BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Nguyễn Thành Trung

SIÊU TÂM CỦA VÀNH NỬA ĐƠN

Chuyên ngành : Đại số và lý thuyết số

Mã số : 60 46 05

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. BÙI TƯỜNG TRÍ

Thành phố Hồ Chí Minh-2010

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên trong luận văn này cho tôi bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến PGS.TS. Bùi Tường Trí và các thầy cô khoa Toán Trường Đại Học Sư Phạm đã tận tình hướng dẫn giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn cao học .

Xin chân thành cảm ơn Phòng Sau Đại Học Trường Đại Học Sư Phạm và Ban Giám Hiệu Trường THPT Hàm Thuận Bắc đã tạo điều kiện tốt nhất để cho tôi hoàn thành khóa học.

Xin chân thành cảm ơn các bạn bè, đồng nghiệp, gia đình đã giúp đỡ tôi trong suốt khóa học, tạo điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập của mình.

TP.Hồ Chí Minh 09-2010

Nguyễn Thành Trung

LỜI MỞ ĐẦU

Trong các định lý về giao hoán được trình bày trong chương 3 cuốn sách vành không giao hoán của I.N. Hestein có định lý Kaplansky: Nếu R là vành không có nil-ideal khác không và với mọi phần tử a$\in$R, tồn tại số nguyên n=n(a) sao cho $a^n \in Z$ với Z là tâm vành R thì R là vành giao hoán. Herstein muốn mở rộng kết quả này bằng cách đưa vào khái niệm siêu tâm của vành đó là tập T(R)=$\left\{a \in R / ax^n = x^n a, n = n(x,a) \geq 1, \forall x \in R\right\}$. Rõ ràng T(R)$\supset$Z. Vấn đề đặt ra là với điều kiện nào của R thì siêu tâm trùng với tâm. Trong luận văn này, ban đầu bài toán được đặt ra với R là vành chia được thì siêu tâm trùng với tâm, tiếp theo là vành nủa đơn. Nhưng sau đó, tôi thấy rằng có thể mở rộng ra lớp vành không có nil-ideal khác không(phần này được đặt ra ở phần cuối chương 3 của cuốn luận văn này).

Luận văn được chia làm ba chương:

Chương 1 : Kiến thức cơ bản

Chương 2 : Các định lý về tính giao hoán

Chương 3 : Siêu tâm của vành nửa đơn.

Chương 1

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.1 Module

Định nghĩa 1.1.1: Nhóm cộng Abel M gọi là R_module nếu có một ánh xạ MxR$\to$M; (m,r)$\mapsto$mr sao cho $\forall m, m_1, m_2 \in M; \forall a, b \in R$

1. m(a+b)=ma+mb
2. $(m_1 + m_2)a = m_1 a + m_2 b$
3. (ma)b=m(ab)

Nếu vành R có đơn vị 1 và m1=m $\forall m \in M$ thì M được gọi là R_module đơn nguyên.

Định nghĩa 1.1.2: R_module M được gọi là R_module trung thành nếu Mr=0 thì r=0. Điều này có nghĩa là nếu r$\neq$0 thì Mr$\neq$0.

Nếu M là một R_module thì ta đặt A(M)=$\{r \in R \mid Mr = (0)\}$

Khi đó A(M) được gọi là linh hóa tử của M, đó chính là tập hợp tất cả các phần tử linh hoá toàn bộ M.

Bổ đề 1.1.1: A(M) là một ideal hai phía của R. Hơn nữa, M là một R/A(M)_module trung thành.

Chứng minh. A(M) là một ideal hai phía của R.

- $\forall x, y \in A(M)$: M(x-y)=Mx-My=0$\Rightarrow$x-y$\in$A(M)

$\forall x \in A(M), \forall r \in R,$ ta có :

- M(xr)=(Mx)r=(0)r=(0)$\Rightarrow$xr$\in$A(M)
- M(rx)=(Mr)x$\in$Mx=(0)$\Rightarrow$M(rx)=(0)$\Rightarrow$rx$\in$A(M)

- M là một R/A(M)_module trung thành, với phép nhân ngoài được xác định như sau: MxR/A(M)$\to$M; (m,r+A(M))$\mapsto$m(r+A(M))=mr$\in$M.
  - Định nghĩa này là hợp lý vì nếu có $r_1 + A(M) = r_2 + A(M)$ thì

$r_1 - r_2 \in A(M)$, suy ra m($r_1 - r_2$)=0$\Rightarrow$ $mr_1 = mr_2$. Hơn nữa, nếu M(r+A(M)) = (0) thì Mr=(0)$\Rightarrow$r$\in$A(M)=> r+A(M)=0. Do đó M là R/A(M)_module trung thành.

Ký hiệu E(M) là tập hợp tất cả các tự đồng cấu của nhóm cộng M. Khi đó, E(M) lập thành một vành với phép cộng và phép nhân ánh xạ thông thường. Với mỗi $r \in R$, ta định nghĩa T_r:$M \rightarrow M$ sao cho mT_r=mr, $\forall m \in M$. Do M là R_module nên $T_r \in E(M)$.

Ta định nghĩa ánh xạ ϕ:$R \rightarrow E(M)$ sao cho $\phi(r) = T_r, \forall r \in R$. Dễ dàng kiểm tra rằng ϕ là đồng cấu vành. Hơn nữa $\ker\phi$=A(M).

Bổ đề 1.1.2. R/A(M) đẳng cấu với một vành con của E(M)

Nếu M là R_module trung thành thì A(M)=0. Khi đó ϕ là một đơn cấu và ta có thể nhúng R vào E(M). Ký hiệu

C(M)=$\{\alpha \in E(M) / T_r\alpha = \alpha T_r, \forall r \in R\}$

Khi đó C(M) được gọi là vành giao hoán tử của R trên M. Tất nhiên C(M) là vành con của E(M). Hơn nữa nếu $\alpha \in C(M)$ thì $\forall m \in M, \forall r \in R$ ta có

$(m\alpha)r=(m\alpha)T_r=m(\alpha T_r)=m(T_r\alpha)=(mT_r)\alpha=(mr)\alpha$

Suy ra α không những là một tự đồng cấu của M như là nhóm cộng giao hoán mà còn là một tự đồng cấu của M như là R_module. Ngược lại ta dễ dàng kiểm tra được bất kỳ một tự đồng cấu R_module nào cũng thuộc C(M). Ta có thể định nghĩa C(M) như là vành các tự đồng cấu R_module.

Định nghĩa 1.1.3:M được gọi là một R_module bất khả quy nếu MR$\neq$(0) và M không có R_module con thực sự, tức M chỉ có các R_module con tầm thường là (0) và M.

Định lý 1.1.1(Bổ đề Schur) Nếu M là một R_module bất khả quy thì C(M) là một thể M(vành chia).

Chứng minh. Hiển nhiên, C(M) là vành con của E(M). Do đó C(M) là một vành. Ta chứng minh $\forall \alpha \in C(M)$ và $\alpha \neq 0$ đều có phần tử khả nghịch trong C(M). Thật vậy do $\alpha \neq 0$ nên $M\alpha \neq (0)$ và M α cũng là module con của M. Theo giả thiết, M là R_module bất khả quy nên $M\alpha$=M, suy ra$\Leftrightarrow \alpha$ là toàn cấu.Mặt khác α là đơn cấu do $\ker\alpha$=0. Nếu $\ker\alpha \neq 0$ thì $\ker\alpha$=M, suy ra α=0(mâu thuẫn). Vậy α là đẳng cấu nên tồn tại tự đồng cấu ngược $\alpha^{-1} \in E(M)$. $\alpha \in C(M) \Leftrightarrow \alpha T_r = T_r\alpha, \forall r \in R$

$$\Rightarrow \alpha^{-1}\alpha T_r = \alpha^{-1}T_r\alpha, \forall r \in R \Rightarrow T_r = \alpha^{-1}T_r\alpha, \forall r \in R$$

$$\Rightarrow T_r\alpha^{-1} = \alpha^{-1}R, \forall r \in R \Rightarrow \alpha^{-1} \in C(M)$$

Định nghĩa 1.1.4: Ideal phải ρ của R được gọi là chính quy nếu tồn tại phần tử $r \in R$ sao cho $x\text{-}rx \in \rho, \forall r \in R$.

Nếu vành R có đơn vị 1 thì mọi ideal đều là ideal chính quy vì ta chỉ cần chọn r=1 thì với mọi ideal ρ và $\forall x \in R$ thì x-1x=x-x=0 $\in \rho$.

Bổ đề 1.1.3. Nếu M là R_module bất khả quy thì M đẳng cấu (như là một module) với R_module thương R/ρ trong đó ρ là một ideal phải tối đại và chính quy nào đó của R. Ngược lại nếu ρ là một ideal phải tối đại và chính quy thì R_module thương R/ρ là R_module bất khả quy.

Chứng minh. Giả sử M là R_module bất khả quy, khi đó MR$\neq$(0). Đặt

$$S=\{m \in M / mR = (0)\}$$

Dễ dàng kiểm tra được S là module con của M. Nếu S$\neq$(0) thì S=M (do M là module bất khả quy) suy ra MR=(0)(mâu thuẫn). Do đó S=(0),nên $\forall m \in M$ và m$\neq$0 thì mR$\neq$(0), suy ra mR=M.

Xét ánh xạ ϕ:R$\rightarrow$M

r$\mapsto$mr

Dễ dàng kiểm tra ϕ là đồng cấu. Hơn nữa,do mR=M nên ϕ là toàn cấu. Theo định lý Noether ta có đẳng cấu R/ker$\phi \cong$M. Đặt ρ=kerϕ, ta chứng minh ρ là ideal phải tối đại chínhquy của R.

- Hiển nhiên ρ là ideal phải của R.
- ρ tối đại

  Giả sử có ρ' là ideal phải của R sao cho $\rho \subsetneq \rho'$. Khi đó $\rho'/\rho \neq (0)$ là module con của R/ρ. Do R/$\rho \cong$M là R_module bất khả quy nên ρ'/ρ=R/ρ, suy ra ρ'=R. Do đó ρ là ideal phải tối đại của R.

- ρ chính quy

  Từ đẳng thức mR=M, suy ra tồn tại r$\in$R sao cho mr=m. Khi đó $\forall x \in R$:m(x-rx)=mx-mrx=mx-mx=0$\Rightarrow$x-rx$\in \rho$.

  Ngược lại giả sử ρ là ideal phải tối đại và chính quy của R. Ta sẽ chứng minh R/ρ là R_module bất khả quy.

- (R/ρ)R$\neq$(0)

  Do ρ là ideal phải chính quy nên tồn tại r$\in$R sao cho x-rx$\in \rho, \forall x \in R$. Từ đó suy ra có x$\in$R sao cho rx$\notin \rho$. Thật vậy, nếu $\forall x \in R$ ta đều có rx$\in \rho, \forall x \in R \Rightarrow \rho$=R(mâu thuẫn). Vậy (r+$\rho$)x$\neq$0.

- Do ρ là ideal phải tối đại nên R/ρ không có module con thật sự.

  Vậy R/ρ là R_module bất khả quy.

1.2 Căn Jacobson của một vành

Định nghĩa 1.2.1. Căn Jacobson của vành R, ký hiệu J(R) hoặc Rad(R), là tập hợp tất cả các phần tử của R linh hoá được tất cả các R_module bất khả quy.

J(R)={$r \in R / Mr = (0)$, với mọi M là R_module bất khả quy}

Nếu R không có R_module bất khả quy thì ta quy ước J(R)=R . Khi đó vành R được gọi là vành Radical. Theo bổ đề 1.1.3 t a có kết quả vành R là vành Radical nếu R không có ideal phải tối đại chính quy.

Nhận xét. Nếu R có đơn vị 1 thì R không là vành Radical.

Ta có A(M)= $\{r \in R / Mr = 0\}$

Khi đó J(R)=$\bigcap A(M)$ (M là R_module bất khả quy)

Do A(M) là một ideal hai phía của R nên J(R) cũng là một ideal hai phía của R. Mặt khác vì ta chỉ xét M như là R_module phải nên J(R) còn được gọi là căn Jacobson phải của vành R. tương tự ta cũng có định nghĩa căn Jacobson trái của vành R.

Cho ρ là một ideal phải của vành R. Ta định nghĩa

(ρ:R)=$\{r \in R / Rr \subseteq \rho\}$

Xét trường hợp ρ là ideal phải tối đại chính quy của R. Ta đặt M=R/ρ theo bổ đề 1.1.3 ta suy ra M là R_module bất khả quy.

A(M)=$\{r \in R / Mr = (0)\} = \{r \in R / (R/\rho)r = 0\} = \{r \in R / Rr \subseteq \rho\} = (\rho : R)$

Suy ra (ρ:R) là ideal hai phía của R. Dễ dàng kiểm tra được (ρ:R) là ideal hai phía lớn nhất của R nằm trong ρ.

Định lý 1.2.1. J(R)=$\bigcap (\rho : R)$ (ρ là ideal phải tối đại và chính quy)

Ta chỉ cần chứng minh (ρ:R) là ideal hai phía lớn nhất của R nằm trong ρ.

- Dễ dàng kiểm tra (ρ:R) là ideal hai phía.
- $\forall x \in (\rho : R) \Rightarrow Rx \subseteq \rho.$ Ta có rx$\in \rho$. Do x-rx$\in \rho$ nên x$\in \rho$. Do đó (ρ:R)$\subset$ ρ.
- Giả sử có là ideal hai phía của R sao cho $\rho' \subset \rho$. Khi đó $\forall x \in \rho'$ thì

  $Rx \subset \rho' \subset \rho$ $\Rightarrow$x$\in$(ρ:R) nên $\rho' \subset$(ρ:R).

Bổ đề 1.2.1. Nếu ρ là ideal phải chính quy thật sự bất kỳ thì bao giờ cũng nhúng ρ vào một ideal phải tối đại chính quy nào đó của R.

Định lý 1.2.2. J(R)= $\bigcap \rho$(ρ là ideal phải tối đại và chính quy)

Chứng minh. Theo định lý 1.2.1 ta có:

J(R)=$\bigcap(\rho:R) \subset \bigcap\rho$ (ρ là ideal phải tối đại và chính quy)

Đặt $\tau=\bigcap\rho$ (ρ là ideal phải tối đại và chính quy)

Khi đó J(R) $\subset \tau$. Ta chứng minh $\tau \subset$ J(R)

Với mỗi x$\in \tau$, ta xét tập hợp $\rho'=\{xy+x / y \in R\}$. Ta chứng minh ρ' ≡R. Giả sử $\rho' \neq$R. Khi đó ρ' là một ideal phải chính quy của R. Tính chính quy của ρ' có được là do ta chọn a=-x suy ra y-ax=y+xy $\in \rho'$; $\forall$ y$\in$R. Theo bổ đề 1.2.1 ta có ρ' được nhúng vào một ideal phải tối đại và chính quy ρ_0 nào đó của R.

Khi đó x$\in \tau \subset \rho_0 \Rightarrow$x$\in \rho_0 \Rightarrow$xy$\in \rho_0$ và y+xy$\in \rho_0$ nên y$\in \rho_0$.Vậy $\forall$ y$\in$R$\Rightarrow$y$\in \rho_0$ do đó ρ_0=R(mâu thuẫn tính tối đại của ρ_0) nên ρ'=R. $\forall$ x$\in \tau$ tồn tại w$\in$R:xw+w=-x hay x+w+xw=0. Đây là một tính chất quan trọng của một phần tử thuộc τ. Phần tử có tính chất như vậy được gọi là tựa chính quy phải. Ta chứng minh $\tau \subset$ J(R) bằng phản chứng:

Giả sử $\tau \not\subset$ J(R), khi đó tồn tại một module bất khả quy M không bị τ linh hoá nghĩa là M$\tau \neq$(0). Suy ra tồn tại m$\in$M, m$\neq$0 sao cho m$\tau \neq$(0). Dễ dàng kiểm tra mτ là module con của M và do M bất khả quy nên mτ=M. Do đó tồn tại t$\in \tau$ sao cho mt=-m. Do t$\in \tau$ nên tồn tại s$\in$R sao cho t+s+ts=0.Khi đó, 0=m0=m(t+s+ts)=mt+ms+mts=-m+ms-ms=-m. Suy ra m=0(mâu thuẫn).Vậy $\tau \subset$J(R).

Như vậy chúng ta đã khảo sát cấu trúc căn Jacobson trên cơ sở M là R_module phải. Trong trường hợp M là R_module trái ta cũng có kết quả hoàn toàn tương tự. Vấn đề đặt ra là mối quan hệ giữa căn Jacobson trái và căn Jacobson phải như thế nào?

Định nghĩa 1.2.2. Phần tử a$\in$R được gọi là tựa chính quy phải nếu tồn tại $a' \in$R sao cho $a+a'+aa'$=0. Phần tử a' được gọi là tựa nghịch đảo phải của a.

Tương tự, ta cũng có định nghĩa phần tử tựa chính quy trái và phần tử tựa nghịch đảo trái.

Chú ý. Nếu vành R có đơn vị 1 thì phần tử a$\in$R là tựa chính quy phải khi và chỉ khi phần tử 1+a có nghịch đảo phải trong R.

Chứng minh. Giả sử phần tử a là tựa chính quy phải, thì tồn tại phần tử a' sao cho $a+a'+aa'=0$ suy ra $1+a+a'+aa'=0 \Rightarrow (1+a)(1+a')=1$. Vậy phần tử 1+a có phần tử nghịch đảo là $1+a'$.

Ngược lại, giả sử 1+a có nghịch đảo phải trong R. Do đó tồn tại $r \in R$ sao cho $(1+a)r=1 \Rightarrow r-1+ar=0$. Đặt $a'=r-1$, ta sẽ có đẳng thức $a+a'+aa'=0$. Vậy a là tựa chính quy phải.

Mệnh đề 1.2.1. Ideal J(R) là tựa chính quy phải. Nếu ρ là ideal tựa chính quy phải của vành R thì $\rho \subseteq J(R)$.

Chứng minh. Trong phần chứng minh định lý 1.2.2 ta đã chỉ ra được mọi phần tử của J(R) đều là phần tử tựa chính quy phải của R. Do đó J(R) là ideal tựa chính quy phải của R.

Lấy ρ là một ideal tựa chính quy phải của R. Giả sử $\rho \not\subset J(R)$. Khi đó tồn tại module bất khả quy M sao cho $M\rho \neq (0)$. Suy ra tồn tại $m \in M$ và $m \neq 0$ sao cho $m\rho \neq (0)$. Do $m\rho$ là module con của M và M bất khả quy nên $m\rho=M$, tồn tại $x \in \rho$, $x \neq 0$ sao $mx=-m$. Do $x \in \rho$ và ρ là ideal tựa chính quy phải nên tồn tại $x' \in R$ sao cho $x+x'+xx'=0$.

Ta có: $0=m0=m(x+x'+xx')=mx+mx'+mxx'=-m+mx'-mx'=-m$

Suy ra m=0(mâu thuẫn)

Từ mệnh đề trên suy ra định lý sau:

Định lý 1.2.3. J(R) là ideal tựa chính quy phải của R và nó chứa tất cả các ideal tựa chính quy phải của R. Do đó, J(R) là ideal tựa chính quy phải lớn nhất của R.

Trong quá trình xây dựng khái niệm căn Jacobson, ta chỉ xét M như là R_module phải nên J(R) còn được gọi là căn Jacobson phải của R, ký hiệu $J_{phải}(R)$. Tương tự nếu ta xét M như là R_module trái thì J(R) sẽ được gọi là căn Jacobson trái của R, ký hiệu $J_{trái}(R)$. Tiếp theo, ta sẽ cố gắng khẳng định kết quả

$$J_{phải}(R)= J_{trái}(R)$$

Giả sử a vừa là phần tử tựa chính quy phải vừa là phần tử tựa chính quy trái của R. Gọi b,c lần lượt là phần tử tựa nghịch đảo phải, tựa nghịch đảo phải của a. Ta có: a+b+ab=0 =>ca+cb+cab=0 và a+c+ca=0=>ab+cb+cab=0. Suy ra ca=ab=>b=c. Nghĩa là mọi phần tử tự nghịch đảo phải và tựa nghịch đảo trái của cùng một phần tử (nếu có) thì trùng nhau. Với mọi $a \in J(R)$, do J(R) là ideal tựa chính quy phải nên tồn tại $a' \in R$ sao cho $a+a'+aa'=0$. Khi đó $a'=-a-aa' \in J(R)$ và tồn tại $\in R$ sao cho $a'+a''+a'a''=0$. Ta có a là phần tử tựa nghịch đảo trái và a'' là phần tử tựa nghịch đảo phải của cùng phần tử a'. Theo nhận xét trên ta có $a=a''$.

Do đó $a+a^{'}+a^{'}a=0$, suy ra a cũng là phần tử tựa chính quy trái của R. Vậy J(R) cũng là ideal tựa chính quy trái của R.

Nếu ta xây dựng J(R) bằng cách xét M như là R_module trái thì ta cũng được kết quả J(R) là ideal hai phía lớn nhất trong tất cả các ideal tựa chính quy trái. Tóm lại ta đi đến kết quả thú vị :

$$J_{phải}(R)= J_{trái}(R)$$

Định nghĩa 1.2.3.

- Phần tử $a \in R$ được gọi là lũy linh nếu tồn tại số nguyên dương n sao cho $a^n=0$
- Một ideal(phải, trái, hai phía) được gọi là nil_ideal nếu mọi phần tử của nó đều là lũy linh.
- Một ideal(phải, trái, hai phía) ρ được gọi là lũy linh nếu tồn tại số nguyên dương n sao cho $a_1a_2..a_n = 0; \forall a_1, a_2,.., a_n \in \rho$. Điều này có nghĩa là $\rho^n = 0$.

Nhận xét. Nếu ρ là ideal lũy linh thì ρ là nil_ideal. Điều ngược lại không đúng. Mọi phần tử luỹ linh đều là phần tử tựa chính quy phải và tựa chính quy trái. Thật vậy, giả sử a là phần tử lũy linh của R, tức tồn tại số nguyên dương m sao cho $a^m=0$. Đặt $b=-a+a^2-a^3+..+(-1)^{m-1}a^{m-1}$. Khi đó ta dễ dàng kiểm tra được a+b+ab=0 và a+b+ba=0. Suy ra a cũng là phần tử tựa chính quy phải và cũng là phần tử tựa chính quy trái. Nói cách khác, mọi nil_ideal cũng là ideal tựa chính quy phải và cũng là ideal tựa chính quy trái. Do đó J(R) chứa mọi nil_ideal.

Căn của đại số

- Một đại số A trên trường F là một không gian vectơ trên F sao cho trên A có một phép nhân và cùng với phép nhân này, A là một vành. Hơn nữa cấu trúc không gian vectơ có thể khớp với cấu trúc vành theo luật:
  - $k(ab)=(ka)b=a(kb); \forall k \in F; \forall a,b \in A$
- Nếu A có đơn vị 1(đơn vị của vành đối với phép nhân) thì từ tính khớp(kết hợp trong) giữa hai cấu trúc(vành và không gian vectơ) ta có tập hợp các vô hướng F1 sẽ nằm trong tâm của A. Thật vậy, với mọi $k \in F$, với mọi $a \in A$, ta có:
  - $(k1)a=k(1a)=ka=k(a1)=a(k1)$
- Bất kể A có đơn vị hay không, các ánh xạ

- $T_a: A \to A; x \mapsto xT_a = xa$
- $L_a: A \to A; x \mapsto xL_a = ax$

là các phép biến đổi tuyến tính của A trên F.

- Đối với một đại số A, ta định nghĩa các khái niệm ideal, đồng cấu,.. bằng cách gán cho chúng thừa hưởng các cấu trúc của A. Chẳng hạn ρ được gọi là ideal của đại số A nếu ρ là ideal của vành A và ρ cũng là không gian con của không gian vectơ A trên F. Sử dụng các khái niệm trên ta có hoàn toàn thể định nghĩa căn của đại số A. Đó là giao của tất cả các ideal phải chính quy tối đại của đại số A.

Một câu hỏi được đặt ra một cách tự nhiên là liệu có sự tương đồng hay khác biệt nào giữa căn của đại số A và căn của vành A. Những lập luận dưới đây chứng tỏ chúng trùng nhau. Lấy ρ là một ideal phải chính quy tối đại của vành A. Ta sẽ chứng minh rằng ρ cũng là không gian con của không gian vectơ A trên F.

Giả sử phản chứng $F\rho \not\subset \rho$. Dễ dàng kiểm tra $F\rho$ là ideal phải của A. Do tính tối đại của ρ ta có $A = F\rho + \rho$. Vì vậy, ta có

$$A^2 = (F\rho + \rho)A \subset (F\rho)A + \rho A \subset \rho(FA) + \rho \subset \rho$$

Do ρ chính quy nên tồn tại $a \in R$ sao cho $x - ax \in \rho, \forall x \in A$. Mà $ax \in A^2 \subset \rho$ nên $x \in \rho, \forall x \in A$. Suy ra $\rho = A$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $F\rho \subset \rho$ và ρ là không gian con của không gian vectơ A trên F.

Vậy mỗi ideal phải chính quy tối đại của vành A cũng là ideal phải chính quy tối đại của đại số A trên F. Do đó theo định lý 1.2.2 căn của đại số A trùng với căn của vành A. Vậy ta có : $J_{\text{đại số}}(A) = J_{\text{vành}}(A)$

Nếu ta thương hóa R bởi căn Jacobson của nó thì vành thương nhận được sẽ có căn Jacobson như thế nào?

Định lý 1.2.4. $J(R/J(R)) = (0)$

Chứng minh. Đặt $\overline{R} = R/J(R)$ và ρ là ideal phải tối đại chính quy của R. Khi đó ta có $J(R) \subseteq \rho$. Do đó theo định lý đồng cấu, $\overline{\rho} = \rho/J(R)$ là một ideal phải tối đại chính quy của $\overline{R}$. Thật vậy, do $J(R) \subset \rho R$ nên ta có

$$R/\rho \cong (R/J(R))/(\rho/J(R))$$

Từ tính tối đại của ρ trong vành R ta suy ra tính tối đại của $\rho/J(R)$ trong vành thương $\overline{R}$. Ta chứng minh $\overline{\rho}$ cũng chính quy trong vành $\overline{R}$.

Do ρ chính quy nên tồn tại a$\in$R sao cho x-ax$\in \rho$, $\forall$ x$\in$R. Suy ra tồn tại $\overline{a} \in \overline{R}$ sao cho $\overline{x} - \overline{a}\overline{x} \in \overline{\rho}, \forall \overline{x} \in \overline{R}$.

Do J(R) =$\bigcap \rho$, với ρ chạy khắp các ideal phải chính quy tối đại của R nên ta có $\bigcap \overline{\rho} = (0)$. Theo định lý 1.2.2 ta có J($\overline{R}$) bằng giao của tất cả các ideal phải chính quy tối đại của $\overline{R}$ mà giao này nằm trong $\bigcap \overline{\rho} = (0)$ nên ta suy ra J($\overline{R}$)=(0).

Tính chất của căn Jacobson được trình bày trong định lý 1.2.4 ở trên là một trong những tính chất được gọi là "radical_like" "giống như căn". Những nghiên cứu về các tính chất này của một căn Jacobson của một vành tổng quát được tiến hành bởi Amitsur và Kurosh. Để kết thúc mục này, ta sẽ đưa ra hai định lý trình bày các tính chất như trên. Ta định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.2.4. Vành R được gọi là nửa đơn nếu J(R)=0.

Theo định lý 1.2.4 ta có vành thương R/J(R) luôn là vành nửa đơn với bất kỳ vành R.

Định lý 1.2.5. Nếu A là một ideal của vành R thì J(A)=A$\bigcap J(R)$.

Chứng minh. Nếu a$\in$A $\bigcap J(R)$ thì xem a$\in$J(R) ta có a là phần tử tựa chính quy phải của R. Nói cách khác, tồn tại $\in$R sao cho a+a$'$+aa$'$=0, suy ra =-a-aa$'$ $\in$A. Do đó a cũng là phần tử tựa chính quy phải của A. Theo định lý 1.2.3 ta có A$\bigcap J(R) \subset$J(A).

- Để chứng minh bao hàm thức ngược lại, ta lấy ρ là idean phải chính quy tối đại của R và đặt $\rho_A = \rho \cap A$.

  Nếu A$\not\subset \rho$ thì do tính tối đại của ρ ta phải có A+ρ=R. Do đó, theo định lý đồng cấu ta có R/ρ=(A+ρ)/$\rho \cong$A/(A$\bigcap \rho$)=A/ρ_A

  Do ρ tối đại trong R nên R/ρ bất khả quy và do đó A/ρ_A cũng vậy. Suy ra ρ_A là ideal phải tối đại trong A. Ta sẽ chứng minh ρ_A chính quy trong A. Do ρ chính quy trong R nên tồn tại b$\in$R sao cho x-bx$\in \rho$, $\forall$ x$\in$R. Ta có b$\in$R=A+$\rho \Rightarrow$b=a+r với a$\in$A, r$\in \rho$. Khi đó x-bx=x-ax-rx$\in \rho$. Do rx$\in \rho$ nên x-ax$\in \rho$. Tóm lại, tồn tại a$\in$A sao cho x-ax$\in \rho \bigcap A = \rho_A$, $\forall$ x$\in$A hay ρ_A chính quy trong A. Vậy ta có J(A) $\subset \rho_A$ với mọi ρ là ideal phải chính quy tối đại của R, ρ không chứa A. Nếu $\rho \supset$A thì bao hàm thức trên cũng đúng. Thật vậy, $\rho_A = \rho \cap A$=A$\supset$J(A). Do đó, J(A) $\subset \bigcap \rho_A = (\bigcap \rho) \cap A = J(R) \cap A$.

Hệ quả 1.2.1 Nếu R là vành nửa đơn thì mọi ideal của R cũng là vành nửa đơn.

Chứng minh. Gọi A là ideal của vành nửa đơn R. Ta có:

$$J(A)=J(R)\cap A=(0)\cap A=(0)$$

Do đó A cũng là vành nửa đơn.

Kết luận của định lý 1.2.5 sẽ không còn đúng nếu A chỉ là ideal một phía của R. Chẳng hạn ta lấy R là vành ma trận vuông cấp 2 trên trường số thực. Vì R có đơn vị là ma trận đơn vị $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ nên J(R)$\neq$R. Hơn nữa R không có ideal hai phía không tầm thường nên ta có J(R)=0. Thật vậy, giả sử A là ideal hai phía của R và A$\neq$(0).

Đặt $E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}; E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}; E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}; E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Vì A$\neq$(0) nên tồn tại $a=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\neq(0)$ mà $a\in A$. Giả sử $a_{11}\neq 0$, do A là ideal hai phía của R nên $E_{11}aE_{11}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in A$.

Suy ra $\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a_{11}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=E_{11}\in A$ và $E_{21}E_{11}E_{12}=E_{22}\in A$.

Do đó $E=E_{11}+E_{22}\in A$. Suy ra A=R(mâu thuẫn) hay R là vành đơn . Lập luận tương tự ta thu được kết quả tổng quát sau:

Vành các ma trận vuông cấp n lấy hệ tử trên một trường F đều là vành đơn. Bây giờ ta xét tập hợp:

Dễ thấy ρ là ideal phải của R . Ta lại có $\rho_1=\left\{\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}/ b\in F\right\}$ là một ideal phải của ρ và mọi phần tử của ρ_1 đều lũy linh. Do đó ρ_1 là nil_ideal phải khác (0) của ρ suy ra J(ρ)$\neq$(0) vì ta luôn có $\rho_1\subset$J(ρ).Điều đó cho thấy định lý 1.2.5 không còn đúng trong trường hợp này vì J(ρ)$\neq$(0) trong khi đó $\rho\cap$J(ρ)= $\rho\cap$(0)=(0).

Một tính chất "radical_like" cơ bản khác nữa là sự thay đổi của căn Jacobson khi ta chuyển từ vành R sang vành ma trận vuông cấp m lấy hệ tử trên vành R. Với R là một vành, ta gọi R_m là vành các ma trận vuông cấp m lấy hệ tử trên vành R. Căn Jacobson của R sẽ thay đổi như thế nào nếu ta chuyển từ vành R sang vành R_m? Câu trả lời sẽ có trong định lý sau:

Định lý 1.2.6 Gọi R_m là vành ma trận vuông cấp m lấy hệ tử trong vành R và $J(R)_m$ là vành ma trận vuông cấp m lấy hệ tử trong vành J(R). Khi đó, ta luôn có J(R_m)=$J(R)_m$.

Chứng minh. Lấy M là R_module bất khả quy tùy ý. Đặt

$$M^{(m)} = \{(m_1, m_2, .., m_m) / m_i \in M\}$$

Dễ dàng kiểm tra được $M^{(m)}$là một R_module với phép cộng là phép cộng theo từng thành phần, phép nhân ngoài chẳng qua là phép nhân vào bên phải của một bộ trong $M^{(m)}$ với một ma trận trong R_m. Hơn thế nữa $M^{(m)}$còn là R_module bất khả quy. Thật vậy:

- $M^m R_m \neq (0)$, chẳng hạn
- $$(m, m, .., m)\begin{pmatrix} r & 0 & \dots 0 \\ 0 & \text{r} & \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots \text{r} \end{pmatrix} = (mr, mr, .., mr) \neq (0,0,..,0)$$

trong đó $m \in M$, $r \in R$ sao cho $mr \neq 0$(do M là R_module bất khả quy nên $MR \neq (0)$ và do đó có $m \in M$ và $r \in R$ sao cho $mr \neq 0$)

Lấy $N \neq (0)$ là module con của $M^{(m)}$. Ta sẽ chứng minh N=$M^{(m)}$ hay $M^{(m)} \subset N$. Thật vậy, do $N \neq (0)$ nên tồn tại $(0,0,..,0) \neq (m_1, m_2, .., m_m) \in N$. Giả sử tồn tại i sao cho $m_i \neq 0$. Do $m_i R$ là module con khác 0 của module bất khả quy M nên $m_i R = M$.

Khi đó với mọi $(x_1, x_2, .., x_m) \in M^{(m)}$; với mọi j=1,2,..,m; tồn tại $r_j \in R$ sao cho $m_i r_j = x_j$.
Do đó

$$(x_1, x_2, .. x_m) = (m_1, m_2, .., m_m)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ \text{r}_1 & \text{r}_2 & \dots & \text{r}_m \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & \dots. & 0 \end{pmatrix} \in N$$

Vậy $M^{(m)}$ là R_module bất khả quy.

Nếu $(a_{ij}) \in J(R_m)$ thì với mọi $m_i \in M$; $\forall$ i=1,2,..,m ta luôn có

$(m_1, m_2, .., m_m)(a_{ij}) = (0,0,..,0)$

Suy ra $Ma_{ij} = 0$, với mọi $1 \leq i,j \leq m$. Do đó $a_{ij} \in J(R)$, với mọi $1 \leq i,j \leq m$. Điều đó có nghĩa là $(a_{ij}) \in J(R)_m$. Vậy $J(R_m) \subset J(R)_m$.

Để chứng minh bao hàm thức ngược lại ta chứng tỏ $J(R)_m$ là ideal phải tựa chính quy của R_m và như thế thì theo định lý 1.2.3 ta suy ra $J(R)_m \subset J(R_m)$. Xét

$$\rho_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} / \, a_{1j} \in J(R) \right\}$$

Dễ dàng kiểm tra được ρ_1 là ideal phải của R_m. Ta sẽ chứng minh $\rho_1 \subset J(R_m)$, hay mọi phần tử ρ_1 đều là phần tử tựa chính quy phải. Xét

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \rho_1$$

Lấy
$$Y = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó a'_{11} là phần tử tựa nghịch đảo phải của a_{11}, tức là $a_{11}+a'_{11}+a_{11}a'_{11}=0$. Đặt $W=X+Y+XY$ thì khi đó

$$W = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra $W^2=0$. Do đó W là phần tử lũy linh W là phần tử tựa chính quy phải của R_m. Tồn tại $Z \in R_m$ sao cho $W+Z+WZ=0$, suy ra

$$X+(Y+Z+YZ)+X(Y+Z+YZ)=0$$

Vậy X là phần tử tựa chính quy phải , nên ρ_1 là phần tử tựa chính quy phải của R_m. Tương tự, ta có

$$\rho_i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{im} \\ \ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} / \, a_{ij} \in J(R) \right\}$$

là ideal tựa chính quy phải của R_m. Do đó $\rho_i \subset J(R_m)$; $\forall$ i=1,2,..,m. Do $J(R_m)$ là ideal của R_m nên $J(R_m)$ là đóng với phép cộng. Vì vậy ta có $\rho_1 + \rho_2 + .. + \rho_m \in J(R_m)$, hay $J(R)_m \subset J(R_m)$.

1.3 Vành Artin

Định nghĩa 1.3.1 Ta gọi một vành là Artin phải nếu mọi tập hợp các ideal phải khác rỗng đều có ideal phải tối tiểu. Từ đây về sau, ta gọi vành Artin phải là vành Artin.

Về mối quan hệ giữa khái niệm vành Artin và căn Jacobson của một vành, chúng ta thu được một số kết quả sau.

Định lý 1.3.1 Nếu R là vành Artin thì J(R) là ideal lũy linh.

Chứng minh. Đặt J=J(R). Xét dãy các ideal phải lồng nhau

$$J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq .. \supseteq J^n \supseteq ..$$

Do R là vành Artin nên tồn tại n>0 sao cho $J^n = J^{n+1} = \ldots$ Ta sẽ chứng minh rằng J^n=0. Đặt U=$\{x \in R / xJ^n = (0)\}$, dễ dàng kiểm tra được U là ideal hai phía của aR. Có hai trường hợp có thể xảy ra như sau:

Nếu $J^n \subset U$ thì $J^n J^n = (0)$, do đó $J^{2n} = .. = J^n = (0)$

Nếu $J^n \not\subset U$ thì ta xét vành thương $\overline{R} = R / U$ và đồng cấu chính tắc

$$\phi : R \to \overline{R}$$

$$J^n \mapsto \overline{J}^n$$

trong đó $\overline{J}^n = \{r + U / r \in J^n\}$ là ideal khác 0 của $\overline{R}$. Do $\overline{J}^n \subset J(\overline{R})$ nên $\overline{\rho}\overline{J}^n = (0)$, với mọi ideal $\overline{\rho}$ của $\overline{R}$. Vì R là vành Artin nên $\overline{R}$ cũng là vành Artin. Do đó tập hợp $\sum$= { $\overline{\rho}$ là các ideal khác (0) của $\overline{R}/\overline{\rho} \subseteq \overline{J}^n$ } có ideal tối tiểu là $\overline{\rho}$. Ta xem $\overline{\rho}$ như là modele trên $\overline{R}$. Vì $\overline{\rho}$ là tối tiểu nên hoặc bất khả quy hoặc $\overline{\rho}\overline{J}^n = (0)$. Trong cả hai trường h ợp ta đều có $\overline{\rho}\overline{J}^n = (0)$, suy ra $\rho J^n \subseteq U$. Do đó $\rho J^n J^n = \rho J^{2n} = \rho J^n = (0)$ nghĩa là $\rho \subseteq U$, suy ra $\overline{\rho}$=(0)(mâu thuẫn). Vậy trường hợp này không xảy ra và định lý được chứng minh.

Hệ quả 1.3.1 Trong một vành Artin, mọi nil_ideal đều là ideal lũy linh.

Chứng minh. Nếu A là nil_ideal của vành Artin R thì A$\subset$J(R). Mặt khác ta có J(R) lũy linh nên A cũng lũy linh.

Định nghĩa 1.3.2. Phần tử e$\in$R, e$\neq$0 được gọi là lũy đẳng nếu e^2=e.

Bổ đề 1.3.1. Cho R là vành không có ideal lũy linh khác (0). Giả sử $\rho \neq (0)$ là ideal phải tối tiểu của R. Khi đó ρ=eR, với e là phần tử lũy đẳng nào đó của R.

Chứng minh. Ta phải có $\rho^2 \neq (0)$ vì nếu $\rho^2=(0)$ thì ρ là ideal lũy linh khác 0 của R suy ra R có ideal hai phía lũy linh khác 0(mâu thuẫn). Vậy $\rho^2 \neq (0)$ nên $\exists x \in \rho$ sao cho $x\rho \neq (0)$ nhưng $\{x\rho / x \in \rho\}$ là ideal phải của R nằm trong ρ. Do tính tối tiểu của ρ nên $x\rho = \rho$ suy ra tồn tại $e \in \rho$ sao cho $xe=x \Rightarrow xe=xe^2 \Rightarrow x(e-xe)=0$. Gọi $\rho_o=\{a \in \rho / xa=0\}$ đây là một ideal phải của R. Ngoài ra ta có $\rho_o \subset \rho$ ($\rho_o \neq \rho$ vì nếu $\rho_o = \rho \Rightarrow x\rho=0 \Rightarrow \rho=0$(mâu thuẫn)). Vì ρ tối tiểu suy ra $\rho_o=0$.

Do $e-e^2 \in \rho_o$ nên $e-e^2=0$ hay $e=e^2$ do đó phần tử e là lũy đẳng. Hơn nữa $e \in \rho \Rightarrow eR \in \rho$ và $eR \neq (0)$ (vì $0 \neq e=e^2 \in eR$) nên $\rho=eR$.

Nhận xét. Trong vành không có ideal lũy linh khác 0 thì mọi ideal phải khác 0 tối tiểu đều là ideal chính sinh bởi phần tử lũy đẳng.

Nếu ideal phải của vành Artin chứa các phần tử lũy linh khác 0 thì đó cũng là ideal lũy linh. Từ đó câu hỏi được đặt ra là "Phải chăng ideal phải có chứa phần tử không lũy linh trong vành Artin thì trong đó thế nào cũng tìm được phần tử lũy đẳng?"

Bổ đề 1.3.2. Cho R là vành tùy ý, $a \in R$ sao cho a^2-a lũy linh. Khi đó hoặc chính a lũy linh hoặc tồn tại đa thức q(x) với hệ số nguyên sao cho e=aq(a) là phần tử lũy đẳng.

Chứng minh. Giả sử $(a^2-a)^k=0$. Khai triển vế trái ta được $a^k=a^{k+1}p(a)$ trong đó p(x) là đa thức hệ số nguyên.

Vậy $a^k = a^k.ap(a)=a^k.ap(a).ap(a)=a^k.[ap(a)]^2=..=a^k[ap(a)]^k=a^{2k}[p(a)]^k$

- Nếu $a^k=0$ thì a lũy linh.
- Nếu $a^k \neq 0 \Rightarrow e=a^k[p(a)]^k \neq 0$ và do đó $e^2=(a^{2k}[p(a)]^k)[p(a)]^k=e$ suy ra e lũy đẳng.

Định lý 1.3.2. Nếu vành R Artin và ρ là ideal phải khác 0, không lũy linh của R thế thì ρ chứa phần tử lũy đẳng.

Định lý 1.3.3. Nếu R là vành tùy ý và e là phần tử lũy đẳng thế thì J(eRe)=eJ(R)e.

Nhận xét. R là vành tùy ý, nhưng $eRe=\{exe/x \in R\} \subseteq R$ lại là vành con của R có đơn vị.

Định lý 1.3.4. Giả sử R là vành không có ideal lũy linh khác 0, e là phần tử lũy đẳng khác 0 của R. Khi đó eR là ideal tối tiểu của R khi và chỉ khi eRe là một thể.

Định lý 1.3.5. Giả sử G là một nhóm hữu hạn bậc $\theta(G)$ và F là trường có đặc số 0 hoặc đặc số p, $p \not| \theta(G)$. Thế thì J(F(G))=(0).

Chứng minh. Trước hết ta nhắc lại định nghĩa đại số nhóm F(G):

Cho G là nhóm hữu hạn G=$\{g_1, g_2, g_3, .., g_n\}$; F là một trường bất kỳ. Ta gọi tập hợp ký hiệu F(G) là tập hợp các phần tử, mỗi phần tử là một tổng hình thức có dạng $\sum \alpha_i g_i$ với $\alpha_i \in$F và $g_i \in$G. Trên F(G) ta định nghĩa các phép toán:

$$\sum \alpha_i g_i \pm \sum \beta_i g_i = \sum (\alpha_i \pm \beta_i) g_i$$

$$\sum \alpha_i g_i . \sum \beta_i g_i = \sum \gamma_i g_i$$

Lúc đó (F(G),+) trở thành một nhóm Abel. Hơn nữa F(G) còn là không gian vectơ trên F. F(G) được gọi là đại số nhóm và dimF(G)=n=cấp của nhóm G, trong đó một cơ sở của không gian F(G) là $\{g_1, g_2, g_3, .., g_n\}$.Bây giờ ta chứng minh định lý.

Nếu a$\in$F(G) ta định nghĩa ánh xạ T_a:F(G) $\to$F(G);x$\mapsto$ xa=xT_a

T_a trở thành một phép biến đổi tuyến tính không gian vectơ của đại số F(G).

Xét ánh xạ ψ :F(G) $\to$Hom(F(G),F(G))

a$\mapsto$ aψ =T_a

Khi đó ψ trở thành phép nhúng đẳng cấu. Thật vậy, rõ ràng ψ là toàn cấu. Ta chứng minh ψ đơn cấu hay ker ψ =(0).

Lấy a$\in$ker ψ ta có T_a=0$\Rightarrow$xa=0, $\forall$x$\in$F, đặc biệt lấy x=1.e=>xa=a=0=>ker ψ =0. Vậy ψ đơn cấu do đó ψ là đẳng cấu.

Với mọi phép biến đổi tuyến tính ta biết rằng đều có ma trận tương ứng. Do đó, với g_i $\in$G tương ứng ta có T_{g_i}, chính T_{g_i} lại có ma trận đối với cơ sở G= $\{g_1 = e, g_2, g_3, .., g_n\}$ là

$g_1 \xrightarrow{T_{g_i}}$ $g_1 g_i = g_i$

$g_2 \xrightarrow{T_{g_i}}$ $g_2 g_i = g_k$ với k nào đó

…………..

$g_n \xrightarrow{T_{g_i}}$ $g_n g_i = g_l$ với l nào đó

Suy ra T_{g_i} ma trận có kiểu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & .. & 0 & 0 \\ 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ .... \\ 0 & 0 & .. & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mỗi hàng có một số 1, mỗi cột không có hai số 1(để ý rằng trong G có luật giản ước nên nếu $g_m g_i = g_n g_i \Rightarrow g_m = g_n$) Vết của ma trận A là tr(A)=$a_{11} + a_{22} + .. + a_{nn}$, đặt biệt T_{g_1} =T_e=ma trận đơn vị, nên ta có tr(T_{g_1})=cấp nhóm G=$\theta(G)$.

Nếu $g_i \neq g_1 = e$ thì tr(T_{g_i}) =0 vì T_{g_i} có đường chéo chính toàn là 0.(thật vậy khi đó $g_2 g_i \neq g_2$ và $g_3 g_i \neq g_3$).

Nếu x $\in$ J và x $\neq 0 \Rightarrow$ x lũy linh(do J lũy linh) do đó T_x là phép biến đổi tuyến tính lũy linh $\Rightarrow$ tr(T_x)=0.

Vì x $\neq 0$ ta có thể giả sử x=$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + .. + \alpha_n g_n$ với $\alpha_1 \neq 0$. Bằng cách nhân hai vế cho g_1^{-1} ta được x=$\alpha_1 + \alpha_2 g_2 + .. + \alpha_n g_n$.

Suy ra 0= tr(T_x)=$\alpha_1 tr T_1 + \alpha_2 tr(T_{g_2}) + .. + \alpha_n tr(T_{g_n}) = \alpha_1 \theta(G) \neq 0$ (mâu thuẫn).

1.4. Vành nguyên thủy

Định nghĩa 1.4.1. Vành R được gọi là vành nguyên thủy nếu nó có một R_module bất khả quy và trung thành.

Nhận xét. 1. Nếu R là vành nguyên thủy thì tồn tại M là R_module bất khả quy và trung thành. Suy ra A(M)=$\{r \in R / Mr = (0)\} = (0)$.

Xét ánh xạ $\phi : R \to E(M)$

$r \mapsto T_r : M \to M$ sao cho $T_r(m) = mr$, với mọi m $\in$ M.

Ta có M trung thành khi và chỉ khi A(M)=ker ϕ=(0) tức là ϕ đơn cấu, khi đó R nhúng đẳng cấu vào trong E(M).

2. Nếu R là vành nguyên thủy thì R có một R_module bất khả quy và trung thành M. Khi đó A(M)=(0) và J(R)=$\bigcap$A(M)=(0). Suy ra R cũng là vành nửa đơn. Vậy mọi vành nguyên thủy đều là vành nửa đơn.
3. Cho R là vành tùy ý và M là R_module bất khả quy. Khi đó A(M) là ideal hai phía của R và M là R/A(M)_module bất khả quy trung thành. Do đó R/A(M) là vành nguyên thủy.
4. Cho R là vành tùy ý và ρ là ideal phải tối đại chính quy của R. Khi đó M=R/ρ là R_module bất khả quy và A(M)=(ρ:R) là ideal hai phía lớn nhất nằm trong ρ. Suy ra R nguyên thủy khi và chỉ khi tồn tại ideal phải tối đại chính quy ρ và (ρ:R)=(0).

Định lý 1.4.1. Vành R là vành nguyên thủy khi và chỉ khi tồn tại ρ là ideal phải tối đại chính quy trong R sao cho (ρ:R)=(0). Trong trường hợp đó R là vành nửa đơn. Hơn nữa, nếu vành nguyên thủy R giao hoán thì R là trường.

Chứng minh. R nguyên thủy khi và chỉ khi tồn tại ideal phải tối đại chính quy $\rho \Rightarrow \rho$ là ideal hai phía tối đại(vì R giao hoán)$\Rightarrow$ (ρ:R)= ρ(vì (ρ:R) là ideal hai phía lớn nhất nằm trong ρ). Do (ρ:R)=(0) suy ra ρ=(0). Ideal tối đại ρ=(0) nên R là một trường. Giả sử R là vành nguyên thủy và M là R_module bất khả quy và trung thành. Theo bổ đề Schur ta có :

$$\Delta = C(M) = \{\varphi \in E(M) : \varphi T_r = T_r\varphi; \forall r \in R\}$$

Là một thể (vành chia) với $T_r : M \to M; m \mapsto mT_r = mr$.

Định nghĩa 1.4.2 (Tác động dày đặc) Giả sử M là R_module bất khả quy. Đặt Δ=C(M), theo bổ đề Schur thì Δ là một thể và M có cấu trúc không gian vectơ trên thể Δ.

Vành R được gọi là tác động dày đặc trong M (hay R dày đặc trong M) nếu với mỗi hệ vectơ $\{v_1, v_2,.., v_n\} \subset M$ độc lập tuyến tính trên Δ và bất kỳ n phần tử $w_1, w_2,.., w_n$ trong M thì tồn tại r$\in$R sao cho $w_i = v_i r; i = 1,2,.., n$.

Nhận xét. 1. Ở đây khái niệm dày đặc được hiểu theo nghĩa: Lấy tùy ý hệ hữu hạn các vectơ của M độc lập tuyến tính trên Δ và một hệ hữu hạn bất kỳ của M. Bao giờ cũng tồn tại phép biến đổi tuyến tính biến hệ độc lập này thành hệ kia.

2. Nếu $\dim_\Delta M = n$ (hữu hạn) thì $Hom_\Delta(M,M) = R.$ Thật vậy:

- $\forall r \in R$ phép nhân bên phải v_i rlà phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ M trên thể Δ: $r \equiv T_r \in Hom_\Delta(M,M); \forall r \in R$. Do đó R$\subset Hom_\Delta(M,M)$.
- $\forall f \in Hom_\Delta(M,M)$; giả sử $e_1, e_2,.., e_n$ là cơ sở của M. Đồng cấu f hoàn toàn được xác định nếu biết các ảnh $e_1 f, e_2 f,.., e_n f$. Theo tính dày đặc tồn tại $r \in R$ sao cho với mọi $w_1, w_2,.., w_n \in M$ ta có $e_i r = w_i$ và $e_i f = w_i$, i=1,2,..,n. Do đó r=f suy ra $Hom_\Delta(M,M) \subset R$.

Định lý 1.4.2. (Định lý dày đặc) Giả sử R là vành nguyên thủy và M là R_module bất khả quy trung thành. Nếu Δ=C(M) thì R là vành dày đặc các phép biến đổi tuyến tính trong M trên Δ.(nói tắt: R dày đặc trên M). **Chứng minh.** Trước hết ta có nhận xét: Để chứng minh tính dày đặc của R trên M hay R dày đặc trên $Hom_\Delta(M,M)$ ta chỉ cần chứng minh nếu V là không gian hữu hạn chiều của M trên Δ và m$\in$M, m$\notin$V thì tồn tại r$\in$R: Vr=(0) và mr$\neq$0 (r linh hóa toàn bộ V mà không linh hóa m). Thật vậy nếu điều trên thỏa thì mrR$\neq$(0) và mrR là module con của M trên R. Vì M bất khả quy $\Rightarrow$mrR=M. Do đó ta phải tìm s$\in$R sao cho mrs là bất kỳ phần tử nào của M (mrs chạy khắp M).

Lưu ý: Vrs=(0). Giả sử $v_1, v_2, .., v_n \in$M là hệ độc lập tuyến tính trên Δ và $w_1, w_2, .., w_n \in$M tùy ý. Gọi V_i là không gian của M trên Δ sinh ra bởi các v_j với j$\neq$i. Đặt $V_i = < v_j / j \neq i > \Rightarrow v_i \notin V_i$. Vì hệ $v_1, v_2, .., v_n$ độc lập tuyến tính nên với mỗi i tồn tại $t_i \in R$ sao cho $v_i t_i = w_i$ và $V_i t_i = (0)$. Đặt t=$t_1 + t_2 + .. + t_n \in R$ thì ta có $v_i t = w_i$ theo định nghĩa R dày đặc trên M.

Để chứng minh định lý ta chứng minh nhận xét trên bằng quy nạp theo số chiều của không gian vectơ V trên Δ.

$\bullet$ Nếu dim V=0 $\Leftrightarrow$ V=(0)

$\forall m \in M, m \notin V \Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow mR \neq (0)$ (vì M bất khả quy)

(Nếu $\forall m \in M, m \neq 0 \Rightarrow mR = (0)$ thì MR=(0)(mâu thuẫn tính chất bất khả quy)$\Rightarrow \exists r \in R : mr \neq 0$ và Vr=(0).

$\bullet$ Giả sử mệnh đề đã đúng với các không gian có số chiều nhỏ hơn hoặc bằng số chiều của V. Ta chứng minh nhận xét đúng với không gian có số chiều bằng số chiều của V. Giả sử V=$V_0 + \omega\Delta$ trong đó dimV_0=dim V-1 và $\omega \notin V_0$ ($\omega\Delta$ là ideal chính sinh bởi ω). Theo giả thiết quy nạp với

A(V_0)=$\{x \in V / V_0 x = (0)\}$ thì $\forall m \notin V_0, \exists r \in A(V_0)$ sao cho mr$\neq$0. Mặt khác, nếu m$A(V_0)$=(0) thì m$\in V_0$.Tập hợp A(V_0) là ideal phải của vành R và do $\omega \notin V_0$ nên ωA(V_0)$\neq$(0) là module con của M $\Rightarrow \omega$A(V_0)=M (1) .(Suy ra $\exists m \in M, m \notin V$ sao cho từ đẳng thức Vr=(0) suy ra mr=0 là không xảy ra.)

Giả sử phản chứng: $\exists m \in M, m \notin V$ sao cho từ đẳng thức Vr=(0) suy ra mr=0.

Xét ánh xạ τ:M$\rightarrow$M

x$\mapsto$xτ=ma

trong đó a được xác định x=ωa với a$\in$A(V_0) do (1). Ta có τ được định nghĩa tốt. Thật vậy, nếu x=0 thì 0=x=ωa vì vậy a linh hóa cả hai V_0 và ω, do đó a linh hóa toàn bộ V. Theo giả thiết phản chứng ma=0 $\Rightarrow$x=xτ=ma=0. Vậy τ được định nghĩa tốt.

Rõ ràng $\tau \in$E(M); hơn nữa nếu x=ωa với a$\in$A(V_0) thì $\forall r \in R$, ar$\in$ A(V_0) và xr=(ωa)r=ω (ar) nên (xr) τ=m(ar)=(ma)r=(xτ)r. Điều này chứng tỏ τ nằm trong Δ. Do đó ar$\in$ A(V_0), ma=(ωa)τ=($\omega\tau$)a suy ra (m-$\omega\tau$)a=0, $\forall$a$\in$A(V_0). Theo giả thiết quy nạp m-$\omega\tau \in V_0$ vì vậy m$\in V_0 + \omega\Delta$=V(mâu thuẫn).

Định lý 1.4.3. Giả sử R là vành nguyên thủy, khi đó với một thể Δ nào đó hoặc là vành R đẳng cấu với vành Δ_n (vành ma trận vuông cấp n trên thể Δ), hoặc là với mọi số tự nhiên m, tồn tại vành con S_m của R ánh xạ đồng cấu vào Δ_m.

Chứng minh. Giả sử R là vành dày đặc các phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ V trên thể Δ.Nếu V hữu hạn trên Δ thì R dày đặc trên V, nghĩa là R đẳng cấu với vành các phép biến đổi Δ tuyến tính trên không gian V ,chính là Δ_n với n= $\dim_\Delta V$.

Nếu không gian V trên Δ là vô hạn chiều thì với mọi số tự nhiên m tồn tại các phần tử phụ thuộc tuyến tính trên Δ: $v_1, v_2, .., v_m \in V$.

Giả sử $V_m = v_1\Delta + v_2\Delta + .. + v_m\Delta$ và $S_m = \{x \in M / V_m x \subseteq V_m\}$. Định lý dày đặc khẳng định rằng lúc đó S_m dày đặc không gian các phép biến đổi Δ-tuyến tính V_m. Nếu ký hiệu $W_m = \{x \in S_m / V_m x = (0)\}$ thì ta có đẳng cấu

$$S_m / W_m \cong Hom_\Delta(V_m, V_m) \cong \Delta_m$$

Một ứng dụng quan trọng đã được chứng minh dựa vào định lý dày đặc như sau:(như là một minh họa đẹp về ứng dụng của định lý dày đặc).

Định lý 1.4.4.(Định lý Wedderburn-Artin) Giả sử R là vành Artin đơn thì khi đó R đẳng cấu với D_n, trong đó D_n là tập hợp các ma trận vuông cấp n lấy hệ tử trên thể D. Hơn nữa, n là duy nhất và D sai khác một phép đẳng cấu. Ngược lại, nếu D là một thể tùy ý thì D_n là vành Artin đơn.

Chứng minh. Trước hết ta lưu ý rằng một vành vừa đơn vừa Artin thì nó là vành nửa đơn. Thật vậy, giả sử R là vành đơn và Artin. Nếu J(R)$\neq$(0) thì J(R)=R(để ý rằng vành đơn là vành không có ideal thực sự nào và $R^2 \neq (0)$). Mặc khác R Artin nên J(R) lũy linh suy ra R lũy linh.

Nhưng $R^2 = R \Rightarrow R^n = R \neq (0), \forall n$ nên R không lũy linh(mâu thuẩn). Vậy J(R)=(0) nên R nửa đơn. Ta chứng tỏ rằng R nửa đơn thì R là vành nguyên thủy, nghĩa là tồn tại M là module trung thành bất khả quy M. Thật vậy, M là môđun bất khả quy của R, tập A(M) là ideal hai phía của R và A(M)$\neq$R suy ra A(M)=(0) do đó M module trung thành nên R nguyên thủy .

Theo định lý dày đặc R dày đặc trong $Hom_\Delta(M,M)$; R$\subset Hom_\Delta(M,M)$ trong thể Δ=C(M) ta chứng minh rằng R$\cong Hom_\Delta(M,M)$. Điều đó xảy ra khi $\dim_\Delta M < \infty$. Giả sử có một dãy vô hạn các vectơ độc lập tuyến tính $v_1, v_2,.., v_n,..$ trong M. Ta xây dựng một dãy giảm các ideal phải như sau:

Đặt $\rho_n = \{x \in R / v_i x = 0, i = 1,2,..,n\}$={x∈R/x linh hóa các $v_1, v_2,.., v_n$}

Ta có $\rho_1 \supseteq \rho_2 \supseteq .. \supseteq \rho_n \supseteq ..$ Hơn nữa chúng khác nhau, chẳng hạn ta chứng minh được rằng $\rho_1 \neq \rho_2$. Thật vậy, vì v_1, v_2 độc lập tuyến tính nên với hệ gồm hai vectơ 0 và v_2, theo tính dày đặc tồn tại r∈R sao cho $v_1 r = 0$ và $v_2 r = v_2$ suy ra r∈ ρ_1(vì nó linh hóa v_1). Nhưng r∉ ρ_2 vì nó không linh hóa v_2. Vậy $\rho_1 \neq \rho_2$, ta được dãy vô hạn thật sự $\rho_1 \supset \rho_2 \supset .. \supset \rho_n \supset ..$. Do tính Artin dãy này phải dừng(Mâu thuẫn). Vậy $\dim_\Delta M$ hữu hạn suy R đẳng cấu với $Hom_\Delta(M,M)$.

1.5 Vành đơn - Vành nguyên tố

Định nghĩa 1.5.1. Vành R được gọi là vành đơn nếu $R^2 \neq (0)$ và trong R không có ideal thực sự nào ngoài (0) và R.

Định nghĩa 1.5.2.1 Vành R được gọi là vành nguyên tố nếu với mọi a,b∈R thì từ đẳng thúc aRb=0 suy ra a=0 hoặc b=0.

Nhận xét. 1.Vành R là vành nguyên tố nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

(a) Linh hóa tử bên phải của một ideal phải khác (0) của R phải bằng (0).

(b) Linh hóa tử bên trái của một ideal trái khác (0) của R phải bằng (0).

(c) Nếu A, B là hai ideal của R và AB=(0) thì suy ra A=(0) hoặc B=(0).

2. Nếu R là vành đơn có đơn vị thì R là vành nửa đơn. Thật vậy, vì R là vành đơn và có đơn vị nên J(R)≠R nên J(R)=(0). Suy ra R là vành nửa đơn. 3. Nếu R là vành Artin đơn thì R là vành nửa đơn. Thật vậy, giả sử R là vành Artin đơn. Khi đó J(R) lũy linh. Mặt khác do R đơn nên $R^2 \neq (0)$ mà R^2 là ideal hai phía của R nên R^2=R≠(0) suy ra $R^n = R \neq (0); \forall n$ suy ra R không lũy linh. Do đó J(R) ≠R mà J(R) là ideal hai phía của R nên J(R)=(0). Suy ra R là vành nửa đơn.

4. Mọi vành nguyên thủy đều là vành nguyên tố. Thật vậy, giả sử R là vành nguyên thủy, khi đó tồn tại M là R_module trung thành bất khả quy. Giả sử ta có aRb=(0). Ta chứng minh a=0 hoặc b=0. Thật vậy, giả sử a≠0, khi đó aR là ideal phải chính sinh bởi a. Có hai khả năng xảy ra:

(a) $aR \neq (0)$. Đặt $\rho = aR \neq (0)$. Khi đó $M\rho$ là module con của M và do M là module bất khả quy nên $M\rho = (0)$ hoặc $M\rho = M$. Hơn nữa M là module trung thành nên nếu ta có $M\rho = (0)$ thì $\rho = (0)$(mâu thuẫn). Do đó $M\rho = M$, ta có:

$$Mb = (M\rho)b = M(\rho b) = M(aRb) = M(0) = (0)$$

Suy ra b linh hóa toàn bộ M mà M là module trung thành nên b=0.

(b) aR=(0). Đặt $J = \{r \in R / rR = (0)\}$. Dễ thấy $a \in R$ và $a \neq 0$ nên J là ideal của R và $J \neq (0)$. Hơn nữa ta có Jb=(0) (vì $b \in R$). Do MJ là module con của module bất khả quy M nên MJ=(0) thì J=(0)(mâu thuẫn). Do đó MJ=M, khi đó Mb=(MJ)b=M(Jb)=(0). Suy ra b linh hóa toàn bộ M mà M là module trung thành nên b=0.

Chương 2

CÁC ĐỊNH LÝ VỀ TÍNH GIAO HOÁN

Chúng ta hãy bắt đầu với định lý Wedderburn nổi tiếng sau:

Định lý 2.1.(Wedderburn) Mọi thể hữu hạn là một trường.

Để chứng minh định lý ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. Giả sử D là một thể có đặc số $p\neq 0$ và Z là tâm của thể D. Giả thiết rằng $a\in D$, $a\neq 1$, $a\notin Z$ và $a^{p^n}=a$, với số tự nhiên $n\geq 1$ nào đó. Thế thì tồn tại $x\in D$ sao cho $xax^{-1}=a^i\neq a$, với số nguyên i nào đó.

Chứng minh. Xét ánh xạ $\delta: D\to D$

$$x\mapsto x\delta = xa-ax$$

Do đặc số của thể D bằng $p\neq 0$ nên ta suy ra $x\delta^p = xa^p - a^p x$ suy ra $x\delta^{p^k} = xa^{p^k} - a^{p^k}x, \forall k\geq 0$. Giả sử P là trường con đơn trong Z , vì phần tử a là phần tử đại số trên P nên trường P(a) cũng hữu hạn và có p^m phần tử. Khi đó, $a^{p^m}=a$, do đó $x\delta^{p^m} = xa^{p^m} - a^{p^m}x = xa - ax = x\delta, \forall x\in D$, nghĩa là $\delta^{p^m}=\delta$. Nếu $\lambda\in P(a)$ thì $(\lambda x)\delta = (\lambda x)a - a(\lambda x) = \lambda(xa-ax) = \lambda(x\delta)$ vì rằng hai phần tử a và λ là giao hoán của nhau. Bằng cách ký hiệu ánh xạ λI: $D\to D; x\mapsto \lambda x$ ta suy ra λI và δ giao hoán được với nhau $\forall\lambda\in P(a)$. Đa thức $t^{p^m}-t$ có thể phân tích trên P(a) thành những nhân tử tuyến tính $t^{p^m}-t=\prod_{\lambda\in P(a)}(t-\lambda)$ nhưng do tính giao hoán của λI và δ ta suy ra rằng 0= $\delta^{p^m}-\delta=\prod_{\lambda\in P(A)}(\delta-\lambda I)$.

Vì $a\notin Z$ nên $\delta\neq 0$. Giả sử k là số bé nhất sao cho tồn tại $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_k\in P(a)$ thỏa $\delta(\delta-\lambda_1 I)..(\delta-\lambda_k I)=0$. Theo giả thuyết số k như thế tồn tại, hơn nữa $k\geq 1$ vì $\delta\neq 0$. Do $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_k\in P(a)$ thì tồn tại phần tử $r\in D$ nào đó sao cho $r\delta(\delta-\lambda_1 I)..(\delta-\lambda_{k-1}I)=\omega\neq 0$ nhưng $\omega(\delta-\lambda_k I)=0$ nghĩa là $\omega a - a\omega = \lambda_k\omega$. Do $\omega\neq 0$ nên ta có $\omega a\omega^{-1} = a+\lambda_k\in P(a)$, hơn nữa $\omega a\omega^{-1}\neq a$ do $\lambda_k\neq 0$.

Trường P(a) là hữu hạn vì vậy nhóm nhân của nó là xyclic và do đó bất kỳ hai phần tử khác 0 của P(a) mà nếu có chung một bậc (đối với phép nhân) thì phần tử này là lũy thừa của phần tử kia. Hiển nhiên tính chất đó cũng đúng cho cập phần tử a và $\omega a\omega^{-1}$. Vậy $\omega a\omega^{-1}=a^i$ với i nào đó.

Bây giờ ta chứng minh định lý Weddeburn.

Chứng minh. Giả sử D là một thể và Z là tâm của nó. Nếu trường con đơn trong Z có p phần tử thì nó có đặc số p và có thể xem D là không gian tuyến tính trên Z, do đó D có chứa q= p^n phần tử. Chúng ta quy nạp theo n rằng mọi thể có cấp p^k (k<n) đều giao hoán (và do đó là một trường).

Nếu a, b là các phần tử của D mà ab$\neq$ba thế thì $ab^t=b^ta$ khi và chỉ khi $b^t \in Z$. Thật vậy, tập N(b^t)=$\left\{x \in D / xb^t = b^t x\right\}$ là thể con của D chứa a,b nên N(b^t) không giao hoán, theo giả thiết quy nạp N(b^t) trùng với D, điều đó có nghĩa là $b^t \in$Z.

Nếu u$\in$D, tồn tại m(u) là số nguyên dương bé nhất sao cho $u^{m(u)} \in$Z. Bằng cách chọn a$\in$D mà a$\notin$Z và m(a) số bé nhất trong các m(u) đó. Đặt m(a)=r, hiển nhiên r là số nguyên tố. Thật vậy, giả sử r=pq trong đó p,q thuộc N khác 1 và nguyên tố cùng nhau. Vì $a^r = a^{pq} = (a^p)^q \in Z$. Xét phần tử b=$a^p \in D$ và $b^q = \left(a^p\right)^q \in Z$ với q<r mâu thuẫn với tính bé nhất của r. Vậy r là số nguyên tố.

Theo bổ đề 2.1 tồn tại phần tử x$\in$D sao cho $xax^{-1} = a^i$. Do đó $x^k ax^{-k} = a^{i^k}$. Đặt biệt với k=r-1 ta có $x^{r-1}ax^{-(r-1)} = \lambda a$ với $\lambda \in Z$ vì $i^{r-1} \equiv 1(r)$. Để ý rằng xa$\neq$ax và $x^{r-1} \notin Z$(do tính bé nhất của r và định nghĩa tập N(b^t)). Từ đó suy ra rằng $x^{r-1}a \neq ax^{r-1}$ nghĩa là $\lambda \neq 1$. Đặt $x^{r-1} = b$ ta nhận được $bab^{-1} = \lambda a$, do đó $\lambda^r a^r = (bab^{-1})^r = ba^r b^{-1} = a^r$ vì vậy $\lambda^r = 1$, cùng với đẳng thức $b^r ab^{-r} = \lambda^r a = a$; $b^r a = ab^r$ ta suy ra $b^r \in Z$. Ký hiệu $a^r = \alpha \in Z$ và $b^r = \beta \in Z$.

Ta khẳng định rằng, nếu $u_0 + u_1 b + .. + u_{r-1}b^{r-1} = 0$ trong đó $u_i \in Z$ (a) thì tất cả các phần tử u_i phải bằng 0. Thật vậy, giả sử ta có hệ thức $u_0 + u_1 b^{m_1} + .. + u_k b^{m_k} = 0$ $\left(0 < m_1 < .. < m_k < r\right)$ có số các số hạng bé nhất; bằng cách kết hợp với a và chú ý rằng: $a^{-1}ba=\lambda b$; $a^{-1}b^k a=\lambda^k b^k$ ta nhận được $u_0 + u_1\lambda^{m_1}b^{m_1} + .. + u_k\lambda^{m_k}b^{m_k} = 0$. Bằng cách trừ đi các vế tương ứng ta được $u_1 b^{m_1}(1-\lambda^{m_1}) + .. + u_k b^{m_k}(1-\lambda^{m_k}) = 0$. Vì rằng $\lambda \neq 1$và $\lambda^r = 1$(r nguyên tố) nên $\lambda^i \neq 1$ khi $1 \leq$ i<r . Như vậy sẽ phát sinh một hệ thức tổng quát hơn tương tự hệ thức ban đầu là không thể được. Tương tự nếu $v_0 + v_1 a + .. + v_{r-1}a^{r-1}$=0 trong đó

$v_i \in Z(b)$ thì tất cả phần tử $v_i = 0$. Đặt biệt các đa thức $t^r - \alpha$ và $t^r - \beta$ là những đa thức cực tiểu trên Z tương ứng với a và b. Do đó: $\left[Z(\mathrm{a}):Z\right] = \left[Z(b):Z\right] = r$

Xét ánh xạ $\varphi: Z(\mathrm{a}) \to Z(\mathrm{a}); x \mapsto bxb^{-1}$ là tự đẳng cấu không đồng nhất của trường Z(a), riêng các phần tử của Z qua ánh xạ này sẽ không thay đổi. Vì rằng φ là tự đẳng cấu bậc r và $\left[Z(a):Z\right] = r$ nên các lũy thừa của tự đẳng cấu φ sẽ vét hết tất cả các tự đẳng cấu của trường Z(a) trên Z của Z(a).

Ta biết rằng từ tính hữu hạn của Z(a) suy ra có thể biểu diễn mọi phần tử $u \in Z$ dưới dạng u=$x\varphi(x)..\varphi^{r-1}(x)$, ở đây x là phần tử nào đó của Z(a). Trường hợp đặc biệt, $\beta^{-1} = y\varphi(y)..\varphi^{r-1}(y)$ với y$\in$Z(a). Nhưng khi đó:

$(1 - yb)(1 + yb + y\varphi(y)b^2 + .. + y\varphi(y)..\varphi^{r-2}(y)b^{r-1} =$

$=1 + yb + y\varphi(y)b^2 + .. + y\varphi(y)..\varphi^{r-2}(y)b^{r-1} - yb - y^2b^2 - y^2b\varphi(y)b^2 - .. -$ $yby\varphi(y)..\varphi^{r-2}(y)b^{r-1} =$(để ý rằng y$\in$Z(a) nên y=$\varphi$(y) nên ta có $y\varphi(y)b^2 = y^2b^2$,..)=$1 - y\varphi(y)..\varphi^{r-1}(y)b^r = 1 - b^{-r}b^r = 1 - 1 = 0$. Suy ra hoặc 1-yb=0 do đó b khả nghịch (mâu thuẫn), hoặc $1 + yb + y\varphi(y)b^2 + .. +$ $y\varphi(y)..\varphi^{r-2}(y)b^{r-1}$=0. Theo nhận định trên suy ra 1=y=y$\varphi(y)$=..=0 (mâu thuẫn).

Nghĩa là cả hai trường hợp trên đều không xảy ra. Định lý được chứng minh.

Sau đây là một số hệ quả suy ra từ định lý Wedderburn.

Bổ đề 2.2. Nếu D là một thể có đặc số p$\neq$0 và G là nhóm con nhân hữu hạn của D thì G là một nhóm abel (do đó G là nhóm con xyclic).

Chứng minh. Giả sử P là trường con đơn của thể D (suy ra P có đúng p phần tử). Tập A=$\left\{\sum \alpha_i g_i / \alpha_i \in P, g_i \in G\right\}$. Rõ ràng A là vành con hữu hạn của D, do đó A trở thành thể con hữu hạn và là một trường. Vì G $\subset$A nên G là một trường. Vậy G giao hoán . Không chỉ có thể hữu hạn mới giao hoán, ta có kết quả mở rộng hơn trong một thể như sau:

Bổ đề 2.3. Giả sử D là một thể trong đó với mỗi phần tử a$\in$D đều tồn tại số tự nhiên n(a)>1 sao cho $\mathrm{a}^{n(\mathrm{a})} = \mathrm{a}$. Lúc đó D là thể giao hoán. **Chứng minh.** Vì rằng 2$\in$D và $2^m = 2$ với m>1 (chứng minh $2^m = 2$ như sau: Ta có 1$\in$D$\Rightarrow$2=1+1$\in$D theo giả thiết $\exists$m>1: $2^m = 2$). Nên suy ra D có đặc số hữu hạn p (chứng minh D có đặc số hữu hạn p như sau: Vì $2^m = 2 \Rightarrow 2(2^{m-1} - 1) = 0$, do D là một thể nên ta suy ra: hoặc 2=0 hoặc $2^{m-1} = 1$.

- Nếu 2=0 $\Rightarrow$ 1+1=0 $\Leftrightarrow$ 2.1=0: D có đặc số 2.
- Nếu $(2^{m-1}-1).1=0$ $\Rightarrow$ D có đặc số p (với p nguyên tố và là ước của $2^{m-1}-1$)

Nếu D không giao hoán và Z là tâm của D thì tồn tại phần tử a của D không nằm trong Z. Giả sử P là trường con đơn trong Z. Vì rằng phần tử a là đại số trên P nên trường P(a) hữu hạn và có tất cả p^s phần tử. Khi đó $a^{p^s}=a$ và thỏa các điều kiện của bổ đề 2.1, do đó tồn tại $b\in D$ sao cho $bab^{-1}=a^i\neq a, ba=a^ib$. Hệ thức sau cùng với điều kiện là a, b có bậc hữu hạn dẫn đến nhóm nhân G là hữu hạn được sinh ra bởi các phần tử của a và b. Do đó theo bổ đề 2.2 nhóm G giao hoán nhưng điều này mâu thuẫn với điều kiện $ab\neq ba$.

Một trong những kết quả quan trọng được mở rộng từ định lý Weddeburn là định lý Jacobson, cho chúng ta một điều kiện khá mạnh để vành R trở thành giao hoán.

Định lý 2.2. (Jacobson) Giả sử R là một vành trong đó với mọi phần tử $a\in R$ đều tồn tại số tự nhiên n(a)>1 sao cho $a^{n(a)}=a$. Khi đó vành R là vành giao hoán.

Chứng minh. Ta thấy ngay vành R là nửa đơn. Thật vậy, nếu $a\in J(R)$, từ đẳng thức $a^{n(a)}=a$ có thể viết lại dưới dạng a=ax trong đó $x=a^{n(a)-1}\in J(R)$, nhưng khi đó ta có nhận xét sau: Nếu u=ux trong đó $u\in R$ và $x\in J(R)$ thì u=0 (hiển nhiên vì $x\in J(R)$ nên $-x\in J(R)$ do đó $\exists x'\in R$ sao cho $-x+x'+(-x)x'=0$.Tác động u vào hai vế ta được $-ux+ux'-uxx'=0$ hay $0=-u+ux'-ux'=-u$ $\Rightarrow$ u=0. Vậy a=0 do đó J(R)=0).

R là vành nửa đơn nênR là tổng trực tiếp con của các vành nguyên thủy R_a; mỗi vành R_a lại là ảnh đồng cấu của vành R nên cũng thỏa mãn điều kiện $a^{n(a)}=a$. Hiển nhiên điều kiện này cũng được thỏa trong mọi vành con của R_a và trong ảnh đồng cấu của nó. Theo định lý 1.4.4 đối với mỗi vành R_a tồn tại thể D sao cho:

- Hoặc là $R_a\approx D_n$ (D_n vành các ma trận vuông cấp n lấy hệ tử trên thể D nào đó)
- Hoặc là $\forall m\geq 1$, D_m là ảnh đồng cấu của vành con nào đó của R_a.

Từ khẳng định rằng nếu R_a mà không đẳng cấu với thể D thì với k>1, trong vành D_k thỏa mãn tính chất $a^{n(a)}=a$, n(a)>1, $\forall a\in D_k$. Rõ ràng tính chất này không đúng với phần tử:

$$a=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. \\ .... & & & \\ 0 & 0 & 0 & .. \end{pmatrix}$$

phần tử này thỏa mãn đẳng thức $a^2 = 0$, do đó R_a là một thể và theo bổ đề 2.3 R_a là giao hoán. Nhưng khi đó R giao hoán (như là tổng trực tiếp con của các vành giao hoán).

Định lý 2.3. Giả sử R là vành trong đó $\forall x, y \in R$, tồn tại số nguyên n(x,y)>1 sao cho $(xy - yx)^{n(x,y)} = xy - yx$, thế thì vành R là giao hoán. **Chứng minh.** Ta bắt đầu chứng minh định lý này trong trường hợp đặc biệt:

R là một thể sau đó chứng minh trong trường hợp R vành nguyên thủy, R là vành nửa đơn và cuối cùng là vành tùy ý.

Bổ đề 2.4. Giả sử D là một thể thỏa mãn điều kiện $\forall x, y \in R$, tồn tại số nguyên n(x,y)>1 sao cho $(xy - yx)^{n(x,y)} = xy - yx$, khi đó D giao hoán.

Chứng minh. Giả sử a, b$\in$D mà c=ab-ba$\neq$0, theo giả thiết $c^m = c$ với m>1. Nếu Z là tâm thể D và $0 \neq \lambda \in Z$ thì $\lambda c = (\lambda a)b - b(\lambda a)$. Do đó tồn tại n>1 sao cho $(\lambda c)^n = \lambda c$. Đặt q=(m-1)(n-1)+1, khi đó , $c^q = c^{(m-1)(n-1)+1} = c^{mn-m-n+1+1} = \left(c^m\right)^n . c^{-m-n+1}.c = c^{n-m-n+1}.c =$

$= c^{-m+1}.c = c^{-m}.c.c$

$= c^{-m}.c^m.c = c$ và $(\lambda c)^q = (\lambda c)^{mn-m-n+1}.\lambda c = \left[(\lambda c)^n\right]^m .(\lambda c)^{-m}.(\lambda c)^{-n}.\lambda c.\lambda c$

$=(\lambda c)^m.(\lambda c)^{-m}.(\lambda c)^{-n}.(\lambda c)^n.\lambda c = \lambda c$.

Ta có $0 = (\lambda c)^q - \lambda c = \lambda^q c^q - \lambda c = \lambda^q c - \lambda c = (\lambda^q - \lambda)c$ nhưng D là một thể nên $\lambda^q - \lambda$ =0. Như vậy $\forall \lambda \in Z, \exists q > 1$ sao cho $\lambda^q = \lambda$ rõ ràng trong trường hợp này Z có đặc số hữu hạn p$\neq$0. Ký hiệu P là trường con đơn của trường Z. Ta khẳng định rằng nếu thể D không giao hoán thì các phần tử a, b có thể biểu diễn lại thành phần tử c=ab-ba không chỉ khác 0 mà còn không thuộc Z. Thật vậy, vì Z chứa các phần tử giao hoán nên c$\in$Z và ac=a(ab)-(ab)a$\in$Z suy ra a$\in$Z do đó 0=ab-ba=c$\neq$0(mâu thuẫn).

Như vậy ta có thể giả thiết rằng c=ab-ba$\notin$Z. Vì $c^m = c$ nên c là phần tử số trên trường P vì vậy $c^{p^k} = c$ với phần tử k>0. Phần tử c thỏa mãn tất cả các điều kiện của bổ đề 2.1 do đó tồn tại x$\in$D sao cho $xcx^{-1} = c^i \neq c$, nghĩa là xc=$c^i x \neq cx$. Từ đó d=xc-cx$\neq$0 đồng thời ta có dc=(xc)c-c(xc)= $c^i(xc - cx)$=

$= c^i d$. Phần tử d có bậc hữu hạn và $dcd^{-1} = c^i \neq c$. Nhưng khi đó nhóm con nhân sinh bởi c và d trong D là hữu hạn, theo bổ đề 2.2 D phải giao hoán. Vì rằng cd$\neq$dc nên ta có điều mâu thuẫn.

Bây giờ ta chứng minh định lý 2.3.

Giả sử R là vành trong đó $(xy-yx)^{n(x,y)} = xy - yx$, $\forall x, y \in R$. Nếu R là vành nửa đơn thì nó đẳng cấu với tổng trực tiếp con các vành nguyên thủy R_a, ngoài ra R_a là ảnh đồng cấu của vành R, các R_a thỏa mãn các điều kiện trong R. Chúng ta đi chứng minh mỗi R_a là giao hoán.

Mặt khác ta có thể giả thiết rằng R là vành nguyên thủy, trong trường hợp đó có thể chứng minh rằng R$\approx$D, D là một thể nào đó. Hoặc là với số nguyên k nào đó vành ma trận D_k trên thể D phải là ảnh đồng cấu của vành con nào đó của R và do đó thỏa mãn các điều kiện của định lý. Ta chứng minh rằng điều sau không thể xảy ra. Thật vậy dễ dàng thấy điều kiện đòi hỏi bị vi phạm đối với các ma trận.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ \multicolumn{4}{l}{.........} \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ \multicolumn{4}{l}{.........} \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$$

Vì b=ab-ba$\neq$0; b^2=0. Như vậy nếu vành R là nửa đơn thì nó phải giao hoán.

Bây giờ giả sử R là vành tùy ý thỏa mãn các điều kiện của định lý. Khi đó chính các điều kiện của định lý cũng thỏa mãn đối với vành thương R/J(R). Vành thương R/J(R) nửa đơn theo chứng minh trên nó giao hoán. Do đó xy-yx$\in$J(R),$\forall x, y \in R$. Từ đó ta có thể kết luận xy-yx=0. Nói cách khác vành R là giao hoán.

Để xét tiếp các khả năng, chúng ta nhắc lại khái niệm tách được:

Giả sử đã cho các trường K và F, thêm vào đó K là mở rộng đại số của F. Phần tử a$\in$K được gọi là **tách được** trên F nếu đa thức tối tiểu của a lấy hệ tử trên trường F không có nghiệm bội.

Bổ đề 2.5. Giả sử K là trường mở rộng của trường F; K$\neq$F và giả thiết rằng $\forall a \in K$, tồn tại số tự nhiên n(a)>0 sao cho $a^{n(a)} \in F$. Khi đó một trong các điều sau là đúng:

1. K thuần túy không tách được trên F.
2. K có đặc số nguyên tố và là đại số trên trường con đơn P.

Định lý 2.4. (Jacobson-Noether) Nếu thể D không giao hoán và có cấu trúc đại số trên chính tâm Z của D, thế thì D chứa phần tử tách được trên Z nhưng không thuộc Z.

Chứng minh. Nếu đặc số của D bằng 0 thì mọi phần tử của D đều tách được trên Z. Ta xét một vành chia D có đặc số p$\neq$0.

Nếu định lý là sai thì D hoàn toàn không tách được trên Z tức là với mọi $x \in D$ thì $x^{p^{n(x)}} \in Z$ với số nguyên $n(x) \geq 0$. Do đó ta tìm được phần tử $a \in D$, $a \notin Z$ sao cho $a^p \in Z$.

Bằng cách định nghĩa ánh xạ: $\delta : D \to D; x \mapsto x\delta = xa - ax$. Khi đó do D có đặc số $p \neq 0$ nên $x\delta^p = xa^p - a^p x = 0$ (vì $a^p \in Z$). Ta lại có $a \notin Z$ nên $\delta \neq 0$. Giả sử $y\delta \neq 0$, khi đó ta tìm được k>1 sao cho $y\delta^k = 0$, $y\delta^{k-1} \neq 0$. Đặt $x = y\delta^{k-1}$, vì k>1 nên x có thể biểu diễn dưới dạng $x = \omega\delta = \omega a - a\omega$. Mặt khác $x\delta = 0$ và xa=ax. Hơn nữa vì D là thể nên x có thể biểu diễn dưới dạng x=au. Do x giao hoán với a nên u cũng vậy.Từ đó ta có đẳng thức $au = \omega a - a\omega$ suy ra $a = (\omega a - a\omega)u^{-1} = (\omega u^{-1})a - a(\omega u^{-1}) = ca - ac$ trong đó $c = \omega u^{-1}$. Từ đó dễ dàng suy ra $c = 1 + aca^{-1}$. Nhưng với t nào đó ta lại có $c^{p^t} \in Z$ nên $c^{p^t} = (1 + aca^{-1})^{p^t} = 1 + (aca^{-1})^{p^t} = 1 + ac^{p^t}a^{-1} = 1 + c^{p^t}$ (vì $c^{p^t} \in Z$). Mâu thuẫn vì 1=0.

Hai kết quả trước cho ta một định lý là tổng quát hóa của định lý Jacobson và Jacobson-Noether. Đó cũng là phép chứng minh của Kaplansky đối với vành nửa đơn.

Định lý 2.5.(Kaplansky)Giả sử R là vành có tâm Z và giả sử rằng $\forall a \in R$ tồn tại số nguyên n(a)>0 sao cho $a^{n(a)} \in Z$. Khi đó nếu R không chứa nil ideal thì nó phải giao hoán(hay ideal các giao hoán tử của R phải là nil).

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh rằng định lý đúng với thể. Nếu R là thể thì theo các điều kiện của định lý nó là một đại số trên tâm Z của nó và theo định lý 2.4 hoặc R giao hoán hoặc R chứa phần tử $a \notin Z$, tách được trên Z. Trong trường hợp sau, trường Z(a) không là hoàn toàn không tách được trên Z và thỏa mãn điều kiện bổ đề 2.5. nên ta suy ra Z(a) và do đó Z có đặc số nguyên tố $p \neq 0$ và đại số trên chính trường con đơn P. Nếu x là phần tử tùy ý của R thì x đại số trên Z nghĩa là đại số trên P. Điều này cho thấy P(x) là một trường hữu hạn. Nhưng khi đó $x^{m(x)} = x$ với m>1 theo định lý Jacobson (định lý 2.2) suy ra R giao hoán.

Bây giờ xét R là vành nguyên thủy. Nếu vành R là một vành nguyên thủy. Nếu vành R nguyên thủy thì hoặc nó là thể hoặc là với k>1 vành ma trận D_k lấy hệ tử trong D là ảnh đồng cấu của một vành con của R. Với khả năng sau trong D_k ta xét phần tử:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ \multicolumn{4}{l}{.........} \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$$

Thỏa mãn đẳng thức $x^m = x$ với m>0 nhưng đồng thời x không thuộc tâm D_k. Từ đó suy ra R là thể và khi đó R giao hoán (theo chứng minh trên).

Giả sử R là vành không có nil_ideal khác 0 và thỏa mãn điều kiện $a^{n(a)} \in Z$. Ta có tính chất sau: vành R là được biểu diễn thành tổng trực tiếp con các vành nguyên tố R_a. Hơn nữa vành R_a thỏa tính chất bổ sung: Với mỗi R_a đều tồn tại một phần tử không lũy linh $x_a \in R_a$ sao cho với mọi ideal khác (0) $\neq U_a \subset R_a$ thì $x_a^{m(U)} \in U_a$ với m(U)>0 nào đó. Vì là ảnh đồng cấu của R nên R_a thỏa giả thiết $a^{n(a)} \in Z_a$. Vậy để chứng minh định lý, ta chỉ cần chứng minh trong vành R_a.

Nói cách khác, ta có thể giả sử R là vành nguyên tố thỏa điều kiện $a^{n(a)} \in Z$ và chứa phần tử không lũy linh $b \in R$ sao cho với mọi ideal $(0) \neq U \subset R$ thì $b^{m(U)} \in U$. Do $b^{n(b)} = c \in Z$ cũng không lũy linh và các lũy thừa của nó trùng với bậc của tất cả các ideal khác 0 của vành R nên ta có thể bắt đầu với giả thiết $b \in Z$. Vì R nguyên tố nên mỗi phần tử của Z không chia hết 0 trong R.

Giả sử $\mathfrak{R} = \{(r,z) / r \in R, z \in Z, z \neq 0\}$ ta định nghĩa trong $\mathfrak{R}$ một hệ thức tương đương như sau: $(r_1,z_1) \sim (r_2,z_2)$ nếu $r_1 z_2 = r_2 z_1$. Dễ dàng kiểm chứng rằng hệ thức này là một quan hệ tương đương. Tập hợp các lớp tương đương ký hiệu $\mathfrak{R}^*$, ký hiệu lớp của (r,z) là [r,z].

Đặt $$[r_1,z_1] + [r_2,z_2] = [r_1 z_2 + r_2 z_1, z_1 z_2]$$
$$[r_1,z_1].[r_2,z_2] = [r_1 r_2, z_1 z_2]$$

Do các phần tử của Z không là ước của không trong R nên các phép toán này được định nghĩa tốt và $\mathfrak{R}^*$ là một vành. Hơn nữa ánh xạ biến $r \to [rz,z]$ là phép nhúng R vào $\mathfrak{R}^*$. Cuối cùng tâm Z^* của vành $\mathfrak{R}^*$ trùng với tập hợp $\{[r,z] / r \in Z\}$ và suy ra ngay Z^* là một trường.

Nếu $[r,z] \in \mathfrak{R}^*$ thì $[r,z]^{n(r)} = [r^{n(r)}, z^{n(r)}] \in Z^*$ do đó $\mathfrak{R}^*$ có tính chất mà R có. Nhưng $\mathfrak{R}^*$ là vành đơn (thật vậy, nếu $U^* \neq (0)$ là một ideal của $\mathfrak{R}^*$ thì ta kiểm tra được $U = \{(r,z) / [r,z] \in U^*, z \in Z\}$ là ideal khác 0 của vành R nên $b^{m(U)} \in U$ mà $0 \neq b^{m(U)} \in Z$ (vì b không lũy linh và $b \in Z$) nên từ đó ta suy ra U^* chứa phần tử khác 0 của Z^*). Nhưng Z^* là một trường vì vậy $U^* = \mathfrak{R}^*$ và khẳng định của chúng ta với vành đơn $\mathfrak{R}^*$ đã được chứng minh. Sau này với vành đơn có đơn vị thì vành $\mathfrak{R}^*$ nguyên thủy và theo chứng minh trên $\mathfrak{R}^*$

phải giao hoán. Khi đó vành R cũna giao hoán vì R được nhúng vào $\Re^*$.Tới đây định lý đã được chứng minh.

Nhận xét. Mệnh đề này thực sự là sự mở rộng của định lý Jacobson (định lý 2.2) vì nếu R là vành thỏa $x^{n(x)} = x$, n(x)>1 thì R không chứa phần tử lũy linh khác 0 nên không có nil_ideal khác 0.

Mặt khác nếu e là một phần tử lũy đẳng trong R thì với mọi x∈R ta có: $\left(xe - exe\right)^2$=0=$(ex - exe)^2$ suy ra xe-exe=ex-exe=0 (vì R không chứa phần tử lũy linh khác 0) Vậy xe=ex, hay mọi phần tử lũy đẳng đều thuộc tâm. Do đó nếu $a^{n(x)} = a$, n(a)>0 thì e=$a^{n(a)-1}$ là một phần tử lũyđẳng và theo chứng minh trên ta suy ra $a^{n(a)-1} \in Z$.

Như vậy các giả thiết của định lý 2.5 đều thỏa nên R giao hoán.

Định lý 2.6. Giả sử R là vành với tâm Z và giả sử tồn tại số nguyên n>1 sao cho $x^n - x \in Z, \forall x \in R$. Khi đó vành R là giao hoán.

Chứng minh. Ta xét tất cả các trường hợp sau:

Ta bắt đầu với trường hợp R là một thể. Để ý rằng x∈R, x∉Z thì nếu $\lambda \in Z$ từ hệ thức $\left(\lambda x\right)^n - \lambda x \in Z$ suy ra rằng $\left(\lambda^n - \lambda\right)x \in Z$. Vì x∉Z nên $\lambda^n - \lambda$=0, $\forall \lambda \in Z$ do đó Z là một trường hữu hạn. Vì R đại số trên Z nên ta nhận được $x^{n(x)} = x$, ∀x∈R. Khi đó theo định lý Jacobson suy ra R giao hoán.

Nếu vành R nguyên thủy mà không là thể thì với thể D nào đó và số k>1 vành D_k là ảnh đồng cấu của vành con R. Do đó trong D_k thỏa điều kiện $x^n - x \in Z$. Tuy nhiên phần sau không thể xảy ra chẳng hạn với phần tử:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ .... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix} \in D_k$$

thỏa hệ thức $x^2 = 0; x^n - x = -x \in$ Z (mâu thuẫn vì x không nằm trong tâm của vành D_k). Từ đó suy ra R là thể và do đó là trường.

Nếu vành R là nửa đơn thì nó là tổng trực tiếp con các vành nguyên thủy R_a. Mỗi vành R_a là ảnh đồng cấu của vành R và theo phần chứng minh trước R_a giao hoán. Vậy R là giao hoán.

Chuyển qua trường hợp tổng quát, ta có R/J(R) nửa đơn nên giao hoán.

Hệ quả. $\forall x, y \in R$, ta có xy-yx$\in$J(R).

Bổ đề 2.6. J(R)$\subset$Z.

Chứng minh. Ta thấy rằng nếu $\lambda \in Z$ và x$\in$R thì $\left(\lambda^n - \lambda\right)x \in Z$ do đó, $\forall y \in R$ ta có $\left(\lambda^n - \lambda\right)\left(xy - yx\right) = 0$.

Nếu $\lambda \in Z \cap J(R)$ thì $\lambda^{n-1} \in J(R)$ và đẳng thức $\left(1 - z^{n-1}\right)t = 0$ thì suy ra t=0. Vì vậy $\left(1 - \lambda^{n-1}\right)\lambda\left(xy - yx\right) = 0$ suy ra $\lambda(xy - yx) = 0$ đối với mọi $\lambda \in Z \cap J(R)$ và $\forall x, y \in R$.

Bây giờ giả sử a phần tử tùy ý của J(R) khi đó $\mathrm{a}^n - \mathrm{a} \in \mathrm{Z} \cap \mathrm{J(R)}$ và do $\left(\mathrm{a}^n - \mathrm{a}\right)\left(xy - yx\right) = 0$ suy ra $\mathrm{a}(xy - yx) = 0$. Tương tự ta nhận được $(xy - yx)\mathrm{a} = 0$, $\mathrm{a} \in J(R)$ và $\forall x, y \in R$.

Trong những hệ thức này ta đặt x=a ta nhận được đẳng thức $\mathrm{a}^2 y = \mathrm{aya} = y\mathrm{a}^2$, từ đó suy ra $\mathrm{a}^2 \in Z$, $\forall a \in J(R)$. Nếu n chẵn thì cùng với phần tử a^2, phần tử a^n cũng thuộc Z, và từ điều kiện $\mathrm{a}^n - \mathrm{a} \in \mathrm{Z}$ ta nhận được a$\in$Z. Nếu n lẻ thì $a^{n-1} \in Z \cap J(R)$ và điều kiện $\mathrm{a}^n - \mathrm{a} \in \mathrm{Z}$ kéo theo 0=($\mathrm{a}^n - \mathrm{a}$)x-x($\mathrm{a}^n - \mathrm{a}$)=$(1 - \mathrm{a}^{n-1})(x\mathrm{a} - \mathrm{a}x)$, $\forall x \in R$. Từ đó suy ra xa-ax=0 nghĩa là a$\in$Z. Như vậy trong cả hai trường hợp a đều thuộc Z. Vậy J(R)$\subset$Z.

Theo chứng minh trên ta rút ra được rằng: J(R)(xy-yx)=0. Mặt khác theo hệ quả của định lý 2.6 ta có xy-yx$\in$J(R). Như vậy $(xy - yx)^2 = 0$ cũng với n>1 ta có $(xy - yx)^n = 0$, do đó từ $(xy - yx)^n - (xy - yx) \in Z$ ta rút ra xy-yx$\in$Z.

Hệ quả. $\forall x, y \in R$, xy-yx$\in$Z và thỏa mãn đẳng thức $(xy - yx)^2 = 0$.

Ta định nghĩa vành không thể phân tích thành tổng trực tiếp con: vành được gọi là không phân tích được thành tổng trực tiếp con nếu giao của tất cả các ideal của nó là một ideal khác (0). Theo kết quả phần I mọi vành là tổng trực tiếp con của các vành không phân tích được. Do đó ta chứng minh định lý trên chỉ cần đối với vành không phân tích được thành tổng trực tiếp con được.

Ta bắt đầu giả sử rằng R là vành không thể phân tích thành tổng trực tiếp con, sao cho $x^n - x \in Z$, $\forall x \in R$. Giả sử S là giao của tất cả các ideal khác (0) của vành R, theo giả thiết S$\neq$(0). Rõ ràng S là ideal tối tiểu duy nhất của vành R. Theo kết quả định lý 2.5 ta có thể giả sử J(R)$\neq$(0) nếu không R giao hoán. Như vậy S$\subset$J(R) ; theo bổ đề 2.6 J(R)$\subset$Z nên S$\subset$Z. Vì ta có J(R)(xy-yx)=(0) ta đạt được $S^2 = (0)$ nếu R không giao hoán.

Chúng ta chứng minh một số kết quả sau:

Bổ đề 2.7. Tồn tại số nguyên tố p sao cho p(xy-yx)=0, $\forall x, y \in R$.

Chứng minh. Vì $x^n - x \in Z$ và $(2x)^n - 2x \in Z$ nên $(2^n - 2)x \in Z$ từ đó $(2^n - 2)(xy - yx) = 0$. Nếu vành R không giao hoán thì nó sẽ có các phần tử với bậc cộng tính hữu hạn. Khi đó nó có phần tử bậc nguyên tố p nào đó. Giả sử $R_p = \{x \in R \in / px = 0\}$ thì $R_p \neq (0)$ và R_p là ideal trong vành R chứa S. Nếu với số nguyên tố q nào đó khác với p và ideal $R_q \neq (0)$ thì S$\subset R_q$ nhưng khi đó S$\subset R_p \cap R_q$=(0) trái giả thiết S$\neq$(0).

Bây giờ $(p^n - p)(xy - yx) = 0, \forall x, y \in R$, nghĩa là $(p^{n-1} - 1)p(xy - yx) = 0$. Vì $p^{n-1} - 1$ nguyên tố cùng nhau với p nên theo chứng minh trên ta có
p(xy-yx)=0. Bổ đề được chứng minh.

Giả sử x,y là các phần tử tùy ý của R, theo hệ quả của bổ đề 2.6 thì xy-yx$\in$Z. Điều này còn đúng cho phần tử $x^2y - yx^2$? Biến đổi ta được $x^2y - yx^2$= x(xy-yx)+(xy-yx)x=2(xy-yx). Tương tự biến đổi số k>1 ta được: $x^k y - yx^k = x^k y - yx^k = kx^{k-1}(xy - yx)$. Đặc biệt với k=p ta nhận được: $x^p y - yx^p = px^{p-1}(xy - yx)$=0.

Do đó ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.7. $\forall x \in R$, $x^p \in Z$.

Đặt A(S)={x$\in$R/xS=(0)}. Khi đó A(S) là ideal trong R và vì S^2=(0) nên S$\subset A(S)$; A(S)$\neq$(0).

Giả sử x$\in$A(S); theo bổ đề 2.7 $x^p \in Z$ do đó $\forall y, z \in R$, ta có đẳng thức $(x^{np} - x^p)(yz - zy) = 0$ hay là $x^{(n-1)p}x^p(yz - zy) = x^p(yz - zy)$.

Vì $x^{(n-1)p} \in Z$ nên tập T=$\{r \in R / x^{(n-1)p}r = r\}$ là một ideal của R. Nếu ideal T$\neq$(0) thì nó chứa S. Nhưng điều này không thể xảy ra vì nếu 0$\neq$r$\in$S vì x$\in$A(S), $x^{(n-1)p}r = 0 \neq r$. Vì vậy T=(0) nhưng $x^p(yz - zy) \in T = (0)$ suy ra $x^p(yz - zy)$=0, $\forall x \in A(S)$, $\forall$y,z$\in$R. Cụ thể ta có $x^p(yx - xy) = 0$ hay $x^{p+1}y = x^p yx = yx^{p+1}$ vì $x^p \in Z$. Tiếp tục thực hiện như trên ta được $x^{p+k}y = yx^{p+k}, \forall k \geq 0$ và $x^{p+k} \in Z$.

Từ điều kiện $x^n - x \in Z$ và $(x^n)^n - x^n \in Z$ ta suy ra rằng $x^{n^2} - x \in Z$. Tương tự ta có thể chứng minh được rằng $x^{n^k} - x \in Z$, $\forall k \geq 1$, chọn k thỏa $n^k > p$. Vì $x^{n^k} \in Z$ và $x^{n^k} - x \in Z$ nên x$\in$Z.

Do đó ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.8. $A(S)\subset Z$.

Bổ đề này chứng tỏ rằng đặc biệt nếu A(S)=R thì R là vành giao hoán. Vì vậy ta giả thiết rằng $A(S)\neq R$.

Giả sử a là ước của 0 của vành R, nghĩa là $\exists x\in R$:ax=0. Khi đó ta cũng có đẳng thức $ax^p=0$. Nếu $x^p\neq 0$ theo bổ đề 2.7 suy ra $x^p\in Z$. Nếu chính $x^p=0$ thì $x\in Z$. Thật vậy đối với số k thỏa $n^k>p$ thì $x^{n^k}=0$ mà theo chứng minh trên ta có $x^{n^k}-x\in Z$, do đó $x\in Z$. Suy ra rằng trong mọi trường hợp phần tử a linh hoá phần tử $z\neq 0$ và $z\in Z$ nào đó. Vì rằng $z\neq 0$ nên $Rz\neq(0)$. Thật vậy trong trường hợp ngược lại ta nhận được tập hợp $\{x\in R / Rx=(0)\}$ là ideal khác (0) chứa S, do đó $R\neq A(S)$. Để ý rằng $z\in Z$ ta thu được Rz là ideal khác (0) của vành R từ đó $S\subset Rz$. Khi đó $aS\subset aRz\subset azR=(0)$, $a\in A(S)$. Vậy ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.9. Mọi ước của 0 trong vành R đều thuộc A(S).

Bổ đề 2.10. Vành thương R/A(S) là một trường hữu hạn.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh R/A(S) là một trường.

Nếu s là phần tử khác 0 của S thì $s\in Z$ và Rs là ideal của vành R, theo chứng minh trên Rs phải là ideal khác (0), từ đó $S\subseteq Rs$. Mặt khác vì $s\in S$ và S ideal trên vành R nên $Rs\subseteq S$ vì vậy S=Rs.

Giả sử x là phần tử tùy ý của R không nằm trong A(S). Theo bổ đề 2.9 phần tử x không phải là ước của 0 trong R và xs khác 0 của S. Do phần trên: Rxs=S; nếu $z\in R$, $z\notin A(S)$ thì phần tử $zs\in S=Rxs$ do đó $\exists y\in R$: zs=yxs từ đó (yx-z)s=0. Vì rằng phần tử yx-z không là ước của 0 nên $yx-z\in A(S)$. Chuyển qua ảnh đồng cấu trong vành thương $\overline{R}$=R/A(S) ta nhận được $\overline{y}\overline{x}=\overline{z}$. Ta đã chứng minh rằng phương trình tương ứng trong vành thương $\overline{R}$ có thể giải được $\forall\overline{x}\neq 0$ và $\overline{z}$ nào đó.Do đó $\overline{R}$ là một thể. Vì rằng mọi giao hoán tử yx-xy là ước của 0, $\forall x,y\in R$ nên $xy-yx\in A(S)$. Từ đó suy ra vành thương $\overline{R}$ giao hoán. Như vậy ta đã chứng minh được R/A(S) là một trường.

Bây giờ ta xét tính hữu hạn của R/A(S). Nếu $x\notin A(S)$, vì $x^p\in Z$ nên $(x^{np}-x^p)(yz-zy)=0,\forall y,z\in R$. Nếu R không giao hoán thì phần tử $x^{np}-x^p$ là ước của 0 và do đó thuộc A(S). Nhưng khi đó trong trường $\overline{R}$=R/A(S) mỗi phần tử $\overline{x}$ thỏa mãn hệ thức $\overline{x}^{np}=\overline{x}^p$. Từ đó suy ra tính hữu hạn của trường $\overline{R}$.

Bây giờ ta chứng minh định lý 2.6

Vì rằng $\overline{R}$=R/A(S) là trường hữu hạn nên nhóm nhân các phần tử khác 0 của $\overline{R}$ là nhóm xyclic. Giả sử $\overline{a}$ là ảnh của phần tử của nhóm này và là tạo ảnh của a$\in$R . Nếu x$\notin$A(S) thì $a^t - x \in A(S) \subset Z$ với t>0 nào đó. Do đó $(a^t - x)$a= =a$(a^t - x)$ suy ra phần tử a giao hoán với mọi phần tử x$\notin$A(S) chứng tỏ a$\in$Z. Từ điều kiện $a^t - x \in A(S) \subset Z$ thỏa $\forall x \in R$ nhưng x$\notin$A(S) suy ra x$\in$Z. Nhưng A(S) và phần bù của nó nằm trong Z nên mọi trường hợp ta đều có R=Z. Định lý được chứng minh.

Phần II trình bày nội dung định lý quan trọng Wedderburn và các vấn đề liên quan đến tính giao hoán của vành. Tiếp theo chúng ta sẽ xét một hướng mở rộng tích cực khác cực khác của Herstein: Khái niệm siêu tâm của vành được Herstein trình bày trong bài báo: On the Hypercenter of a ring năm 1975.

Chương 3

SIÊU TÂM CỦA VÀNH NỬA ĐƠN

Cho vành R, người ta gọi tâm của vành R là tập hợp:

C(R)=$\{a \in R \,/\, ax = xa, \forall x \in R\}$. Đây là tập hợp các phần tử của R giao hoán với mọi phần tử của R. Dễ dàng thấy ngay rằng tâm C(R) của vành R cũng là vành con, hơn nữa là vành giao hoán. Herstein đã mở rộng khái niệm này bằng khái niệm siêu tâm được định nghĩa như sau:

Ta gọi siêu tâm vành R là tập hợp:

T(R)=$\{a \in R \,/\, ax^n = x^n a, n = n(x,a) \ge 1, \forall x \in R\}$

Mệnh đề 3.1.

1. C(R)$\subset$T(R).
2. T(R) là vành con của R.
3. $\forall \varphi \in Aut(R) \Rightarrow \varphi(T(R)) \subset T$(R).

Cũng năm 1975, Herstein đã đặt bài toán ngược lại liệu vành R như thế nào thì siêu tâm T(R) trùng với tâm C(R) và giải quyết cho lớp các vành càng rộng càng tốt.

Đầu tiên ta sẽ xét trường hợp R là một thể:

Bổ đề 3.1. Nếu R là một thể thì T(R)=C(R).

Chứng minh. Vì R là một thể nên T(R) không những là vành con mà còn là một thể con. (Thật vậy, ta có $1 \in$T(R). Giả sử a$\in$T(R) suy ra $\forall x \in R, \exists n \ge 1$ sao cho $ax^n = x^n a$ (1), vì a$\in$R nên $a^{-1} \in R$. Từ (1) ta suy ra $x^n a^{-1} = a^{-1} x^n$ nghĩa là $a^{-1} \in T(R)$ nên T(R) là một thể.) Vì $\varphi(T) \subset T(R), \forall \varphi \in Aut(R)$ nên theo định lý Brauer (định lý: Nếu T là thể con của thể D được bảo toàn qua mọi tự đẳng cấu Aut(D) của D thì hoặc T=D hoặc T là tập con của tâm D. (On a theorem of H.Cartan đăng trên tờ Bull. American Math Society 55(1949) page 619-620)), ta phải có T(R)=R hoặc T(R)$\subset$C(R). Nếu T(R)$\subset$C(R) thì T(R)=C(R). Giả sử T(R)=R thì $\forall a,b \in R$, ta có $ab^n = b^n a$, với $n \ge 1$ nào đó. Theo định lý 2.5 suy ra R giao hoán hay R=C(R) =T(R).

Ngoài thể ra những vành nào cho kết quả T(R)=C(R)? Ta đi xét các vành kế tiếp các lớp vành nguyên thủy và nửa đơn.

Bổ đề 3.2. Nếu R là vành nửa đơn thì T(R)=C(R).

Chứng minh. Nếu R là vành nửa đơn thì R=$\oplus R_\alpha$ trong đó R_α là vành nguyên thủy. Hơn nữa T(R) ánh xạ được vào R_α, $\forall\alpha$ nên nếu chứng minh được T(R_α)=C(R_α) thì ta có T(R)=C(R).

Giả sử rằng R là vành nguyên thủy suy ra R là dày đặc các phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ V trên thể D. Nếu dim(V)=1 thì R=D do đó R cũng là một thể suy ra T(R)=C(R). Ta chỉ cần xét dim(V)>1.

Giả sử $t\neq 0$, $t\in$T(R) và giả sử với v nào đó, $v\in$V ta có v và vt là độc lập tuyến tính trên D. Do tính dày đặc của R trên V suy ra tồn tại $x\in$R để vx=0 và vtx=vt suy ra vtx^m=vt, $\forall m\geq 1$. Bởi vì $t\in$T(R), $tx^n = x^n t$, với $n\geq 1$ nào đó suy ra vt=vt$x^n = vx^n t = 0$ (mâu thuẫn). Vậy $\forall v\in V$ ta có vt=$\lambda(v).v$ với $\lambda(v)\in D$. Nếu v,w$\in$V là độc lập tuyến tính trên D ta sẽ chứng minh rằng $\lambda(v)=\lambda(w)$.Thật vậy, vt=$\lambda(v).v$, wt=$\lambda(w).w$ và (v+w)t=$\lambda(v+w).(v+w)$ suy ra $(\lambda(v)-\lambda(v+w)).v+(\lambda(w)-\lambda(v+w)).w=0$. Do v và w độc lập tuyến tính nên $\lambda(v)=\lambda(v+w)=\lambda(w)$. Vì λ là hằng, không thay đổi trên các phần tử độc lập, và vì $\dim_D V>1$ ta nhận được $\lambda(v)=\lambda$, λ độc lập với v, $\forall v\in V$.

Nếu $x\in$R, vì vx$\in$V, (vx)t=λ(vx) nên v(xt)=λ(vx). Mặt khác vt=λv, khi đó (vt)x=(λv)x=λ(vx)$\Rightarrow$v(tx)= λ(vx) $\Rightarrow$v(xt)=v(tx) $\Rightarrow$v(xt$-$tx)=0 với mọi v $\in$V. Bởi R trung thành trên V$\Rightarrow$xt$-$tx=0, $\forall x\in R\Rightarrow$t$\in$C(R) $\Rightarrow$T(R)$\subset$C(R) $\Rightarrow$T(R)=C(R).

Bài toán còn mở rộng cho R là vành không có nil-ideal khác không:

Bổ đề 3.3. Giả sử R là vành tùy ý. Nếu a là lũy linh và a$\in$J(R) thì aR là ideal phải của R (a và aR đều nằm trong J(R)).

Chứng minh. Giả sử $a\neq 0$, a$\in$T(R) là lũy linh $\Rightarrow a^n=0$, $a^{n-1}\neq 0$ với n>1 nào đó, x$\in$R là phần tử tùy ý đã cho vì $a^{n-1}\in T(R)\Rightarrow (ax)^m a^{n-1}=a^{n-1}(ax)^m=0$ với m>1 nào đó. Gọi i là số bé nhất thỏa $(ax)^u.a^i=0$ với $u\geq 1$. Nếu i=1 từ đẳng thức này ta có

$(ax)^{u+1}=(ax)^u.(ax)=0\Rightarrow$ax lũy linh.

Nếu i>1 thì với $x(ax)^u.a.a^{i-1}=0\Rightarrow (xa)^{u+1}.a^{i-1}=x(ax)^u.a.a^{i-1}=0$ trong đó

$a^{i-1}\in T(R)\Rightarrow a^{i-1}((xa)^{u+1})^s=((xa)^{u+1})^s.a^{i-1}=0$ với số $s\geq 1$ nào đó. Vậy $a^{i-1}(xa)^r=0$ trong đó r=(u+1)s do đó $a^{i-2}(ax)^{r+1}=a^{i-2}a(xa)^r x=0$. Vì

$a^{i-2}\in T(R)\Rightarrow ((ax)^{r+1})^v.a^{i-2}=a^{i-2}.((ax)^{r+1})^v=0$ (mâu thuẫn) với tính cực tiểu của i, suy ra i=1 và ax lũy linh $\forall x\in R$.

Định lý 3.1. Giả sử R là vành nguyên tố không có nil_ideal khác không . Thế thì T(R) không có phần tử lũy linh.

Chứng minh. Gọi N là tập hợp tất cả các phần tử lũy linh trong T(R). $\forall a,b \in T(R) \Rightarrow ab^n = b^n a$ với n=n(a,b)$\geq$1. Do định lý của Herstein[2], N cũng là ideal của T(R) thật ra nó là ideal lớn nhất của T(R).

Giả sử N$\neq$0 vì $\varphi(T(R)) \subseteq T(R), \forall \varphi \in Aut(R) \Rightarrow \varphi(N) \subseteq N$ và do bổ đề 3.3 tập hợp N$\subset$J(R). Nếu x$\in$J(R), xét $\varphi: R \to R$ thỏa $\varphi(y) = (1+x)y(1+x)^{-1}$, $\forall y \in R \Rightarrow \varphi \in Aut(R)$ do đó $(1+x)N(1+x)^{-1} \subset N$.

Giả sử a$\neq$0, a$\in$N và a^2=0, $\forall x \in R \Rightarrow$ax là lũy linh (do bổ đề 3.3), vì vậy $(1+ax)^{-1}$=$1-ax+(ax)^2$... Vì (1+ax)a$(1+ax)^{-1}$ $\in$N$\Rightarrow$ $(1+ax)a$ $(1-ax+(ax)^2+...) \in N$. Bởi vì a^2=0 nên từ hệ thức cuối cùng suy ra rằng (1+ax)a$\in$N$\Rightarrow$ $axa \in N, \forall x \in R$, nghĩa là aRa$\subset$N.

Giả sử a, b$\in$N và $a^2=0, b^2=0$. Nếu r$\in$R theo bổ đề 3.3 br$\in$J(R) và lũy linh nên theo kết quả trên a(br)a=0 nghĩa là abRa=0, vì R là vành nguyên tố ta rút ra được ab=0. Nếu x$\in$J(R), giả sử b=(1+x)a$(1+x)^{-1}$ thì b$\in N$ và b^2=0. Vì ab=0 nên 0=ab=a(1+x)a$(1+x)^{-1} \Rightarrow axa=0$ và aJ(R)a=0 bởi vì R là vành nguyên tố và J(R)$\neq$0 là một ideal của R $\Rightarrow$a=0. Vậy N=0 và T(R) không có phần tử lũy linh.

Bổ đề 3.4. Giả sử R là vành nguyên tố không chứa nil ideal, thế thì T(R) giao hoán và một phần tử khác không của T(R) thì không phải là ước của 0 trong R.

Chứng minh. Giả sử a,b$\in$T(R)$\Rightarrow$ $ab^n = b^n a$, n$\geq$1 nào đó. Như vậy theo định lý Herstein[2], giao hoán tử của T(R) là nil, nhưng theo định lý 3.1: T(R) không có phần tử lũy linh$\Rightarrow$giao hoán tử của T(R) bằng 0$\Rightarrow$T(R) giao hoán.

Giả sử a$\neq$0, a$\in$T(R) và au=0 với u$\in$R. Nếu x$\in$T(R) thì y=uxa thỏa mãn điều kiện $y^2=0$ và ay=0. Vậy $(1+y)a(1+y)^{-1} \in T(R)$, tức là a+ya$\in$T(R), trong đó ya$\in$T(R). Tuy nhiên $(ya)^2$=yaya=0 vì rằng T(R) không chứa phần tử lũy đẳng suy ra ya=0. Lập luận tương tự ta có uxa^2=0, $\forall x \in R$. Vì $a^2 \neq 0$và R nguyên tố nên u=0. Vậy từ au=0$\Rightarrow$u=0$\Rightarrow$a không là ước của 0 trong R.

Định lý 3.2. Giả sử R là vành không có nil ideal thế thì T(R)=J(R).

Chứng minh. $R = \oplus_s R_\alpha$ trong đó R_α nguyên tố không có nil ideal. Vì T(R) ánh xạ được vào T(R_α) nên nếu chúng ta chứng minh được rằng T(R_α)=C(R_α) với mọi α thì ta cũng có được T(R)=C(R).

Ta có thể giả thiết rằng R là vành nguyên tố và không có nil ideal. Nếu J(R)=0 thì do bổ đề 3.2 T(R)=C(R).

Xét trường hợp J(R)$\neq 0$. Khi đó C(J)$\subset$C(R). Ta chứng minh T(R)=C(R). Giả sử a$\in$T(R) và x$\in$J và ax-xa$\neq 0$. Bây giờ, ta có:

$$0 \neq (ax - xa)(1+x)^{-1} = a - (1+x)a(1+x)^{-1} \in T(\mathrm{R})$$

Rõ ràng, vì x$\in$J, $(ax - xa)(1+x)^{-1} \in$J. Vì vậy $(ax - xa)(1+x)^{-1} \in T(R) \cap J$, do đó $T(R) \cap J \neq 0$.

Nếu chúng ta có $T(R) \cap J \subset C(R)$ thì $(ax - xa)(1+x)^{-1} \in$C(R) và b $\in$ T(R) thì $b(ax - xa)(1+x)^{-1} \in T(R) \cap J \subset C(R)$. Vì vậy cả hai $(ax - xa)(1+x)^{-1}$ $\in$ C (R) và $b(ax - xa)(1+x)^{-1} \in$C(R). Vì C(R) không có ước của 0 trong R suy ra b$\in$C (R) và T(R)=C(R). Ta có thể rút gọn bài toán như sau:

Nếu R là một vành nguyên tố không có nil ideal, và J(R)=R thì T(R)=C(R). Giả sử rằng $0 \neq a \in T, x \in R$ và $z \in R$ sao cho za=az và zx=xz. Vậy rõ ràng $(1+x)a(1+x)^{-1}$ và $(1+zx)a(1+zx)^{-1} \in$R ta có:

1) $(1+x)a = a_1(1+x)$

2) $(1+zx)a = a_2(1+zx)$ ở đây $a_1, a_2 \in T(R)$.

Nhân (1) với z và trừ cho (2), để ý rằng z giao hoán với x và với a ta thu được

3) $za - a = za_1 - a_2 + (a_1 - a_2)zx$

Bây giờ za-a giao hoán với a và với z. Tuy nhiên vì $a_1, a_2 \in T(R)$ và T(R) giao hoán(theo bổ đề 3.4) $za_1 - a_2$ giao hoán với a vậy từ (3) chúng ta suy ra rằng $(a_1 - a_2)zx$ giao hoán với a. Điều này cho phép khẳng định $(a_1 - a_2)z(xa - ax) = 0$.

Nếu $a_1 - a_2 \neq 0$ vì $a_1 - a_2 \in T(R)$ và không phải là ước của 0 trong R suy ra z(ax-xa)=0. Nói cách khác nếu $a_1 = a_2$ quay lại (3) ta thấy $za - a = za_1 - a_1$ suy ra $(1-z)(a - a_1) = 0$. Vì $z \in R = J$ nên $(1-z)(a - a_1) = 0$ suy ra $a = a_1$.

Khi đó từ (1) ta có xa=ax $\Rightarrow$z(ax-xa)=0. Do đó nếu $z \in R$ giao hoán với cả $a \in T(R)$ và $x \in R$ thì z(xa-ax)=0.

Bây giờ nếu $a\neq 0$, $a\in T(R)$ và $x\in R$ thì $ax^n = x^n a$ với $n\geq 1$ nào đó. Nếu $z=x^n$ thì za=az và zx=xz $\Rightarrow$ z(ax-xa)=0 tức là $x^n(ax-xa)=0$. Nhưng ở đây $x^n(ax-xa)(1+x)^{-1}=0$ vì rằng $(ax-xa)(1+x)^{-1}\in T(R)$. Nếu nó khác 0 thì không phải là ước của 0. Vậy nếu (ax-xa) $\neq 0 \Rightarrow x^n=0$. Vậy a giao hoán với mọi phần tử không lũy linh thuộc R.

Nếu $y\in R$ và ay-ya$\neq 0$, vì $(ay-ya)(1+y)^{-1}\in T(R)$ nó không phải là ước của 0 trong R. Vậy nếu ay-ya$\neq 0$ thì nó không phải là ước của 0 và do đó không thể lũy linh. Vậy a phải giao hoán với ya-ay. Còn nếu ay-ya=0 thì tất nhiên ta cũng có a giao hoán với ay-ya. Vậy a giao hoán với ax-xa, $\forall x\in R$. Nếu đặc số của $R\neq 2$ thì theo một kết quả trước đây $a\in C(R)$. Vậy nếu đặc số của R khác 2 thì $T(R)\subset C(R)\Rightarrow T(R)=C(R)$. Giả sử đặc số của R bằng 2 vì a(ax+xa)=(ax+xa)a, $\forall x\in R \Rightarrow a^2\in C(R)$. Vậy z=$a^2$ giao hoán với a và với x $\Rightarrow 0 = z(ax+xa) = a^2(ax+xa)$ và a không phải là ước của 0 $\Rightarrow ax = xa \Rightarrow a\in C(R)$, ta có $T(R)\subset C(R)$ suy ra T(R)=C(R).

Ở đây ta đã có nhận xét thú vị : Nếu R là vành nil nghĩa là $\forall x\in R,\ \exists n(x)\geq 1$ sao cho $x^{n(x)}=0$ do đó theo khái niệm siêu tâm ta có ngay T(R)=R. Ta xây dựng vành nil không giao hoán (hay $C(R)\neq R$) trên tập hợp vành các ma trận vuông cấp n.

Gọi R là tập hợp các ma trận cấp 3 có dạng:

$$R=\left\{\begin{pmatrix}0 & \mathrm{a} & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} / \mathrm{a},b,c\in Q\right\}$$, trong đó Q là trường các số hữu tỷ.

R cùng với các phép toán cộng và nhân hai ma trận thông thường trở thành một vành không giao hoán. Chẳng hạn lấy a, a' và c, c' sao cho $aa'\neq cc'$ thì tích của hai ma trận sau là khác nhau:

$$\begin{pmatrix}0 & \mathrm{a} & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & \mathrm{a}' & b'\\ 0 & 0 & c'\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \mathrm{a}c'\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & \mathrm{a}' & b'\\ 0 & 0 & c'\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & \mathrm{a} & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \mathrm{a}'c\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Vì R không giao hoán nên tâm của R là $C(R)\neq R$.

Mặt khác R là vành nil vì dễ dàng kiểm tra rằng: $\forall x \in R$ thì $x^3 = 0$, do đó T(R)=R. Từ đó suy ra C(R) $\neq$ T(R).

Từ ví dụ trên ta xây dựng các vành ma trận vuông cấp n lấy hệ tử trên trường nào đó, ta có thể chỉ ra các vành mà siêu tâm T(R) thật sự khác với tâm C(R).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. R. BRAUER, *On a theorem of H.Cartan, Bull. Amer*. Math. Soc. 55 (1949), 619-620.

[2]. FAITH C.C, *Radical extensions of rings. Pro. Amer*. J of Math. 12 (1961) 274-283.

[3]. I.N. HERSTEIN, *Noncommutative rings. Published by The Mathematical Association of America* (Distributed by John Wiley and Sons)(1968)

[4]. I.N. HERSTEIN, *On the Hypercenter of a ring*. J of Algebra 36 (1975) 151-157.

[5]. WEDDERBURN J.H.M, *A theorem on finite algebras*. Trans. Amer. Math. Soc 6 (1905) 349-352