



**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Nguyễn Công Thắng

**QUAN HỆ GIỮA VÀNH CÁC THƯƠNG
BÊN PHẢI THEO NGHĨA CỔ ĐIỂN VÀ
VÀNH CÁC THƯƠNG BÊN PHẢI THEO
NGHĨA CỦA ORE VÀ GOLDIE**

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 60 46 05

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS-TS. Bùi Tường Trí**

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

*Đầu tiên, tôi xin gửi đến **PGS-TS. Bùi Tường Trí**, khoa Toán, trường Đại học Sư phạm TPHCM – người đã tận tình hướng dẫn tôi trong suốt thời gian hoàn thành luận văn này, lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất.*

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn quý thầy cô trường Đại học Sư phạm TPHCM đã tạo điều kiện, tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập tại đây.

Xin chân thành cảm ơn tất cả!

Tác giả.

MỞ ĐẦU

Từ cuối thế kỉ 19, phân số đã được viết dưới dạng p/q với $q \neq 0$. Hơn nữa, theo O.Stoltz, hai phân số p/q và p'/q' được gọi là bằng nhau nếu $pq' = p'q$, tổng và tích của chúng được định nghĩa dưới dạng:

$$p/q + p'/q' = (pq' + p'q)/qq'$$

$$p/q \cdot p'/q' = pp'/qq'$$

Vào khoảng cùng thời gian này, Kummer, Dedekind, Kronecker và một số nhà toán học đã tạo nên lý thuyết về số đại số là nền tảng của lý thuyết vành trong thế kỉ tiếp theo. Những điều này đã thúc đẩy sự phát triển của đại số trừu tượng trong những năm đầu thế kỉ 20 mà điển hình là Emmy Noether. H.Grell – học trò của bà – đã đưa ra định nghĩa về vành các thương trên miền nguyên giao hoán, đây là vành mà các phần tử của nó là một phân số (theo nghĩa của O.Stoltz) với tử số và mẫu số được lấy trong miền nguyên.

Vành các thương trên vành không giao hoán được đề cập đến lần đầu tiên trong quyển sách nổi tiếng Đại số hiện đại của Waerden. Ông đặt ra câu hỏi rằng: "một miền nguyên không giao hoán có thể được chứa trong một vành chia được hay không?". Câu trả lời là "Không".

Vào năm 1931, O. Ore đã đưa ra điều kiện cần và đủ để một miền nguyên không giao hoán có thể được chứa trong một vành chia được.

Vào năm 1958, trong bài báo "Cấu trúc vành nguyên tố dưới điều kiện dây tăng", Goldie chỉ ra rằng vành Noether nguyên tố luôn có vành các thương, và vành các thương đẳng cấu với vành ma trận trên vành chia được theo một điều kiện mà ta gọi đó là điều kiện Goldie.

Và điều kiện Ore và điều kiện Goldie là những điều cốt yếu mà luận văn này muốn đề cập.

Chương 1: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ VÀNH KHÔNG GIAO HOÁN

1.1. Định nghĩa vành:

Cho tập hợp $R \neq \emptyset$, trên R ta trang bị hai phép toán thường được kí hiệu là “+” (đọc là phép cộng) và “.” (đọc là phép nhân). Ta nói $\langle R, +, . \rangle$ là một vành nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $\langle R, + \rangle$ là một nhóm giao hoán

ii) $\langle R, . \rangle$ là một nửa nhóm

iii) Phép nhân phân phối đối với phép cộng: với các phần tử tùy ý $x, y, z \in R$ ta có:

$$x(y + z) = xy + xz \quad \text{và} \quad (y + z)x = yx + zx.$$

Nếu phép nhân là giao hoán thì ta gọi R là vành giao hoán, nếu phép nhân có phần tử đơn vị thì ta gọi R là vành có đơn vị.

1.2. Định nghĩa vành con:

Một bộ phận $A \neq \emptyset$ của vành R cùng với hai phép toán của vành R cảm sinh trên A thành một vành thì ta nói A là vành con của vành R

1.3. Định nghĩa ideal của một vành:

Cho R là một vành, một vành con A của R được gọi là ideal trái (ideal phải) của vành R nếu thỏa mãn điều kiện $ra \in A$ ($ar \in A$), $\forall a \in A, \forall r \in R$.

Vành con A của R được gọi là ideal của vành R nếu A vừa là ideal trái vừa là ideal phải của vành R .

1.4. Định nghĩa thể:

Cho R là một vành có đơn vị. Nếu mọi phần tử khác 0 trong R đều khả nghịch thì R được gọi là một thể hay một vành chia được.

1.5. Định nghĩa trường:

Một thể giao hoán được gọi là một trường.

1.6. Định nghĩa tâm của vành:

Cho vành R . Ta gọi tập hợp $C = \{c \in R \mid \forall r \in R : rc = cr\}$ là tâm của vành R .

1.7. Định nghĩa module:

Cho R là một vành tùy ý và M là một nhóm cộng aben. M được gọi là một R -module nếu có một ánh xạ $f : M \times R \rightarrow M$

$$(m, r) \mapsto f(m, r) = mr$$

Sao cho $\forall m, m_1, m_2 \in M$ và $\forall a, b \in R$ thì:

i) $m(a + b) = ma + mb$

ii) $(m_1 + m_2)a = m_1a + m_2a$

iii) $(ma)b = m(ab)$.

- Nếu R có chứa phần tử đơn vị 1 và $m1 = m, \forall m \in M$ thì ta gọi M là R -module Unitary.

- M được gọi là R -module trung thành nếu $Mr = 0$ kéo theo $r = 0$. Điều này có nghĩa là nếu $r \neq 0$ thì $Mr \neq 0$.

- Nếu M là một R -module thì ta đặt $A(M) = \{x \in R \mid Mx = (0)\}$ và gọi là tập các linh hóa tử của R -module M .

Bổ đề 1.7.1.

$A(M)$ là một ideal hai phía của R . Hơn nữa, M là một $R/A(M)$ -module trung thành.

Chứng minh:

- $A(M)$ là một ideal hai phía của R .

$$\forall x, y \in A(M) : M(x - y) = Mx - My = 0 \Rightarrow x - y \in A(M)$$

$\forall x \in A(M), \forall r \in R$, ta có :

$$M(xr) = (Mx)r = (0)r = (0) \Rightarrow xr \in A(M)$$

$$M(rx) = (Mr)x \subseteq Mx = (0) \Rightarrow M(rx) = (0) \Rightarrow rx \in A(M).$$

- M là một $R/A(M)$ -module trung thành.

Với phép nhân ngoài $M \times R/A(M) \rightarrow M$ được xác định như sau :

$$\forall m \in M, \forall r + A(M) \in R/A(M) : (m, r + A(M)) \mapsto m(r + A(M)) = mr.$$

Đây là một định nghĩa tốt vì nếu $r + A(M) = r' + A(M)$ thì $r - r' \in A(M)$

Suy ra $m(r - r') = 0, \forall m \in M \Rightarrow mr = mr' \Rightarrow m(r + A(M)) = m(r' + A(M))$. Hơn nữa, nếu $M(r + A(M)) = (0)$ thì $Mr = (0) \Rightarrow r \in A(M) \Rightarrow r + A(M) = 0$

Do đó M là một $R/A(M)$ -module trung thành.

Cho M là một $R/A(M)$ -module. $\forall a \in R$ ta định nghĩa ánh xạ $T_a : M \rightarrow M$ cho bởi công thức $mT_a = ma, \forall m \in M$. Vì M là một $R/A(M)$ -module và $(m_1 + m_2)T_a = m_1T_a + m_2T_a, \forall m_1, m_2 \in M$ nên T_a là một tự đồng cấu nhóm cộng của M .

Đặt $E(M)$ là tập tất cả các tự đồng cấu nhóm cộng của M . Khi đó, ta định nghĩa phép cộng và nhân như sau:

$$\forall m \in M, \forall \Phi, \Psi \in E(M) : m(\Phi + \Psi) = m\Phi + m\Psi \text{ và } m(\Phi\Psi) = (m\Phi)\Psi$$

Vậy $E(M)$ lập thành một vành với phép cộng và phép nhân ánh xạ thông thường. Ta định nghĩa ánh xạ $\Phi : R \rightarrow E(M)$ sao cho $\Phi(a) = T_a, \forall a \in R$, ta thấy rằng $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$ và $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ nên Φ là một đồng cấu vành. Hơn nữa, $\ker \Phi = A(M)$. Thật vậy:

$$\forall a \in A(M) \Leftrightarrow Ma = (0) \Leftrightarrow MT_a = (0) \Leftrightarrow \Phi(a) = T_a = 0 \Leftrightarrow a \in \ker \Phi \Leftrightarrow A(M) = \ker \Phi.$$

Do đó ảnh đồng cấu của R trong $E(M)$ đẳng cấu với $R/A(M)$.

Bổ đề 1.7.2. $R/A(M)$ đẳng cấu với vành con của $E(M)$.

- Nếu M là một R -module trung thành thì $A(M) = (0)$ hay $\ker \Phi = (0)$. Khi đó Φ là một đơn cấu và ta có thể nhúng vành R vào $E(M)$.

- M được gọi là một R -module bất khả quy nếu $MR \neq (0)$ và M không có module con thực sự nào. Tức M chỉ có hai module con tầm thường là (0) và M .

1.7.3. Định lý :

Nếu M là một R -module bất khả quy thì $C(M)$ là một thể (hay vành chia được).

1.7.4. Định nghĩa:

Ideal phải ρ của R được gọi là chính quy nếu tồn tại phần tử $r \in R$ sao cho $x - rx \in \rho, \forall x \in R$.

Nếu vành R có đơn vị (hay chỉ cần có đơn vị trái) thì mọi ideal ρ của R đều là ideal chính quy. Thật vậy, khi đó ta lấy $r = 1 \in R$ thì

$$x - 1x = x - x = 0 \in \rho, \forall x \in R.$$

1.7.5. Bổ đề:

Nếu M là một R -module bất khả quy thì M đẳng cấu (như là một module) với R -module thương R/ρ trong đó, ρ là một ideal phải, tối đại và chính quy nào đó của R . Ngược lại, nếu ρ là một ideal phải, tối đại và chính quy của R thì R/ρ là một R -module bất khả quy.

1.8. Căn Jacobson của một vành:

Căn Jacobson của vành R kí hiệu là $J(R)$ hoặc $Rad(R)$ là tập hợp tất cả các phần tử của R linh hóa được tất cả các R -module bất khả quy.

Nếu R không có module bất khả quy, ta quy ước $J(R) = R$. Khi đó, vành R được gọi là vành Radical. Như vậy theo định nghĩa ta có:

$$J(R) = \{r \in R \mid Mr = (0) \text{ với mọi } R\text{-module bất khả quy } M\}$$

Vành R là vành Radical nếu trên R không có ideal phải, tối đại và chính quy.

Nhận xét. Nếu R có đơn vị 1 thì R không là vành Radical.

$$\text{Ta có : } A(M) = \{r \in R \mid Mr = (0)\}.$$

Khi đó : $J(R) = \bigcap_M A(M)$, với M chạy qua khắp tất cả các R -module bất khả quy. Do $A(M)$ là một ideal hai phía của R nên $J(R)$ cũng là một ideal hai phía của R .

Mặt khác, vì chỉ xét M như là một R -module phải nên $J(R)$ còn được gọi là căn Jacobson phải của vành R . Tương tự, chúng ta có thể định nghĩa căn Jacobson trái của vành R . Thật may mắn là căn Jacobson phải và căn Jacobson trái của vành R lại trùng nhau nên không cần phân biệt trái hay phải đối với các căn Jacobson này.

Để hiểu rõ hơn về cấu trúc căn Jacobson của một vành, chúng ta sẽ cố gắng mô tả chi tiết cấu trúc của nó. Bản chất của căn Jacobson chính là giao của một lớp các ideal đặc biệt.

$$\text{Với } \rho \text{ là một ideal phải của } R \text{ thì } (\rho : R) = \{x \in R \mid Rx \subset \rho\}$$

1.8.1. Định lý:

$J(R) = \bigcap_{\rho} (\rho : R)$. Trong đó ρ chạy qua tất cả các ideal phải, tối đại, chính quy của R và $(\rho : R)$ là một ideal hai phía lớn nhất của R nằm trong ρ .

1.8.2. Bổ đề:

Nếu ρ là một ideal phải, chính quy, thực sự của R thì ρ có thể nhúng vào một ideal phải, tối đại, chính quy của R .

Chứng minh:

Vì ρ là một ideal phải, chính quy, thực sự của R nên $\rho \neq R$ và tồn tại $a \in R$ sao cho $x - ax \in \rho, \forall x \in R$.

Suy ra $a \notin \rho$, vì nếu $a \in \rho$ thì $ax \in \rho \Rightarrow x \in \rho, \forall x \in R \Rightarrow \rho = R$ (mâu thuẫn).

Gọi $\mathfrak{M}$ là tập tất cả các ideal phải thực sự của R có chứa ρ . Nếu $\rho' \in \mathfrak{M}$ thì $a \notin \rho'$, vì nếu $a \in \rho'$ thì $ax \in \rho'$ và $x - ax \in \rho \subset \rho', \forall x \in R \Rightarrow x \in \rho', \forall x \in R \Rightarrow \rho' = R$ (mâu thuẫn).

Áp dụng bổ đề Zorn cho tập $\mathfrak{M}$ là tập tất cả các ideal phải, thực sự của R có chứa ρ ta được ρ_0 là một phân tử tối đại trong $\mathfrak{M}$.

Khi đó: $\rho \subset \rho_0$, ρ_0 chính quy vì $x - ax \in \rho \subset \rho_0, \forall x \in R$ và ρ_0 là một ideal phải tối đại của R vì nếu ρ_1 là một ideal phải của R có chứa ρ_0 mà $\rho_1 \neq R$ thì $\rho_1 \in \mathfrak{M}$, do tính tối đại của ρ_0 suy ra ρ_0 chứa ρ_1 hay $\rho_1 = \rho_0$.

1.8.3. Định lý:

$J(R) = \bigcap_{\rho} \rho$. Trong đó ρ chạy qua tất cả các ideal phải, tối đại và chính quy của R .

Chứng minh:

- Ta có $J(R) = \bigcap_{\rho} (\rho : R)$ vì $(\rho : R) \subset \rho$ nên

$J(R) \subset \bigcap_{\rho} \rho$ Trong đó ρ chạy qua tất cả các ideal phải, tối đại và chính quy của R .

- Chứng minh bao hàm ngược lại $\bigcap_{\rho} \rho \subset J(R)$:

Ta đặt $\tau = \bigcap_{\rho} \rho$, trong đó ρ chạy qua tất cả các ideal phải, tối đại và chính quy của R .

Với mỗi $x \in \tau$, xét tập $\rho' = \{xy + y | y \in R\}$ ta chứng minh $\rho' = R$. Giả sử $\rho' \neq R$, khi đó ρ' là một ideal phải, chính quy, thực sự của R . ρ' chính quy là do ta chọn $a = -x$, suy ra $y - ay = y + xy \in \rho', \forall y \in R$. Ta có ρ' được nhúng vào một ideal phải, tối đại, chính quy ρ_0 nào đó của R . Khi đó, $\forall y \in R$ do $x \in \tau \subset \rho_0 \Rightarrow x \in \rho_0 \Rightarrow xy \in \rho_0$ và $y + xy \in \rho_0$ nên $y \in \rho_0$, suy ra $R \subset \rho_0$ (mâu thuẫn với tính tối đại của ρ_0).

Vậy $\rho' = R$. Do đó với mỗi $x \in \tau$ tồn tại $w \in R$ sao cho $-x = w + xw$ hay $x + w + xw = 0$ (*).

Ta chứng minh $\tau \subset J(R)$ bằng phản chứng. Giả sử $\tau \not\subset J(R)$, khi đó tồn tại một module bất khả quy M không bị τ linh hóa nghĩa là $M\tau \neq (0)$, suy ra tồn tại $m \in M$ sao cho $m\tau \neq (0)$. Ta dễ dàng kiểm tra $m\tau$ là một module con của M , lại do M là module bất khả quy nên $m\tau = M$. Do đó tồn tại $t \in \tau$ sao cho $mt = -m$, lại do $t \in \tau$ theo (*) thì tồn tại $s \in R$ sao cho $t + s + ts = 0$. Khi đó $0 = m(t + s + ts) = mt + ms + mts = -m + ms - ms = -m$. Suy ra $m = 0$ (mâu thuẫn với $m\tau \neq (0)$). Vậy $\tau \subset J(R)$ hay $\bigcap_{\rho} \rho \subset J(R)$.

Như vậy, chúng ta đã khảo sát cấu trúc của căn Jacobson trên cơ sở M là một R -module phải. Trong trường hợp M là một R -module trái ta cũng có kết quả hoàn toàn tương tự cho căn Jacobson trái.

1.8.5. Định nghĩa:

Phần tử $a \in R$ được gọi là tựa chính quy phải nếu tồn tại $a' \in R$ sao cho $a + a' + aa' = 0$. Phần tử a' được gọi là tựa nghịch đảo phải của a .

Tương tự, ta cũng có định nghĩa phần tử tựa chính quy trái và phần tử tựa nghịch đảo trái.
Chú ý. Nếu R có phần tử đơn vị 1 thì phần tử $a \in R$ là tựa chính quy phải khi và chỉ khi $1 + a$ có nghịch đảo phải trong R .

1.8.6. Định nghĩa:

Một ideal phải của R được gọi là tựa chính quy phải nếu mỗi phần tử của nó là tựa chính quy phải.

i) $J(R)$ là tựa chính quy phải

ii) Nếu ρ là một ideal phải tựa chính quy phải của R thì $\rho \subset J(R)$

1.8.7. Định lý:

$J(R)$ là một ideal phải tựa chính quy phải của R và nó chứa tất cả các ideal phải, tựa chính quy phải của R . Vì thế, $J(R)$ là một ideal phải, tựa chính quy phải, tối đại duy nhất của R .

Trong khi xây dựng căn Jacobson, ta chỉ xét M như là R -module phải nên $J(R)$ còn được gọi là căn Jacobson phải của R , kí hiệu là $J_{\text{phải}}(R)$. Tương tự, nếu ta xét M như là R -module trái thì $J(R)$ được gọi là căn Jacobson trái của R , kí hiệu là $J_{\text{trái}}(R)$.

Bây giờ ta sẽ đi chứng minh $J_{\text{phải}}(R) = J_{\text{trái}}(R)$.

Thật vậy, giả sử a vừa là phần tử tựa chính quy phải vừa là phần tử tựa chính quy trái của R . Khi đó tồn tại $b, c \in R$ sao cho $a + b + ba = 0$ và $a + c + ac = 0$ suy ra $ac + bc + bac = 0$ và $ba + bc + bac = 0$, do đó $ba = ac$ mà $a + b + ba = a + c + ac = 0 \Rightarrow b = c$. Nghĩa là, tựa nghịch đảo trái và tựa nghịch đảo phải của một phần tử là trùng nhau.

Giả sử $a \in J_{phải}(R)$ khi đó tồn tại $a' \in R$ sao cho $a + a' + aa' = 0$ suy ra $a' = -a - aa'$ và $a \in J_{phải}(R)$ nên $a' \in J_{phải}(R)$, tương tự vì $a' \in J_{phải}(R)$, khi đó lại tồn tại $a'' \in J_{phải}(R)$ sao cho $a' + a'' + a'a'' = 0$. Do đó a' có tựa nghịch đảo trái là a và tựa nghịch đảo phải là a'' nên $a = a''$. Dẫn đến $a' + a + a'a = 0$ hay a là phần tử tựa chính quy trái. Vậy $J_{phải}(R)$ cũng là một ideal tựa chính quy trái của R nên $J_{phải}(R) \subset J_{trái}(R)$, tương tự, ta cũng chứng minh được $J_{trái}(R)$ là một ideal tựa chính quy phải nên $J_{trái}(R) \subset J_{phải}(R)$

$$\text{Vậy } J_{phải}(R) = J_{trái}(R).$$

1.8.8. Định nghĩa:

- Phần tử $a \in R$ được gọi là lũy linh nếu tồn tại số nguyên dương m sao cho $a^m = 0$
- Một ideal phải (trái, hai phía) của R được gọi là nil-ideal nếu mọi phần tử của nó đều lũy linh.
- Một ideal phải (trái, hai phía) ρ của R được gọi là lũy linh nếu tồn tại một số nguyên dương m sao cho $a_1 a_2 \dots a_m = 0, \forall a_1, a_2, \dots, a_m \in \rho$. Điều này có nghĩa là $\rho^m = (0)$.

Nhận xét.

- Một ideal phải (trái, hai phía) lũy linh là một nil-ideal, nhưng điều ngược lại thì không đúng
- Mọi phần tử lũy linh đều tựa chính quy trái (phải)

Thật vậy, giả sử $a \in R$ là một phần tử lũy linh, khi đó tồn tại số nguyên dương m sao cho $a^m = 0$ và ta đặt $b = -a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^{m-1} a^{m-1}$

$$\text{Ta có : } ab = ba = -a^2 + a^3 - a^4 + \dots + (-1)^{m-2} a^{m-1}$$

$$\text{Suy ra } b + ab = b + ba = -a \Rightarrow a + b + ab = a + b + ba = 0$$

Do đó mà mọi nil-ideal cũng là ideal tựa chính quy trái và cũng là ideal tựa chính quy phải.

1.8.9. Bổ đề: Mọi nil-ideal phải (trái) của R đều chứa trong $J(R)$.

1.9. Vành nửa đơn:

Vành R được gọi là vành nửa đơn (hay nửa nguyên thủy) nếu $J(R) = (0)$.

1.9.1. Định lý:

Giả sử R là một vành thì $R/J(R)$ là một vành nửa đơn.

Chứng minh:

Ta cần chứng minh $J(R/J(R)) = (0)$.

Đặt $\bar{R} = R/J(R)$ và ρ là một ideal phải, tối đại, chính quy của R . Khi đó $J(R) \subset \rho$. Do đó theo định lý đồng cấu, $\bar{\rho} = \rho/J(R)$ là một ideal phải, tối đại của $\bar{R}$.

Thật vậy, do $J(R) \subset \rho \subset R$ nên ta có: $R/\rho \cong (R/J(R))/(\rho/J(R))$

Từ tính tối đại của ρ trong vành R ta suy ra tính tối đại của $\rho/J(R)$ trong vành thương $R/J(R)$.

Ta sẽ chứng minh $\bar{\rho}$ cũng chính quy trong vành $\bar{R}$.

Do ρ chính quy nên tồn tại $a \in R$ sao cho $x - ax \in \rho, \forall x \in R$. Suy ra tồn tại $\bar{a} \in \bar{R}$ sao cho $\bar{x} - \bar{a}\bar{x} \in \bar{\rho}, \forall \bar{x} \in \bar{R}$.

Do $J(R) = \cap \rho$, với ρ chạy qua khắp các ideal phải, tối đại, chính quy của R nên ta có $\cap \bar{\rho} = (0)$. $J(\bar{R})$ chính là giao của tất cả các ideal phải, tối đại, chính quy của $\bar{R}$ nên $J(\bar{R}) \subset \cap \bar{\rho} = (0)$.

Vậy $J(\bar{R}) = (0)$.

Tính chất của căn Jacobson trong định lý là một trong những tính chất “radical-like” – “giống như căn”. Những nghiên cứu về các tính chất của căn Jacobson tổng quát đã được Amitssur và Kurosh tiến hành.

Từ nay để tránh nặng nề về mặt thuật ngữ, ta sẽ gọi một ideal hai phía của vành R là một ideal.

1.9.2. Định lý:

Nếu A là một ideal của vành R thì $J(A) = A \cap J(R)$.

Chứng minh:

- Nếu $a \in A \cap J(R)$ thì $a \in J(R)$, suy ra a là phần tử tựa chính quy phải

của R nên tồn tại $a' \in R$ sao cho $a + a' + aa' = 0$, do đó $a' = -a - aa' \in A$, vậy a cũng là phần tử tựa chính quy phải của A . Suy ra, $A \cap J(R)$ là ideal tựa chính quy phải của A . Ta có $A \cap J(R) \subset J(A)$.

- Ngược lại, ta lấy ρ là ideal phải, tối đại, chính quy của R và đặt

$\rho_A = A \cap \rho$. Nếu $A \not\subset \rho$ thì do tính tối đại của ρ ta có $A + \rho = R$. Do đó theo định lý đồng cấu ta có: $R/\rho = (A + \rho)/\rho \cong A/(A \cap \rho) = A/\rho_A$

Do ρ tối đại trong R nên R/ρ bất khả quy và do đó A/ρ_A cũng bất khả quy.

Suy ra ρ_A là ideal phải tối đại của A .

Ta sẽ chứng minh ρ_A chính quy trong A . Thật vậy, do ρ chính quy trong R nên tồn tại $b \in R$ sao cho $x - bx \in \rho, \forall x \in R$. Ta có: $b \in R = A + \rho \Rightarrow b = a + r$ với $a \in A, r \in \rho$. Khi đó $x - bx = x - ax - rx \in \rho$, do $rx \in \rho$ nên $x - ax \in \rho$.

Tóm lại, tồn tại $a \in A$ sao cho: $x - ax \in \rho \cap A = \rho_A, \forall x \in A$, hay ρ_A chính quy trong A . Vậy ta có $J(A) \subset \rho_A$ với mọi ρ là ideal phải, tối đại, chính quy của R mà $A \not\subset \rho$.

Nếu $A \subset \rho$ thì $\rho_A = A \cap \rho = A$ do đó $J(A) \subset \rho_A$. Với ρ chạy qua khắp các ideal phải, tối đại, chính quy của R ta có $J(A) \subset \cap \rho_A = \cap (A \cap \rho) = (\cap \rho) \cap A = J(R) \cap A$.

Vậy $J(A) = A \cap J(R)$.

1.9.3. Hệ quả:

Nếu R là vành nửa đơn thì mọi ideal của R cũng là vành nửa đơn.

Ví dụ. Cho R là vành các ma trận vuông cấp 2 trên trường F , trước tiên ta chứng tỏ R không có các ideal hai phía không tầm thường.

Thật vậy, giả sử A là một ideal hai phía của R và $A \neq (0)$.

Với $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ là đơn vị của vành R .

Ta đặt $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ vì $A \neq (0)$ nên tồn tại

$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mà $a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in A$.

Giả sử $a_{11} \neq 0$, do A là một ideal hai phía của R nên

$$E_{11}aE_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{11} \in A \quad \text{và} \quad E_{21}E_{11}E_{12} = E_{22} \in A, \quad \text{do đó}$$

$$E = E_{11} + E_{22} \in A. \text{ Suy ra } A = R$$

Vậy R không có các ideal hai phía không tầm thường.

Vì có đơn vị nên $J(R) \neq R$ và $J(R)$ là một ideal hai phía của R nên $J(R) = (0)$. Vậy R là vành nửa đơn.

Bây giờ ta xét $\rho = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in F \right\}$, dễ thấy ρ là một ideal phải của R . Ta lại có

$$\rho_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \beta \in F \right\} \text{ là một ideal phải của } \rho \text{ và } \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ do đó } \rho_1 \text{ là một nil-}$$

ideal phải khác (0) của ρ suy ra $\rho_1 \subset J(\rho)$ và $J(\rho) \neq (0)$

Mà $\rho \cap J(R) = (0)$ (do $J(R) = (0)$). Vậy $J(\rho) \neq \rho \cap J(R)$.

Một tính chất “radical-like” cơ bản khác nữa là kết quả nhận được của radical khi ta thay đổi từ một vành R sang vành các ma trận vuông cấp m lấy hệ tử trên vành R . Nếu R là một vành, kí hiệu R_m là vành các ma trận vuông cấp m trên R và $J(R)_m$ là vành các ma trận vuông cấp m trên $J(R)$ thì ta có định lý sau.

1.9.4. Định lý: $J(R_m) = J(R)_m$

Chứng minh:

Lấy M là một R -module bất khả quy.

Đặt $M^{(m)} = \{(m_1, m_2, \dots, m_m) \mid m_i \in M\}$. Dễ dàng kiểm tra được $M^{(m)}$ là một R_m -module với phép cộng là phép cộng theo từng thành phần, phép nhân ngoài chẳng qua là phép nhân vào bên phải của một bộ trong $M^{(m)}$ với một ma trận trong R_m . Hơn nữa, $M^{(m)}$ còn là một R_m -module bất khả quy.

Thật vậy:

- Chứng minh $M^{(m)}R_m \neq (0)$

Do M là một R -module bất khả quy nên $MR \neq (0)$, do đó tồn tại $m \in M, r \in R$ sao cho $mr \neq 0$. khi đó

$$(m, m, \dots, m) \begin{bmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r \end{bmatrix} = (mr, mr, \dots, mr) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

Vậy $M^{(m)} R_m \neq (0)$.

- Chứng minh $M^{(m)}$ không có module con không tầm thường

Lấy $N \neq (0)$ là module con của $M^{(m)}$. Ta chứng minh $N = M^{(m)}$ hay chỉ cần chứng minh $M^{(m)} \subset N$. Thật vậy, do $N \neq (0)$ nên tồn tại $(m_1, m_2, \dots, m_m) \in N$ và $(m_1, m_2, \dots, m_m) \neq (0, 0, \dots, 0)$, do đó tồn tại $m_i \neq 0$ với $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Do $m_i R$ là một module con của module bất khả quy M mà $m_i R \neq (0)$ nên $m_i R = M$. Khi đó, với mọi $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in M^{(m)}$ luôn tồn tại $r_j \in R$, với $j = \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho $m_i r_j = x_j$. Do đó:

$$(m_1, \dots, m_i, \dots, m_m) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 & r_2 & \dots & r_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = (m_i r_1, m_i r_2, \dots, m_i r_m) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Suy ra $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in N$ hay $M^{(m)} \subset N$.

Vậy $M^{(m)}$ là một R_m -module bất khả quy.

- Chứng minh $J(R_m) \subset J(R)_m$

Nếu $(\alpha_{ij}) \in J(R_m)$ thì $M^{(m)}(\alpha_{ij}) = (0, 0, \dots, 0), \forall i, j = \overline{1, m}$.

Khi đó với mọi $m_i \in M, (m_1, m_2, \dots, m_m)(\alpha_{ij}) = (0, 0, \dots, 0), \forall i, j = \overline{1, m}$. Suy ra

$M\alpha_{ij} = (0), \forall i, j = \overline{1, m}$ và do đó $\alpha_{ij} \in J(R), \forall i, j = \overline{1, m}$.

Từ đó ta có $(\alpha_{ij}) \in J(R)_m$. Vậy $J(R_m) \subset J(R)_m$.

- Chứng minh $J(R)_m \subset J(R_m)$.

Thật vậy, xét

$$\rho_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \middle| \alpha_{1j} \in J(R) \right\}$$

Dễ dàng kiểm tra được ρ_1 là một ideal phải của R_m .

Ta tiếp tục chứng minh ρ_1 là ideal tựa chính quy phải của R_m .

$$\text{Với mọi } X \in \rho_1, X = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ nên } \alpha_{11} \in J(R) \Rightarrow \alpha_{11} \text{ là phần tử}$$

tựa chính quy phải của R do đó tồn tại $\alpha'_{11} \in R$ sao cho: $\alpha_{11} + \alpha'_{11} + \alpha_{11}\alpha'_{11} = 0$

$$\text{Lấy } Y = \begin{bmatrix} \alpha'_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \text{ Đặt } W = X + Y + XY \text{ thì ta có:}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ do đó } W^2 = 0 \text{ nên } W \text{ là phần tử lũy linh và nó cũng là phần tử tựa}$$

chính quy phải của R_m , khi đó tồn tại $Z \in R_m$ sao cho: $W + Z + WZ = 0$, thay $W = X + Y + XY$ thì ta suy ra $X + (Y + Z + YZ) + X(Y + Z + YZ) = 0$, tức X là phần tử tựa chính quy phải của R_m . Vậy ρ_1 là một ideal phải tựa chính quy phải của R_m thì $\rho_1 \subset J(R_m)$.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\rho_i = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mid \alpha_{ij} \in J(R) \right\} \text{ là ideal phải tựa chính quy phải của } R_m \text{ và do đó}$$

$$\rho_i \subset J(R_m), \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Vì $J(R_m)$ là một ideal của R_m nên $J(R_m)$ đóng đối với phép cộng do đó ta có $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_m \subset J(R_m)$ hay $J(R)_m \subset J(R_m)$.

1.10. Vành Artin:

Vành R được gọi là vành Artin phải nếu mọi tập khác rỗng các ideal phải của nó đều có phần tử tối tiểu.

Để ngắn gọn ta thường gọi vành Artin phải là vành Artin.

Dễ thấy rằng một vành là vành Artin khi và chỉ khi mọi dãy giảm các ideal phải của nó $\rho_1 \supset \rho_2 \supset \dots \supset \rho_m \dots$ đều dừng tức $\exists n \in \mathbb{N}$ sao cho $\rho_n = \rho_{n+1} = \dots$

1.10.1. Định lý:

Nếu R là vành Artin thì $J(R)$ là một ideal lũy linh.

Chứng minh:

Đặt $J = J(R)$. Xét dãy giảm các ideal phải của R : $J \supset J^2 \supset \dots \supset J^n \supset \dots$. Vì R là vành Artin nên tồn tại một số nguyên n sao cho $J^n = J^{n+1} = \dots = J^{2n} = \dots$. Do đó, nếu $xJ^{2n} = (0)$ thì $xJ^n = (0)$ (vì $J^{2n} = J^n$)

Ta sẽ chứng minh $J^n = (0)$. Thật vậy, đặt $W = \{x \in J \mid xJ^n = (0)\}$ thì W là một ideal của R .

Nếu $J^n \subset W$ thì $J^n J^n = (0)$, do đó $J^n = \dots = J^{2n} = (0)$.

Nếu $J^n \not\subset W$ thì ta xét vành thương $\bar{R} = R/W$ và ta có $\bar{J}^n = J^n/W \neq (0)$

Nếu $\bar{x}\bar{J}^n = (0)$ thì $xJ^n \subset W$ do đó $(0) = xJ^n J^n = xJ^{2n} = xJ^n$ suy ra $x \in W$ dẫn đến $\bar{x} = \bar{0}$.

Khi đó, $\bar{x}\bar{J}^n = (0)$ thì ta suy ra $\bar{x} = \bar{0}$. (*)

Vì R là vành Artin nên $\bar{R} = R/W$ cũng là vành Artin và nếu $\bar{J}^n \neq (0)$ ta suy ra $\bar{J}^n$ chứa một ideal phải tối tiểu $\bar{\rho} \neq (0)$, do tính tối tiểu nên ideal phải $\bar{\rho}$ cũng là một $\bar{R}$ -module bất khả quy. Mặt khác, $\bar{J}^n \subset J(\bar{R})$ nên $\bar{\rho}\bar{J}^n = (0)$ theo (*) suy ra $\bar{\rho} = (0)$ (mâu thuẫn $\bar{\rho} \neq (0)$).

Vậy $J^n = (0)$ và định lý được chứng minh.

1.10.2. Hệ quả:

Trong một vành Artin, mọi nil-ideal đều là ideal lũy linh.

Nhận xét. Nếu vành R có ideal phải lũy linh khác (0) thì nó sẽ có ideal hai phía lũy linh khác (0) . Thật vậy, cho R là một vành bất kì và giả sử rằng $\rho \neq (0)$ là một ideal phải lũy linh của R .

- Nếu $R\rho = (0)$ thì hiển nhiên $R\rho \subset \rho$, khi đó ρ là ideal hai phía của R

Vậy ρ là ideal hai phía lũy linh khác (0) của R

- Nếu $R\rho \neq (0)$ thì $RR\rho \subset R\rho$ và $R\rho R \subset R\rho$ (ρ là ideal phải của R)

nên $R\rho$ là ideal hai phía của R . Vì ρ là một ideal phải lũy linh của R nên tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $\rho^m = (0)$, khi đó:

$$(R\rho)^m = R\rho R\rho \dots R\rho = R(\rho R)(\rho R) \dots (\rho R)\rho \subset \rho^m = (0) \Rightarrow (R\rho)^m = (0)$$

Vậy $R\rho$ là ideal hai phía lũy linh khác (0) của R .

1.10.3. Định nghĩa:

Phần tử $e \neq 0$ trong vành R được gọi là phần tử lũy đẳng nếu $e^2 = e$.

1.10.4. Bổ đề:

Cho R là vành không có ideal lũy linh khác (0) . Giả sử $\rho \neq (0)$ là một ideal phải, tối tiểu của R . Khi đó, tồn tại một phần tử lũy đẳng $e \in R$ sao cho $\rho = eR$.

Chứng minh:

Vì R không có ideal lũy linh khác (0) nên theo nhận xét ở trên thì R cũng không có ideal phải lũy linh khác không và do đó $\rho^2 \neq (0)$. Khi đó, tồn tại $x \in \rho$ sao cho $x\rho \neq (0)$ và $x\rho \subset \rho$ vì ρ là ideal phải của R nên $x\rho$ cũng là ideal phải của R , do tính tối tiểu của ρ ta suy ra $x\rho = \rho$, do đó tồn tại $e \in \rho$ sao cho $xe = x \Rightarrow xe^2 = xe \Rightarrow x(e^2 - e) = 0$. Đặt $\rho_0 = \{a \in \rho \mid xa = 0\}$, dễ thấy ρ_0 là một ideal phải của R và $\rho_0 \subset \rho$ và $\rho_0 \neq \rho$ vì $x\rho \neq (0)$. Do tính tối tiểu của ρ ta suy ra $\rho_0 = (0)$. Ta có $x(e^2 - e) = 0 \Rightarrow e^2 - e \in \rho_0 \Rightarrow e^2 - e = 0$ hay $e^2 = e$. Vì $xe = x \neq 0$ nên $e \neq 0$.

Lại do $e \in \rho$ và ρ là ideal phải của R nên $eR \subset \rho$ và eR cũng là một ideal phải của R mà $eR \neq (0)$ (do $eR \supset e^2 = e \neq 0$) do tính tối tiểu của ρ nên $\rho = eR$.

Chúng ta thấy rằng trong một vành Artin một ideal phải chứa những phần tử lũy linh thì tự bản thân nó cũng là một ideal lũy linh. Điều gì xảy ra khi mà một ideal phải chứa những phần tử không lũy linh? Mục đích của chúng ta là chứng tỏ rằng khi đó nó phải chứa một phần tử lũy đẳng khác 0.

1.10.5. Bổ đề :

Cho R là một vành và giả sử tồn tại phần tử $a \in R$ sao cho $a^2 - a$ là phần tử lũy linh. Khi đó, hoặc a là phần tử lũy linh hoặc tồn tại đa thức $q(x)$ với hệ số nguyên sao cho $e = aq(x)$ là phần tử lũy đẳng khác 0.

Chứng minh:

Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$(a^2 - a)^k = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^k C_k^i (a^2)^{k-i} (-1)^i a^i = \sum_{i=0}^k C_k^i a^{2k-i} (-1)^i = 0$$

Suy ra $a^k = a^{k+1}p(a)$ trong đó, $p(x)$ là một đa thức hệ số nguyên. Ta có $a^k = a^{k+1}p(a) = a \cdot a^k p(a) = a(a^{k+1}p(a))p(a) = a^{k+2}p(a)^2$ tiếp tục như vậy ta sẽ được $a^k = a^{2k}P(a)^k$. Ta suy ra $a^k = 0$ hoặc $a^k \neq 0$. Nếu $a^k \neq 0$ thì đặt $e = a^k p(a)^k \neq 0$ và $e^2 = a^{2k}P(a)^{2k} = a^k p(a)^k = e$. Vậy e là phần tử lũy đẳng và tồn tại $q(x) = x^{k-1}p(x)^k$ với hệ số nguyên để $e = aq(a)$.

1.10.6. Định lý:

Nếu R là vành Artin và $\rho \neq (0)$ là một ideal phải không lũy linh của R thì ρ có chứa phần tử lũy đẳng khác 0.

Chứng minh:

Do ρ là một ideal phải không lũy linh của R , theo định lý 1.3.2.1 thì $\rho \not\subset J(R)$. Đặt $\bar{R} = R/J(R)$, do R là vành Artin nên $\bar{R}$ cũng là vành Artin và theo định lý 1.3.1.1 thì $\bar{R}$ cũng là vành nửa đơn nên vành $\bar{R}$ không có ideal lũy linh khác (0) . $\bar{\rho} = \rho/J(R)$ vì $\rho \not\subset J(R)$ nên $\bar{\rho} \neq (0)$ suy ra nó chứa một ideal phải tối tiểu $\bar{\rho}_0$ của $\bar{R}$. $\bar{\rho}_0$ chứa một phần tử lũy đẳng $\bar{e} \neq 0$.

Xét ánh xạ $\varphi: R \rightarrow \bar{R} = R/J(R)$ là đồng cấu chiếu sao cho với $a \in \rho$, $\varphi(a) = \bar{a} = \bar{e}$, do đó $\varphi(a^2 - a) = \bar{e}^2 - \bar{e} = 0 \Rightarrow a^2 - a \in J(R) \Rightarrow a^2 - a$ lũy linh.

Do $\bar{a}^k = \bar{e}^k = \bar{e} \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$ nên a không lũy linh, tồn tại một đa thức $q(x)$ hệ số nguyên sao cho $e = aq(a)$ là một phần tử lũy đẳng khác 0. Vì $a \in \rho$ nên $e \in \rho$.

1.10.7. Định lý:

Cho R là một vành tùy ý và $e \in R$ là một phần tử lũy đẳng. khi đó ta có $J(eRe) = eJ(R)e$.

Chứng minh:

- Chứng minh $J(eRe) \subset eJ(R)e$

Cho M là một R -module bất khả quy. Ta sẽ chứng minh hoặc $Me = (0)$ hoặc Me là một eRe -module bất khả quy.

Thật vậy, giả sử $Me \neq (0) \Rightarrow \exists m \in M : me \neq 0$. Ta có $(me)(eRe) = meRe$.

Dễ thấy meR là module con của R -module bất khả quy M và $meR \neq (0)$ suy ra $meR = M$ do đó $meRe = Me$. Ta có $MeeRe = MeRe \neq (0)$ và gọi $N \neq (0)$ là module con của eRe -module Me . Vì $meRe = Me$ suy ra $N = m_0eRe \neq (0)$ với $m_0 \in M$ nên ta cũng có m_0eR là module con của R -module bất khả quy M và $m_0eR \neq (0)$ suy ra $m_0eR = M \Rightarrow N = m_0eRe = Me$.

Từ đó, ta có Me là một eRe -module bất khả quy, do đó $MeJ(eRe) = (0)$ vì e là phần tử đơn vị của eRe nên $MeJ(eRe) = MJ(eRe) = (0)$. Còn nếu $Me = (0)$ thì $MeJ(eRe) = MJ(eRe) = (0)$. Trong mọi trường hợp ta đều có $MJ(eRe) = (0)$ với M là R -module bất khả quy tùy ý.

Vậy $J(eRe) \subset J(R)$ suy ra $J(eRe) = eJ(eRe)e \subset eJ(R)e$.

- Chứng minh $eJ(R)e \subset J(eRe)$

Ngược lại, nếu $a \in eJ(R)e$ thì $ea e \in e^2 J(R) e^2 = eJ(R)e \Rightarrow a \in J(R)$ do đó a có tựa nghịch đảo trái và phải trong R . Khi đó $\exists a' \in R$ sao cho $a + a' + aa' = 0$ suy ra $ea e + ea'e + eaa'e = 0$ vì $a \in eJ(R)e$ nên $ea e = a$ do đó $ea e + ea'e + eaa'e = a + ea'e + eaa'e = 0$. Vì tựa nghịch đảo phải của a là duy nhất nên $a' = ea'e \in eRe$.

Vậy mọi phần tử trong $eJ(R)e$ đều tựa chính quy trong eRe và $eJ(R)e$ là một ideal của eRe , tức ta có $eJ(R)e$ là một ideal tựa chính quy của eRe do đó $eJ(R)e \subset J(eRe)$.

1.10.8. Định lý:

Cho R là một vành không có ideal lũy linh khác (0) và giả sử $e \neq 0$ là một phần tử lũy đẳng trong R . Khi đó, eR là một ideal phải tối tiểu của R khi và chỉ khi eRe là một thể.

Chứng minh:

- Chiều thuận

Giả sử $\rho = eR$ là một ideal phải tối tiểu của R . Vì R là một vành nên eRe cũng là một vành. Nếu $ea e \in eRe$ và $ea e \neq 0$ thì $ea e R \neq (0)$ (vì $ea e R = (0) \Rightarrow ea ee = ea e = 0$ mâu thuẫn) và $ea e R$ là một ideal của R mà $ea e R \subset eR$ suy ra $ea e R = eR$ (do eR là một ideal phải tối tiểu của R) do đó tồn tại $y \in R$ sao cho $ea ey = e \Rightarrow ea eye = e^2 = e$ khi đó ta có $(ea e)(eye) = e$.

Do đó eRe là một thể với phần tử đơn vị là e

- Chiều đảo

Giả sử eRe là một thể ta chứng minh $\rho = eR$ là một ideal phải tối tiểu của R . Gọi $\rho_0 \neq (0)$ là một ideal phải của R sao cho $\rho_0 \subset \rho$ ta chứng minh $\rho_0 = \rho$.

Thật vậy, ta có $\rho_0 e \neq (0)$ vì nếu $\rho_0 e = (0) \Rightarrow \rho_0^2 \subset \rho_0 \rho = \rho_0 eR = (0)$ (mâu thuẫn với R là một vành không có ideal lũy linh khác (0)). Khi đó tồn tại $x \in \rho_0$ sao cho $xe \neq 0$ mặt khác ta có $x \in \rho_0 \subset \rho = eR$ nên lại tồn tại $u \in R$ sao cho $x = eu$. Đặt $a = eue \in eRe \Rightarrow a = xe \neq 0$ và $a \in \rho_0$ (vì $x \in \rho_0$ và ρ_0 là một ideal phải của R), do eRe là một thể nên tồn tại $eu'e \in eRe$ sao cho $a(eu'e) = e$ suy ra $e \in \rho_0$ (do $a \in \rho_0$ và ρ_0 là một ideal phải của R). Do đó $eR \subset \rho_0$ hay $\rho \subset \rho_0 \Rightarrow \rho_0 = \rho$.

Vậy $\rho = eR$ là một ideal phải tối tiểu của R .

Chứng minh tương tự như trên ta cũng có : Cho R là một vành không có ideal lũy linh khác (0) và giả sử $e \neq 0$ là một phần tử lũy đẳng trong R . Khi đó, Re là một ideal trái tối tiểu của R khi và chỉ khi eRe là một thể.

1.10.9. Hệ quả:

Cho R là vành không có ideal lũy linh khác (0) và e là một phần tử lũy đẳng trong R . Khi đó, eR là một ideal phải tối tiểu của R khi và chỉ khi Re là một ideal trái tối tiểu của R .

1.10.10. Định lý:

Cho R là một vành Artin, nửa đơn và $\rho \neq (0)$ là một ideal phải của R . Khi đó tồn tại phần tử lũy đẳng $e \in R$ sao cho $\rho = eR$.

Chứng minh:

Vì R là vành nửa đơn và $\rho \neq (0)$ là một ideal phải của R nên ρ không phải là ideal lũy linh (nếu ρ là ideal phải lũy linh thì $\rho \subset J(R) = (0) \Rightarrow \rho = (0)$). Vì R là vành Artin nên theo định lý 1.3.2.2 thì ρ có chứa phần tử lũy đẳng khác 0. Giả sử e là phần tử lũy đẳng trong ρ , đặt $A(e) = \{x \in \rho \mid ex = 0\}$, dễ thấy $A(e)$ là một ideal phải của R . Tập các ideal phải $\{A(e) \mid 0 \neq e^2 = e \in \rho\}$ của R là tập không rỗng và R là vành Artin nên tồn tại phần tử tối tiểu $A(e_0)$.

Nếu $A(e_0) = (0)$ thì $\forall x \in \rho$ ta có $e_0(x - e_0x) = 0 \Rightarrow x - e_0x \in A(e_0) = (0)$ suy ra $x - e_0x = 0 \Rightarrow x = e_0x, \forall x \in \rho$ do đó $\rho = e_0\rho \subset e_0R$ mà $e_0 \in \rho$ nên $e_0R \subset \rho$. Vậy $\rho = e_0R$ với e_0 là một phần tử lũy đẳng trong R .

Tiếp theo ta sẽ chứng minh không xảy ra trường hợp $A(e_0) \neq (0)$. Thật vậy, giả sử $A(e_0) \neq (0)$ và ta có $A(e_0)$ là một ideal phải của vành nửa đơn R nên $A(e_0)$ là một ideal phải không lũy linh của R . $A(e_0)$ có chứa phần tử lũy đẳng e_1 . Vì $A(e_0) = \{x \in \rho \mid e_0 x = 0\}$ nên $e_1 \in \rho$ và $e_0 e_1 = 0$. Đặt $e^* = e_0 + e_1 - e_1 e_0 \in \rho$ (vì $e_0 \in \rho, e_1 \in \rho$) do $e_0 e_1 = 0$ nên ta có $(e^*)^2 = (e_0 + e_1 - e_1 e_0)(e_0 + e_1 - e_1 e_0) = e_0 + e_1 e_0 + e_1 - e_1 e_0 - e_1 e_0 = e_0 + e_1 - e_1 e_0 = e^*$ và $e^* e_1 = (e_0 + e_1 - e_1 e_0)e_1 = e_1 \neq 0 \Rightarrow e^* \neq 0$. Vậy $e^* \in \rho$ là phần tử lũy đẳng.

Khi đó $\forall x \in \rho$ nếu $e^* x = 0$ thì $(e_0 + e_1 - e_1 e_0)x = 0 \Rightarrow e_0(e_0 + e_1 - e_1 e_0)x = 0$ suy ra $e_0 x = 0$, do đó ta có $A(e^*) \subset A(e_0)$ ta lại có $e_1 \in A(e_0)$ và $e_1 \notin A(e^*)$ (vì $e^* e_1 \neq 0$) nên $A(e^*) \neq A(e_0)$. Tức $A(e^*)$ chứa trong $A(e_0)$ thực sự (mâu thuẫn với tính tối tiểu của $A(e_0)$).

Vậy không xảy ra trường hợp $A(e_0) \neq (0)$, định lý được chứng minh.

1.10.11. Hệ quả:

Nếu R là một vành Artin, nửa đơn và $A \neq (0)$ là một ideal của R thì $A = eR = Re$, trong đó e là phần tử lũy đẳng nằm trong tâm của R .

Chứng minh:

Vì $A \neq (0)$ là một ideal của R , theo phần chứng minh định lý tồn tại phần tử lũy đẳng $e \in A$ sao cho $A = eR$. Gọi $B = \{x - xe \mid x \in A\}$, theo chứng minh định lý ta cũng có $ex = x, \forall x \in A \Rightarrow eA = A$ và $Be = (0)$ nên $BA = BeA = (0)$.

Mặt khác, A là một ideal trái của R nên B cũng là một ideal trái của R và $B \subset A \Rightarrow B^2 \subset BA = (0)$. Vì R là vành nửa đơn nên trong R không có ideal trái lũy linh khác (0) , do đó $B = (0)$. Suy ra $x - xe = 0, \forall x \in A \Rightarrow x = xe, \forall x \in A \Rightarrow A = Ae$. Vậy $eA = Ae = A$

Ta chứng minh $A = eR$.

Ta có $e \in A$, mà A là một ideal phải của R nên $eR \subset A$, mặt khác $A \subset R \Rightarrow A = eA \subset eR$. Do đó $A = eR$

Ta chứng minh e nằm trong tâm của R hay $e \in C(R)$

Lấy $y \in R \Rightarrow ye \in A$ (do $e \in A$) suy ra $ye = e(ye)$ vì e là đơn vị trái của A , tương tự ta có $ey \in A$ (do $e \in A$) $\Rightarrow ey = (ey)e$ vì e là đơn vị phải của A . Do đó $ye = eye = ey, \forall y \in R \Rightarrow Re = eR$ và e nằm trong tâm của R .

1.10.11. Hệ quả:

Một vành Artin, nửa đơn luôn có phần tử đơn vị

Chứng minh:

Vì vành R cũng là một ideal của chính nó nên theo chứng minh hệ quả 1 ta chỉ việc thay ideal A bằng ideal R ta có điều phải chứng minh.

1.10.12. Bổ đề:

Một ideal của một vành Artin, nửa đơn cũng là một vành Artin, nửa đơn.

Chứng minh:

Giả sử R là một vành Artin, nửa đơn và $A \neq (0)$ là một ideal của R . Ta có $A = eR = Re$, trong đó $e \in Z$ và theo hệ quả 2 của định lý này thì R có phần tử đơn vị.

Lấy $x \in R$ ta có $x = xe + x(1-e)$ do đó $R = Re + R(1-e)$. Vì $1-e \in Z$ nên $R(1-e)$ là một ideal của R . Hơn nữa, $Re \cap R(1-e) = (0)$, vì nếu $x \in Re \cap R(1-e)$ thì $x = xe$ và $x = x(1-e) \Rightarrow xe = 0$. Do đó $R = A \oplus R(1-e)$ suy ra $A \cong R/R(1-e)$ (đẳng cấu vành) hay A là ảnh đồng cấu của một vành Artin nên A cũng là một vành Artin. Mặt khác theo hệ quả của định lý 1.3.1.2 thì $A \neq (0)$ là một ideal của một vành nửa đơn R nên A cũng là một vành nửa đơn.

1.11. Vành đơn:

Một vành R được gọi là vành đơn nếu $R^2 \neq (0)$ và R không có ideal thực sự nào.

1.11.1. Định lý:

Một vành Artin, nửa đơn là tổng trực tiếp của một số hữu hạn các vành Artin, đơn.

Chứng minh:

Giả sử R là một vành Artin, nửa đơn và $A \neq (0)$ là một ideal tối tiểu của R . Ta sẽ chứng minh A là đơn. Thật vậy, $A^2 \neq (0)$ vì nếu $A^2 = (0)$ thì A lũy linh nên $A \subset J(R) = (0) \Rightarrow A = (0)$ (mâu thuẫn).

Nếu $B \neq (0)$ là một ideal của A thì ABA là một ideal của R và $ABA \subset B$. Ta có A cũng là vành Artin, nửa đơn nên A có đơn vị do đó $AB \neq (0)$ và AB cũng là một ideal trái không lũy linh của R , từ đó suy ra $ABA \neq (0)$. Do tính tối tiểu của A nên ta có $A = ABA \subset B$. Do đó $B = A$. Vậy A là một vành Artin, đơn.

Ta có $R = A \oplus T_0$ trong đó T_0 là một ideal của R , vì thế T_0 cũng là một vành Artin, nửa đơn. Ta tiếp tục lấy một ideal tối tiểu A_1 của R nằm trong T_0 làm tương tự trên ta cũng có A_1 là Artin, đơn và $T_0 = A_1 \oplus T_1$ cứ tiếp tục làm như trên ta có các ideal $A = A_0, A_1, \dots, A_k, \dots$ của R đều là các vành Artin, đơn và $A_0 + A_1 + \dots + A_k$ là tổng trực tiếp.

Ta sẽ chứng minh tồn tại số k sao cho $R = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_k$. Thật vậy, nếu không ta đặt $R_0 = A_0 \oplus \dots \oplus A_k \oplus \dots, R_1 = A_1 \oplus \dots \oplus A_k \oplus \dots, \dots, R_m = A_m \oplus \dots \oplus A_k \oplus \dots$ thì đây là một chuỗi giảm các ideal của R nên phải dừng (do R là vành Artin).

Khi đó $R = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, định lý được chứng minh.

1.11.2. Bổ đề:

Nếu R là một vành Artin, nửa đơn và $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ trong đó với $i = 1, \dots, k$, A_i là đơn thì A_i vét hết tất cả các ideal tối tiểu của R .

Chứng minh:

Giả sử $B \neq (0)$ là một ideal tối tiểu của R . Vì R là một vành Artin, nửa đơn nên R luôn có đơn vị do đó $RB \neq (0)$. Do $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ suy ra $RB = A_1B \oplus \dots \oplus A_kB$ do đó tồn tại i sao cho $A_iB \neq (0)$. Dễ thấy A_iB là một ideal của A_i và $A_iB \subset A_i$ lại do A_i là đơn nên $A_iB = A_i$. Mặt khác, $B \neq (0)$ là một ideal tối tiểu của R và $A_iB \subset B$ nên ta cũng có $A_iB = B$. Từ đó suy ra $B = A_iB = A_i$.

1.12. Vành nguyên thủy:

Vành R được gọi là vành nguyên thủy nếu nó có module bất khả quy và trung thành.

i) Nếu R là vành nguyên thủy thì tồn tại M là một R -module bất khả quy và trung thành. Suy ra $A(M) = \{r \in R \mid Mr = (0)\} = (0)$. Xét ánh xạ $\phi: R \rightarrow E(M)$ định bởi $\forall r \in R, \phi(r) = T_r$ với $T_r: M \rightarrow M$ sao cho $T_r(m) = mr, \forall m \in M$. Ta có: M trung thành khi và chỉ khi $A(M) = \ker \phi = (0)$, tức ϕ là một đơn cấu, khi đó R nhúng đẳng cấu vào trong $E(M)$.

ii) Nếu R là vành nguyên thủy thì R có module bất khả quy và trung thành M_0 . Khi đó $A(M_0) = (0)$ và $J(R) = \cap A(M) \subset A(M_0) = (0)$
 $\Rightarrow J(R) = (0)$ hay R là vành nửa đơn.

Vậy mọi vành nguyên thủy đều là vành nửa đơn.

- Cho R là vành tùy ý và M là R -module bất khả quy. Khi đó $A(M)$ là ideal hai phía của R và M là $R/A(M)$ -module bất khả quy và trung thành.

Ta đã chứng minh $A(M)$ là ideal hai phía của R và M là $R/A(M)$ -module trung thành. Với M là R -module bất khả quy ta có $M(R/A(M)) = MR \neq (0)$. Lấy $N \neq (0)$ là một $R/A(M)$ -module con của M ta có $N(R/A(M)) = NR \subset N$ suy ra N cũng là R -module con của module bất khả quy M nên $N = M$. Vậy M là cũng $R/A(M)$ -module bất khả quy. Do đó $R/A(M)$ cũng là vành nguyên thủy.

- Cho R là vành tùy ý và ρ là ideal phải, tối đại, chính quy của R . Khi đó $M = R/\rho$ là R -module bất khả quy và $A(M) = (\rho : R)$ là ideal hai phía lớn nhất của R nằm trong ρ .

Theo trên ta cũng suy ra $R/(\rho : R)$ là vành nguyên thủy.

1.12.3. Định nghĩa:

Một ideal U của R được gọi là nguyên thủy trái (phải) nếu vành thương R/U là nguyên thủy trái (phải).

1.12.4. Bổ đề:

Một ideal U của vành R là nguyên thủy trái khi và chỉ khi U là một linh hóa tử của R -module trái bất khả quy nào đó.

Chứng minh:

Giả sử $U = A(M)$ là một linh hóa tử của R -module trái bất khả quy M nào đó. Khi đó dễ thấy M cũng là một R/U -module trái bất khả quy và trung thành, do đó vành R/U là nguyên thủy trái nên U là một ideal nguyên thủy trái của R .

Ngược lại, giả sử U là một ideal nguyên thủy trái suy ra R/U là vành nguyên thủy trái, do đó nó có R/U -module trái bất khả quy và trung thành M nào đó. Khi đó, M cũng là một R -module trái bất khả quy và do M là R/U -module trái trung thành linh nên hóa tử của M trong R chính là U .

Nhận xét.

Từ bổ đề trên và định nghĩa của căn Jacobson của vành R ta có thể định nghĩa căn Jacobson của vành R cũng là giao của tất cả các ideal nguyên thủy trái (phải) của R : $J(R) = \bigcap_P P$ trong đó P chạy qua khắp các ideal nguyên thủy một phía của R .

1.12.5. Định lý:

Vành R là vành nguyên thủy khi và chỉ khi tồn tại ρ là ideal phải, tối đại, chính quy trong R sao cho $(\rho : R) = (0)$. Trong trường hợp đó R là vành nửa đơn. Hơn nữa, nếu vành nguyên thủy R giao hoán thì R là một trường.

Chứng minh:

- Chiều thuận

Nếu R là vành nguyên thủy thì tồn tại một R -module bất khả quy và trung thành M , ta có M đẳng cấu với R/ρ trong đó ρ là ideal phải, tối đại, chính quy nào đó trong R .

Vì M là R -module trung thành nên R/ρ cũng là R -module trung thành. Do đó $\forall r \in R$ nếu $(R/\rho)r = (0)$ tức là $Rr \subset \rho$ thì $r = 0$, từ đó ta có $(\rho : R) = \{x \in R \mid Rx \subset \rho\} = (0)$.

- Chiều đảo

Giả sử, tồn tại một ρ là ideal phải, tối đại, chính quy trong R sao cho $(\rho : R) = (0)$. Ta cũng có $M = R/\rho$ là một R -module bất khả quy. Ta chứng minh $M = R/\rho$ là một R -module trung thành.

Nếu $Mr = (R/\rho)r = (0)$ thì $Rr \subset \rho \Rightarrow r \in (\rho : R) = (0) \Rightarrow r = 0$ nên $M = R/\rho$ là một R -module trung thành.

Vậy R là vành nguyên thủy.

- Ta chứng minh nếu vành nguyên thủy R giao hoán thì R là một trường. Thật vậy, vì R là vành nguyên thủy nên tồn tại ρ là ideal phải, tối đại, chính quy trong R sao cho $(\rho : R) = (0)$. Theo bài tập về đại số đại cương ta có R/ρ là một trường ta sẽ chứng minh R đẳng cấu với R/ρ

Xét toàn cấu chính tắc $p : R \rightarrow R/\rho$ xác định bởi $\forall r \in R, p(r) = \bar{r}$ ta chứng minh p cũng đơn cấu, thật vậy:

$$\ker p = \{r \in R \mid \bar{r} = 0\} = \{r \in R \mid r \in \rho\} \subset \{r \in R \mid Rr \subset \rho\} = (\rho : R) = (0)$$

Vậy p là một đẳng cấu hay $R \cong R/\rho$ nên R là một trường.

1.13. Vành nguyên tố:

Vành R được gọi là vành nguyên tố nếu với mọi $a, b \in R$ thì từ đẳng thức $aRb = (0)$ suy ra $a = 0$ hay $b = 0$.

Nhận xét. Vành R là vành nguyên tố khi và chỉ khi nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- a) Linh hóa tử bên phải của một ideal phải khác (0) của R phải bằng 0
- b) Linh hóa tử bên trái của một ideal trái khác (0) của R phải bằng 0 .
- c) Nếu A, B là hai ideal của R và $AB = (0)$ thì suy ra $A = (0)$ hoặc

$B = (0)$.

1.13.1. Bổ đề:

Mọi vành nguyên thủy đều là vành nguyên tố

Chứng minh:

Cho R là một vành nguyên thủy. Ta sẽ chứng minh linh hóa tử phải của một ideal phải khác (0) của R là bằng 0 . Thật vậy, cho $\rho \neq (0)$ là một ideal phải của R và giả sử $\rho a = (0)$. Vì R là vành nguyên thủy nên tồn tại M là R -module bất khả quy và trung thành. Do M trung thành và $\rho \neq (0)$ nên suy ra $M\rho \neq (0)$, dễ thấy $M\rho$ là module con của module bất khả quy M do đó $M\rho = M$. Từ đó ta có $Ma = M\rho a = M(0) = (0)$, lại do M là module trung thành nên ta suy ra $a = 0$.

1.13.2. Mối quan hệ giữa các vành:

- i) Nếu R là vành đơn và R có đơn vị thì R là vành nửa đơn.

Thật vậy, vì R là vành đơn và $J(R)$ là một ideal của vành R nên xảy ra hai trường hợp : $J(R) = (0)$ hoặc $J(R) = R$. Mà vành R có đơn vị nên không xảy ra trường hợp $J(R) = R$.

Vậy $J(R) = (0)$ hay R là vành nửa đơn.

- ii) Nếu R vừa là vành đơn, vừa là vành Artin thì R là vành nửa đơn.

Thật vậy, vì R là vành đơn nên $R^2 \neq (0)$ và R^2 là một ideal của vành R , do đó $R^2 = R$. Hơn nữa, $J(R)$ cũng là một ideal của vành R và giả sử $J(R) \neq (0)$ suy ra $J(R) = R = R^2 \Rightarrow [J(R)]^n = R^n = R^2 \neq (0), \forall n \in \mathbb{N} (*)$. Mặt khác, R là vành Artin nên $J(R)$ là một ideal lũy linh do đó $\exists m \in \mathbb{N}$ sao cho $[J(R)]^m = (0)$ (mâu thuẫn với $(*)$).

Vậy $J(R) = (0)$ hay R là vành nửa đơn.

iii) Nếu R là vành nguyên thủy thì R là vành nửa đơn.

Thật vậy, Nếu R là vành nguyên thủy thì tồn tại ideal phải, tối đại, chính quy ρ sao cho $(\rho : R) = (0)$, mà $J(R) = \cap (\rho : R)$ với ρ chạy qua khắp các ideal phải, tối đại, chính quy của R nên $J(R) = (0)$.

Vậy R là vành nửa đơn.

iv) Nếu R vừa là vành đơn, vừa là vành nửa đơn thì R là vành nguyên thủy.

Thật vậy, với ρ là một ideal phải, tối đại, chính quy của R thì $(\rho : R)$ cũng là một ideal của R , do R là vành đơn nên $(\rho : R) = (0)$ hoặc $(\rho : R) = R$, cho ρ chạy qua khắp các ideal phải, tối đại, chính quy của R mà $(\rho : R) = R$ thì $J(R) = \cap (\rho : R) = R$ (mâu thuẫn với R là vành nửa đơn), do đó phải tồn tại một ideal phải, tối đại, chính quy ρ_0 của R sao cho $(\rho_0 : R) = (0)$.

Vậy R là vành nguyên thủy.

v) Nếu R vừa là vành đơn, vừa là vành Artin thì R là vành nguyên thủy. Thật vậy, vì R vừa là vành đơn, vừa là vành Artin nên theo 1.4.2 thì R là vành nửa đơn. Ta có R vừa là vành đơn, vừa là vành nửa đơn nên theo 1.4.4 thì R là vành nguyên thủy.

1.14. Vành nửa nguyên tố:

Vành A là vành nửa nguyên tố nếu A không ideal lũy linh khác 0.

Vành A là vành nguyên tố thì A là vành nửa nguyên tố.

1.15. Vành các thương bên phải theo nghĩa cổ điển:

Lấy A là vành con của vành Q . Vành Q được gọi là vành các thương bên phải theo nghĩa cổ điển của vành A khi và chỉ khi những điều kiện sau được thỏa mãn:

i) Mọi phần tử chính qui của A đều khả nghịch trong Q .

ii) Mỗi phần tử trong Q đều có dạng ab^{-1} , trong đó $a, b \in A$ và b là phần tử chính qui trong A .

Chương 2: ĐIỀU KIỆN CỦA ORE VỀ VÀNH

CÁC THƯƠNG BÊN PHẢI

2.1 Điều kiện Ore (phải):

Lấy vành A với $S = \{\text{các phần tử chính qui trong } A\}$, $S \neq \emptyset$. Bất kì $a \in A$ và $r \in S$ đều tồn tại một phần tử $y \in S$ và một phần tử $b \in A$ sao cho: $ay = rb$.

Vành Ore (phải) là vành thỏa mãn điều kiện Ore phải.

Vành Ore là vành thỏa mãn điều kiện Ore trái và phải.

Nếu A là miền nguyên thỏa mãn điều kiện Ore thì A là miền Ore.

Ví dụ:

- i) Vành giao hoán với tất cả các phần tử chính qui là một vành Ore.
- ii) Miền nguyên giao hoán là miền Ore.
- iii) $A = k\langle x, y \rangle$ không là vành Ore.

2.2 Định lí :

Vành A có một vành các thương bên phải khi và chỉ khi vành A thỏa mãn điều kiện Ore phải, nghĩa là vành A là vành Ore phải.

Chứng minh:

Lấy vành A thỏa mãn điều kiện Ore phải, S là tập các phần tử chính qui của A .

Ta xây dựng một quan hệ $\sim$ trên tập hợp $A \times S$ như sau:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \exists x, y \in A : \begin{cases} bx = dy \in S \\ ax = cy \in A \end{cases}$$

- Quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $A \times S$

i) Tính phản xạ

ii) Tính đối xứng

iii) Tính bắc cầu

Giả sử $(a, b) \sim (c, d)$ và $(c, d) \sim (f, g)$

Theo định nghĩa tồn tại $x, y, x_1, y_1 \in A$ sao cho:

$$\begin{cases} bx = dy \in S \\ ax = cy \in A \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} dx_1 = gy_1 \in S \\ cx_1 = fy_1 \in A \end{cases}$$

Theo điều kiện Ore phải: $bxS \cap dx_1A \neq \emptyset$

Do đó tồn tại $s \in S, a' \in A$ sao cho: $bxS = dx_1a' \in S$

Vì $bx = dy$ nên $dy_s = bxs = dx_1a'$ hay $d(y_s - x_1a') = 0$

Mà d là phần tử chính qui nên $y_s = x_1a'$

Ta sẽ có:

$$a(xs) = (ax)s = (cy)s = c(y_s) = c(x_1a') = (fy_1)a' = f(y_1a') \in A$$

$$b(xs) = (bx)s = (dy)s = d(y_s) = d(x_1a') = (gy_1)a' = g(y_1a') \in S$$

Nghĩa là $(a, b) \sim (f, g)$.

Vậy quan hệ $\sim$ là quan hệ tương đương.

Kí hiệu tập tất cả các lớp tương đương theo quan hệ $\sim$ là AS^{-1} .

Lớp tương đương với phần tử đại diện (a, b) là a/b hoặc ab^{-1} .

• Định nghĩa phép cộng trên AS^{-1} :

Nếu $a/b, c/d \in AS^{-1}$ thì theo điều kiện Ore: $\exists x, y \in S : m = bx = dy \in S$ (rõ ràng $a/b = ax/m$ và $c/d = cy/m$). Ta định nghĩa phép cộng trên AS^{-1} như sau:

$$a/b + c/d = (ax + cy)/m$$

i) Phép cộng không phụ thuộc cách chọn m :

Thật vậy, nếu $m' = bx' = dy' \in S (x', y' \in S)$ và $mu = m'v (u, v \in S)$

Kéo theo $bxu = bx'v$

Vì $b \in S$ nên $xu = x'v$

Chứng minh tương tự ta có: $yu = y'v$

Do đó: $(ax + cy)u = (ax' + cy')v$

Hay $(ax + cy)/m = (ax' + cy')/m'$

ii) Phép cộng không phụ thuộc cách chọn đại diện của lớp a/b

Thật vậy, nếu $a/b = a'/b'$ thì ta có $x', y', z \in S : m' = bx' = dy' = b'z$

Do đó: $ax' = a'z$

Mặt khác $t = a/b + c/d$

$$= (ax + cy)/m$$

$$= (ax' + cy')/m'$$

Vì thế $t = (a'z + cy')/m' = a'/b' + c/d$

• Định nghĩa phép nhân trên AS^{-1} :

Nếu $a/b, c/d \in AS^{-1}$ thì $\exists y_1 \in S, x_1 \in A : n = bx_1 = cy_1 \in S$ (lưu ý $a/b = ax_1/n, c/d = n/dy_1$), ta có định nghĩa:

$$(a/b).(c/d) = ax_1/dy_1$$

Phép nhân không phụ thuộc cách chọn x_1, y_1 trong đẳng thức $bx_1 = cy_1$ và cách chọn đại diện $a/b, c/d$

Lấy $a/b = a'/b'$

Chọn $u, v \in S : bu = b'v \Rightarrow au = a'v$

Tồn tại $x \in A, y \in S : n' = bux = cvy = b'vx$

Khi đó $(a/b)(c/d) = (aux)/(dvy)$

$$= (a'vx)/(dvy)$$

$$= (a'/b')(c/d)$$

• $(AS^{-1}, +, .)$ là một vành có phần tử đơn vị là $1/1$.

• $\varphi : A \rightarrow AS^{-1}, \varphi(a) = a/1$ là một đồng cấu vành.

Hơn nữa, lấy $a \in S, a/1$ có phần tử nghịch đảo trong AS^{-1} là $(a/1)^{-1} = 1/a$

Nếu $a/b \in AS^{-1}$ thì $a/b = (a/1)(1/b)$

Điều này chỉ ra rằng AS^{-1} vành các thương bên phải của vành con $\text{Im } \varphi$

Vì thế A có vành các thương bên phải.

2.3 Định lí :

A là miền Ore phải khi và chỉ khi A có vành các thương bên phải là vành chia được.

Chứng minh:

Nếu A là một miền Ore phải thì theo định lí 2.2, A có một vành các thương bên AS^{-1} . Ta sẽ chứng minh rằng AS^{-1} là vành chia được.

Thật vậy, lấy $a/b \in AS^{-1}$ và $a/b \neq 0$ suy ra $a \neq 0$

Vì A là miền nguyên nên $a \in S$

Vì thế $b/a \in AS^{-1}$ và là phần tử nghịch đảo của a/b

Do đó AS^{-1} là vành chia được.

Ngược lại, lấy $a, b \in A$ và $a, b \neq 0$

Vì tất cả các phần tử chính qui là khả nghịch trong AS^{-1} , $a^{-1}b \in AS^{-1}$

Nên $a^{-1}b = xy^{-1} (x, y \in A)$ hay $ax = by$

Suy ra A là vành Ore phải.

Mà là vành chia được nên tất cả các phần tử khác 0 của A đều không là ước của 0

Do đó A là miền Ore phải.

2.4 Định lí :

A là vành Ore phải và S là tập không rỗng các phần tử chính qui trong A thì bất kì $a_1b_1^{-1}, a_2b_2^{-1} \in AS^{-1}$ đều tồn tại $s \in S$ và $t_1, t_2 \in A$ sao cho:

$$a_ib_i^{-1} = (a_it_i)s^{-1}, \quad i=1,2$$

Chứng minh:

Từ điều kiện Ore phải với $b_1, b_2 \in S$ đều tồn tại $t_1, t_2 \in A$ sao cho

$$s = b_1t_1 = b_2t_2 \in S$$

Khi đó ta có

$$a_ib_i^{-1} = (a_ib_i^{-1})s.s^{-1} = a_ib_i^{-1}b_it_i.s^{-1} = (a_it_i)s^{-1}$$

2.5 Định lí :

Nếu A là vành Ore phải và S là tập không rỗng các phần tử chính qui trong A thì ta có:

i) *Nếu I là ideal phải của A thì $IS^{-1} = \{xs^{-1} \mid x \in I, s \in S\}$ là ideal phải của AS^{-1}*

ii) *Nếu $I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$ là tổng trực tiếp các ideal phải của A thì $I_1S^{-1} \oplus I_2S^{-1} \oplus \dots \oplus I_nS^{-1}$ là tổng trực tiếp các ideal phải của AS^{-1} .*

Chứng minh:

i) Lấy $a_i \in I$ và $a_ib_i^{-1} \in IS^{-1} (i=1,2)$

Theo định lí 2.4 tồn tại $s \in S$ và $t_i \in A$ sao cho $a_ib_i^{-1} = (a_it_i)s^{-1}, i=1,2$

Ta có : $a_1b_1^{-1} + a_2b_2^{-1} = (a_1t_1)s^{-1} + (a_2t_2)s^{-1}$

$$= (a_1t_1 + a_2t_2)s^{-1} \in IS^{-1}$$

Suy ra IS^{-1} đóng với phép cộng (1)

Vì $S^{-1}A \subseteq AS^{-1}$ nên $IS^{-1}.AS^{-1} \subseteq IAS^{-1} = IS^{-1}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra là ideal phải của AS^{-1} .

ii) Lấy $a_i b_i^{-1} \in IS^{-1} (i = \overline{1, n})$ và $a_1 b_1^{-1} + a_2 b_2^{-1} + \dots + a_n b_n^{-1} = 0$

Theo định lí 2.4 tồn tại $s \in S$ và $t_i \in A$ sao cho $a_i b_i^{-1} = (a_i t_i) s^{-1}, i = \overline{1, n}$

Khi đó: $(a_1 t_1) s^{-1} + (a_2 t_2) s^{-1} + \dots + (a_n t_n) s^{-1} = 0$

Hay $a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n = 0$

Do $I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$ là tổng trực tiếp các ideal phải của A nên $a_i t_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$

Suy ra $a_i b_i^{-1} = (a_i t_i) s^{-1} = 0, i = \overline{1, n}$

Nghĩa là $I_1 S^{-1} \oplus I_2 S^{-1} \oplus \dots \oplus I_n S^{-1}$ là tổng trực tiếp các ideal phải của AS^{-1} .

2.6 Định lí :

Nếu A là vành Ore phải và S là tập không rỗng các phần tử chính qui trong A thì ta có:

i) Nếu I là ideal phải của AS^{-1} thì $I \cap A$ là ideal phải của A và $(I \cap A)S^{-1} = (I \cap A)AS^{-1}$

ii) Nếu $I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$ là tổng trực tiếp các ideal phải của AS^{-1} thì $(I_1 \cap A) \oplus (I_2 \cap A) \oplus \dots \oplus (I_n \cap A)$ là tổng trực tiếp các ideal phải của A .

Chứng minh:

i) Hiển nhiên $(I \cap A)S^{-1} \subseteq I$

Ngược lại, lấy $x = ab^{-1} \in I$

Suy ra $a = xb \in I \cap A$

Hay $x \in (I \cap A)S^{-1}$.

ii) Hiển nhiên.

Chương 3: ĐIỀU KIỆN CỦA GOLDIE VỀ VÀNH CÁC THƯƠNG BÊN PHẢI

3.1. Điều kiện Goldie (phải):

3.1.1 Định nghĩa:

- Lấy tập $S \subset A$, thì ta gọi $r.\text{ann}_A(S) = \{x \in A \mid sx = 0, \forall s \in S\}$ là linh hóa tử phải của S .
- Một ideal phải I của A được gọi là linh hóa tử phải nếu có một tập $S \subset A$ sao cho $I = r.\text{ann}_A(S)$.
- Ta có định nghĩa tương tự cho linh hóa tử bên trái $l.\text{ann}_A(S)$.
- Để đơn giản trong mặt kí hiệu ta có thể xem
 $r_A(S)$ hoặc $r(S)$ thay cho $r.\text{ann}_A(S)$
 $l_A(S)$ hoặc $l(S)$ thay cho $l.\text{ann}_A(S)$
- Vành Goldie phải là vành:
 - i) Thỏa mãn điều kiện dãy tăng trên các linh hóa tử phải.
 - ii) Có tổng hữu hạn trực tiếp các ideal phải khác 0.

3.1.2. Mệnh đề:

Ideal phải I của A là linh hóa tử phải khi và chỉ khi $I = r(l(I))$.

Chứng minh:

Thật vậy, $I = r(X), (X \subseteq A)$

Khi đó ta có $X \subseteq l(I)$

Vì thế $I = r(X) \supseteq r(l(I)) \supseteq I$. (đpcm)

3.1.3. Định lý: (điều kiện Goldie phải)

Nếu A là vành Goldie phải nửa nguyên tố thì A có một vành các thương bên phải, và vành các thương bên phải này là vành nửa đơn.

Chứng minh:

3.1.4. Bổ đề 1:

A là vành nửa nguyên tố thỏa điều kiện dãy tăng trên các linh hóa tử phải. Nếu I và J là ideal phải của A , $J \subseteq I$ và $l(I) \neq l(J)$ thì có phần tử $a \in I$ sao cho $aI \neq 0$ và $aI \cap J = 0$.

Chứng minh:

- Vì $J \subseteq I$ nên $l(J) \supseteq l(I)$

Mà $l(I) \neq l(J)$ nên $l(J) \supset l(I)$

Theo điều kiện dãy tăng trên các linh hóa tử phải kéo theo điều kiện dãy giảm trên các linh hóa tử trái.

Bây giờ ta lấy U là linh hóa tử trái nhỏ nhất thỏa $l(J) \supseteq U \supset l(I)$

Vì $UI \neq 0$ và A là nửa nguyên tố nên $UIUI \neq 0$

Do đó tồn tại $au \in IU$ sao cho $UauI \neq 0$

- Giả sử $auI \cap I \neq 0$ thì tồn tại $x \in I$ sao cho $0 \neq aux \in I$

Vì $x \in I$ nên $l(x) \supseteq l(I)$, hơn nữa là $U \cap l(x) \supseteq l(I)$

Do tính tối tiểu của U nên $U \cap l(x) = l(I)$ hay $U \cap l(x) = U$ (vì giao các linh hóa tử trái là linh hóa tử trái)

Suy ra $U \subset l(x)$ nên $ux = 0$ (vô lí vì $aux \neq 0$)

$l(J) \supseteq U, aux \in J$ suy ra $Uaux = 0$

Do đó $Uau \subset l(x) \Rightarrow Uau \subset U \Rightarrow Uau \subset l(I)$ (không xảy ra).

Bổ đề được chứng minh.

3.1.5. Hệ quả 1:

A là vành nửa nguyên tố thỏa điều kiện dãy tăng trên các linh hóa tử phải. Nếu x_A và y_A là hai ideal cốt yếu của A thì yxA là một ideal cốt yếu của A

Chứng minh:

Lấy I là ideal phải khác 0

$$B = \{a \in A : ya \in I\}$$

Vì y_A là ideal cốt yếu, $B \neq 0$ và $yB = y_A \cap I \neq 0$ nên theo định nghĩa của B ta được $r(y) \subseteq B$

Mà $yB \neq 0$ và $yr(y) = 0$ nên $l(B) \neq l(r(y))$

Theo bổ đề 1, tồn tại $u \in B$ sao cho $uB \neq 0$ và $uB \cap r(y) = 0$

Vì uB là ideal phải trong A và $uB \subset B$ nên nếu ta đặt $J = uB$ thì ta được $J \neq 0$ và $J \cap r(y) = 0$

Giả sử $K = \{a \in A : xa \in J\}$

Vì x_A là ideal cốt yếu nên $xK = x_A \cap J \neq 0$, hơn nữa $yxK \neq 0$

Bên cạnh đó $yxA \subseteq yJ \subseteq yA \subseteq A$ nên $yxA \cap I \neq 0$

Vì thế yxA là ideal cốt yếu.

3.1.6. Hệ quả 2:

A là vành nửa nguyên tố thỏa điều kiện dãy tăng trên các linh hóa tử phải. Nếu xA là ideal cốt yếu trong A thì x là phần tử chính qui trong A.

Chứng minh:

i) Xét $l(x)$

Vì A là nửa nguyên tố nên $l(A) = 0$

Nếu $l(x) \neq 0$ thì áp dụng bổ đề 1 cho ideal $I = A, J = xA$

Vì xA là ideal cốt yếu nên ta có $l(x) = 0$.

ii) Xét $r(x)$

Ta có: $r(x) \subseteq r(x^2) \subseteq \dots$

Theo điều kiện dãy tăng các linh hóa tử phải thì tồn tại $n > 0 : r(x^n) = r(x^{n+1})$

Nếu $a \in x^n A \cap r(x)$ thì $a = x^n y$ và $xa = 0 = x^{n+1} y$ (do $y \in r(x^{n+1}) = r(x^n)$ và $a = 0$)

Do đó $x^n A \cap r(x) = 0$

Theo hệ quả 3.1.5 thì $x^n A$ là ideal cốt yếu nên ta được $r(x) = 0$.

Vậy x là phần tử chính qui trong A.

3.1.7. Bổ đề 2:

Cho A là vành Goldie phải nửa nguyên tố thì A thỏa điều kiện dãy giảm trên các linh hóa tử phải.

Chứng minh:

Lấy $R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$ là dãy giảm nghiêm ngặt các linh hóa tử phải, nghĩa là $l(R_n) \neq l(R_{n+1}), \forall n$.

Áp dụng bổ đề 3.1.4, ta tìm được một ideal phải khác 0 là $I_i \subseteq R_i$ sao cho $I_i \cap R_{i+1} = 0$

Khi đó I_i tạo nên một tổng trực tiếp vô hạn các ideal phải trong A (mâu thuẫn với điều kiện A là vành Goldie phải). (đpcm)

3.1.8. Bổ đề 3:

Cho A là vành Goldie phải nửa nguyên tố. Nếu $x \in A$ và $r(x) = 0$ thì xA là ideal cốt yếu và x là phần tử chính qui.

Chứng minh:

Giả sử tồn tại ideal phải $I \neq 0$ của A sao cho:

Ta sẽ chứng minh rằng trong trường hợp này, các ideal phải $x^n I (n \geq 0)$ tạo thành một tổng trực tiếp vô hạn.

Vì $r(x) = 0$ nên $x^n I \neq 0$

Nếu có đẳng thức $a_0 + xa_1 + x^2a_2 + \dots + x^na_n = 0$, trong đó $a_i \in I$ và n là số nguyên dương bé nhất có tính chất này.

Khi đó $a_0 \in I \cap xA = 0$, ta thu được đẳng thức

$$x(a_1 + xa_2 + \dots + x^{n-1}a_n) = 0$$

Vì $r(x) = 0$ nên $a_1 + xa_2 + \dots + x^{n-1}a_n = 0$ (mâu thuẫn với tính tối tiểu của số nguyên dương n)

Vì thế $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$

Do A không có một tổng trực tiếp vô hạn các ideal phải nên ta được $I \cap xA \neq 0$, nghĩa là xA là ideal cốt yếu, và theo hệ quả 3.1.6 thì x là phần tử chính qui.

3.1.9. Bổ đề 4:

A là vành Goldie phải nửa nguyên tố. Nếu I là ideal phải cốt yếu của A thì I chứa phần tử chính qui của A .

Chứng minh:

- Ta chứng minh một ideal phải $I \neq 0$ bất kì của vành A có chứa một phần tử x thỏa $r(x) = r(x^2)$

Vì A là vành nửa nguyên tố nên chứa phần tử không lũy linh

Xét tập hợp các lũy thừa tử phải $S = \{r(y) \mid y \in I, y^n \neq 0\}$

Vì A là vành Goldie phải nên bất kì dãy giảm các phần tử của S đều có phần tử tối đại

Theo bổ đề Zorn, S có phần tử tối đại $r(x)$

Vì $r(x) \subseteq r(x^2)$ nên $r(x) = r(x^2)$

- Bây giờ ta lấy I là ideal cốt yếu của A

Giả sử I không chứa bất kì phần tử $d \in A$ sao cho: $r(d) = 0$

Trong trường hợp này ta có thể xây dựng một dãy các phần tử $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$, $a_i \neq 0, \forall i$ thỏa điều kiện:

$$\text{i) } r(a_i) = r(a_i^2), \forall i$$

$$\text{ii) } a_i a_j = 0, \forall i < j$$

$$\text{iii) } a_1 A \oplus a_2 A \oplus \dots \oplus a_n A \text{ là tổng trực tiếp}$$

Giả sử ta có dãy $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ thỏa điều kiện i), ii), iii)

$$\text{Lấy } b = a_1 + a_2 + \dots + a_n \in a_1 A \oplus a_2 A \oplus \dots \oplus a_n A$$

$$\text{Vì cách chọn } I \text{ không chứa phần tử } d \in A \text{ sao cho: } r(d) = 0 \text{ nên } b \neq 0 \text{ và } r(b) = \bigcap_{i=1}^n r(a_i)$$

$$\text{Lấy } X = r(b) \cap I$$

$$\text{Vì } I \text{ là ideal cốt yếu và } r(b) \neq 0 \text{ nên } X \neq 0$$

$$\text{Theo cách chứng minh trên } X \text{ có chứa phần tử lũy linh khác } 0 \text{ là } a_{n+1} \text{ sao cho } r(a_{n+1}) = r(a_{n+1}^2)$$

$$\text{Vì } a_{n+1} \in r(b) \text{ nên ta có } a_i a_{i+1} = 0, \forall i < n+1$$

$$\text{- Ta sẽ chứng minh } a_1 A \oplus a_2 A \oplus \dots \oplus a_n A \oplus a_{n+1} A \text{ là tổng trực tiếp}$$

$$\text{Lấy } y \in (a_1 A \oplus a_2 A \oplus \dots \oplus a_n A) \oplus a_{n+1} A$$

$$y = a_{n+1} x = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad (x, x_i \in A)$$

$$\text{Ta có: } 0 = a_1 a_{n+1} x = \sum_{i=1}^n a_1 a_i x_i = a_1^2 x_1$$

$$\text{Do đó } x_1 \in r(a_1^2) = r(a_1) \text{ hay } a_1 x_1 = 0$$

$$\text{Vì thế } a_{n+1} x = \sum_{i=2}^n a_i x_i$$

$$\text{Giả sử } a_j x_j = 0, \forall j < i < n \text{ hay } a_{n+1} x = \sum_{j=i}^n a_j x_j$$

$$\text{Suy ra } 0 = a_i a_{n+1} x = \sum_{j=i}^n a_i a_j x_j = a_i^2 x_i$$

$$\text{Khi đó } a_i x_i = 0$$

$$\text{Tiếp tục quá trình trên ta được } y = 0$$

Tức là ta có thể xây dựng được một tổng trực tiếp vô hạn $a_1 A \oplus a_2 A \oplus \dots \oplus a_n A \oplus a_{n+1} A \oplus \dots$ các ideal phải khác 0 (vô lí)

$$\text{Vậy } I \text{ phải chứa phần tử } d \in A \text{ sao cho: } r(d) = 0$$

Theo bổ đề 3.1.8, d là phần tử chính qui trong A .

Chứng minh định lý 3.1.3:

- Đầu tiên ta chỉ ra rằng A là vành Ore phải

Lấy $a \in A$ và $b \in S$

Theo bổ đề 3.1.8, bA là ideal cốt yếu trong A

Suy ra $X = \{u \in A : au \in bA\}$ cũng là ideal cốt yếu phải trong A

Theo bổ đề 3.1.9, X phải chứa phần tử chính qui $x \in S$ nên $ax = by, y \in A$

Do đó, A là vành Ore phải

Theo định lý 2.2 thì A có một vành các thương bên phải $Q = AS^{-1}$

- Bây giờ ta chứng minh Q là vành nửa đơn

Lấy I là ideal phải của Q thì $I_1 = I \cap A$ là ideal phải của A . (định lý 2.6)

Theo định lý 2.5, tồn tại một tổng trực tiếp tối đại các ideal phải $J = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$ của A chứa I_1 .

Từ tính tối đại của J suy ra J là ideal cốt yếu.

Theo bổ đề 3.1.9 thì J có chứa một phần tử chính qui

Do đó theo định lý 2.5, $JQ = Q$.

Đặt $P = I_2 \oplus \dots \oplus I_n$ thì theo định lý 2.5 ta có

$$Q = JQ = (I_1 \oplus P)Q = I_1 \oplus PQ$$

Tồn tại một phần tử lũy đẳng $e \in Q$ sao cho $I = eQ$

Thật vậy, bất kì ideal phải nào của Q đều là chính qui

Vì thế vành Q là vành Noether phải và vành Goldie phải.

Vì một ideal phải bất kì của Q đều được sinh bởi một phần tử lũy đẳng nên Q không có ideal lũy linh. (vì nếu e là một phần tử lũy đẳng khác 0 thì $e^n = e \neq 0, \forall n$)

Do đó Q là vành nửa nguyên tố.

Lấy I là ideal phải của Q thì $I = eQ$, trong đó $e^2 = e$ là phần tử lũy đẳng của Q

Vì e và $f = 1 - e$ là một cặp lũy đẳng trực giao nên $l(I) = l(e) = fQ$ và $eQ = r(f) = r(fQ)$

Do đó bất kì ideal phải của Q đều là linh hóa tử phải

Mà Q là vành Goldie phải nửa nguyên tố nên theo bổ đề 3.1.7 thì Q thoả mãn điều kiện dãy giảm trên các hoán tử phải và vì thế Q là vành Artin phải

- Vành Artin phải và nửa nguyên tố là vành nửa đơn.

3.2. Cấu trúc của vành Goldie nửa nguyên tố:

Chúng ta sẽ nghiên cứu một số kết quả mở rộng của định lý Goldie, bắt đầu bằng quan sát về vành các thương, nhưng theo một cách nhìn khác: Lấy một vành các thương cố định và kiểm tra các vành con của nó là vành các thương bên phải.

3.2.1. Mệnh đề:

Nếu Q là vành Artin phải thì Q là vành các thương phải. Hơn nữa, mỗi phần tử chính qui phải là khả nghịch.

Chứng minh:

Lấy $s \in Q$ là phần tử chính qui phải

Xét chuỗi giảm $\{s^n Q\}$

Vì Q là vành Artin phải nên tồn tại n sao cho: $s^n Q = s^{n+1} Q$ hay $s^n q = s^{n+1} q, q \in Q$

Vì s là chính qui phải nên s^n cũng là chính qui phải, do đó

$$s^n(sq - 1) = 0 \Rightarrow sq = 1$$

Suy ra s là chính qui trái (vì $as = 0 \Rightarrow a.sq = 0 \Rightarrow a = 0$)

$$s(qs - 1) = (sq - 1)s = 0 \Rightarrow qs = 1$$

Vậy $q = s^{-1}$.

3.2.2. Bổ đề:

Cho R_i là vành con (không nhất thiết chứa đơn vị 1) của vành các thương Q_i thì $\oplus R_i$ là một thứ tự phải trong $\oplus Q_i$ khi và chỉ khi R_i là thứ tự phải trong Q_i ($i = \overline{1, n}$).

- Có sự khác biệt giữa “ R là thứ tự phải trong Q ” và “ Q là vành các thương phải của R ”.

3.2.3. Mệnh đề:

Lấy R là vành con (có đơn vị 1) của vành Q và $S = \{ \text{phần tử khả nghịch của } Q \} \cap R$

i) Nếu Q là vành các thương phải của R thì Q là vành các thương, R là thứ tự phải trong Q và $S = C_R(0)$.

ii) Nếu Q là vành các thương và R là thứ tự phải trong Q thì $Q = R_S$. Hơn nữa, hoặc R là thứ tự trái trong Q hoặc Q là Artin phải thì $S = C_R(0)$ và Q là vành các thương bên phải của R .

Chứng minh:

i) Nếu $q \in Q$ là chính qui, $q = rs^{-1}, (r, s \in R)$ thì $r = qs \in C_R(0)$ là phần tử khả nghịch trong Q

Do đó Q khả nghịch và Q là vành các thương.

ii) $C_r(0) \subseteq C'_Q(0)$

- Nếu R là thứ tự trái thì $C_R(0) \subseteq C'_Q(0)$ suy ra $C_R(0) = S$

Do đó Q là vành các thương phải của R .

- Trong trường hợp Q là Artin phải thì $C'_Q(0) = C_Q(0)$ nên $C_R(0) = S$ và Q là vành thương phải của R .

Điều này chỉ ra rằng, khi Q là Artin nửa đơn thì sự khác biệt sẽ xuất hiện, vành Goldie nửa nguyên tố chính là định nghĩa với thứ tự phải có phần tử đơn vị 1 trong vành Artin nửa đơn.

3.2.4. Hệ quả :

R là vành Goldie phải nửa nguyên tố với vành các thương phải Q khi và chỉ khi $M_n(R)$ là vành Goldie phải nửa nguyên tố với vành các thương $M_n(Q)$.

Chứng minh :

- Giả sử R là vành Goldie phải nửa nguyên tố với vành các thương Q

Vì Q là vành Artin nửa đơn nên $M_n(Q)$ cũng là Artin nửa đơn

Ta sẽ chỉ ra rằng $M_n(R)$ là thứ tự phải trong $M_n(Q)$

Nếu $x \in M_n(Q)$ thì lấy mẫu số chung (bất kì tập hữu hạn $q_1, q_2, \dots, q_n \in Q$ đều có mẫu thức chung nghĩa là tồn tại $r_1, r_2, \dots, r_n \in R, s \in S : q_i = r_i s^{-1}, i = \overline{1, n}$) ta có thể viết x dưới dạng $(a_{ij}c^{-1}); a_{ij}, c \in R$

Do đó : $x = ac^{-1}; a, c \in M_n(R)$

Nên $M_n(R)$ là thứ tự phải trong $M_n(Q)$ tức cũng là Goldie phải nửa nguyên tố.

- Đảo lại, hiển nhiên.

3.2.5. Bổ đề :

R là thứ tự phải trong vành các thương Q và lấy S là vành con của Q (không chứa phần tử đơn vị 1). Giả sử có phần tử khả nghịch a, b của $Q : aRb \subseteq S$ thì S cũng là thứ tự phải trong Q .

Chứng minh :

Lấy $q \in Q$

Xét $a^{-1}qa = rt^{-1}, r, t \in R$

Suy ra $q = art^{-1}a^{-1} = arb(atb)^{-1}$

Do đó S là thứ tự phải trong Q .

3.2.6. Hệ quả:

i) Nếu R là thứ tự phải trong vành các thương Q và S là vành (không nhất thiết chứa đơn vị)
1) $R \subseteq S \subseteq Q$ thì S là thứ tự phải trong Q .

ii) Nếu R là vành Goldie phải nguyên tố, $0 \neq A \neq R$, S là vành con của R với $A \subseteq S \subseteq R$ thì S là vành Goldie phải nguyên tố và có vành thương tương tự như R .

Chứng minh :

i) Áp dụng bổ đề 3.2.5 với $a = b = 1$

ii) $A \triangleleft_e R_R$ do đó A có chứa phần tử chính qui $c \in R$ nên c là phần tử khả nghịch của vành các thương phải Q của R và $cR \subseteq S$.

3.2.7. Định lý: (định lý Goldie mở rộng cho vành không có đơn vị)

Vành R (không nhất thiết có đơn vị 1) là thứ tự phải trong vành Artin nửa đơn Q khi và chỉ khi R là vành Goldie phải nửa nguyên tố.

Chứng minh:

- Giả sử R là vành Goldie phải nửa nguyên tố thì R^1 cũng là vành Goldie phải nửa nguyên tố

Do đó R^1 có vành các thương Artin phải nửa đơn

Suy ra R^1 là thứ tự phải trong Q nên R là ideal cốt yếu của R^1

R sẽ chứa phần tử chính qui $a \in R^1$

Vì $aR^1 \subseteq R$ nên theo 3.2.6. R sẽ là thứ tự phải trong Q

- Đảo lại, hiển nhiên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. I.N. Herstein (1968), *Noncommutative Rings*, The Mathematical Association of America, USA.
2. I.N. Herstein, Lance W. Small (1979), *Some Comments on Prime Rings*, Journal of Algebra 60, pp.223-228.
3. J. C. McConnell, J. C. Robson (2001), *Noncommutative Rings*, American Mathematical Society, New York .
4. Nathan Jacobson (1975), *PI-Algebra an Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.