình thành khái niệm các phép biến hình gắn liền với những giai đoạn khác nhau của sự tiến triển trong quan niệm về các đối tượng hình học. Chính ở bước chuyển từ việc tri giác một hình hình học trong tổng thể sang việc xem nó như một tập hợp điểm mà khái niệm các phép biến hình xuất hiện một cách tường minh.” (Lê Thị Hoài Châu, 2004)

Ở đây, tác giả Lê Thị Hoài Châu nhận định :

“Chuyển từ xem xét hình trong tổng thể sang xem hình như tập hợp điểm là một sự thay đổi quan niệm không dễ đến. Có thể hình dung là học sinh sẽ gặp khó khăn trong bước chuyển này. Khó khăn ấy có khả năng được giảm bớt nếu trước khi bước vào cấp độ sau của tiến trình dạy – học phép biến hình học sinh đã tiếp xúc với hình học giải tích. Việc hình học giải tích đặt tương ứng mỗi điểm của mặt phẳng (không gian) với một bộ hai (ba) số thực và đặt tương ứng mỗi đường, mỗi mặt với một tập hợp điểm mà các bộ số tương ứng với nó thỏa mãn một phương trình cụ thể sẽ dẫn người ta chuyển một cách tự nhiên sang tư tưởng “điểm hóa” các hình.” (Lê Thị Hoài Châu)

1.2. Quan điểm vector trong nghiên cứu phép biến hình

1.2.1. Vai trò công cụ của vector trong nghiên cứu hình học

Về vai trò công cụ của vector trong nghiên cứu hình học nói chung thì có lẽ không cần phải bàn luận. Từ gốc rễ của nó, ta biết rằng lý thuyết vector được xây dựng với ý đồ đại số hóa hình học. Việc đại số hóa hình học cho phép tận dụng các phương tiện và kỹ thuật của đại số, mang lại tính khái quát cao cho lời giải các bài toán hình học và giúp cho việc giải quyết nhiều bài toán liên quan đến các đường cong, mặt cong phức tạp trở nên dễ dàng hơn, thậm chí nhiều khi là không thể có nếu ở trong phạm vi của phương pháp tổng hợp.

Xu hướng đại số hóa hình học đã có trong hình học giải tích. Nhưng với hình học giải tích người ta chuyển đối tượng hình học thành đối tượng đại số, chuyển bài toán hình học thành bài toán đại số, tức là thoát ly khỏi hình học. Có lẽ vì thế mà thuở mới hình thành, vấn đề lập phương trình các đường và mặt đã không phải được giải quyết một cách dễ dàng.

Ở đây, ta thấy một vai trò rất đáng được quan tâm của vector : bằng thuật ngữ chuyển đổi sự phạm (transposition didactic), ta có thể nói là vector mang lại một phương thức mới

để xây dựng hình học giải tích. Điều này đã được tác giả Lê Thị Hoài Châu phân tích rõ trong một số nghiên cứu của mình (Lê Thị Hoài Châu (1997) và Lê Thị Hoài Châu (2004)). Theo tác giả này, phương pháp vector và phương pháp giải tích xét về mặt toán học cũng như về lịch sử đã được xây dựng hoàn toàn độc lập với nhau, nhưng bằng cách đặt vector vào một hệ tọa độ, người ta có thể thiết lập mối liên thông giữa hai phương pháp :

“... bằng cách đặt vector vào hệ tọa độ, người ta có thể chuyển phép toán trên vector thành phép toán trên số. Chúng ta gọi *phương pháp vector - tọa độ* là cách nghiên cứu hình học với công cụ vector đã được gắn vào hệ tọa độ. Nó cho phép thiết lập mối liên thông giữa phương pháp giải tích với phương pháp vector. Thuật ngữ *phương pháp tọa độ* sẽ được dùng để chỉ chung cho hai phương pháp, giải tích và vector – tọa độ (có cùng đặc trưng là lấy hệ tọa độ làm trung gian để chuyển bài toán hình học thành bài toán đại số).” (Lê Thị Hoài Châu, 2004, tr. 39)

Chúng tôi tự hỏi : đối với các phép biến hình, liệu công cụ vector có thể giữ vai trò này không ? Để trả lời câu hỏi đó, chúng tôi đã nghiên cứu các giáo trình Hình học cao cấp dùng ở bậc đại học. Nghiên cứu các giáo trình này cho thấy các không gian afin, oclit, xạ ảnh đều được xây dựng trên một không gian vector. Chúng tôi sẽ không trình bày lại những khái niệm, tính chất của các không gian này vì nó không trực tiếp liên quan đến đề tài của luận văn. Tuy nhiên, cũng cần phải nói rằng không gian afin ứng với nhóm các phép biến đổi afin, không gian oclit ứng với nhóm các phép biến đổi oclit, không gian xạ ảnh ứng với nhóm các phép biến đổi xạ ảnh, và các nhóm phép biến đổi này đều được xây dựng nhờ công cụ vector.

Liên quan trực tiếp đến đề tài của chúng tôi là các phép dời hình và đồng dạng - những phép biến hình có mặt trong chương trình phổ thông. Vì thế, chúng tôi đã phân tích thêm cuốn tài liệu tham khảo *Các phép biến hình trong mặt phẳng* mà tác giả Nguyễn Mộng Hy viết cho sinh viên sư phạm ngành toán và giáo viên phổ thông. Dưới đây, chúng tôi sẽ trình bày kết quả thu được từ việc phân tích tài liệu này.

1.2.2. Vai trò công cụ của vector trong lý thuyết về các phép dời hình và đồng dạng

1.2.2.1. Về phép đối xứng trục

Định nghĩa : Cho đường thẳng d . Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục d .

Định lí: Phép đối xứng trục là một phép dời hình

Chứng minh

Giả sử M, N là hai điểm bất kì trong mặt phẳng và đối xứng trục $\mathbb{D}_d$ biến các điểm M, N lần lượt thành điểm M', N'. Khi đó các đoạn thẳng MM', NN' vuông góc với trục d tại trung điểm H, K của chúng.

Ta có: $\overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{M'H}$

$$\overrightarrow{KN} = -\overrightarrow{KN'}$$

Mặt khác: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KN}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{MH}^2 + \overrightarrow{HK}^2 + \overrightarrow{KN}^2 + 2.\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{KN}$$

(do $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HK} = 0$ và $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{KN} = 0$)

Tương tự

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'N'}^2 &= \overrightarrow{M'H}^2 + \overrightarrow{HK}^2 + \overrightarrow{KN'}^2 + 2.\overrightarrow{M'H}.\overrightarrow{KN'} \\ &= (-\overrightarrow{MH})^2 + \overrightarrow{HK}^2 + (-\overrightarrow{KN})^2 + 2.(-\overrightarrow{MH}).(-\overrightarrow{KN}) \\ &= \overrightarrow{MN}^2 \end{aligned}$$

Do đó: $|\overrightarrow{M'N'}| = |\overrightarrow{MN}|$ hay $M'N' = MN$

Vậy phép đối xứng trục là một phép dời hình.

1.2.2.2. Phép đối xứng tâm

Định nghĩa: Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm I.

Định lí: Phép đối xứng tâm O là một phép dời hình.

Định lí được chứng minh bằng phương pháp vector thuần túy.

1.2.2.3. Phép tịnh tiến

Định nghĩa: Trong mặt phẳng P cho vector $\vec{v}$, phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ gọi là phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$ và được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

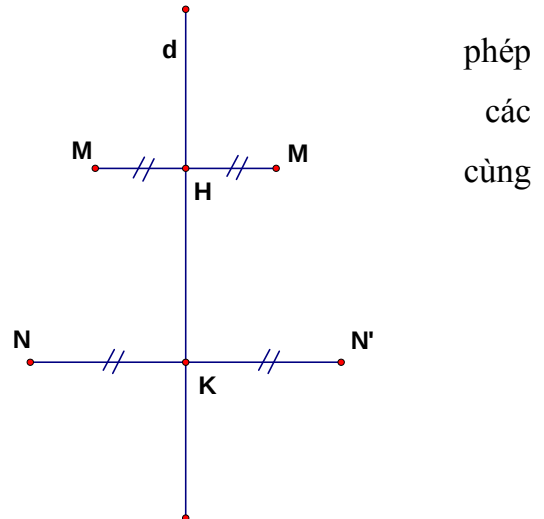
Vector $\vec{v}$ gọi là vector tịnh tiến. Ta có: $T_{\vec{v}}(M) = M'$

Định lí: Phép tịnh tiến là một phép dời hình.

Định lí được chứng minh bằng phương pháp vector thuần túy.

1.2.2.4. Phép quay

1. Định nghĩa: Trong mặt phẳng P đã được định hướng, cho một điểm O cố định và một góc định hướng α sai khác $k2\pi$. Một phép quay tâm O với góc quay α là một phép biến hình



biến điểm O thành chính nó và biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $OM = OM'$ và $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$.

Trong định nghĩa trên ta kí hiệu $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ là góc định hướng mà tia đầu là OM và tia cuối là OM'. Ta kí hiệu phép quay tâm O với góc quay α là Q_O^α hoặc $Q(O; \alpha)$. Ta thường chọn α sao cho $-\pi \leq \alpha \leq \pi$.

Chú ý: Theo định nghĩa phép quay Q_O^α với $\alpha = 0$ là phép đồng nhất, còn nếu $\alpha = \pi$ hoặc $\alpha = -\pi$ thì đó là phép đối xứng tâm O.

Định lí: Phép quay là một phép dời hình.

Chứng minh:

Giả sử M, N là hai điểm bất kì trong mặt phẳng và Q_O^α là phép quay biến M, N lần lượt thành M', N'.

a) Nếu M (hay N) trùng với O thì M' (hay N') trùng với O, khi đó $M'N' = MN$.

b) Giả sử M và N đều khác với O, khi đó theo định nghĩa ta có:

$$OM = OM', ON = ON'$$

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{ON'}) = \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{và } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) &= (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}) + (\overrightarrow{ON'}, \overrightarrow{ON}) \\ &= \alpha + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}) - \alpha = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}) \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'N'}^2 &= (\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'})^2 = \overrightarrow{ON'}^2 + \overrightarrow{OM'}^2 - 2\overrightarrow{ON'} \cdot \overrightarrow{OM'} \\ &= \overrightarrow{ON'}^2 + \overrightarrow{OM'}^2 - 2 \cdot ON' \cdot OM' \cdot \cos(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}) \\ &= \overrightarrow{ON}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2 \cdot ON \cdot OM \cdot \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \\ &= (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{MN}^2 \end{aligned}$$

Vậy $|\overrightarrow{M'N'}| = |\overrightarrow{MN}|$ hay $M'N' = MN$ và như thế ta đã chứng minh được phép quay là phép dời hình.

1.2.2.5. Phép vị tự

Định nghĩa:

Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và một số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi

điểm M của mặt phẳng thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k. Phép biến hình này được kí hiệu là V_O^k . Điểm O gọi là tâm vị tự, số k gọi là tỉ số vị tự. Phép vị tự gọi là thuận nếu $k > 0$, nghịch nếu $k < 0$.

Như vậy phép vị tự sẽ được xác định khi biết tâm vị tự và tỉ số vị tự k của nó.

Định lí 1: Nếu phép vị tự V_O^k biến hai điểm A, B lần lượt thành hai điểm A', B' thì

$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

Chứng minh

Theo định nghĩa, ta có $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$$

Do đó $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OB} - k \cdot \overrightarrow{OA}$

hay $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k \cdot \overrightarrow{AB}$

Định lí 2. Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

Chứng minh

Giả sử qua phép vị tự tâm O, tỉ số k, ba điểm A, B, C thẳng hàng lần lượt thành ba điểm A', B', C'. Theo định lí 1 ta có:

$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{A'C'} = k \cdot \overrightarrow{AC}$$

Vì ba điểm A, B, C thẳng hàng nên ta có $\overrightarrow{AC} = m \cdot \overrightarrow{AB}$

Do đó: $k \cdot \overrightarrow{AC} = k \cdot m \cdot \overrightarrow{AB} = m \cdot k \cdot \overrightarrow{AB}$

hay $\overrightarrow{A'C'} = m \cdot \overrightarrow{A'B'}$ nghĩa là 3 điểm A', B', C' thẳng hàng.

Qua cách trình bày phép biến hình của giáo trình, chúng tôi nhận thấy vector có ảnh hưởng sâu sắc đến việc trình bày lý thuyết và chứng minh tính chất phép biến hình. Đặc biệt, phép tịnh tiến và phép vị tự sử dụng vector để định nghĩa khái niệm, do đó từ tính chất, định lí cũng sẽ sử dụng vector làm công cụ trình bày nội dung và chứng minh. Riêng đối với phép quay, trong định nghĩa có sử dụng góc định hướng thông qua kí hiệu góc giữa hai vector là góc quay. Như vậy vector cũng có ảnh hưởng lên phép quay. Thật vậy, khi chứng minh định lí của phép quay, giáo trình đã sử dụng vector làm công cụ để chứng minh.

Chương 2

PHÉP BIẾN HÌNH VÀ QUAN ĐIỂM VECTO: MỘT NGHIÊN CỨU THỂ CHẾ

2.1. Sự tiến triển của chương trình từ 1990 đến nay

Như chúng tôi đã nói trong phần mở đầu của luận văn, kể từ năm 1990, vector được xem là một đối tượng giảng dạy ở lớp 10. Việc đưa vector vào tạo nên một sự thay đổi cơ bản trong chương trình môn toán dạy ở THPT. Nếu như trước đó học sinh chỉ biết đến phương pháp tổng hợp trong tiếp cận hình học sơ cấp thì giờ đây họ đã được trang bị thêm phương pháp vector và phương pháp tọa độ. Cụ thể là trong hai chương tiếp theo của hình học 10 (*Hệ thức lượng, Phép biến hình*) người ta chủ trương khai thác công cụ vector để trình bày các khái niệm, chứng minh các công thức, định lý. Lưu ý là lúc này, tuy hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc đã được giới thiệu trong chương Vector và thậm chí còn được sử dụng sớm hơn trong chương trình Đại số, phép biến hình không được xem xét trong hệ tọa độ Oxy.

Phương pháp tọa độ chỉ được đưa vào chương trình hình học lớp 12 và trở thành một phương pháp được ưu tiên trong việc giải toán hình học. Nếu theo dõi các đề thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh đại học từ đó đến nay, ta đều thấy có sự tác động của phương pháp vector và phương pháp tọa độ.

Chương trình 1990 đã được chỉnh lý vào năm 2000. Trong chương trình thứ hai này, vai trò của vector không thay đổi.

Đến năm 2006, chương trình phân ban được áp dụng trên toàn quốc. Trong chương trình mới, có một sự dịch chuyển về vị trí của chương *Phép biến hình*: trước kia, nó được dạy ở chương 3, chương cuối trong hình học lớp 10, còn giờ đây, nó được đẩy ra sau chương *Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng* (vốn trước trình bày ở lớp 12). Sự thay đổi này khiến cho nội dung về các phép biến hình có thay đổi: khác với hai chương trình trước, chương trình mới đưa thêm vào *biểu thức tọa độ* của những phép biến hình được nghiên cứu.

Lưu ý rằng hai cấp độ đầu tiên trong việc hiểu các phép biến hình gắn liền với hai quan niệm về hình: hình được xem xét trong tổng thể và hình được xem là tập hợp điểm. Để có một cách trình bày ngắn gọn, trong phần tiếp theo của luận văn chúng tôi nói cấp độ thứ nhất gắn với *quan niệm hình* (hay *ánh xạ hình*) và cấp độ thứ hai gắn với *quan niệm điểm* (hay *ánh xạ điểm*).

Một câu hỏi được đặt ra :

- *Sự kết hợp phương pháp vector và phương pháp tọa độ có tạo điều kiện thuận lợi cho việc hiểu phép biến hình là ánh xạ điểm hay không?*

Chúng tôi sẽ tìm cách trả lời câu hỏi này khi phân tích sách giáo khoa.

Trên đây là những thay đổi (liên quan đến vector và phép biến hình) của các chương trình từ 1990 đến nay. Riêng có một điểm quan trọng sau là được giữ nguyên qua các chương trình này. Đó là việc nghiên cứu các nội dung về phép biến hình luôn được phân thành hai giai đoạn. Dưới đây chúng tôi sẽ trình bày cụ thể về hai giai đoạn này. Phân tích đặc trưng của hai giai đoạn này, chúng tôi lấy lại ý kiến của tác giả Lê Thị Hoài Châu trong giáo trình *Phương pháp dạy học hình học ở trung học phổ thông* (2004).

Giai đoạn 1:

Đặc trưng của giai đoạn này là :

“Phép biến hình gắn liền với mối liên hệ về hình dáng giữa hai hình hoặc hai phần của một hình (đặc trưng hàm hoàn toàn vắng mặt)” (Lê Thị Hoài Châu, 2004).

Trong giai đoạn này, “phép biến hình” chỉ xuất hiện ngầm ẩn. Lúc này, các từ “phép”, “biến ... thành ...”, “ảnh” không được sử dụng, vì học sinh chưa được học khái niệm ánh xạ. Giai đoạn này được thực hiện ở bậc trung học cơ sở (THCS). Cụ thể là người ta nói đến *đối xứng trục*, *đối xứng tâm* mà không nói đến *phép đối xứng trục*, *phép đối xứng tâm*.

Đối xứng trục được nói đến sau khi nghiên cứu *hình thang cân*. Những nội dung được đề cập đến là khái niệm *điểm đối xứng qua một đường thẳng*, *hai hình đối xứng nhau qua một đường thẳng*. Chương trình cũng đưa vào các tính chất về sự bằng nhau của hai đoạn thẳng, hai góc, hai tam giác đối xứng nhau qua một đường thẳng. Tính chất của hình thang cân cũng được nói đến : *“Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó”*. Rõ ràng là *tư tưởng* về sự tương ứng giữa các điểm chưa xây dựng ở đây.

Đối xứng tâm được trình bày tương tự như *đối xứng trục* bằng sự kết hợp với bài hình bình hành. Tịnh tiến theo vector không được giới thiệu trong chương trình THCS. “Phép quay” được dạy ở lớp 9, sau khi đã nghiên cứu *đường tròn* và *góc*. Việc nắm bắt được nội dung “phép quay” sẽ khó khăn hơn khi nắm bắt nội dung *đối xứng tâm*, *đối xứng trục*. Do đó *tư tưởng* về tương ứng giữa các điểm vẫn chưa thể được trình bày.

Có thể thấy là các kiến thức về “phép biến hình” được trình bày khá sơ sài, chỉ dừng ở mức độ gắn liền chúng với tính chất của một số hình cụ thể. Đây chỉ là bước chuẩn bị cho việc học “phép biến hình” ở THPT.

Giai đoạn 2:

Đặc trưng của giai đoạn này là:

“Phép biến hình được hiểu là ánh xạ từ mặt phẳng, hay tổng quát hơn, từ không gian, lên chính nó, ở đó mặt phẳng và không gian được nghiên cứu với tư cách là các tập hợp điểm (đặc trưng hàm xuất hiện).”(Lê Thị Hoài Châu, 2004)

Trong giai đoạn này, phép biến hình xuất hiện một cách tường minh. Cụ thể khái niệm đối xứng trục, đối xứng tâm được giới thiệu ở bậc THCS đã được nêu rõ là phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm.

Phép đối xứng trục được định nghĩa : “Cho đường thẳng d ,...mỗi điểm M không thuộc d thành M' ...” và phép đối xứng tâm : “Cho điểm I , ... mỗi điểm M khác I thành M' ...”. Rõ ràng sự tương ứng 1 – 1 theo quan điểm ánh xạ đã xuất hiện. Tương tự, các phép biến hình khác cũng được trình bày theo quan điểm ánh xạ. Và nhiệm vụ của SGK phải làm sao cho học sinh tiếp cận sự chuyển đổi này một cách dễ dàng, tự nhiên nhất.

Như vậy, dù chương trình sách giáo khoa từng thời kỳ có sự khác nhau về mặt trình bày, nhưng trên hết là *nhắm đến sự gắn kết giữa hai giai đoạn trên*. Việc chuyển từ xem xét hình trong tổng thể sang xem hình như tập hợp điểm là một sự thay đổi quan niệm không dễ đến. Để giảm bớt khó khăn cho trong bước chuyển này, Lê Thị Hoài Châu, 2004 đã có nhận xét:

“Khó khăn ấy có thể được giảm bớt nếu trước khi bước vào cấp độ sau của tiến trình dạy học phép biến hình học sinh đã tiếp xúc với hình học giải tích. Việc hình học giải tích đặt tương ứng mỗi điểm của mặt phẳng (không gian) với một bộ hai (ba) số thực và đặt tương ứng mỗi đường, mỗi mặt với một tập hợp điểm mà các bộ số tương ứng với nó thỏa mãn một phương trình cụ thể sẽ dẫn người ta chuyển một cách tự nhiên sang tư tưởng “điểm hóa” các hình.”

Như vậy, đúng với nhận định trên, chương trình giáo khoa phân ban 2006 đã sử dụng kết hợp khái niệm vectơ và biểu thức tọa độ nhằm làm giảm bớt khó khăn cho học sinh khi chuyển đổi việc nghiên cứu phép biến hình từ cấp độ 1 lên cấp độ 2.

2.2. “Phép biến hình” trong sách giáo khoa THCS

Trong chương trình THCS, chúng tôi xác định nghiên cứu chi tiết khái niệm trong chủ đề “phép biến hình”, do đó chúng tôi chỉ giới hạn phân tích chủ đề này trong SGK Toán 8, tập

một, Phan Đức Chính (Tổng chủ biên). Trong SGK này, đối xứng trục, đối xứng tâm được trình bày giúp học sinh có khái niệm ban đầu về “phép biến hình”.

2.2.1. Đối xứng trục, đối xứng tâm trong sách giáo khoa THCS

“Phép biến hình” ở trung học cơ sở được giảng dạy bắt đầu từ chương trình lớp 8, với sự xuất hiện của bài dạy “Đối xứng trục” và “Đối xứng tâm”. Bài dạy “Hai nội dung trên được trình bày trong chương I, SGK lớp 8 xen kẽ với các bài dạy về hình, được phân phối như sau.

1. Tứ giác; 2. Hình thang; 3. Hình thang cân; 4. Đường trung bình của tam giác, của hình thang; 5. Dụng cụ hình bằng thước và compa. Dụng cụ hình thang; 6. Đối xứng trục; 7. Hình bình hành; 8. Đối xứng tâm; 9. Hình chữ nhật; 10. Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước; 11. Hình thoi; 12. Hình vuông.

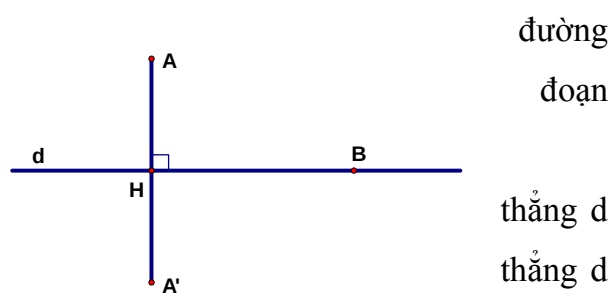
Điều này cho thấy nội dung “Đối xứng trục” và “Đối xứng tâm” gắn kết chặt chẽ với các hình hình học.

2.2.1.1. Đối xứng trục

a. Hai điểm đối xứng qua một đường thẳng

Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn nối hai điểm đó.

Quy ước: Nếu điểm B nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với B qua đường thẳng d cũng là điểm B .



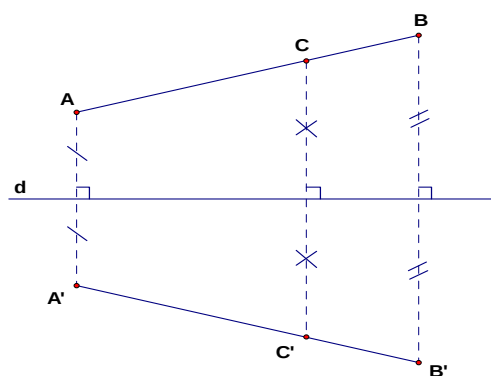
b. Hai hình đối xứng qua một đường thẳng

Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại.

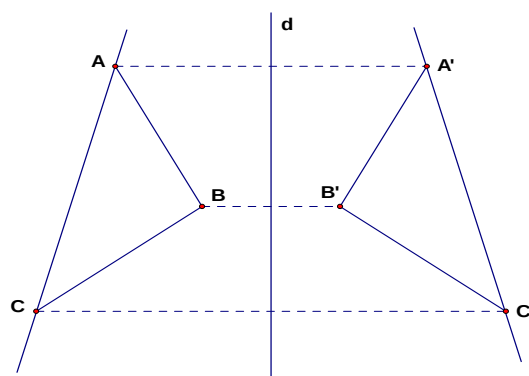
Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hai hình đó.

Ở đây, khái niệm *đối xứng trục* được trình bày thông qua khái niệm trung trực của một đoạn thẳng. Tuy nhiên, các từ “phép biến hình”, “biến ... thành ...”, “ảnh” không được sử dụng vì học sinh chưa được học khái niệm ảnh xạ.

Tính chất bảo toàn cũng được SGK trình bày thông qua một nhận xét mang tính thừa nhận, mà không chứng minh: “Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau”. SGK còn sử dụng 3 hình vẽ (hình 52, 53, 54 SGK tr85) để minh họa cho tính chất bảo toàn của phép đối xứng trục.



Hình 52



Hình 53

Những trình bày trên cho phép chúng tôi nhận xét: *Đối xứng trục* được giảng dạy trong chương trình lớp 8 chỉ mang tính giới thiệu, làm quen bước đầu. Tuy nhiên, các tính chất được giới thiệu đều được thừa nhận mà không chứng minh. Lý giải cho điều này, chúng ta dễ dàng nhận ra, việc chứng minh tính chất đối xứng trục trong chương trình lớp 8 bằng phương pháp hình học tổng hợp cần phải xét nhiều trường hợp do đó không phù hợp cho việc tiếp thu của học sinh.

c. Hình có trục đối xứng

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua đường thẳng d cũng thuộc hình H.

Trong trường hợp này ta nói rằng hình H có trục đối xứng.

Như vậy, chúng tôi nhận thấy SGK lớp 8 trình bày kiến thức về phép đối xứng trục một cách tương đối kỹ lưỡng ở cấp độ 1 và phù hợp cho học sinh. Hình có trục đối xứng được minh họa bằng hình tam giác cân (hình 55) và hình thang cân (hình 57) và có bài tập hoạt động xác định số trục đối xứng của hình vẽ cho trước.

Phần bài tập: gồm 4 bài tập và 4 bài luyện tập chia đều từ dạng bài vẽ hình, nhận xét tính chất đến vận dụng.

Chúng tôi nhận thấy *đối xứng trục* đã được trình bày chủ yếu dựa trên hình ảnh minh họa, việc trình bày phép đối xứng trục gắn chặt với trục đối xứng, hình tam giác cân và hình thang cân.

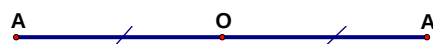
2.2.1.2. Đối xứng tâm

a. Hai điểm đối xứng qua một điểm

Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Quy ước: Điểm đối xứng với điểm O qua điểm O cũng là điểm O.

Ở đây, phép đối xứng trục được định nghĩa dựa vào trung điểm của đoạn thẳng.



O

b. Hai hình đối xứng qua một điểm

Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua điểm O và ngược lại.

Điểm O gọi là tâm đối xứng của hai hình đó.

Cũng như đối xứng trục, việc trình bày định nghĩa đối xứng tâm sử dụng hình ảnh minh họa để thể hiện nội dung của định nghĩa. SGK trình bày 3 hình vẽ để minh họa cho định nghĩa và từ đó thừa nhận tính chất của phép đối xứng trục: *“Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau”*.

c. Hình có tâm đối xứng

Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua điểm O cũng thuộc hình H.

Ta nói rằng hình H có tâm đối xứng.

Định lý: *“Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.”*

Ngoài hình vẽ minh họa cho tính chất, SGK còn trình bày bài tập hoạt động củng cố định lý và hệ thống 4 bài tập và 4 bài luyện tập đầy đủ các dạng cho học sinh.

Như vậy, đối xứng tâm cũng trình bày tính chất dựa trên hình vẽ minh họa cho học sinh. Khái niệm đối xứng tâm gắn liền với trung điểm và hình bình hành.

Sau khi đối xứng trục và đối xứng tâm theo mức độ của học sinh lớp 8, SGK trình bày khái niệm hình chữ nhật, hình thoi và hình vuông. Đây là những hình vừa có trục đối xứng, vừa có tâm đối xứng; tuy nhiên SGK chỉ đưa ra 1 bài tập duy nhất nhắc lại tính chất đối xứng trục và đối xứng tâm. Điều này cho thấy, chương trình lớp 8 không đặt nặng nội dung đối xứng trục và đối xứng tâm, mà chỉ mang tính giới thiệu làm quen.

Việc chứng minh các tính chất đối xứng trục và đối xứng tâm đối với học sinh lớp 8 là một việc làm tương đối khó khăn. Khó khăn này không xuất phát từ lời giải của chứng minh mà khó khăn ở chỗ học sinh không có công cụ để chứng minh các tính chất ở dạng tổng quát hóa thì phải xét nhiều trường hợp vị trí của hình.

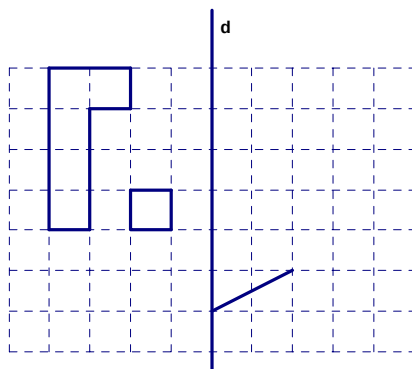
2.2.2. Các tổ chức toán học

Phân tích hệ thống ví dụ, bài tập trong Hình học 8, chúng tôi nhận thấy có các kiểu nhiệm vụ sau:

Kiểu nhiệm vụ T1: Xác định ảnh của hình H qua đối xứng trục, đối xứng tâm

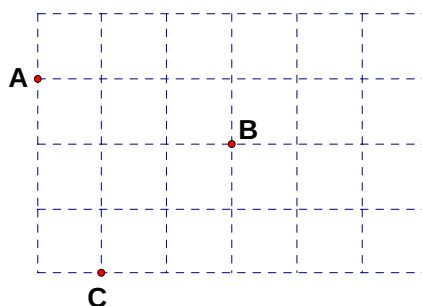
Bài 35 [Hình học 8, tr87]

Vẽ hình đối xứng với hình đã cho qua trục d .



Bài 50 [Hình học 8, tr95]

Vẽ điểm A' đối xứng với A qua B , vẽ điểm C' đối xứng với C qua B



Kĩ thuật τ_1 : Chọn các điểm đặc biệt $A, B, C, \dots$ trên hình H (thường là các đỉnh, đầu mút của hình)

- Xác định ảnh $A', B', C', \dots$ của các điểm trên.
- H' là ảnh của H qua PBH, với H' là hình tạo bởi các điểm ảnh và H' có hình dạng giống H .

Công nghệ θ_1 : định nghĩa PBH, định nghĩa ảnh của hình qua một PBH, tính chất bảo toàn hình ban đầu.

Các bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ T1 trong chương trình THCS đều gắn liền với các hình hình học đơn giản. Do đó, khi tìm ảnh của những hình được cho, học sinh chỉ có nhiệm vụ lấy ảnh của một vài điểm đặc biệt trên hình sau đó nối các điểm vừa vẽ bằng những nét thẳng. Điều này cho thấy hình trong chương trình THCS được xem xét là một tổng thể, quan niệm hình là tập hợp điểm chưa được hình thành. Do đó, chủ đề “biến hình” được giới thiệu trong chương trình THCS chỉ dừng lại ở cấp độ 1.

Kiểu nhiệm vụ T2: Tìm tính chất đối xứng trục, đối xứng tâm trên hình H cho trước

Bài 37 [Hình học 8, tr87] Tìm các hình có trục đối xứng trên hình 59 gồm hình thoi, hình

trái tim, lá bài bích, lá bài chuồn, ...

Bài 56 [Hình học 8, tr96] Trong các hình sau, hình nào có tâm đối xứng?

- a) Đoạn thẳng AB
- b) Tam giác đều ABC
- c) Biển cấm đi ngược chiều
- d) Biển chỉ hướng đi vòng tránh chướng ngại vật

Các bài tập dạng trên đều có hình vẽ minh họa kèm theo để hs nhận biết trên hình.

Hình H ở đây chỉ gồm đường thẳng, tam giác, đường tròn, tứ giác, ngũ giác, các chữ cái trong bảng chữ cái ABC,... Các kiểu nhiệm vụ này bao gồm:

- Xác định trục đối xứng của các hình cho sẵn (hình thang cân, lục giác đều, ngôi sao, ...)
- Xác định tâm đối xứng của các hình cho sẵn (hình các chữ cái, bức tranh, hai đoạn thẳng song song, hai đường tròn có bán kính bằng nhau, ...)
- So sánh độ dài, số đo góc qua trục đối xứng, tâm đối xứng đã được chỉ ra.

Kiểu nhiệm vụ T3: Dựng hình thỏa tính chất đối xứng trục, đối xứng tâm

Đặc trưng của kiểu nhiệm vụ này: hình cần dựng là điểm, đường thẳng, đường tròn, tam giác (cân, vuông cân, đều), tứ giác (hình chữ nhật, hình bình hành, hình vuông), hoặc có thể là những điểm thỏa điều kiện nào đó.

Kĩ thuật τ_3 : Việc dựng hình (H) đưa về dựng điểm $M \in H$ thỏa những tính chất nào đó.

+ Xác định $M = f(N)$ với điểm N thuộc một đường l_1 nào đó đã cho trong giả thiết.

Suy ra M thuộc đường $l'_1 = f(l_1)$

+ Vẽ đường l_1 .

+ Mặt khác M thuộc đường l_2 (giả thiết). Từ đó suy ra $M = l_1 \cap l_2$

Công nghệ θ_3 : Định nghĩa ảnh của một hình qua PBH. Tính chất bảo toàn hình dạng của phép dời hình.

Kiểu nhiệm vụ T3 là kiểu nhiệm vụ ở cấp độ ứng dụng tính chất đối xứng trục, đối xứng tâm để giải toán. Do đó, bài tập được cho trong Hình học 8 được cho dưới dạng dẫn dắt để học sinh có thể thực hiện được bước nhảy thông tin khi áp dụng tính chất đối xứng trục, đối xứng tâm trong việc giải toán.

Bài 39 [Hình học 8, 88]

- a) Cho hai điểm A, B thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d (h.60). Gọi C là điểm đối xứng với A qua d. Gọi D là giao điểm của đường thẳng d và đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm bất kì của đường thẳng d (E khác D). Chứng minh rằng $AD + DB < AE + EB$.



Hình 60

- b) Bạn Tú đang ở vị trí A, cần đến bờ sông d lấy nước rồi đi đến vị trí B (h. 60). Con đường ngắn nhất mà bạn Tú nên đi là con đường nào?

2.2.3. Kết luận

Phép biến hình được giảng dạy trong chương trình THCS chưa được giới thiệu một cách tường minh. Ngôn từ “phép” chưa được sử dụng do học sinh chưa biết đến sự tương ứng 1 – 1 trong việc chuyển đổi hình. Đối xứng trục, đối xứng tâm được giới thiệu cho học sinh chỉ dừng lại ở cấp độ 1, và hoàn toàn gắn liền với mối liên hệ về hình dáng giữa hai hình hoặc giữa hai phần của một hình. “Phép biến hình” được trình bày trong chương trình THCS dù còn sơ sài nhưng đã truyền đạt được phần nào nội dung chính của phép biến hình thông qua tính chất các hình quen thuộc.

Trước khi học phép biến hình một cách tường minh ở cấp độ 2 trong chương trình THPT, học sinh đã có một khái niệm ban đầu về “phép biến hình”. Trong bước chuyển từ cấp độ 1 sang cấp độ 2 cần thiết phải có một bước đệm để làm giảm bớt khó khăn cho học sinh trong cách hiểu mới.

Chương trình phân ban 2006 – 2007 trình bày khái niệm vectơ và phương pháp tọa độ trong mặt phẳng trước khi trình bày khái niệm phép biến hình. Khái niệm vectơ và phương pháp tọa độ là hai khái niệm hoàn toàn mới so với THCS và chỉ được đưa vào chương trình THPT trong Hình học 10. Điều này dẫn chúng tôi đến câu hỏi nghi vấn:

“Khái niệm vectơ và phương pháp tọa độ trong mặt phẳng là bước đệm trong việc làm giảm bớt khó khăn cho học sinh trong việc chuyển đổi việc xem xét phép biến hình từ cấp độ 1 lên cấp độ 2?”

Câu hỏi trên sẽ được chúng tôi trả lời trong phần nghiên cứu phép biến hình ở THPT dưới đây.

2.3. Phép biến hình ở Trung học phổ thông

Mỗi tri thức trong hệ thống toán học đều chịu ảnh hưởng của trường sinh thái tri thức. Trong các quá trình thay đổi SGK, khái niệm phép biến hình cũng có sự thay đổi ít nhiều và phụ thuộc vào những khái niệm đã được giới thiệu trước đó. Trong chương trình phân ban mới 2006, khái niệm phép biến hình trước hết đã có sự thay đổi vị trí. Trong các chương trình giáo khoa cũ, khái niệm phép biến hình đã chịu ảnh hưởng của khái niệm vectơ trong việc trình bày lý thuyết và chứng minh tính chất. Điều này đã được nghiên cứu trong các bài nghiên cứu, luận văn trước đây. Do có sự thay đổi trong chương trình SGK hiện hành nên chúng tôi quan tâm đến ảnh hưởng của vectơ lên phép biến hình trong chương trình phân ban mới. Cụ thể, chúng tôi sẽ phân tích các tài liệu sau:

- + Hình học 11, Trần Văn Hạo (tổng chủ biên), 2007, NXBGD [V1]
- + Hình học 11 Nâng cao, Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên), 2006, NXBGD [V2]
- + Bài tập Hình học 11, Nguyễn Mộng Hy (chủ biên), 2006, NXBGD [E1]
- + Bài tập Hình học 11 Nâng cao, Văn Như Cương (chủ biên), 2006, NXBGD [E2]
- + SGK Hình học 11, Trần Văn Hạo (tổng chủ biên), 2006, NXBGD [P1]
- + SGK Hình học 11 Nâng cao, Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên), 2006, NXBGD [P2]

Phép biến hình ở THPT được chia làm 2 phần: phép biến hình trong mặt phẳng thuộc chương trình Hình học 11 và phép biến hình trong không gian thuộc chương trình Hình học 12 Nâng cao.

Đề cập đến phép biến hình trong không gian, SGK Hình học 12 Nâng cao, Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên), 2008, NXBGD có lưu ý như sau: “*SGK nêu lên nhưng không chứng minh các tính chất cơ bản của phép dời hình như: biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến mặt phẳng thành mặt phẳng, biến một góc thành góc có cùng số đo, ... vì chúng tương tự như các tính chất của phép dời hình trong mặt phẳng.*” Do đó, trong phạm vi luận văn này, chúng tôi chỉ giới hạn đề tài trong phạm vi nghiên cứu phép biến hình trong mặt phẳng thuộc hình học 11.

Theo chương trình mới, nội dung PBH được trình bày trong SGK lớp 11: gồm Hình học 11 và Hình học 11 Nâng cao. Chúng tôi phân tích song song hai bộ sách, nhưng trọng tâm phân tích Hình học 11. Tài liệu này được giảng dạy cho chương trình chuẩn và được viết theo dạng đơn giản, giảm tải cho học sinh nhưng vẫn bám sát tính chính xác của tri thức.

Nội dung các phép biến hình được trình bày gồm các mục:

CHƯƠNG I: PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

1. Phép biến hình (1T)
2. Phép tịnh tiến (1T)
3. Phép đối xứng trục (1T)
4. Phép đối xứng tâm (1T)
5. Phép quay (1T)
6. Khái niệm về phép dời hình và hai hình bằng nhau (1T)
7. Phép vị tự (2T)
8. Phép đồng dạng (1T)

Ôn tập Chương I (2T)

Mở đầu chương phép biến hình, SGK định nghĩa phép biến hình theo quan điểm ánh xạ: “Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.”

2.3.1. Phân tích lý thuyết các phép biến hình trên quan điểm vector

2.3.1. 1. Phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng cho vector $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$.

Như vậy, vector được sử dụng làm công cụ để định nghĩa phép tịnh tiến. Câu hỏi đặt ra cho chúng tôi là: *Liệu có thể định nghĩa phép tịnh tiến mà không sử dụng đến khái niệm vector không?*

Về mặt lịch sử, khái niệm vector và khái niệm phép biến hình có nguồn gốc hình thành và phát triển độc lập với nhau. Do đó, phép biến hình hoàn toàn có thể được trình bày độc lập mà không cần sử dụng khái niệm vector.

Phép tịnh tiến được trình bày qua *tích của hai phép đối xứng trục*, có trục song song:

Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 thuộc mặt phẳng. Giả sử f_1 là phép đối xứng qua trục d_1 , f_2 là phép đối xứng qua trục d_2 . Tích của f_1 và f_2 (theo thứ tự đó) là một phép biến hình h của mặt phẳng, gọi là một phép tịnh tiến.

Tính chất phép tịnh tiến:

Tính chất 1: Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Tính chất 2: Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Tất cả các tính chất trên đều được chứng minh bằng phương pháp vector. Hình học 11

nâng cao chứng minh tính chất 1 bằng phương pháp vector và thừa nhận tính chất 2, Hình học 10 thừa nhận tất cả mà không chứng minh.

Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$.

Biết tọa độ của $\vec{u} = (a; b)$. Giả sử điểm $M(x; y)$ biến thành điểm $M'(x'; y')$.

Khi đó ta có:
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Công thức trên gọi là biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = (a; b)$.

Rõ ràng việc định nghĩa phép tịnh tiến bằng tích của hai phép biến hình sẽ gây nhiều khó khăn cho học sinh khi tiếp thu tri thức. Như vậy, khái niệm vector giúp trình bày khái niệm phép tịnh tiến đơn giản, rõ ràng.

Nghiên cứu ảnh hưởng của khái niệm vector lên việc nghiên cứu phép biến hình giữa hai cấp độ 1, 2. Chúng tôi nhận thấy, khái niệm vector, kết hợp thêm biểu thức tọa độ sẽ giúp học sinh dễ dàng nắm bắt được quan điểm ánh xạ từ tập hợp điểm vào tập hợp điểm trong phép biến hình.

Ví dụ: Cho đường thẳng $(d_1): x + y - 1 = 0$, vector $\vec{u} = (3; -1)$. Tìm phương trình đường thẳng d_2 là ảnh của đường thẳng d_1 qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = (3; -1)$.

Giải

Do d_2 là ảnh của d_1 qua phép tịnh tiến nên $d_2 \parallel d_1$.

$\Rightarrow d_2$ có vector chỉ pháp tuyến $\vec{n_2} = \vec{n_1} = (1; 1)$

Lấy điểm $A(0; 1) \in d_1$. Gọi B là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$.

Dựa vào biểu thức tọa độ, ta xác định được $B(3; 0)$.

Do tính chất phép tịnh tiến, ta có $B(3; 0) \in d_2$.

Phương trình đường thẳng $(d_2): x + y - 3 = 0$.

Trong quá trình giải quyết bài toán, giáo viên có thể cho học sinh thấy rõ tính chất tập hợp điểm của hình bằng cách thay đổi các giá trị x rồi tính giá trị y tương ứng $\Rightarrow$ tọa độ điểm A thay đổi nhưng vẫn thỏa mãn tính chất điểm A thuộc đường thẳng (d_1) . Học sinh sẽ được củng cố cách hiểu đường thẳng (hình) là tập hợp của vô số điểm. Từ định nghĩa “vector là một đoạn thẳng có hướng”, mỗi vector được xác định bởi một điểm đầu và một điểm cuối, học sinh dễ dàng nhận ra sự tương ứng 1 – 1 giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Như vậy, khái niệm vectơ cùng với phương pháp tọa độ trong mặt phẳng giúp làm giảm khó khăn trong việc chuyển đổi quan niệm “hình” sang quan niệm “điểm”, đồng thời góp phần xây dựng hình ảnh về sự tương ứng 1 – 1 trong khái niệm phép biến hình. Nếu giáo viên có thể tích hợp ứng dụng công nghệ thông tin trong dạy học, ví dụ như sử dụng phần mềm Cabri có thể xây dựng hình ảnh đơn giản cho bài toán trên nhằm làm rõ tính chất phép biến hình ở cấp độ 2.

2.3.1.2. Phép đối xứng trục

Phép đối xứng trục được định nghĩa trên quan điểm ánh xạ: “... biến mỗi điểm M không thuộc d thành M' ...” Điểm khác biệt của sách giáo khoa 2006 là có sử dụng biểu thức tọa độ:

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục:

Cho hệ tọa độ Oxy sao cho trục Ox trùng với đường thẳng d . Với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y') = D_d(M)$ thì

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục Ox.

Cho hệ tọa độ Oxy sao cho trục Oy trùng với đường thẳng d . Với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y') = D_d(M)$ thì

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục Oy.

Thông qua hai biểu thức tọa độ trên, học sinh sẽ dễ dàng làm quen với việc xem xét phép biến hình theo phương pháp tọa độ vì việc lấy điểm đối xứng qua trục Ox, Oy là đơn giản, rõ ràng so với các trường hợp đối xứng trục khác.

Các tính chất phép đối xứng trục đều được thừa nhận mà không chứng minh. Tuy nhiên, hai loại SGK đều gợi ý chứng minh các tính chất của phép đối xứng trục bằng cách sử dụng phương pháp tọa độ với việc chọn trục đối xứng trùng với trục Ox hoặc Oy. Rõ ràng, hướng dẫn này nhằm mục đích cho học sinh có thói quen sử dụng phương pháp tọa độ để giải toán liên quan đến phép đối xứng trục.

Vectơ không xuất hiện trong việc trình bày khái niệm và tính chất phép đối xứng trục nhưng vectơ vẫn có thể được sử dụng làm công cụ để chứng minh tính chất.

Định lý: Phép đối xứng trục là một phép dời hình

Chứng minh

Giả sử M, N là hai điểm bất kì trong mặt phẳng và phép xứng trục $\mathcal{D}_d$ biến các điểm M, N lần lượt thành các M', N' . Khi đó các đoạn thẳng MM', NN' cùng vuông với trục d tại trung điểm H, K của chúng.

Ta có: $\overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{M'H}$

$$\overrightarrow{KN} = -\overrightarrow{KN'}$$

Mặt khác: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KN}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{MH}^2 + \overrightarrow{HK}^2 + \overrightarrow{KN}^2 + 2.\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{KN}$$

(do $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HK} = 0$ và $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{KN} = 0$)

Tương tự

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'}^2 &= \overrightarrow{M'H}^2 + \overrightarrow{HK}^2 + \overrightarrow{KN'}^2 + 2.\overrightarrow{M'H}.\overrightarrow{KN'} \\ &= (-\overrightarrow{MH})^2 + \overrightarrow{HK}^2 + (-\overrightarrow{KN})^2 + 2.(-\overrightarrow{MH}).(-\overrightarrow{KN}) \\ &= \overrightarrow{MN}^2\end{aligned}$$

Do đó: $|\overrightarrow{M'N'}| = |\overrightarrow{MN}|$ hay $M'N' = MN$

Vậy phép đối xứng trục là một phép dời hình.

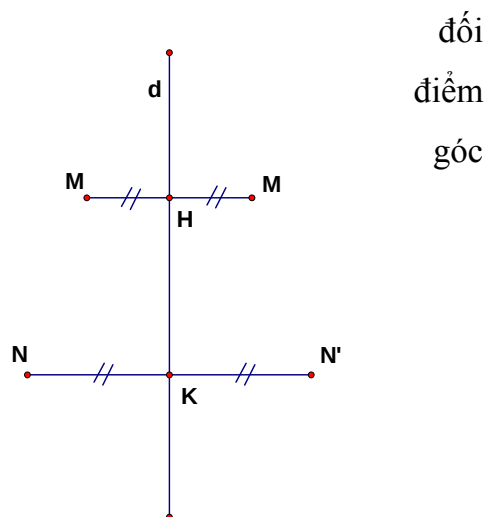
Các tác giả SGK gợi ý sử dụng phương pháp vector – tọa độ để giải toán mà không gợi ý sử dụng phương pháp vector vì những nguyên do sau:

- Chứng minh vấn đề trên bằng phương pháp vector – tọa độ nhanh, gọn hơn.
- Cũng cố được kiến thức vừa học về biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục
- Trong quá trình chứng minh bằng phương pháp vector – tọa độ, học sinh chuyển đổi quan niệm phép đối xứng theo cấp độ 1 lên cấp độ 2.

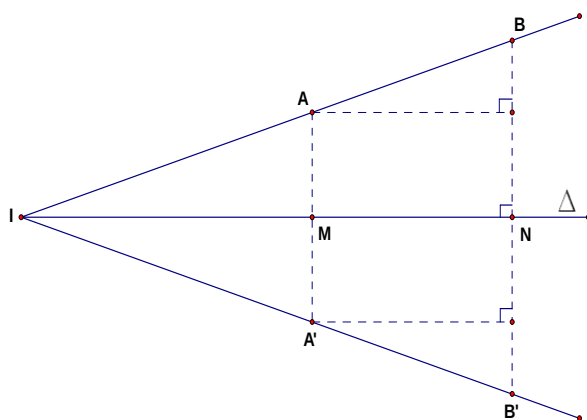
Khi giải bài toán hình học, học sinh lớp 11 sau khi học phép biến hình có thể sử dụng 3 chiến lược giải, chiến lược “vector”, chiến lược “vector – tọa độ” hay chiến lược “hình học tổng hợp”. Vấn đề chúng tôi muốn đặt ra là:

- *Khi yêu cầu học sinh chứng minh tính chất bảo toàn của phép đối xứng trục thì chiến lược nào sẽ chiếm ưu thế?*

Ví dụ: Trong mặt phẳng, cho đường thẳng Δ . Lấy hai điểm A, B bất kỳ. Gọi A', B' lần lượt là điểm đối xứng với A, B qua đường thẳng Δ . Chứng minh: $A'B' = AB$.



đối
điểm
góc



Chiến lược “tam giác bằng nhau”	Chiến lược “vector”	Chiến lược “vector – tọa độ”
Gọi $I = AB \cap \Delta$; $I' = A'B' \cap \Delta$. Ta cm được: $I \equiv I'$ Dễ dàng chứng minh được $\triangle IMA = \triangle IMA'$ $\Rightarrow IA = IA'$ Tương tự ta chứng minh được $\triangle INB = \triangle INB'$ $\Rightarrow IB = IB'$ Ta có: $IB = IB'$ $\Leftrightarrow IA + AB = IA' + A'B'$ $\Leftrightarrow AB = A'B'$ (đpcm) Đối với chiến lược này, chúng ta phải xét thêm các TH + A, B khác phía so với đường thẳng Δ. + A, B cùng thuộc Δ. + A thuộc Δ.	$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB'}$ $= \overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{NB'} + \overrightarrow{A'M})$ mà $\overrightarrow{MN} \perp (\overrightarrow{NB'} + \overrightarrow{A'M})$. Suy ra: $\overrightarrow{A'B'} = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2 + (\overrightarrow{NB'} + \overrightarrow{A'M})^2}$ (1) Tương tự: $\overrightarrow{AB} = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2 + (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AM})^2}$ (2) Ta có: $\overrightarrow{NB'} + \overrightarrow{A'M} = -(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AM})$ Suy ra: $(\overrightarrow{NB'} + \overrightarrow{A'M})^2 = [-(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AM})]^2$ (3) Từ (1), (2), (3) suy ra: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ Do đó: $A'B' = AB$	Đặt đường thẳng Δ vào hệ trục tọa độ Oxy, sao cho Δ thuộc Ox. Khi đó: $A(x_A; y_A) \Rightarrow A'(x_A; -y_A)$ $B(x_B; y_B) \Rightarrow B'(x_B; -y_B)$ Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ $\overrightarrow{A'B'} = (x_B - x_A; y_A - y_B)$ Suy ra: $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ $\overrightarrow{A'B'} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2}$ $\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ Do đó: $A'B' = AB$

So sánh 3 chiến lược trên, chúng tôi nhận thấy chiến lược “vector – tọa độ” là cho lời giải gọn nhất. SGK chỉ giới thiệu phương pháp chứng minh này trong phần các câu hỏi hoạt

động nên chiến lược này có thể chưa được hình thành. Học sinh đã làm quen với chiến lược “hình học tổng hợp” ở trường THCS. Chiến lược “hình học tổng hợp” là chiến lược cơ sở cho việc chứng minh định lý trên. Điều mà chúng tôi quan tâm, xem xét là ảnh hưởng của khái niệm vector lên việc chứng minh định lý và giải các bài toán về phép biến hình. Từ điều này, chúng tôi đặt ra câu hỏi:

- *Nếu yêu cầu học sinh giải bài toán trên theo nhiều cách thì các chiến lược được sử dụng là những chiến lược nào?*
- *Liệu chiến lược vector có được học sinh nghĩ đến không?*

2.3.1.3. Phép đối xứng tâm

Định nghĩa: Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm I.

Từ định nghĩa, suy ra: $M' = D_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ

Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm M(x; y), gọi M'(x'; y') = $D_O(M)$, khi đó

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ.

Tính chất 1: (bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì)

Nếu $D_I(M) = M'$ và $D_I(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$, từ đó suy ra $M'N' = MN$.

Chứng minh:

Giả sử $D_I(M) = M'$ và $D_I(N) = N'$.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{IN'} = -\overrightarrow{IN}$. Suy ra

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{IN'} - \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IN} - (-\overrightarrow{IM}) = -(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}) = -\overrightarrow{MN}$$

Do đó: $M'N' = MN$.

Như vậy, tính chất phép đối xứng tâm được trình bày ngắn gọn, rõ ràng khi sử dụng khái niệm vector. Ngoài phần lý thuyết của SGK, SBT, chúng tôi không tìm thấy bất kỳ bài toán nào có sử dụng phương pháp vector.

2.3.1.4. Phép quay

Định nghĩa: Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α .

Định nghĩa phép quay sử dụng góc định hướng:

Trong mặt phẳng P đã được định hướng, cho một điểm O cố định và một góc định hướng α sai khác $k2\pi$. Một phép quay tâm O với góc quay α là một phép biến hình biến điểm O thành chính nó và biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $OM = OM'$ và $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$.

Định nghĩa phép quay trong SGK phổ thông sử dụng góc lượng giác mà không sử dụng góc định hướng. Lý giải cho điều này, chúng tôi nhận thấy Lượng giác đã được giới thiệu ở cuối chương trình Đại số 10 và tiếp tục được giảng dạy vào đầu chương trình Đại số và Giải tích 11. Về bản chất thì góc lượng giác và góc định hướng là gần như nhau, tuy nhiên góc định hướng phải sử dụng tính chất vector. Khái niệm phép quay trong SGK không sử dụng vector nên các tính chất của phép quay và bài tập về phép quay cũng sẽ ít bị ảnh hưởng bởi công cụ vector.

Tính chất 1: Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Tính chất 2: Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Đối với phép quay, chúng tôi không tìm được bất kỳ phần lý thuyết nào có liên quan hay sử dụng công cụ vector. Như vậy, khái niệm vector không ảnh hưởng lên việc trình bày khái niệm phép quay. Điều này dẫn chúng tôi đến việc đặt ra nghi vấn:

Phải chăng phần bài tập của phép quay cũng hoàn toàn không sử dụng đến vector?

Để trả lời cho câu hỏi này, chúng tôi nhận thấy sách hình học 11, Trần Văn Hạo (tổng chủ biên) có bài tập 2 trang 19:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(2; 0)$ và đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$ Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O góc 90° .

Hướng dẫn giải bài tập của SGK Hình học 11, Trần Văn Hạo (tổng chủ biên), NXBGD, 2006 có trình bày:

Gọi B là ảnh của A . Khi đó $B = (0; 2)$. Hai điểm A và $B(0; 2)$ thuộc d . Ảnh của B qua phép quay tâm O góc 90° là $A'(-2; 0)$. Do đó ảnh của d qua phép quay tâm O góc 90° là đường thẳng BA' có phương trình $x - y + 2 = 0$.

Và bài tập 1 trang 23:

Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(-3; 2)$, $B(-4; 5)$ và $C(-1; 3)$.

a) Chứng minh rằng các điểm $A'(2; 3)$, $B'(5; 4)$ và $C'(3; 1)$ theo thứ tự là ảnh của A , B và C

qua phép quay tâm O góc -90^0 .

b) Gọi tam giác $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc -90^0 và phép đối xứng trục Ox. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác $A_1B_1C_1$.

Như vậy, SGK hoàn toàn không đề cập đến việc sử dụng công cụ vector để giải quyết bài toán phép quay.

Tương tự như SBT hình học 10, Nguyễn Mộng Hy (chủ biên), NXBGD, 2006 có hướng dẫn trong ví dụ 2 trang 23 như sau:

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(3; 4). Hãy tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90^0 .

Giải

Gọi các điểm B(3; 0), C(0, 4) lần lượt là

chiếu vuông góc của A lên các trục Ox,

Phép quay tâm O góc 90^0 biến hình chữ

OBAC thành hình chữ nhật OB'A'C'. Dễ

thấy B' = (0; 3), C'(-4; 0). Từ đó suy ra A'(-4;

3). Điều này cho thấy, các tác giả sách giáo

không quan tâm đến việc sử dụng vector làm công cụ giải toán phép quay. Sử dụng phương

pháp giải dựa vào hình vẽ như trên sẽ không thể áp dụng cho trường hợp tổng quát với góc

quay khác 90^0 .

Để giải quyết bài toán trên, chúng ta có thể sử dụng phương pháp vector – tọa độ như sau:

Đặt A'(a, b) là điểm cần tìm.

Do $A' = Q_O^{90^0}(A)$ nên $OA' \perp OA \Rightarrow \overrightarrow{OA'} \perp \overrightarrow{OA}$.

Suy ra: $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow 3a + 4b = 0$ (1)

Mặt khác, ta có: $OA' = OA \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$

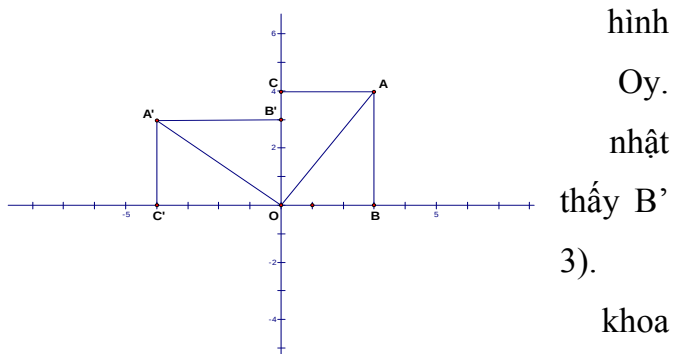
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25 \quad (2)$$

Giải phương trình (1), (2) ta có: A'(-4; 3) hoặc A'(4; -3).

Do phép quay góc 90^0 biến điểm A thuộc góc phần tư thứ I thành điểm A' thuộc góc phần tư thứ II nên ta nhận A'(-4; 3).

Sử dụng công cụ vector, cụ thể là tích vô hướng của hai vector, chúng tôi nhận thấy có thể áp dụng để giải các bài toán phép quay dạng này trong trường hợp góc quay khác 90^0 .

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(3; 4). Hãy tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A



qua phép quay tâm O góc 49^0 .

2.3.1.5. Phép vị tự

Định nghĩa: Cho điểm O và số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

Định nghĩa phép vị tự *không dùng vector*:

Giả sử O là một điểm thuộc mặt phẳng, k là một số dương cho trước. Ta xác định một ánh xạ f từ mặt phẳng đến chính nó như sau: Cho một điểm M thuộc mặt phẳng. Nếu M trùng O thì điểm tương ứng với M là chính nó, tức là ta có $fO = O$. Nếu $M \neq O$ thì fM là một điểm M' thuộc nửa đường thẳng OM sao cho $\frac{OM'}{OM} = k$. Có thể chứng minh dễ dàng rằng f là một phép biến hình của mặt phẳng. Phép biến hình này được gọi là phép vị tự thuận tâm O tỉ số k, hay gọn hơn: một phép vị tự. [SGK hình học 10, 1982]

So sánh hai định nghĩa, chúng tôi nhận thấy, vector đã giúp việc định nghĩa phép vị tự được rõ ràng, trong sáng hơn. Từ định nghĩa phép biến hình sử dụng vector, chúng tôi cũng dễ dàng nhận ra ảnh hưởng của vector lên các tính chất của phép vị tự.

Tính chất:

Tính chất 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k| \cdot MN$.

Chứng minh:

Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k. Theo định nghĩa của phép vị tự ta có:

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM} \text{ và } \overrightarrow{ON'} = k \cdot \overrightarrow{ON}. \text{ Do đó:}$$

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{ON} - k \cdot \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k \cdot \overrightarrow{MN}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } M'N' = |k| \cdot MN$$

Tính chất 2: Phép vị tự tỉ số k:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.
- Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k| \cdot R$

Tất cả các tính chất trên đều có thể sử dụng vector làm công cụ để chứng minh hoặc kết hợp

với phương pháp tọa độ trong mặt phẳng để chứng minh. Như vậy, khái niệm vectơ có ảnh hưởng khá lớn đến việc trình bày khái niệm và tính chất phép vị tự.

Từ phân tích chương trình trên, chúng tôi nhận thấy công cụ vectơ ngoài việc giúp trình bày lý thuyết thì vai trò của vectơ trong việc chứng minh định lý đã được chuyển sang cho phương pháp tọa độ. Rõ ràng điều này dẫn đến phỏng đoán: công cụ vectơ sẽ không được chú trọng trong việc giải các bài toán phép biến hình. Dù vậy, việc trình bày lý thuyết phép biến hình dựa trên khái niệm vectơ kết hợp với phương pháp tọa độ trong mặt phẳng đã giúp giảm bớt khó khăn cho học sinh trong việc tiếp cận phép biến hình ở cấp độ 2.

2.3.2. Các tổ chức toán học

Qua phân tích chương trình, chúng tôi nhận thấy có các kiểu nhiệm vụ liên quan đến khái niệm PBH như sau:

Kiểu nhiệm vụ T1: Xác định ảnh của hình H qua PBH.

Ví dụ 1 [E2, tr12]

Cho tứ giác ABCD. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Xác định ảnh của tam giác ABE qua phép đối xứng qua đường thẳng CD.

Giải

Ta xác định ảnh của các đỉnh của tam giác A, B, E qua phép đối xứng trục CD. Ảnh phải tìm là tam giác A'B'E'.

Kĩ thuật τ_1 : Chọn các điểm đặc biệt A, B, C, ... trên hình H (thường là các đỉnh, đầu mút của hình)

- Xác định ảnh A', B', C', ... của các điểm trên.
- H' là ảnh của H qua PBH, với H' là hình tạo bởi các điểm ảnh và H' có hình dạng giống H.

Công nghệ θ_1 : định nghĩa PBH, định nghĩa ảnh của hình qua một PBH, tính chất bảo toàn hình ban đầu.

Thống kê số lượng bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ T1

	Phép tịnh tiến	Phép đối xứng trục	Phép đối xứng tâm	Phép quay	Phép vị tự	Ôn tập chương	Tổng cộng
Sách V1	1	0	0	1	1	2	5
Sách V2	0	0	0	1	0	0	1
Sách E1	0	0	1	1	1	0	3

Sách E2	1	0	0	0	0	0	1
---------	---	---	---	---	---	---	---

Kiểu nhiệm vụ này đã xuất hiện trong chương trình hình học lớp 8. Trong chương trình Hình học THPT, phép biến hình được nghiên cứu ở cấp độ 2 dựa vào những kiến thức đã biết về khái niệm vector và phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Do đó, kiểu nhiệm vụ T1 trong chương trình Hình học 11 xuất hiện thêm các kiểu nhiệm vụ con:

Kiểu nhiệm vụ T1.1: Viết phương trình ảnh của một hình qua phép tịnh tiến

Kiểu nhiệm vụ T1.1.1: Tìm tọa độ ảnh của một điểm qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (a; b)$.

Kĩ thuật $\tau 1.1.1$: Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M .

$$\text{Sử dụng công thức: } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Công nghệ $\theta 1.1.1$: Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Kiểu nhiệm vụ T1.1.2: Viết phương trình ảnh của đường thẳng qua phép tịnh tiến

$\vec{v} = (a; b)$.

Kĩ thuật $\tau 1.1.2a$:

Tìm tọa độ hai điểm A, B tùy ý thuộc đường thẳng d .

Tìm tọa độ điểm A', B' là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến

Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm A' và B' ta được phương trình ảnh của đường thẳng d .

Công nghệ $\theta 1.1.2a$: Tính chất bảo toàn hình dạng của phép tịnh tiến.

Kĩ thuật $\tau 1.1.2b$:

Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x; y)$ qua phép tịnh tiến

$$\text{Từ công thức } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

Thay x, y vào phương trình đường thẳng d để suy ra phương trình chứa x', y' . Đó chính là phương trình ảnh của d .

Công nghệ $\theta 1.1.2b$: Định nghĩa ảnh của một hình qua PBH; biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Kiểu nhiệm vụ T1.1.3: Viết phương trình ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến

Kĩ thuật $\tau 1.1.3a$:

Xác định tâm I của đường tròn (C).

Tìm tọa độ I' là ảnh của I qua phép tịnh tiến.

Ảnh của (C) là đường tròn (C') có tâm I' , bán kính bằng bán kính đường tròn (C).

Công nghệ 01.1.3a : Tính chất bảo toàn hình dạng của phép đối xứng trục.

Kĩ thuật $\tau 1.1.3b$:

Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x; y)$ qua phép tịnh tiến

$$\text{Từ công thức } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

Thay x, y vào phương trình đường tròn (C) để suy ra phương trình chứa x', y' . Đó chính là phương trình ảnh của (C).

Công nghệ 01.1.3b : Định nghĩa ảnh của một hình qua PBH; biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Ở kiểu nhiệm vụ T1.1, tuy biểu thức tọa độ được trình bày nhưng tính chất vector ẩn chứa trong công thức. Học sinh vẫn có thể giải quyết kiểu nhiệm vụ T1.1 trong trường hợp quên công thức bằng cách sử dụng tính chất tọa độ của hai vector bằng nhau.

Kiểu nhiệm vụ T1.2: Viết phương trình ảnh của một hình qua phép đối xứng trục

Kiểu nhiệm vụ T1.2.1: Tìm tọa độ ảnh của một điểm qua phép đối xứng trục.

Kiểu nhiệm vụ T1.2.1a: Tìm tọa độ ảnh M' của điểm $M(x; y)$ qua phép đối xứng trục Ox và trục Oy .

Kĩ thuật $\tau 1.2.1a$: Gọi $M'(x'; y') = Đ_{Ox}(M)$ hay $M'(x'; y') = Đ_{Oy}(M)$

$$\text{Sử dụng công thức: } \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Công nghệ 01.2.1a : Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục Ox, Oy .

Kiểu nhiệm vụ T1.2.1b: Tìm tọa độ ảnh M' của điểm $M(x; y)$ qua phép đối xứng trục d có phương trình $ax + by + c = 0$.

Kĩ thuật $\tau 1.2.1b$:

Viết phương trình đường thẳng d' qua M và vuông góc với d .

Tìm tọa độ giao điểm H của d và d' .

$$\text{Dùng công thức } \begin{cases} x_M + x_{M'} = 2x_H \\ y_M + y_{M'} = 2y_H \end{cases} \text{ để tìm tọa độ điểm } M'.$$

Công nghệ 01.2.1b : Định nghĩa đối xứng của một điểm qua một đường thẳng – tọa độ trung điểm của đoạn thẳng.

Kiểu nhiệm vụ T1.2.2: Viết phương trình ảnh của đường thẳng qua phép đối xứng trục.

Kiểu nhiệm vụ T1.2.2a: Viết phương trình ảnh của đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$ qua phép đối

xứng trục Ox hoặc Oy.

Kĩ thuật $\tau 1.2.2aa$:

Tìm tọa độ hai điểm A, B tùy ý thuộc đường thẳng d.

Tìm tọa độ điểm A', B' là ảnh của A, B qua phép đối xứng trục Ox (Oy)

Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm A' và B' ta được phương trình ảnh của đường thẳng d.

Công nghệ $\theta 1.2.2aa$: Tính chất bảo toàn hình dạng của phép đối xứng trục.

Kĩ thuật $\tau 1.2.2ab$:

Gọi M'(x'; y') là ảnh của M(x; y) qua phép đối xứng trục Ox (Oy)

Từ công thức $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$ (nếu đối xứng qua Ox)

hoặc $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$ (nếu đối xứng qua Oy)

Thay x, y vào phương trình đường thẳng d để suy ra phương trình chứa x', y'. Đó chính là phương trình ảnh của d.

Công nghệ $\theta 1.2.2a$: Định nghĩa ảnh của một hình qua PBH; biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục.

Kiểu nhiệm T1.2.2b: Viết phương trình ảnh của đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$ qua phép đối xứng trục là đường thẳng (Δ): $a'x + b'y + c' = 0$ (d và Δ cắt nhau)

Kĩ thuật $\tau 1.2.2b$:

Tìm tọa độ giao điểm A của Δ và d.

Xác định tọa độ điểm B thuộc đường thẳng d. Tìm tọa độ ảnh B' của B qua phép đối xứng trục Δ .

Viết phương trình đường thẳng đi qua A và B' ta được đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Δ .

Công nghệ $\theta 1.2.2b$: Tính chất bảo toàn hình dạng của phép đối xứng trục.

Kiểu nhiệm vụ T1.2.3: Viết phương trình ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng trục

Kĩ thuật $\tau 1.2.3a$:

Xác định tâm I của đường tròn (C).

Tìm tọa độ I' là ảnh của I qua phép đối xứng trục Ox hoặc Oy.

Ảnh của (C) là đường tròn (C') có tâm I', bán kính bằng bán kính đường tròn (C).

Công nghệ 01.2.3a : Tính chất bảo toàn hình dạng của phép đối xứng trục.

Kĩ thuật 01.2.3b :

Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x; y)$ qua phép đối xứng trục Ox (Oy)

Từ công thức $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$ (nếu đối xứng qua Ox)

hoặc $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$ (nếu đối xứng qua Oy)

Thay x, y vào phương trình đường tròn (C) để suy ra phương trình chứa x', y' . Đó chính là phương trình ảnh của (C).

Công nghệ 01.2.2a : Định nghĩa ảnh của một hình qua PBH; biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục.

Như vậy, kiểu nhiệm vụ T1.2.1 hoàn toàn có thể được giải quyết dựa vào phương pháp giải tích.

Kiểu nhiệm vụ T1.3: Viết phương trình ảnh của một hình qua phép đối xứng tâm

Kiểu nhiệm vụ T1.3.1: Tìm tọa độ ảnh của một điểm qua phép đối xứng tâm

Kiểu nhiệm vụ T1.3.1a: Tìm tọa độ ảnh M' của điểm $M(x; y)$ qua phép đối xứng tâm O.

Kĩ thuật 01.3.1a : Gọi $M'(x'; y') = D_O(M)$

Sử dụng công thức: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Công nghệ 01.3.1a : Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm O.

Kiểu nhiệm vụ T1.3.1b: Tìm tọa độ ảnh M' của điểm $M(x; y)$ qua phép đối xứng trục tâm I.

Kĩ thuật 01.3.1b :

Ta có I là trung điểm của MM' , nên: $\begin{cases} x_M + x_{M'} = 2x_I \\ y_M + y_{M'} = 2y_I \end{cases}$

Suy ra tọa độ điểm M' : $\begin{cases} x_{M'} = 2x_I - x_M \\ y_{M'} = 2y_I - y_M \end{cases}$

Công nghệ 01.3.1b : Định nghĩa đối xứng của một điểm qua một đường thẳng – tọa độ trung điểm của đoạn thẳng.

Kiểu nhiệm vụ T1.3.2: Viết phương trình ảnh của đường thẳng qua phép đối xứng tâm.

Kiểu nhiệm vụ T1.3.2a: Viết phương trình ảnh của đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$ qua phép đối xứng tâm O.

Kĩ thuật $\tau 1.3.2aa$:

Tìm tọa độ điểm A tùy ý thuộc đường thẳng d.

Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép đối xứng tâm O

Viết phương trình đường thẳng d' qua điểm A' và song song với d ta được d' là phương trình ảnh của đường thẳng d.

Công nghệ $\theta 1.3.2aa$: Tính chất bảo toàn hình dạng của phép đối xứng tâm.

Kĩ thuật $\tau 1.3.2ab$:

Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x; y)$ qua phép đối xứng tâm O

$$\text{Từ công thức } \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$$

Thay x, y vào phương trình đường thẳng d để suy ra phương trình chứa x', y' . Đó chính là phương trình ảnh của d.

Công nghệ $\theta 1.3.2a$: Định nghĩa ảnh của một hình qua PBH; biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm.

Kiểu nhiệm vụ T1.3.2b: Viết phương trình ảnh của đường thẳng (d): $ax + by + c = 0$ qua phép đối xứng tâm I

Kĩ thuật $\tau 1.3.2b$:

Lấy điểm A tùy ý trên (d): $ax + by + c = 0$.

Xác định tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép đối xứng tâm I.

Viết phương trình đường thẳng d' đi qua A' và song song với d ta được đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm I.

Công nghệ $\theta 1.3.2b$: Tính chất bảo toàn hình dạng của phép đối xứng tâm.

Kiểu nhiệm vụ T1.3.3: Viết phương trình ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm

Kĩ thuật $\tau 1.3.3$:

Xác định tâm I của đường tròn (C).

Tìm tọa độ I' là ảnh của I qua phép đối xứng tâm.

Ảnh của (C) là đường tròn (C') có tâm I', bán kính bằng bán kính đường tròn (C).

Công nghệ $\theta 1.3.3$: Tính chất bảo toàn hình dạng của phép đối xứng tâm.

Kiểu nv T1.4: Viết phương trình ảnh của một hình qua phép quay

Kiểu nv T1.5: Viết phương trình ảnh của một hình qua phép vị tự

Thống kê số lượng bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ T1.1, T1.2, T1.3, T1.4, T1.5

	T5	T6	T7	T8	T9	Tổng cộng
Sách V1	3	3	3	2	2	13
Sách V2	0	1	1	0	0	2
Sách E1	5	3	2	2	2	14
Sách E2	1	1	0	0	0	2

Như vậy, khi nghiên cứu phép biến hình ở cấp độ 2 thì hầu hết các bài toán thuộc kiểu nhiệm vụ T1 đều được chuyển sang nghiên cứu trong tọa độ và sử dụng phương pháp tọa độ trong mặt phẳng để giải quyết. Điều đó, cho thấy sau khi hoàn thành vai trò “làm cầu nối để chuyển từ phương pháp tổng hợp sang pháp tọa độ” thì vector không được xem xét trở lại hay không được sử dụng như là một phương pháp giải độc lập nữa. Mà các tính chất của vector được xem xét trong hệ trục tọa độ, từ đó chúng ta có phương pháp “vector – tọa độ” khi giải toán hình học.

Thông qua việc giải quyết các bài toán về phép biến hình dựa vào phương pháp “vector – tọa độ” học sinh sẽ được củng cố quan niệm “điểm” về hình và mối tương quan 1 – 1 trong các phép biến hình.

Với hệ thống lý thuyết rõ ràng, hệ thống bài tập đi sâu vào phương pháp tọa độ như trên sẽ giúp học sinh hình thành được thói quen giải các bài toán phép biến hình theo phương pháp tọa độ hay vector – tọa độ. Đối với việc giảng dạy Toán, điều quan trọng nhất là phải tạo cho học sinh thói quen tìm kiếm lời giải tối ưu, nhằm phát triển tư duy Toán học. Do đó, vấn đề đặt ra ở đây là đứng trước một bài toán phát biểu bằng ngôn ngữ hình học, học sinh phải biết lựa chọn một phương pháp cho lời giải ngắn nhất. Từ đây, chúng tôi đặt ra câu hỏi:

Trước một bài toán về phép biến hình phát biểu bằng ngôn ngữ hình học, mà chiến lược vector cho lời giải ngắn gọn nhất thì học sinh có lựa chọn làm chiến lược cơ sở không?

Phân tích hai bộ sách chương trình cơ bản và nâng cao, chúng tôi nhận thấy các bài toán phép biến hình được cho trong SGK sử dụng phương pháp tọa độ để giải đều được cho theo ngôn ngữ tọa độ. Xem xét chương “Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng”, chúng tôi không tìm thấy bất kỳ bài toán nào, hay một sự hướng dẫn nào từ các SGK minh họa hay ví dụ về sự chuyển đổi bài toán từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ tọa độ.

Kiểu nhiệm vụ T2: Tìm tính chất liên quan đến PBH trên hình H cho trước

Hình H ở đây chỉ gồm đường thẳng, tam giác, đường tròn, tứ giác, ngũ giác, các chữ cái trong bảng chữ cái ABC. Các kiểu nhiệm vụ này bao gồm:

- Xác định phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng b ($a \parallel b$)

- Xác định trục đối xứng của các hình cho sẵn (hình thang cân, lục giác đều, ngôi sao, ...)
- Xác định tâm đối xứng của các hình cho sẵn (hình bát quái, bức tranh, hai đoạn thẳng song song, hai đường tròn có bán kính bằng nhau, ...)

Thống kê số lượng bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ T2

	Phép tịnh tiến	Phép đối xứng trục	Phép đối xứng tâm	Phép quay	Phép vị tự	Ôn tập chương	Tổng cộng
Sách V1	1	1	2	0	1	1	6
Sách V2	3	1	2	0	1	1	8
Sách E1	0	1	0	1	0	0	2
Sách E2	2	6	2	2	4	2	18

Trong E1 có nêu:

- Tìm trục đối xứng của một đa giác. Tính chất: “Nếu một đa giác có trục đối xứng d thì qua phép đối xứng trục d mỗi đỉnh của nó phải biến thành một đỉnh của đa giác, mỗi cạnh của nó phải biến thành một cạnh của đa giác bằng cạnh ấy.”
- Tìm tâm đối xứng của một hình. “Nếu hình đã cho là một đa giác thì sử dụng tính chất: Một đa giác có tâm đối xứng I thì qua phép đối xứng tâm I mỗi đỉnh của nó phải biến thành một đỉnh của đa giác, mỗi cạnh của nó phải biến thành một cạnh của đa giác song song và bằng cạnh ấy.”

Dù vậy, kiểu nhiệm vụ này lại không xuất hiện trong E1, mà chỉ có dạng bài tập chứng minh tính chất PBH trên hình H cho trước (hình chữ nhật, hình bình hành). Do đó, chúng tôi không tìm thấy kỹ thuật nào cho kiểu nhiệm vụ T2. Theo Vũ Khánh Ly nhận xét thì kỹ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ trên là trục giác.

Kiểu nhiệm vụ T2 có thể giải quyết dựa vào trục giác và tính chất của từng hình riêng biệt nên có thể giải quyết kiểu nhiệm vụ này mà không sử dụng đến khái niệm vector. Chính vì kiểu nhiệm vụ T2 có thể giải quyết dựa vào trục giác nên ta gộp kiểu nhiệm vụ này ở chương trình hình học 8.

Kiểu nhiệm vụ T2 hoàn toàn không sử dụng công cụ vector.

Kiểu nhiệm vụ T3: Dựng hình bằng PBH

Đặc trưng của kiểu nhiệm vụ này: hình cần dựng là đường thẳng, đường tròn, tam giác (cân, vuông cân, đều), tứ giác (hình chữ nhật, hình bình hành, hình vuông), hoặc có thể là những điểm thỏa điều kiện nào đó.

Ví dụ [trang 14, E2]

Cho hai đường tròn (C) , (C') có bán kính nhau và đường thẳng d . Hãy dựng hình ABCD có hai đỉnh A, C lần lượt nằm trên (C') còn hai đỉnh kia nằm trên d .

Giải

Phân tích

Giả sử hình vuông đã dựng được. Ta thấy hai đỉnh B và D của hình vuông ABCD luôn thuộc d nên hình vuông hoàn toàn xác định khi biết đỉnh C. Xem C là ảnh của A qua phép đối xứng qua trục d . Vì A thuộc đường tròn (C) nên C thuộc đường tròn (C_1) là ảnh của (C) qua phép đối xứng trục d . Mặt khác C luôn thuộc đường tròn (C') . Vậy C phải là giao của đường tròn (C_1) với đường tròn (C')

Từ đó suy ra cách dựng.

Cách dựng

- Dựng đường tròn (C_1) là ảnh của (C) qua phép đối xứng qua trục d .
- Từ C thuộc $(C_1) \cap (C')$ dựng điểm A đối xứng với C qua d . Gọi I là giao của AC với d .
- Lấy trên d hai điểm B và D sao cho I là trung điểm của BD và $IB = ID = IA$. Khi đó hình vuông ABCD là hình cần dựng.

Chứng minh

Dễ thấy ABCD là hình vuông có B và D thuộc d , (C) thuộc (C') . Ta chỉ cần chứng minh A thuộc (C) . Thật vậy vì A đối xứng với C qua d , mà C thuộc (C') nên A phải thuộc (C) là ảnh của (C') qua phép đối xứng qua trục d .

Biện luận

Bài toán có một, hai, hay vô nghiệm tùy theo số giao điểm của (C_1) và (C') .

Kĩ thuật τ_3 : Việc dựng hình (H) đưa về dựng điểm $M \in H$ thỏa những tính chất nào đó.

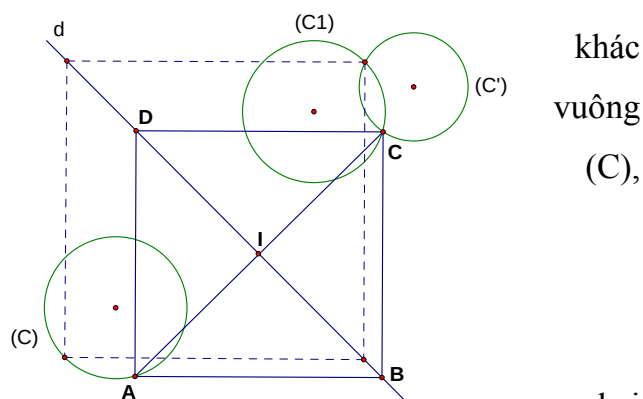
- + Xác định $M = f(N)$ với điểm N thuộc một đường l_1 nào đó đã cho trong giả thiết.

Suy ra M thuộc đường $l_1' = f(l_1)$

- + Vẽ đường l_1 .

- + Mặt khác M thuộc đường l_2 (giả thiết). Từ đó suy ra $M = l_1 \cap l_2$

Công nghệ θ_3 : Định nghĩa ảnh của một hình qua PBH. Tính chất bảo toàn hình dạng của



phép dời hình.

Kiểu nhiệm vụ T3 là kiểu nhiệm vụ ở cấp độ ứng dụng tính chất PBH để giải toán. Đây là kiểu nhiệm vụ khá khó đối với học sinh, do đó SGK cơ bản không có dạng bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ T3. Sách bài tập thì có dạng bài tập này nhưng với các trường hợp cụ thể, không phải biện luận như trên. Đặc biệt, các bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ T3 thường được xét trong hệ trục Oxy, và bài toán được giải quyết dựa vào phương pháp hình giải tích.

Thống kê số lượng bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ T3

	Phép tịnh tiến	Phép đối xứng trục	Phép đối xứng tâm	Phép quay	Phép vị tự	Ôn tập chương	Tổng cộng
Sách V1	0	0	0	0	0	0	0
Sách V2	0	1	1	1	1	3	7
Sách E1	0	2	1	0	2	2	7
Sách E2	1	0	0	2	1	1	5

Qua số liệu thống kê, chúng tôi nhận thấy chương trình SGK đã có sự giảm tải đáng kể cho học sinh trong phần phép biến hình. Kiểu nhiệm vụ T3 đòi hỏi kiến thức vững, khả năng vận dụng phân tích sáng tạo dữ liệu của bài toán, do đó để có thể giải quyết kiểu nhiệm vụ T3 là một việc khó khăn đối với học sinh THPT.

Trong chương trình THPT, kiểu nhiệm vụ T3 cũng có những kiểu nhiệm vụ con được xem xét trong hệ tọa độ.

Ví dụ: Bài toán thuộc kiểu nhiệm vụ T3 đã được cho trong chương trình Hình học 8 được cho dưới dạng mô tả: “hình ảnh một học sinh đi từ điểm A ra bờ sông mức nước sau đó đi đến điểm B sao cho đường đi là ngắn nhất”. Ở chương trình THPT, vẫn là bài toán trên nhưng lúc này đã được cho dưới dạng ngôn ngữ tọa độ: “Cho hai điểm A, B cố định trên mặt phẳng và một đường thẳng d (cho phương trình). Hãy xác định tọa độ điểm C sao cho $AC + BC$ là ngắn nhất.” Hoặc một số bài toán khác phức tạp hơn mà giải quyết bài toán bằng cách dựng hình hình học sẽ không cho thấy hết các trường hợp nghiệm, sẽ được giải quyết nhanh chóng khi chuyển sang ngôn ngữ tọa độ. Tuy nhiên, không có một hướng dẫn rõ ràng nào trong chương trình SGK về sự chuyển đổi ngôn ngữ này. Và một điều dễ nhận thấy trong phần bài tập phép biến hình, vai trò vector rất mờ nhạt. Nếu vector có xuất hiện thì đều được kết hợp với biểu thức tọa độ.

Kiểu nhiệm vụ T4: Tìm tập hợp điểm bằng PBH

Bài toán 2 [M2, tr28]

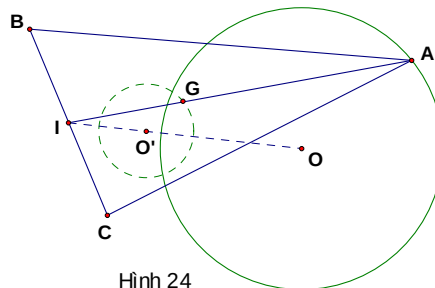
Tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định còn đỉnh A chạy trên một đường tròn (O; R) cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải (h.24)

Gọi I là trung điểm của BC thì I cố định.

Điểm G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IA}$$



Hình 24

Như vậy phép vị tự V tâm I tỉ số $\frac{1}{3}$ biến điểm A thành

điểm G. Từ đó suy ra khi A chạy trên đường tròn (O; R) thì quỹ tích G là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V, tức là đường tròn (O'; R') mà $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IO}$ và $R' = \frac{1}{3} R$.

Kĩ thuật τ_4 : Để tìm tập hợp điểm M:

- + Xác định $M = f(N)$ (f là PBH nào đó), trong đó tập hợp điểm N là một hình (H) (giả thiết đã cho hoặc ta dễ dàng xác định được)
- + Suy ra tập hợp điểm M là hình (H') là ảnh của hình (H) qua PBH f.
- + Vẽ hình (H')

Công nghệ θ_4 : Định nghĩa ảnh của một hình qua PBH. Tính chất bảo toàn hình dạng của phép dời hình.

Trong kĩ thuật của kiểu nhiệm vụ T4, xuất hiện bước xác định PBH biến M thành M'. Do đó, kiểu nhiệm vụ T2 là kiểu nhiệm vụ con có vai trò định hướng việc xác định tập hợp điểm M.

Đối với kiểu nhiệm vụ T4, công cụ vectơ có ảnh hưởng không nhỏ đến việc giải quyết bài toán có liên quan đến phép tịnh tiến và phép vị tự.

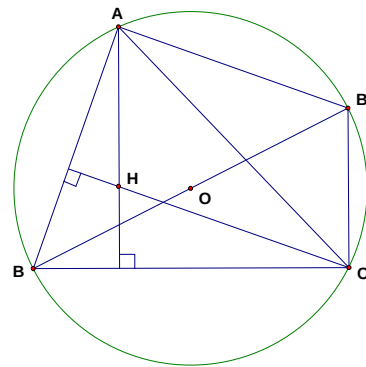
Trong chương trình hình học 8, học sinh nghiên cứu hình học theo “quan niệm hình” nên kiểu nhiệm vụ này hoàn toàn không có mặt trong chương trình. Công cụ vectơ giúp học sinh 11 tiếp cận khái niệm phép tịnh tiến và phép vị tự dễ dàng hơn. Tuy nhiên ở kiểu nhiệm vụ T4, vectơ cũng chỉ có một vai trò rất mờ nhạt, các bài toán có sử dụng đến yếu tố vectơ là rất hiếm. Bài toán điển hình nhất cho kiểu nhiệm vụ T4 được sách V2 giới thiệu trong phần ứng dụng của phép tịnh tiến.

Bài toán 1:

Cho hai điểm A, B, C cố định trên đường tròn (O; R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trực tâm tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Giải

Nếu BC là đường kính thì trực tâm H của tam giác chính là A. Vậy H nằm trên đường tròn cố định (O; R). Nếu BC không phải là đường kính, vẽ đường kính BB' của đường tròn.



ABC
của

Dễ thấy rằng nếu H là trực tâm của tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C'} \quad (\text{do AHCB' là hình bình hành}).$$

Như vậy, phép tịnh tiến theo vectơ cố định $\overrightarrow{B'C'}$ biến điểm A thành điểm H. Do đó, khi A thay đổi trên (O; R) thì trực tâm H luôn nằm trên đường tròn cố định là ảnh của đường tròn (O; R) qua phép tịnh tiến nói trên.

Thống kê số lượng bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ T3

	Phép tịnh tiến	Phép đối xứng trục	Phép đối xứng tâm	Phép quay	Phép vị tự	Ôn tập chương	Tổng cộng
Sách V1	0	0	0	1	1	1	3
Sách V2	1	1	1	1	2	3	9
Sách E1	1	0	0	1	0	3	5
Sách E2	3	2	3	5	2	2	17

Theo số liệu thống kê, chúng tôi nhận thấy SGK đưa ra rất ít bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ T3. Chỉ có sách V2 đưa duy nhất một bài tập có sử dụng phương pháp biến đổi vectơ.

[BT4/9,V2] Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

Các bài tập khác tuy có sử dụng vectơ nhưng chỉ dừng ở dạng nhận xét vectơ bằng nhau. Do đó, chương trình SGK gồm cả lý thuyết và bài tập không hình thành được ở học sinh cách giải quyết các bài tập phép biến hình dựa vào công cụ vectơ.

Phép biến hình được nghiên cứu ở cấp độ 2 được thể hiện rõ nhất trong kiểu nhiệm vụ 4. Với các bài tập quỹ tích sẽ giúp hình thành ở học sinh sự tương quan 1 – 1 giữa điểm tạo ảnh và điểm ảnh của phép biến hình. Các điểm tạo ảnh di chuyển, vết của chúng tạo nên hình từ đó cho thấy hình ảnh rõ nét về bản chất “hình là tập hợp điểm”. Tương ứng với điểm

tạo ảnh thì điểm ảnh của nó cũng tạo ra một hình.

2.3.3. Kết luận

Trong phân tích trên chúng tôi đã cố gắng làm rõ quan hệ của thể chế với đối tượng *phép biến hình*. Đặc biệt, phân tích của chúng tôi luôn đặt trọng tâm vào việc xem xét ảnh hưởng của quan điểm vectơ trong việc nghiên cứu đối tượng này ở trường phổ thông. Quan điểm vectơ được chúng tôi xem xét trên hai điểm :

- Thứ nhất, liên quan đến các khái niệm và tính chất của phép biến hình, sách giáo khoa đã sử dụng công cụ vectơ để trình bày. Từ đây, người ta đưa vào biểu thức tọa độ của đa số phép biến hình được xem xét. Điều này giúp cho việc chứng minh các tính chất của phép biến hình được đơn giản hơn nhiều so với việc sử dụng phương pháp tổng hợp. Hơn thế, đối chiếu với phân tích tri thức luận ở chương 1 thì điều này có thể làm giảm bớt khó khăn cho học sinh trong bước chuyển từ cấp độ 1 sang cấp độ 2, tức là từ *quan niệm hình (ánh xạ hình)* vào *quan niệm điểm (ánh xạ điểm)*.
- Thứ hai, công cụ vectơ thuần túy lại ít được khai thác, ít xuất hiện trong các kỹ thuật mà sách giáo khoa xây dựng để giải quyết những kiểu nhiệm vụ được xem xét.

Khái niệm vectơ ngoài vai trò giúp trình bày định nghĩa và chứng minh tính chất phép biến hình thì hầu như không có ảnh hưởng đến hệ thống bài tập của phép biến hình. Những ảnh hưởng của vectơ trong các kiểu nhiệm vụ của phép biến hình đều được xem xét trong hệ tọa độ. Điều này cho thấy phương pháp vectơ không được hình thành trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến phép biến hình.

Những kết quả tổng hợp từ các phân tích trên dẫn đến việc đặt ra một số câu hỏi liên quan đến mối quan hệ giữa khái niệm vectơ và khái niệm phép biến hình

Q3: Vectơ với vai trò là công cụ để giải toán, đã được vận dụng một cách hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến phép biến hình chưa?

Q4: Học sinh đã thật sự hiểu phép biến hình theo cấp độ 2 chưa? Còn những khó khăn gì học sinh chưa vượt qua được?

Khái niệm vectơ ngoài vai trò giúp trình bày định nghĩa và chứng minh tính chất phép biến hình thì hầu như không có ảnh hưởng đến hệ thống bài tập của phép biến hình. Những ảnh hưởng của vectơ trong các kiểu nhiệm vụ của phép biến hình đều được xem xét trong hệ tọa độ.

Từ những phân tích và những câu hỏi đặt ra ở trên, chúng tôi đặt ra giả thuyết nghiên cứu như sau.

Giả thuyết nghiên cứu:

- **H1:** Vector thuần túy với vai trò làm công cụ giải toán chưa được học sinh sử dụng hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến phép biến hình.
- **H2:** Với cách trình bày dựa vào biểu thức tọa độ và vector, phép biến hình đã được hình thành ở học sinh với nghĩa là một ánh xạ từ tập hợp điểm vào tập hợp điểm.

Để trả lời các câu hỏi nêu trên và kiểm chứng tính thích đáng của các giả thuyết H1, H2 đòi hỏi phải tiến hành thực nghiệm đối tượng học sinh đã học khái niệm phép biến hình “tương minh” được giảng dạy ở lớp 11. Các thực nghiệm đó sẽ được trình bày trong chương 3 tiếp theo của luận văn.

Chương 3

MỘT NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM

Chương này có mục đích tìm câu trả lời cho một số câu hỏi đã đặt ra ở cuối chương 2 và kiểm chứng tính thích đáng của các giả thuyết nghiên cứu. Chúng tôi nhắc lại những câu hỏi và giả thuyết đó như sau:

Q3: Vectơ với vai trò là công cụ để giải toán, đã được vận dụng một cách hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến phép biến hình chưa?

Q4: Học sinh đã thật sự hiểu phép biến hình theo cấp độ 2 chưa? Còn những khó khăn gì học sinh chưa vượt qua được?

Giả thuyết nghiên cứu:

- **H1:** Vectơ thuần túy với vai trò làm công cụ giải toán chưa được học sinh sử dụng hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến phép biến hình.
- **H2:** Với cách trình bày dựa vào biểu thức tọa độ và vectơ, phép biến hình đã được hình thành ở học sinh với nghĩa là một ánh xạ từ tập hợp điểm vào tập hợp điểm.

Thực nghiệm nhằm kiểm chứng tính xác đáng của giả thuyết H1, H2 và cho phép đánh giá khả năng lĩnh hội khái niệm phép biến hình của học sinh ở cấp độ 2.

3.1. Giới thiệu thực nghiệm:

3.1.1. Mục đích thực nghiệm

Như ở trên đã đề cập, thực nghiệm này có mục đích trả lời cho các câu hỏi Q3, Q4 và kiểm chứng giả thuyết H1, H2.

3.1.2. Hình thức thực nghiệm

Thực nghiệm được tiến hành với học sinh lớp 11 THPT sau khi học xong khái niệm phép biến hình ở lớp 11.

Tổng thời gian dành cho 3 bài toán trên là 90 phút.

Học sinh làm bài cá nhân trên tờ giấy có sẵn đề bài mà chúng tôi phát sẵn. Bài làm của các em sẽ được thu lại để phân tích.

Thực nghiệm được tiến hành với:

- 26 học sinh khối 11 thuộc lớp 11A3 trường THPT chuyên Lương Thế Vinh – Tp.Biên Hòa – Tỉnh Đồng Nai vào cuối học kỳ II.
- 40 học sinh thuộc lớp 11A1 trường THPT Ngô Quyền – Tp.Biên Hòa – Tỉnh Đồng

Nai vào cuối học kỳ II.

3.1.3. Câu hỏi thực nghiệm

Bài 1: Trong mặt phẳng, cho điểm I cố định. Lấy hai điểm A, B bất kỳ. Gọi A', B' lần lượt là điểm đối xứng với A, B qua tâm I. Chứng minh: $|\overrightarrow{B'A'}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Hãy giải bài toán trên theo 3 cách.

Bài 2: Trong mặt phẳng, cho đường thẳng Δ . Lấy hai điểm A, B bất kỳ. Gọi A', B' lần lượt là điểm đối xứng với A, B qua đường thẳng Δ . Chứng minh: $|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}|$

Hãy giải bài toán trên theo 3 cách.

Bài 3: Cho ΔABC có phân giác trong (AD): $x - y = 0$, đường cao (CH): $2x + y + 3 = 0$. Cạnh AC qua M(0; -1); $AB = 3AM$.

- Xác định tọa độ đỉnh A, đỉnh B.
- Có thể giải câu a chỉ bằng phương pháp vectơ - tọa độ được không? Hãy trình bày lời giải.

3.2. Phân tích apriori các bài toán

3.2.1. Phân tích apriori bài toán 1

3.2.1.1. Kiến thức liên quan

- Tam giác bằng nhau.
- Đối xứng tâm.
- Tính chất vectơ.
- Vectơ trong hệ trục tọa độ Oxy.
- Hệ thức lượng trong tam giác.

3.2.1.2. Biện didactic:

Biến 1 – Tính chất hai điểm A, B bất kỳ hay cố định

Nếu cho 2 điểm A, B cố định thì việc chứng minh bài toán bằng phương pháp hình tổng hợp sẽ dễ dàng, ngắn gọn hơn. Cách cho 2 điểm A, B đòi hỏi học sinh phải nhận xét vị trí A, B và tâm I trong từng trường hợp dẫn đến chiến lược “tam giác bằng nhau” sẽ trở nên dài dòng, phức tạp do phải xem xét nhiều trường hợp. Điều này cho phép chiến lược vectơ xảy ra.

Biến 2 – Hình thức đặt câu hỏi

Yêu cầu bài toán viết ở dạng hình tổng hợp $A'B' = AB$ hay ở dạng độ dài vectơ $|\overrightarrow{B'A'}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Cách đặt câu hỏi thứ nhất cho phép chiến lược “tam giác bằng nhau” dễ xuất hiện hơn do từ giả thuyết bài toán đến yêu cầu bài toán đều cho ở dạng hình học tổng hợp.

Cách đặt câu hỏi thứ hai cho phép chiến lược “vector” dễ xuất hiện hơn do trong yêu cầu bài toán có yếu tố vector làm gợi nhớ tính chất vector bằng nhau.

Biến 3 – Số lời giải

Nếu yêu cầu học sinh giải nhiều cách thì chúng tôi hy vọng trong số đó có chiến lược vector. Để giải quyết một bài toán hình học, học sinh lớp 11 có 3 phương pháp giải, phương pháp hình tổng hợp, phương pháp vector, phương pháp tọa độ. Do đó, chúng tôi lựa chọn phương án cho học sinh giải theo 3 cách.

3.2.1.3. Những chiến lược có thể

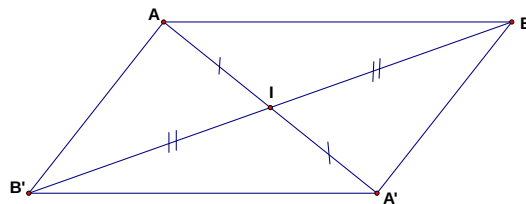
a) Chiến lược “tam giác bằng nhau” (CL1)

Cách 1: Xét $\triangle AIB$ và $\triangle A'IB'$, ta có:

$$AI = A'I' \text{ (tính chất đối xứng)}$$

$$\angle AIB = \angle A'IB' \text{ (góc đối đỉnh)}$$

$$BI = B'I'$$



$$\text{Suy ra: } \triangle AIB = \triangle A'IB' \Rightarrow AB = A'B' \Rightarrow |\overrightarrow{B'A'}| = |\overrightarrow{AB}| \text{ (đpcm)}$$

Cách 2:

Xét tứ giác $ABA'B'$ có 2 đường chéo AA' và BB' cắt nhau tại trung điểm mỗi đường
 $\Rightarrow ABA'B'$ là hình bình hành

$$\Rightarrow AB = A'B' \Rightarrow |\overrightarrow{B'A'}| = |\overrightarrow{AB}| \text{ (đpcm)}$$

b) Chiến lược “vector” (CL2)

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'I} + \overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{B'A'}| = |\overrightarrow{AB}| \text{ (đpcm)}$$

c) Chiến lược “vector - tọa độ” (CL3)

Cách 1: Đặt các điểm A, B, I vào hệ tọa độ Oxy sao cho điểm $I \equiv O$

Ta có: $I(0; 0), A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Khi đó: $A'(-x_A; -y_A), B'(-x_B; -y_B)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{B'A'} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow |\overrightarrow{B'A'}| = |\overrightarrow{AB}| \text{ (đpcm)}$$

Cách 2: Trong hệ tọa độ Oxy, ta lấy điểm $I(x_I; y_I), A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$

Gọi A' , B' lần lượt là điểm đối xứng của A , B qua tâm I .

Khi đó I là trung điểm AA' , BB' , ta có:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A \\ y_{A'} = 2y_I - y_A \end{cases} \Rightarrow A'(2x_I - x_A; 2y_I - y_A)$$

Tương tự I là trung điểm BB' , ta có: $B'(2x_I - x_B; 2y_I - y_B)$

Khi đó: $\overrightarrow{B'A'} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Suy ra: $\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow |\overrightarrow{B'A'}| = |\overrightarrow{AB}|$ (đpcm)

d) Chiến lược “hệ thức lượng trong tam giác” (CL4)

Áp dụng định lý côsin, ta có:

$$AB^2 = AI^2 + BI^2 - 2AI \cdot BI \cdot \cos \angle AIB$$

$$A'B'^2 = A'I^2 + B'I^2 - 2A'I \cdot B'I \cdot \cos \angle A'IB'$$

$$\text{Mà } AI = A'I; BI = B'I$$

Suy ra: $AB^2 = A'B'^2 \Rightarrow AB = A'B' \Rightarrow |\overrightarrow{B'A'}| = |\overrightarrow{AB}|$ (đpcm)

e) Chiến lược “phép biến hình” (CL5)

Cách 1:

Theo tính chất phép đối xứng tâm, ta có: $A' = \mathcal{D}_I(A)$; $B' = \mathcal{D}_I(B)$. Suy ra: $A'B' = AB$.

Cách 2: Theo tính chất phép quay, ta có:

$$\begin{cases} A' = Q_0^{180^\circ}(A) \\ B' = Q_0^{180^\circ}(B) \end{cases} \quad \text{Suy ra: } A'B' = AB.$$

3.2.2. Phân tích apriori bài toán 2

3.2.2.1. Kiến thức liên quan

- Tam giác bằng nhau.
- Đối xứng trục.
- Tính chất vectơ.
- Vectơ trong hệ trục tọa độ Oxy.
- Hệ thức lượng trong tam giác.

3.2.2.2. Biện didactic

Biện 1 – Tính chất hai điểm A, B bất kỳ hay cố định

Nếu cho 2 điểm A, B cố định thì việc chứng minh bài toán bằng phương pháp hình tổng hợp sẽ dễ dàng, ngắn gọn hơn. Cách cho 2 điểm A, B đòi hỏi học sinh phải nhận xét vị trí A, B so với đường thẳng Δ trong từng trường hợp dẫn đến chiến lược “tam giác bằng nhau” sẽ trở nên dài dòng, phức tạp do phải xem xét nhiều trường hợp. Điều này cho phép chiến lược vector – tọa độ xảy ra.

Biến 2 – Hình thức đặt câu hỏi

Yêu cầu bài toán viết ở dạng hình tổng hợp $A'B' = AB$ hay dạng độ dài vector $|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Cách đặt câu hỏi thứ nhất dẫn đến chiến lược “tam giác bằng nhau” để xuất hiện hơn khi yêu cầu bài toán đều cho ở dạng hình học tổng hợp.

Cách đặt câu hỏi thứ hai cho phép chiến lược “vector” để xuất hiện hơn do trong yêu cầu bài toán có yếu tố vector làm gợi nhớ tính chất vector bằng nhau.

Biến 3 – Số lời giải

Nếu yêu cầu học sinh giải nhiều cách thì chúng tôi hy vọng trong số đó có chiến lược vector. Để giải quyết bài toán hình học, học sinh lớp 11 có 3 phương pháp giải do đó chúng tôi lựa chọn số lời giải cho bài toán là 3.

3.2.2.3. Những chiến lược có thể

a) Chiến lược “tam giác bằng nhau” (CL1)

Việc chứng minh theo chiến lược tam giác bằng nhau đòi hỏi chia nhiều trường hợp theo vị trí của A, B so với đường thẳng Δ . Chúng tôi chỉ trình bày điểm hình 1 trường hợp A, B cùng phía với Δ .

Cách 1: Gọi I là trung điểm AA'

J là trung điểm BB'

Dễ dàng chứng minh được $\triangle IJB = \triangle IJB'$

$$\Rightarrow IB = IB' \Rightarrow \angle BIJ = \angle B'IJ$$

$$\text{Mà } \angle BIJ + \angle AIB = \angle B'IJ + \angle A'IB' = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AIB = \angle A'IB'$$

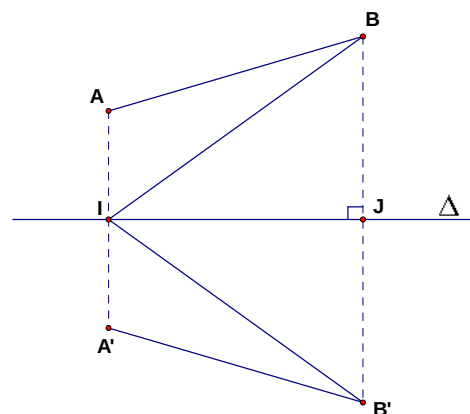
Suy ra, ta chứng minh được: $\triangle AIB = \triangle A'IB'$

$$AB = A'B'$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}| \quad (\text{đpcm})$$

Cách 2: Gọi $I = AB \cap \Delta$; $I' = A'B' \cap \Delta$. Ta cm được: $I \equiv I'$

$$\text{Dễ dàng chứng minh được } \triangle IMA = \triangle IMA' \Rightarrow IA = IA'$$



$\Rightarrow$

Tương tự ta chứng minh được $\triangle INB = \triangle INB' \Rightarrow IB = IB'$

Ta có: $IB = IB' \Leftrightarrow IA + AB = IA' + A'B'$

$$\Leftrightarrow AB = A'B'$$

Suy ra: $|\overline{A'B'}| = |\overline{AB}|$ (đpcm)

Cách 3:

Từ A kẻ $AC \parallel \Delta$ và cắt BB' tại C

A' kẻ $A'C' \parallel \Delta$ và cắt BB' tại C'

Suy ra: $AC \parallel A'C'$, mà $AA' \parallel CC'$

Khi đó: $ACC'A'$ là hình chữ nhật

M là trung điểm AA' và $MN \parallel AC \parallel A'C' \Rightarrow N$ là trung điểm CC'

$\Rightarrow CN = C'N \Rightarrow BC = B'C'$

$\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có: $AC = A'C'$; $BC = B'C'$

$$\angle ACB = \angle A'C'B' = 90^\circ$$

Suy ra: $\triangle ABC = \triangle A'B'C' \Rightarrow AB = A'B' \Rightarrow |\overline{A'B'}| = |\overline{AB}|$ (đpcm)

Cách 4:

Dễ thấy $ABB'A'$ có $AA' \parallel BB' \Rightarrow ABB'A'$ là hình thang.

Dễ dàng chứng minh được: $\triangle INB = \triangle INB' \Rightarrow \angle IBN = \angle IB'N$

$\Rightarrow ABB'A'$ là hình thang cân

$\Rightarrow AB = A'B' \Rightarrow |\overline{A'B'}| = |\overline{AB}|$

b) Chiến lược “vector” (CL2)

$$\overline{A'B'} = \overline{A'M} + \overline{MN} + \overline{NB'} = \overline{MN} + (\overline{NB'} + \overline{A'M})$$

mà $\overline{MN} \perp (\overline{NB'} + \overline{A'M})$

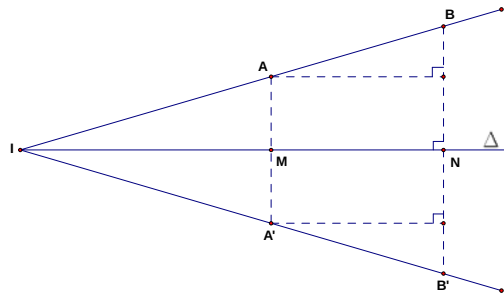
$$\Rightarrow |\overline{A'B'}| = \sqrt{\overline{MN}^2 + (\overline{NB'} + \overline{A'M})^2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } |\overline{AB}| = \sqrt{\overline{MN}^2 + (\overline{NB} + \overline{AM})^2} \quad (2)$$

Ta có: $\overline{NB'} + \overline{A'M} = -(\overline{NB} + \overline{AM})$

$$\Rightarrow (\overline{NB'} + \overline{A'M})^2 = [-(\overline{NB} + \overline{AM})]^2 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $|\overline{A'B'}| = |\overline{AB}|$



c) Chiến lược “vector - tọa độ” (CL3)

Đặt đường thẳng Δ vào hệ trục tọa độ Oxy, sao cho Δ thuộc Ox.

Khi đó: $A(x_A; y_A) \Rightarrow A'(x_A; -y_A)$

$B(x_B; y_B) \Rightarrow A'(x_B; -y_B)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

$\overrightarrow{A'B'} = (x_B - x_A; y_A - y_B)$

Suy ra: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$|\overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}|$

d) Chiến lược “phép biến hình” (CL4)

Theo tính chất phép đối xứng tâm, ta có:

$\begin{cases} A' = D_{\Delta}(A) \\ B' = D_{\Delta}(B) \end{cases} \quad \text{Suy ra: } A'B' = AB$

3.2.3. Phân tích apriori bài toán 3

2.3.1. Kiến thức liên quan

- Học sinh đã học xong toàn bộ phép biến hình trong chương trình lớp 11. Do đó có thể vận dụng kiến thức của phép biến hình để giải bài toán kết hợp với các kiến thức của chương trình cấp II và kiến thức lớp 10. Trong đó, các kiến thức liên quan đến bài này là:

- Phép đối xứng trục, phép vị tự.
- Tính chất đường phân giác.
- Tính chất vector.
- Vector trong hệ trục tọa độ Oxy.
- Phương trình đường thẳng trong hệ trục tọa độ Oxy.

2.3.2. Biện didactic:

Biện 1 – Tỷ số k giữa AB và AM ($AB = k \cdot AM$)

Tỷ số k sẽ ảnh hưởng đến chiến lược tìm điểm B.

Nếu $k = 2$, ta có $AB = 2 \cdot AM$ thì điểm M sẽ là trung điểm của đoạn AB. Khi đó, chiến lược giải bằng công thức đối xứng trục sẽ xuất hiện.

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A \\ y_B = 2y_M - y_A \end{cases}$$

Nếu $k \neq 2$ thì từ biểu thức $AB = k \cdot AM$ kết hợp với hình vẽ, học sinh sẽ nhận xét được mối quan hệ $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AM}$. Từ đó, chiến lược vector có khả năng xuất hiện.

Biến 2 – Hình thức đặt câu hỏi

Nếu câu hỏi được xây dựng theo kiểu bậc thang thì học sinh sẽ dễ dàng nhận ra tính chất đối xứng trục của đường phân giác. Ví dụ bài toán yêu cầu như sau:

- Xác định tọa độ điểm M' là ảnh của M qua phân giác AD.
- Xác định tọa độ đỉnh A, B.

Việc đặt câu hỏi tìm tọa độ đỉnh A, B sẽ cho phép kiểm chứng kiến thức của học sinh về phép đối xứng trục và phân giác trong tam giác.

Cách thức giới hạn kiến thức để giải quyết bài toán cũng cho phép chiến lược “vector – phương trình” hay chiến lược “vector – tọa độ”. Nếu giới hạn cách giải bài toán bằng phương pháp vector – tọa độ thì chiến lược vector chắc chắn sẽ xuất hiện. Vì trước khi được học về phương trình đường thẳng, học sinh đã biết các sử dụng chiến lược “vector – tọa độ” để giải toán.

Biến 3 – Dạng phương trình

Nếu phương trình cho ở dạng $y = f(x)$ thì khả năng học sinh đặt điểm ảo dựa vào phương trình sẽ cao. Từ đó chiến lược vector – tọa độ có nhiều khả năng xảy ra.

Ví dụ: Cho phương trình phân giác trong (AD): $y = x$, khi đó học sinh sẽ lấy điểm I(a; a) thuộc vào AD. Từ tính chất $MI \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{MI} \parallel \overrightarrow{n_{AD}} \Rightarrow$ tìm được tọa độ điểm I.

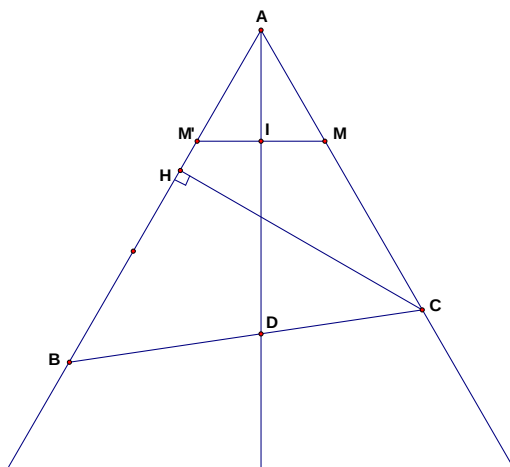
Tuy nhiên cách cho phương trình dạng $y = f(x)$ là dạng phương trình đường thẳng trong chương trình Đại số nên chúng tôi không cho ở dạng trên.

Cách cho phương trình dạng $ax + by + c = 0$ là cách cho phương trình đường thẳng trong hình học giải tích và chúng tôi muốn kiểm tra xem: Trong hình học giải tích học sinh có thấy được lợi thế của các tính chất vector hay không? Và với cách cho phương trình đường thẳng như trên học sinh sẽ ưu tiên chiến lược nào?

2.3.3. Những chiến lược có thể:

Chiến lược “vector – phương trình” (CL1)

Gọi M' là ảnh của M qua trục đối xứng AD.



Ta có:

$$MM' \perp AD \Rightarrow \text{vtcp } \overrightarrow{u_{MM'}} = \overrightarrow{n_{AD}} = (1; -1)$$

Suy ra đường thẳng MM' có vtpt $\overrightarrow{n_{MM'}} = (1; 1)$

Phương trình đường thẳng MM':

$$(x - 0) + (y + 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$$

Gọi I là giao điểm của MM' và AD.

Tọa độ điểm I thỏa hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Tọa độ M' thỏa hệ:

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_I - x_M \\ y_{M'} = 2y_I - y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 0 = -1 \\ y_{M'} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow M'(-1; 0)$$

Do $M \in AC \Rightarrow M' \in AB$

Ta có: $AB \perp CH \Rightarrow \text{vtcp } \overrightarrow{u_{AB}} = \overrightarrow{n_{CH}} = (2; 1)$

Suy ra đường thẳng AB có vtpt $\overrightarrow{n_{AB}} = (1; -2)$

Phương trình đường thẳng AB:

$$(x + 1) - 2(y - 0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$$

Tọa độ điểm A thỏa hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A(1; 1)$$

Do AD là phân giác trong của góc A và $AB = 3AM$ nên ta có: $\begin{cases} AB = 3AM' \\ \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM'} \end{cases}$

Gọi $B(x_B; y_B)$ ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - 1; y_B - 1)$

$$\overrightarrow{AM'} = (-2; -1)$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 1 = 3(-2) \\ y_B - 1 = 3(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -5 \\ y_B = -2 \end{cases}$$

Suy ra: $B(-5; -2)$

Vậy tọa độ điểm $A(1; 1)$ và $B(-5; -2)$

Chiến lược “vector - tọa độ”

Gọi M' là ảnh của M qua trục đối xứng AD .

Gọi I là giao điểm của MM' và AD .

Lấy $I(a; a) \in (AD): x - y = 0$

Ta có: $MI \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{MI} // \overrightarrow{n_{AD}}$

$\overrightarrow{MI} = (a; a+1)$ và $\overrightarrow{n_{AD}} = (1; -1)$

Suy ra: $\frac{a}{1} = \frac{a+1}{-1} \Leftrightarrow -a = a+1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_{M'} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -1 \\ y_{M'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M'(-1; 0)$

Lấy điểm $A(b; b) \in (AD): x - y = 0$

Ta có: $\overrightarrow{AM'} = (-1-b; -b)$ và $\overrightarrow{n_{CH}} = (2; 1)$

Do $AM' \perp CH \Rightarrow \overrightarrow{AM'} // \overrightarrow{n_{CH}}$

Khi đó ta có: $\frac{-1-b}{2} = \frac{-b}{1} \Leftrightarrow b = 1$

Suy ra tọa độ điểm $A(1; 1)$

Do AD là phân giác trong của góc A và $AB = 3AM$ nên ta có: $\begin{cases} AB = 3AM' \\ \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM'} \end{cases}$

Gọi $B(x_B; y_B)$ ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - 1; y_B - 1)$

$\overrightarrow{AM'} = (-2; -1)$

Suy ra: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 1 = 3(-2) \\ y_B - 1 = 3(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -5 \\ y_B = -2 \end{cases}$

Suy ra: $B(-5; -2)$

Vậy tọa độ điểm $A(1; 1)$ và $B(-5; -2)$

3.3. Phân tích a-posteriori các bài toán

3.3.1. Phân tích a-posteriori bài toán 1

Sau khi phân tích toàn bộ bài giải của 26 học sinh lớp 11 – Lương Thế Vinh và 40 học sinh lớp 11 – Ngô Quyền. Chúng tổng hợp các kết quả trong bảng tổng kết sau:

3.3.1.1. Kết quả của học sinh lớp 11 – Lương Thế Vinh

Tổng số bài: 26 bài trong đó có 26 bài hợp lệ, 2 bài hoàn toàn không có lời giải.

Bảng thống kê kết quả các chiến lược giải:

Cách làm	Chiến lược 1	Chiến lược 2	Chiến lược 3	Chiến lược 4	Chiến lược 5	Chiến lược khác	Bỏ trống
Cách 1	20	3	1	0	0	0	2
Cách 2	9	13	0	2	0	0	2
Cách 3	9	6	2	0	0	1	8
Tổng cộng	38(57,5%)	22(33,3%)	3(4,5%)	2 (3%)	0	1 (1,5%)	12

3.3.1.2. Kết quả của học sinh lớp 11 – Ngô Quyền

Tổng số bài: 40 bài trong đó có 40 bài hợp lệ, không có bài nào bỏ trống hoàn toàn.

Bảng thống kê kết quả các chiến lược giải:

Cách làm	Chiến lược 1	Chiến lược 2	Chiến lược 3	Chiến lược 4	Chiến lược 5	Chiến lược khác	Bỏ trống
Cách 1	32	1	0	0	7	0	0
Cách 2	20	5	0	0	11	3	1
Cách 3	8	6	2	0	9	2	13
Tổng cộng	60(56,6%)	12(11,3%)	2(1,9%)	0	28(26,4%)	5(4,7%)	14

3.3.1.3. Phân tích kết quả thu được

Dựa vào số liệu thống kê thu được, chúng tôi nhận thấy chiến lược “tam giác bằng nhau” chiếm ưu thế. Mặc dù bài toán đã cho là một tính chất đặc trưng của phép đối xứng tâm và còn được trình bày theo ngôn ngữ vector nhưng chiến lược “vector” vẫn không thể xuất hiện nhiều. Điều này cho thấy học sinh chưa quan tâm đúng mức đến việc sử dụng vector với vai trò là công cụ để giải quyết các bài toán hình học $\Rightarrow$ hợp thức giả thuyết H1.

Các bài giải của học sinh đều phù hợp với phân tích apriori nên chúng tôi không trình bày lại những lời giải đó. Trong số những lời giải thu được, vẫn có những cách giải mà chúng tôi không biết phân chia vào nhóm chiến lược nào, hoặc chưa dự trù chiến lược đó. Tất cả các lời giải đó được xếp vào chiến lược khác (CL6).

Đối với học sinh Lương Thế Vinh

Phân tích các chiến lược giải của học sinh, chúng tôi nhận thấy có 1 chiến lược khác được học sinh sử dụng:

$$\text{Ta có: } AB = AI + IB \text{ hay } \frac{(AA' + BB')}{2}$$

$$\overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{B'I} + \overrightarrow{IA'} = \frac{\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{AA'}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B'A'}|$$

Nhận xét cách giải chúng tôi nhận thấy có vẻ như học sinh này muốn sử dụng chiến lược vector, tuy nhiên kiến thức về vector không đầy đủ nên đã trình bày lẫn lộn, không rõ ràng nên chúng tôi xếp vào loại chiến lược khác.

Đối với học sinh Ngô Quyền

Có 4 chiến lược giải khác với các chiến lược apriori, chiếm 3,8%. Sau đây là các lời giải của học sinh:

Lời giải 1: Dùng thước đo, ta thấy độ dài AB, A'B' bằng nhau $\Rightarrow |\overrightarrow{B'A'}| = |\overrightarrow{AB}|$

Đây là sai lầm cơ bản mà học sinh THCS thường gặp phải vì cách sử dụng thước thẳng, thước đo độ để xác định độ dài một đoạn, số đo các góc ở cấp Tiểu học.

Lời giải 2: BB' là trung trực của AA' $\Rightarrow AB = BA'$

AA' là trung trực của BB' $\Rightarrow A'B' = A'B$

Suy ra: $\begin{cases} AB = A'B' \\ AB \parallel A'B' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'} \Rightarrow |\overrightarrow{B'A'}| = |\overrightarrow{AB}|$

(vì $\begin{cases} D_1(A) = A' \\ D_1(B) = B' \end{cases} \Rightarrow D_1(AB) = A'B')$

Học sinh sai lầm ở chỗ sử dụng hình vẽ trong trường hợp $AA' \perp BB'$. Học sinh không biết cách xét các trường hợp khác nhau của vị trí các điểm A, B, I. Do đó đã lấy 1 trường hợp đặc biệt của bài toán để suy ra kết quả tổng quát.

Lời giải 3: $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BB'} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IA'}) \cdot (\overrightarrow{B'I} + \overrightarrow{IB})$

$$= \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{B'I} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA'} \cdot \overrightarrow{B'I} + \overrightarrow{IA'} \cdot \overrightarrow{IB}$$

$$= AI^2 \cdot B'I^2 \cdot \cos \angle AIB' + AI^2 \cdot IB^2 \cdot \cos \angle AIB + AI'^2 \cdot B'I^2 \cdot \cos \angle A'IB + IA'^2 \cdot IB^2 \cdot \cos \angle A'IB$$

Lời giải này có sử dụng tính chất của vector và có vẻ gần giống với chiến lược 4. Tuy nhiên, lời giải chưa hoàn toàn rõ ràng nên không biết xếp vào loại chiến lược nào.

3.3.2. Phân tích a-posteriori bài toán 2

Sau khi phân tích toàn bộ bài giải của 26 học sinh lớp 11 – Lương Thế Vinh và 40 học sinh lớp 11 – Ngô Quyền. Chúng tôi tổng hợp các kết quả trong bảng tổng kết sau:

3.3.2.1. Kết quả của học sinh lớp 11 – Lương Thế Vinh

Tổng số bài: 26 bài trong đó có 25 bài hợp lệ, 1 bài hoàn toàn không có lời giải.

Bảng thống kê kết quả các chiến lược giải:

Cách làm	Chiến lược 1	Chiến lược 2	Chiến lược 3	Chiến lược 4	Chiến lược 5	Bỏ trống
Cách 1	21	2	0	2	0	1
Cách 2	11	2	0	4	1	8
Cách 3	6	2	1	0	1	16
Tổng cộng	38(71,7%)	6(11,3%)	1(1,9%)	6(11,3%)	2(3,8%)	25

3.3.2.2. Kết quả của học sinh lớp 11 – Ngô Quyền

Tổng số bài: 40 bài trong đó có 38 bài hợp lệ, 2 bài hoàn toàn không có lời giải.

Bảng thống kê kết quả các chiến lược giải:

Cách làm	Chiến lược 1	Chiến lược 2	Chiến lược 3	Chiến lược 4	Chiến lược 5	Bỏ trống
Cách 1	16	1	0	20	1	2
Cách 2	29	0	0	7	1	3
Cách 3	12	4	0	7	1	16
Tổng cộng	57(57,6%)	5(5%)	0	34(34,3%)	3(3,0%)	21

3.3.2.3. Phân tích kết quả thu được

Qua số liệu thống kê, chúng tôi nhận thấy có một sự chênh lệch khá lớn trong việc sử dụng chiến lược “tam giác bằng nhau” trong bài toán 2. Bài toán 2 là một tính chất đặc trưng của phép đối xứng trục, SGK nâng cao và cơ bản đều hướng dẫn chứng minh tính chất này bằng phương pháp tọa độ. Tuy nhiên, chiến lược mà SGK gợi ý chứng minh đã không được học sinh thực hiện. Chiến lược vector vẫn được học sinh sử dụng nhưng đều không dẫn đến kết quả mong đợi. Các lời giải của học sinh về vector đa phần là do ảnh hưởng từ việc trình bày yêu cầu bài toán dưới dạng vector.

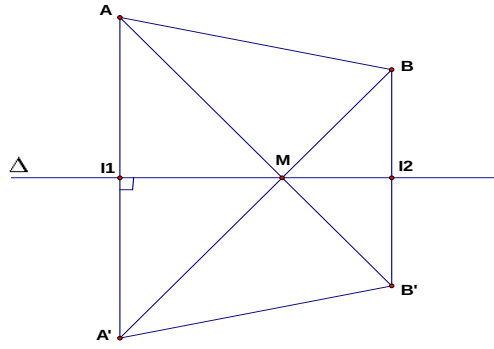
Từ số liệu thống kê trên, cho thấy học sinh chưa quan tâm đến việc sử dụng vector làm công cụ để giải quyết các bài toán liên quan đến phép biến hình => hợp thức giả thuyết H1

Về lời giải với chiến lược khác (CL5)

Đối với học sinh Lương Thế Vinh:

Tổng cộng số bài giải cả 3 cách theo CL5 là 2 chiếm 3,8%.

Lời giải 1: Nối A và B', đặt M là giao điểm của AB' và (Δ), I₁, I₂ là giao điểm của AA' và BB' với (Δ).



Do (Δ) là đường trung trực của AA' và BB' nên $MA = MA'$; $MB = MB'$

$\triangle AMA'$ và $\triangle BMB'$ là hai tam giác cân, do đó: $\angle AMI_1 = \angle A' MI_1$; $\angle B MI_2 = \angle B' MI_2$

Mà $\angle AMI_1 = \angle B' MI_2$ (đối đỉnh) nên:

$$\angle AMI_1 = \angle B MI_2 = \angle A' MI_1 = \angle B' MI_2$$

$$\Rightarrow 180^\circ - \angle AMI_1 - \angle B MI_2 = 180^\circ - \angle A' MI_1 - \angle B' MI_2$$

$$\Rightarrow \angle AMB = \angle A' MB' \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})^2 = AM^2 + MB^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} \\ &= AM^2 + MB^2 + 2 \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{MB}| \cos \angle AMB \\ &= A'M^2 + MB'^2 + 2 \cdot |\overrightarrow{A'M}| \cdot |\overrightarrow{MB'}| \cos \angle A' MB' \\ &= |\overrightarrow{A'B'}|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A'B'}|$$

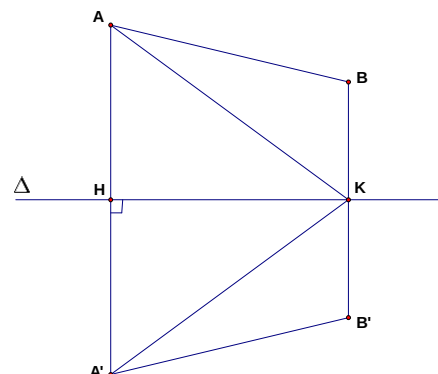
Đây là một chiến lược vector, tuy nhiên bài giải có một sai lầm là đã không chứng minh A' , M , B thẳng hàng. Việc sử dụng chiến lược vector của học sinh ở đây là không cần thiết vì nếu đã chứng minh được A' , M , B thì có thể sử dụng phương pháp chứng minh “tam giác bằng nhau” mà không cần sử dụng chiến lược vector. Việc đưa các giải này vào loại chiến lược khác vì lời giải này tuy có sử dụng chiến lược vector nhưng trong phân tích apriori đã bỏ sót.

Lời giải 2:

$$\left. \begin{array}{l} Ch_{(\Delta)} \overrightarrow{AB} = HK \\ Ch_{(\Delta)} \overrightarrow{A'B'} = HK \end{array} \right\} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A'B'}|$$

Đây là một sai lầm trong kiến thức về hình chiếu.

Đối với học sinh Ngô Quyên:



Tổng cộng có 3 bài giải theo CL5, chiếm 3,0%

Lời giải 1: Dùng thước đo: $AB = A'B' = 3,9 \text{ cm}$

Đây là một phương pháp được sử dụng đối với học sinh tiểu học khi so sánh độ dài hai đoạn thẳng. Chúng tôi khá bất ngờ khi lời giải này vẫn xuất hiện đối với học sinh THPT.

Lời giải 2:

Phản chứng: Giả sử $|\overline{A'B'}| \neq |\overline{AB}|$ hay $A'B' \neq AB$

$$\Leftrightarrow \triangle AIB \neq \triangle A'IB'$$

$$\Leftrightarrow IA \neq IA'$$

$$IB \neq IB'$$

$$\angle I_1 \neq \angle I_4 \Leftrightarrow \angle I_2 \neq \angle I_3 \Leftrightarrow \triangle IBB' \text{ không cân}$$

Suy ra vô lí.

$$\Rightarrow |\overline{A'B'}| = |\overline{AB}|$$

Đây là một sai lầm cơ bản về mặt toán học của học sinh. Hai tam giác khác nhau thì không nhất thiết cả ba cạnh tương ứng của hai tam giác đó phải khác nhau.

3.3.3. Phân tích a-posteriori bài toán 3

Sau khi phân tích toàn bộ bài giải của 26 học sinh lớp 11 – Lương Thế Vinh và 40 học sinh lớp 11 – Ngô Quyền. Chúng tổng hợp các kết quả trong bảng tổng kết sau:

3.3.3.1. Kết quả của học sinh lớp 11 – Lương Thế Vinh

Tổng số bài: 26 bài trong đó có 20 bài có lời giải, 6 bài không có lời giải.

Bảng thống kê kết quả các chiến lược giải:

	Chiến lược 1	Chiến lược 2	Chiến lược khác	Bỏ trống
Câu a	20	0	0	6
Câu b	0	0	0	0

3.3.3.2. Kết quả của học sinh lớp 11 – Ngô Quyền

Tổng số bài: 40 bài trong đó có 36 bài có lời giải, 4 bài không có lời giải.

Bảng thống kê kết quả các chiến lược giải:

	Chiến lược 1	Chiến lược 2	Chiến lược khác	Bỏ trống
Câu a	35	1	0	4

Câu b	0	0	0	0
-------	---	---	---	---

3.3.3.3 Phân tích

Dựa vào kết quả thu được, chúng tôi nhận thấy hầu hết học sinh đều sử dụng CL1, giải bài toán dựa vào phương pháp đại số hóa, tức là sử dụng giải phương trình giao điểm. Đây cũng là mục đích và nhiệm vụ của phương pháp tọa độ là đại số hóa hình học. Tuy nhiên, dựa vào phân tích apriori chúng tôi nhận thấy, mặc dù CL1 được SGK sử dụng thường xuyên, do đó trở thành chiến lược cơ sở của học sinh. Nhưng CL1 không phải chiến lược tối ưu để giải quyết dạng bài toán như trên, CL2 sử dụng tính chất vector kết hợp với hệ tọa độ cho lời giải ngắn gọn, rõ ràng hơn.

Để giải quyết bài toán thực nghiệm, ngoài việc học sinh phải biết sử dụng thành thạo phương pháp tọa độ trong mặt phẳng thì điều cần thiết đối là học sinh phải nhìn thấy tính chất của phép đối xứng trục ở đường phân giác. Giả thiết ban đầu của bài toán chỉ là những đường thẳng, các điểm đầu mút cần thiết của một tam giác là điểm A, B, C chưa có. Nếu học sinh vẫn có thói quen xem một hình như là một tổng thể thì phương pháp giải của học sinh sẽ xa vào việc đặt ẩn phụ cho điểm A, B hay C. Điều này dẫn đến sự khó khăn khi giải quyết bài toán.

- Học sinh giải bài toán bằng cách đặt điểm B(x, y) hoặc điểm C(x, y) sẽ cho thấy học sinh bị ảnh hưởng của việc xem xét phép biến hình theo cấp độ 1 $\Rightarrow$ bác bỏ giả thuyết nghiên cứu H2.
- Học sinh giải bài toán bằng cách lấy điểm M' là ảnh của điểm M qua phép đối xứng trục AD cho thấy học sinh đã hiểu phép biến hình theo cấp độ 2 $\Rightarrow$ hợp thức giả thuyết nghiên cứu H2.

Kết quả thu được cho thấy học sinh đã giải quyết tốt bài toán theo CL1 $\Rightarrow$ Hợp thức giả thuyết nghiên cứu

Không có bất kỳ học sinh nào giải bài toán theo yêu cầu của câu b. Ban đầu do học sinh không hiểu ý của câu b muốn đề cập đến vấn đề gì? Chúng tôi đã giải thích cho học sinh là giải quyết bài toán trên chỉ bằng ngôn ngữ vector, cụ thể hơn là giải quyết bài toán mà không viết phương trình đường thẳng. Dù vậy, chúng tôi vẫn không thu được kết quả mong đợi nào ở câu b. Rõ ràng, ngay cả khi kết hợp tính chất vector trong tọa độ thì học sinh vẫn không có thói quen sử dụng vector làm công cụ để giải quyết bài toán.

3.4. Kết luận về thực nghiệm

Qua thực nghiệm, chúng tôi đã kiểm chứng được giả thuyết nghiên cứu:

- **H1:** Vector thuần túy với vai trò làm công cụ giải toán chưa được học sinh sử dụng hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến phép biến hình.
- **H2:** Với cách trình bày dựa vào biểu thức tọa độ và vector, phép biến hình đã được hình thành ở học sinh với nghĩa là một ánh xạ từ tập hợp điểm vào tập hợp điểm.

Việc hợp thức giả thuyết H1, cho phép chúng tôi trả lời câu hỏi Q3. Vector với vai trò là công cụ để giải toán, đã chưa được vận dụng một cách hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến phép biến hình. Rõ ràng, về mặt toán học, chúng tôi thấy rằng vẫn có thể giải quyết các bài toán liên quan đến phép biến hình bằng công cụ vector thuần túy. Thậm chí, một số bài giải bằng công cụ vector còn có thể cho lời giải nhanh chóng, ngắn gọn.

Việc hợp thức giả thuyết H2, cho phép chúng tôi trả lời câu hỏi Q4. Học sinh đã có quan niệm đúng về phép biến hình theo cấp độ 2 và vận dụng tốt quan niệm ánh xạ từ tập hợp điểm vào tập hợp điểm để giải quyết tốt bài toán đặt ra.

KẾT LUẬN

Kế thừa nghiên cứu khoa học luận của tác giả Lê Thị Hoài Châu, 2004, chúng tôi thấy việc phép biến hình có thể phân ra làm bốn cấp độ.

- Cấp độ 1: Phép biến hình gắn liền với mối liên hệ về hình dáng giữa hai hình hoặc giữa hai phần của một hình (đặc trưng hàm hoàn toàn vắng mặt)
- Cấp độ 2: Phép biến hình được hiểu là ánh xạ từ mặt phẳng, hay tổng quát hơn, từ không gian, lên chính nó, ở đó mặt phẳng và không gian được nghiên cứu với tư cách là các tập hợp điểm.
- Cấp độ 3: Phép biến hình được xem như một công cụ giải toán hình học.
- Cấp độ 4: Phép biến hình được xem là phần tử của một nhóm và được dùng để phân loại các lý thuyết hình học.

Phép biến hình ở trường phổ thông chỉ gắn liền với cấp độ 1 và cấp độ 2 là chủ yếu. Cấp độ 1 được nghiên cứu trong chương trình THCS, cấp độ 2 được nghiên cứu trong chương trình THPT.

Khái niệm vector là một công cụ toán học được hình thành với mục đích nghiên cứu hình học tổng hợp dựa vào việc đại số hóa các đặc trưng hình học nhưng vẫn giữ được tính trực quan của hình học. Do đó, khái niệm vector tác động hầu hết đến các khái niệm liên quan đến hình học.

Qua phân tích tài liệu, chúng tôi nhận thấy khái niệm vector tác động mạnh lên hệ thống lý thuyết của phép biến hình. Vector không chỉ tác động lên phép tịnh tiến, phép vị tự là hai khái niệm gần gũi với vector nhất mà còn tác động đến khái niệm phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép quay. Nhờ sử dụng công cụ vector mà tính chất các phép biến hình được trình bày rõ ràng, các định lý, tính chất phép biến hình được chứng minh một cách ngắn gọn. Không những vậy, vector cùng với biểu thức tọa độ đã giúp giảm bớt khó khăn trong việc tiếp cận phép biến hình ở cấp độ 2.

Thông qua thực nghiệm, chúng tôi đã trả lời được câu hỏi Q3, Q4

- Vector với vai trò là công cụ để giải toán, đã chưa được vận dụng một cách hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến phép biến hình.
- Học sinh đã có quan niệm đúng về phép biến hình theo cấp độ 2 và vận dụng tốt quan niệm ánh xạ từ tập hợp điểm vào tập hợp điểm để giải quyết tốt bài toán đặt ra.

Từ kết quả trên, chúng tôi rút ra một hướng nghiên cứu mới cho luận văn:

Có thể xây dựng được một tiểu đề án Didactic cho phép học sinh vận dụng linh hoạt công cụ vectơ cùng với phương pháp tọa độ không?

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Thị Hoài Châu (2004), *Phương pháp Dạy – Học Hình học ở trường Trung học Phổ Thông*, NXB Đại học Quốc Gia, TP Hồ Chí Minh.
2. Đỗ Công Đoán (2002), *Nghiên cứu Didactic về tác động của những ràng buộc thể chế đối với việc học khái niệm vector của học sinh lớp 10 tại Việt Nam*, Luận văn Thạc sỹ khoa học., trường Đại học sư phạm TP Hồ Chí Minh.
3. Hoàng Hữu Vinh (2002), *Nghiên Cứu Didactic Toán về hoạt động của công cụ vector trong Hình học lớp 10*, Luận văn Thạc sỹ khoa học, trường Đại học sư phạm TP Hồ Chí Minh.
4. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên, 2004), *Toán 8*, Tập một, NXB Giáo dục.
5. Văn Như Cương – Trần Văn Hạo (2000), *Tài liệu hướng dẫn giảng dạy Toán 10* (Sách chỉnh lý hợp nhất năm 2000), NXB Giáo dục, TP Hồ Chí Minh.
6. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên, 2006), *Hình học 10 nâng cao (Sách Giáo viên)*, NXB Giáo dục, Hà nội.
7. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên, 2007), *Hình học 11 nâng cao (Sách Giáo viên)*, NXB Giáo dục, Hà nội.
8. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên, 2007), *Hình học 11 (Sách Giáo viên)*, NXB Giáo dục, Hà nội.
9. Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên, 2006), *Hình học 10 (Sách Giáo viên)*, NXB Giáo dục, Hà nội.
10. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên, 2007), *Hình học 11 nâng cao*, NXB Giáo dục, Hà nội.
11. Trần Phương (Biên soạn), *Ba thập kỷ đề thi Toán vào các trường Đại học Việt Nam*, NXB Đại học Quốc Gia, TP Hồ Chí Minh.
12. Nguyễn Ái Quốc (2002), *Nghiên Cứu Didactic của việc Dạy và Học Các Phép Biến Hình ở lớp 10: Trường Hợp Phép Quay*, Luận văn Thạc sỹ khoa học, trường Đại học sư phạm TP Hồ Chí Minh
13. Vũ Khánh Ly (2008), *Nghiên Cứu Didactic việc dẫn nhập khái niệm phép biến hình ở trường phổ thông trong môi trường tích hợp phần mềm cabri*, Luận văn Thạc sỹ khoa học, trường Đại học sư phạm TP Hồ Chí Minh
14. Nguyễn Mộng Hy (2004), *Các phép biến hình trong mặt phẳng*, NXB Giáo dục.