

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

HÀ PHƯỚC ANH KHOA

**SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG TRONG CHIẾN LƯỢC
GIẢI TOÁN BẬC TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**

**Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60.46.40**

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: **TS. NGUYỄN DUY THÁI SƠN**

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Luận văn sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận văn tốt nghiệp
Thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày.... tháng
năm 2011.

** Có thể tìm hiểu luận văn tại:*

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Số phức có thể được dùng như một công cụ hữu hiệu để giải quyết nhiều bài toán, cả trong đại số, hình học lẫn lượng giác, tổ hợp... Với sự trở lại của Số phức trong chương trình trung học phổ thông, nhiều vấn đề của Toán sơ cấp có thể được trình bày rõ ràng và đầy đủ hơn.

Chương trình Toán học ở bậc trung học phổ thông của hầu hết các nước đều có phần kiến thức số phức. Ở nước ta, sau nhiều lần cải cách, nội dung số phức cuối cùng cũng đã được đưa trở lại vào chương trình Giải tích 12 (với dung lượng còn khá khiêm tốn). Vì nhiều lý do khác nhau, không ít học sinh (thậm chí là học sinh khá, giỏi) sau khi học xong phần số phức cũng chỉ hiểu một cách đơn giản: sử dụng số phức ta có thể giải mọi phương trình bậc hai, tính được một vài tổng đặc biệt...

Trên thực tế, trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic khu vực, Olympic quốc tế, có khá nhiều dạng toán có liên quan (thường là gián tiếp) đến số phức. Có thể nói phương pháp giải các dạng toán như thế vừa mang tính tổng hợp cao vừa mang tính đặc thù sâu sắc.

Việc sử dụng số phức trong nghiên cứu, khảo sát hình học phẳng tỏ ra có nhiều thuận lợi, nhất là trong việc xem xét các vấn đề liên quan đến các phép biến hình cùng với hình học của chúng. Dùng số phức ta cũng có thể tìm được lời giải hữu hiệu, tự nhiên (nhưng không kém phần độc đáo) cho nhiều hệ phương trình với ẩn số thực

(mà nếu chỉ nhìn thoáng qua, ít ai nghĩ đến việc vận dụng số phức). Số phức còn cho ta cách giải quyết một loạt các bài toán trong số học, tổ hợp và lượng giác mà nếu dùng phương pháp thông thường tình huống sẽ trở nên phức tạp hơn...

Được sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Duy Thái Sơn, tôi chọn đề tài: “Số phức và Ứng dụng trong Chiến lược giải toán bậc trung học phổ thông” với mong muốn tìm hiểu sâu về số phức và ứng dụng của số phức trong việc khai phá các phương pháp giải toán bậc THPT.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Chúng tôi tìm kiếm tài liệu từ các nguồn khác nhau, nghiên cứu kỹ càng các tài liệu đó, cố gắng lĩnh hội đầy đủ các kiến thức cũ và mới về số phức để có thể trình bày lại các kiến thức đó trong luận văn này theo một thể khép kín và hy vọng luận văn có thể được sử dụng như một tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên và học sinh các trường trung học phổ thông.

Trong chương 1 của luận văn này, chúng tôi trình bày sơ lược lịch sử về số phức, các kiến thức về số phức và các công thức ứng dụng số phức trong hình học. Trong chương 2, chúng tôi trình bày các ứng dụng của số phức trong giải phương trình, hệ phương trình, trong tổ hợp và lượng giác. Trong chương 3, chúng tôi trình bày các ứng dụng của số phức để giải các bài toán hình học.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Số phức và ứng dụng của số phức trong giải toán.

Phạm vi nghiên cứu: Số phức trong các mối liên hệ với hình học, phương trình, hệ phương trình, tổ hợp, lượng giác thuộc phạm vi chương trình Toán THPT.

4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu tài liệu, phân tích, giải thích, đánh giá, tổng hợp.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Xây dựng được một giáo trình có tính hệ thống với thời lượng thu gọn, có thể dùng để giảng dạy về số phức và ứng dụng của số phức cho học sinh chuyên toán bậc trung học phổ thông.

Xây dựng được một hệ thống các bài toán với các mức độ khó dễ khác nhau.

6. Cấu trúc luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, luận văn này còn được chia làm ba chương.

Chương 1. Các kiến thức cơ bản về số phức. Trong chương này, chúng tôi trình bày sơ lược lịch sử về số phức, các kiến thức về số phức và các công thức ứng dụng số phức trong hình học.

Chương 2. Ứng dụng của số phức trong giải hệ phương trình, trong tổ hợp và lượng giác.

Chương 3. Ứng dụng của số phức để giải các bài toán hình học.

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ SỐ PHỨC

1.1 Đôi dòng lịch sử

1.2 Các kiến thức cơ bản về số phức

1.2.1 Khái niệm số phức

Một biểu thức có dạng $a + bi$, trong đó a và b là những số thực, được gọi là một số phức. Số a được gọi là phần thực (kí hiệu $a = \operatorname{Re} z$), còn số b được gọi là phần ảo (kí hiệu $b = \operatorname{Im} z$) của số phức $z = a + bi$.

1.2.2 Mặt phẳng phức

Một số phức $z = a + bi$ được biểu diễn hình học bởi một điểm $M(a, b)$ trên mặt phẳng tọa độ vuông góc Descartes $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ với gốc là điểm O và 2 vectơ đơn vị $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ vuông góc tại O (ngắn gọn: mặt phẳng tọa độ).

Điểm $M(a, b)$ được gọi là tọa vị của số phức $z = a + bi$.

1.2.3 Các phép toán trên trường số phức

Hai số phức $a + bi$ và $c + di$ được gọi là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng bằng nhau: $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$.

Tổng của hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$ là số phức dạng

$$z := z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$$

Số phức $0 := 0 + i.0$ là số phức duy nhất thỏa $z + 0 = 0 + z = z$, với mọi số phức z .

Với mọi số phức $z = a + bi$, số phức đối $-z := (-a) + (-b)i$ là số phức duy nhất mà $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

Hiệu của hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$ là số phức dạng

$$z := z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

Tích của hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$ là số phức

$$z := z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i.$$

Tồn tại duy nhất một số phức $1 := 1 + 0i$ mà $z.1 = 1.z = z$, với mọi số phức z .

Nghịch đảo của số phức $z = a + bi \neq 0$ là số phức

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i;$$

Thương của hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$, $z_2 \neq 0$ là số phức dạng

$$\begin{aligned} z := \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)i}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Tập hợp tất cả các số phức tạo thành một trường với các phép toán cộng, nhân hai số phức, và nghịch đảo của số phức như trên. Tập hợp tất cả các số phức (trường số phức) được kí hiệu là $\mathbb{C}$, là một trường, nhận $\mathbb{R}$ làm một trường con.

1.2.4 Số phức liên hợp

Số phức $a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và được kí hiệu là $\bar{z}$.

Như vậy, số phức z trở thành một số thực khi và chỉ khi z là liên hợp với chính nó: $z = \bar{z}$.

Từ định nghĩa các phép toán của hai số phức và định nghĩa số phức liên hợp ta suy ra

1.2.5 Lũy thừa bậc n của số phức

Lũy thừa bậc n của số phức z có thể tính theo công thức

$$z^n = (a + bi)^n =$$

$$\left[a^n - C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^4 a^{n-4} b^4 - \dots \right] + i \left[C_n^1 a^{n-1} b - C_n^3 a^{n-3} b^3 + C_n^5 a^{n-5} b^5 - \dots \right]$$

Công thức Moivre:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

1.2.6 Căn bậc n của một số phức

Ta định nghĩa căn bậc n (n là số tự nhiên) của một số phức z (kí hiệu là $\sqrt[n]{z}$) là những số phức u mà lũy thừa bậc n của u bằng z . Ta có $u = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow u^n = z$

Khi $r=1$ thì

$$z_k = \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Mỗi số phức có đúng n giá trị căn bậc n .

1.3 Các công thức dùng trong việc ứng dụng số phức vào giải toán hình học.

1.3.1 Các kiến thức bổ trợ

1. Một số phức $z = a + bi$ được biểu diễn hình học bởi một điểm $M(a, b)$ trên mặt phẳng tọa độ vuông góc Descartes $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ với gốc là điểm O và 2 vectơ đơn vị $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ vuông góc tại O (ngắn gọn: mặt phẳng tọa độ).

Điểm $M(a, b)$ được gọi là tọa vị của số phức $z = a + bi$.

2. Khi làm việc với các phép biến hình (mà ta thường ký hiệu là $F; F_1; F_2; \dots$), các điểm trên mặt phẳng được ký hiệu bởi $M, N, M_1, M_2, \dots$ còn ảnh của chúng qua phép biến hình sẽ được ký hiệu bởi $M', N', M'_1, M'_2, \dots$

Vì thế, nếu M là tọa vị của số phức z thì ảnh M' của M qua một phép biến hình F nào đó là tọa vị của một số phức mà ta sẽ ký hiệu là z' .

Hơn nữa, đôi khi, để đơn giản, ta đồng nhất các số phức $a, b, c, d, \dots$ với các tọa vị A, B, C, D của chúng. Bằng cách như vậy, thay vì viết:

$$AB \parallel CD \text{ khi và chỉ khi } \frac{a-b}{a-b} = \frac{c-d}{c-d}$$

ta cho phép viết

$$ab \parallel cd \text{ khi và chỉ khi } \frac{a-b}{a-b} = \frac{c-d}{c-d}.$$

Chúng ta có các công thức về phép biến hình đơn giản sau:

- Phép đối xứng qua gốc tọa độ O : $z' = -z$.

- Phép đối xứng qua trục Ox : $z' = \bar{z}$.

- Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{OA}$: $z' = z + a$.

- Phép quay góc lượng giác α xung quanh gốc tọa độ O : $z' = pz$ trong đó $p = \cos \alpha + i \sin \alpha$

- Phép vị tự tâm O tỉ số k : $z' = kz$.

- Phép quay góc lượng giác α xung quanh gốc tọa độ O rồi tiếp theo, phép vị tự tâm O tỉ số k :

$$z' = pz \text{ với } p = k(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Phép đối xứng qua điểm A : $z' = 2a - z$.

- Phép quay góc lượng giác α xung quanh A .

Ta có $z'_1 = pz_1$ hay $z' - a = p(z - a)$ với $p = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

- Phép quay góc lượng giác α xung quanh A rồi tiếp theo, phép vị tự tâm A tỉ số k : $z' - a = p.(z - a)$ với $p = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

1.3.2 Các công thức và định lý

Khi chúng ta không thể giải một vài vấn đề trong hình học phẳng, một lời khuyên là chúng ta thử giải bằng cách tính toán. Đó là một vài kỹ thuật để làm tính toán thay cho hình học. Đó là ứng dụng của số phức trong hình học.

Mặt phẳng sẽ là mặt phẳng phức và mỗi điểm sẽ tương ứng là một số phức. Bởi thế các điểm sẽ được thường xuyên kí hiệu như những chữ cái thường $a, b, c, d, \dots$, như các số phức.

Định lý 1.

$$\bullet ab \parallel cd \Leftrightarrow \frac{a-b}{a-b} = \frac{c-d}{c-d} \text{ với } (a \neq b, c \neq d).$$

- $a, b, c \Leftrightarrow \frac{a-b}{a-b} = \frac{a-c}{a-c}$ với $(a \notin \{b, c\})$.
- $ab \perp cd \Leftrightarrow \frac{a-b}{a-b} = -\frac{c-d}{c-d}$ với $(a \neq b, c \neq d)$.
- $\varphi = acb$ (từ a đến b theo chiều dương)
- $\Leftrightarrow \frac{c-b}{|c-b|} = e^{i\varphi} \frac{c-a}{|c-a|}$.

Định lí 2. Các tính chất của đường tròn đơn vị:

- Với một dây cung ab ta có $\frac{a-b}{a-b} = -ab$ với $(a \neq b; |a|=|b|=1)$.
- Nếu c nằm trên đường thẳng chứa dây cung ab thì $\frac{a+b-c}{ab}$ với $(|a|=|b|=1)$.
- Giao điểm của các tiếp tuyến tại các điểm a và b của đường tròn đơn vị là điểm $\frac{2ab}{a+b}$.
- Chân đường cao từ một điểm tùy ý c đến dây cung ab là điểm $p = \frac{1}{2}(a+b+c-abc)$.
- Giao điểm của dây cung ab và cd là điểm $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

Định lí 3.

Các điểm a, b, c, d thẳng hàng hay cùng thuộc một đường tròn khi

và chỉ khi $\frac{c-b}{a-b} : \frac{c-d}{a-d} \in \mathbb{R}^*$.

Cụ thể

- Các điểm a, b, c, d thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{c-b}{a-b} \in \mathbb{R}^*, \frac{c-d}{a-d} \in \mathbb{R}^*.$$

- Các điểm a, b, c, d cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}^* \text{ nhưng } \frac{c-b}{a-b} \notin \mathbb{R}^*, \frac{c-d}{a-d} \notin \mathbb{R}^*.$$

Định lí 4.

- Tam giác abc và pqr đồng dạng và cùng chiều khi và chỉ khi $\frac{a-c}{b-c} = \frac{p-r}{q-r}$.

- Tam giác abc và pqr đồng dạng và ngược chiều khi và chỉ khi $\frac{a-c}{b-c} = \frac{\overline{p-r}}{\overline{q-r}}$.

Định lí 5. Diện tích của tam giác abc bằng môđun của định thức

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} (a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} - \overline{a}b - \overline{b}c - \overline{c}a).$$

Định lí 6.

- Điểm c chia đoạn thẳng ab theo tỉ số $\lambda \neq -1 \Leftrightarrow c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$

- Điểm t là trọng tâm tam giác $abc \Leftrightarrow t = \frac{a + b + c}{3}$.

- Với trục tâm h và tâm o đường tròn ngoại tiếp tam giác abc ta có: $h + 2o = a + b + c$.

Định lí 7. Giả sử rằng đường tròn đơn vị là nội tiếp trong tam giác abc và nó tiếp xúc với các cạnh bc, ca, ab tương ứng tại p, q, r .

- Ta có $a = \frac{2qr}{q+r}$, $b = \frac{2rp}{r+p}$ và $c = \frac{2pq}{p+q}$.

- Tâm o đường tròn ngoại tiếp tam giác abc :

$$o = \frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}.$$

- Trục tâm h của tam giác abc là :

$$h = \frac{2(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 + pqr(p+q+r))}{(p+q)(q+r)(r+p)}$$

Định lí 8.

- Tam giác abc nội tiếp trong một đường tròn đơn vị có những số u, v, w sao cho $a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2$, và $-uv, -vw, wu$ là trung điểm của các cung ab, bc, ca , (tương ứng) mà không chứa c, a, b .

- Với tam giác nêu trên thì tâm đường tròn nội tiếp của nó là $i = -(uv + vw + wu)$.

Định lí 9. Giả sử rằng tam giác Δ với một đỉnh là 0, hai đỉnh còn lại là x và y .

- Nếu h là trục tâm của tam giác Δ thì

$$h = \frac{(\overline{xy} + x\overline{y})(x - y)}{xy - \overline{xy}}.$$

- Nếu o là tâm đường tròn ngoại tiếp của Δ thì

$$o = \frac{xy(\overline{x} - \overline{y})}{xy - \overline{xy}}.$$

Chương 2

CÁC ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC TRONG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH, LƯỢNG GIÁC VÀ TỔ HỢP

2.1 Ứng dụng số phức trong giải các phương trình, hệ phương trình

Một số hệ phương trình có thể “xuất xứ” từ các phương trình nghiệm phức. Bằng cách đi ngược lại quá trình từ phương trình $\rightarrow$ hệ phương trình, ta sẽ được quá trình hệ phương trình $\rightarrow$ phương trình. Giải phương trình, so sánh phần thực và phần ảo, ta sẽ được nghiệm của hệ phương trình.

Bài toán 2.1.1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x}(1 + \frac{1}{x+y}) = 2 \\ \sqrt{7y}(1 - \frac{1}{x+y}) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài toán 2.1.2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x}(1 - \frac{12}{3x+y}) = 2 \\ \sqrt{y}(1 + \frac{12}{x+y}) = 6 \end{cases}$$

Bài toán 2.1.3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Bài toán 2.1. 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy là chúng ta đã khảo sát ví dụ về giải hệ phương trình, bây giờ câu hỏi đặt ra là ta có thể sáng tác các hệ phương trình này như thế nào? Câu trả lời là hoàn toàn có thể.

Bài toán mở rộng 1.

Cho $z = ax + byi$ với a, b là các số thực tùy ý.

Với số phức tùy ý $\alpha + \beta i$, ta xác định x, y sao cho $z^3 = \alpha + \beta i$.

Khi đó, chúng ta có:

$$\begin{aligned} z^3 &= (ax + byi)^3 = a^3x^3 + 3a^2x^2byi + 3axb^2y^2i^2 + b^3y^3i^3 \\ &= (a^3x^3 - 3axb^2y^2) + (3a^2x^2by - b^3y^3)i \end{aligned}$$

Khi đồng nhất phần thực và phần ảo ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a^3x^3 - 3ab^2xy^2 = \alpha \\ 3a^2bx^2y - b^3y^3 = \beta \end{cases}$$

Với bài toán này nếu chúng ta dùng z^2 thì chúng ta đưa về bài toán tìm căn bậc hai của một số phức được trình bày trong sách giáo khoa 12 hiện hành.

Bài toán mở rộng 2.

Ta nhắc lại rằng nghiệm (x, y) của hệ mà chúng ta phải giải sẽ được biểu diễn dưới dạng $z = x + yi$, (hoặc $z = u + iv$, với u là hàm số đơn giản chứa x , v là hàm số đơn giản chứa y).

Gọi z_1, z_2 là hai số phức bất kì chúng ta cho trước để trở thành nghiệm của hệ phương mà chúng ta sắp sáng tác.

Khi đó chúng ta sẽ đi từ phương trình:

$$(z - z_1) \cdot (z - z_2) = 0 \Leftrightarrow z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2 = 0$$

$$\Rightarrow z + \frac{z_1z_2}{z} = z_1 + z_2 \Rightarrow z + \frac{z_1z_2 \cdot \bar{z}}{|z|^2} = z_1 + z_2$$

Do $z = x + yi$ và $z_1z_2 = \alpha + \beta i$, $z_1 + z_2 = \alpha' + \beta' i$,

Khi đó ta sẽ viết lại thành phương trình:

$$x + yi + \frac{(\alpha + \beta i)(x - yi)}{x^2 + y^2} = \alpha' + \beta' i \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + y^2} = \alpha' \\ y + \frac{\beta x - \alpha y}{x^2 + y^2} = \beta' \end{cases}$$

Và tùy vào mỗi bài chúng ta có thể làm phức tạp hơn khi cho $z = u + iv$, với u, v là các hàm số biểu diễn x, y .

Các bài tập tương tự

$$\text{Bài toán 2.1.5. Giải phương trình} \quad \begin{cases} 2x + \frac{-8x+y}{4x^2+9y^2} = 1 \\ y + \frac{2x+4y}{4x^2+9y^2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Bài toán 2.1.6. Giải phương trình} \quad \begin{cases} x^2 + \frac{4x^2-2y}{x^4+y^2} = 2 \\ y - \frac{2x^2+4y}{x^4+y^2} = -2 \end{cases}$$

2.2 Ứng dụng của số phức trong tổ hợp

Một trong những ứng dụng của số phức vào tổ hợp đó là tính tổng của một dãy hữu hạn mà trong đó nếu dùng phương pháp thông thường thì có lẽ khá phức tạp.

Bài toán 2.2.1. Chứng minh các đồng nhất thức

$$1) \quad a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} C_n^{3k} = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right)$$

$$2) \quad b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{3} \right)$$

$$3) \quad c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-4)\pi}{3} \right)$$

$$4) \quad a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_n b_n c_n = 2^n$$

$$5) \quad a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_n b_n - b_n c_n - c_n a_n = 1$$

$$a_n = b_n \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod{3}$$

$$6) \quad a_n = c_n \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{3}$$

$$c_n = b_n \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3}$$

Bài toán 2.2.2. Chứng minh các đồng nhất thức

$$1) \quad C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$2) \quad C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$3) \quad C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$4) \quad C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

2.3 Ứng dụng của số phức trong lượng giác

Một trong những ứng dụng của số phức vào lượng giác đó là tính tổng của một dãy hữu hạn và đôi khi dùng số phức ta sẽ có những cách giải thú vị.

Bài toán 2.3.1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, ta có

$$\begin{aligned} \cos n\alpha &= \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - C_n^6 \cos^{n-6} \alpha \sin^6 \alpha + \dots \\ \sin n\alpha &= C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots \end{aligned}$$

Bài toán 2.3.2. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$1) \quad 2^{2m} \cos^{2m} \varphi = \sum_{k=0}^{m-1} 2C_{2m}^k \cos(2m-2k)\varphi + C_{2m}^m$$

$$\begin{aligned}
2) \quad & 2^{2m} \sin^{2m} \varphi = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} 2C_{2m}^k \cos(2m - 2k) \varphi + C_{2m}^m \\
3) \quad & 2^{2m} \cos^{2m+1} \varphi = \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^k \cos(2m - 2k + 1) \varphi \\
4) \quad & 2^{2m} \sin^{2m+1} \varphi = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m}^k \sin(2m - 2k + 1) \varphi
\end{aligned}$$

Chương 3

ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHỨC TRONG HÌNH HỌC

Số phức có ứng dụng to lớn và hiệu quả trong các bài toán hình học. Bằng cách biểu diễn tọa độ các điểm của một hình hình học bằng số phức, ta có thể biểu diễn các điều kiện đề bài có bản chất hình học bằng các đẳng thức đại số và chuyển kết luận hình học của bài toán về các đẳng thức số. Như vậy, bài toán chứng minh hình học có thể đưa về việc kiểm tra một hằng đẳng thức, hoặc một hằng đẳng thức có điều kiện.

3.1. Số phức và vector. Phép quay

Mục này chứa những vấn đề là sử dụng các tính chất chính của số phức như là vector (Định lí 6) và hệ quả của phần cuối của định lí 1. Đó là, nếu điểm b nhận được từ phép quay của điểm a quanh điểm c một góc φ thì $b - c = e^{i\varphi}(a - c)$.

Bài toán 3.1.1(IMO Shortlist 1992). Về phía ngoài của tứ giác lồi ABCD, lần lượt dựng các hình vuông nhận AB, BC, CD, DA làm

cạnh. Các hình vuông này có tâm là O_1, O_2, O_3, O_4 . Chứng minh rằng O_1O_3 vuông góc với O_2O_4 và $O_1O_3 = O_2O_4$.

Bài toán 3.1.2(IMO 1982 shortlist). Về phía ngoài tứ giác lồi ABCD ta dựng các tam giác đều ABM, CDP; về phía trong của tứ giác, ta dựng các tam giác đều BCN, ADQ. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

3.2. Khoảng cách. Đa giác đều

Trong mục này chúng ta sẽ sử dụng công thức sau đây của số phức: $|a|^2 = a \cdot \bar{a}$. Việc tính toán tổng các khoảng cách sẽ rất thuận lợi nếu các điểm này thẳng hàng hoặc nằm trên các đường thẳng song song. Vì thế ta thường sử dụng phép quay để di chuyển các điểm đến vị trí đẹp.

Bây giờ ta xét đến đa giác đều. Ta biết rằng phương trình $x^n = 1$ có chính xác n nghiệm trong số phức và nó có dạng $x_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$, $0 \leq k \leq n-1$.

Bây giờ ta cho $x_0 = 1$ và $x_k = \varepsilon^k$, $1 \leq k \leq n-1$ với $x_1 = \varepsilon$.

Bài toán 3.2.1. Cho $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ là 7-giác đều. Chứng minh rằng: $\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_3}$.

Bài toán 3.2.2(BMO 1990 shortlist). Trên các cạnh của tam giác ABC, ta dựng ba n-giác đều bên ngoài tam giác ABC. Tìm tất cả

các giá trị của n sao cho tâm của ba n -giác đều là đỉnh của một tam giác đều.

3.3. Đa giác nội tiếp trong đường tròn

Trong vấn đề này, đa giác nội tiếp trong đường tròn ta thường giả sử đó là đường tròn đơn vị. Trong định lý 2 ta có thể nhận thấy nhiều lợi thế của đường tròn đơn vị (đặc biệt trong cách phát biểu thứ nhất) và trong thực hành chúng ta có thể dùng định lý này. Trong trường hợp đặc biệt, ta biết rằng tam giác nội tiếp đường tròn và nhiều vấn đề của hình học trong tam giác ta có thể sử dụng số phức. Vấn đề trong phần này là đi tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Bài toán 3.3.1(IMO Shortist 1996). H là trực tâm tam giác ABC và P là một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi E là chân đường cao BH và lấy $PAQB$, $PARC$ là các hình bình hành. Nếu AQ và HR cắt nhau tại X thì chứng minh rằng $EX \perp AP$.

Bài toán 3.3.2(IMO Shortist 1996). Cho tam giác ABC là tam giác nhọn sao cho $BC > CA$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm, F là chân đường cao CH của tam giác ABC . Đường thẳng qua F và vuông góc với FO cắt CA tại P . $\angle FHP = \angle BAC$.

3.4. Đa giác ngoại tiếp đường tròn

Tương tự như phần trước, chúng ta giả sử rằng đường tròn đơn vị là nội tiếp trong đa giác. Một lần nữa chúng ta sử dụng định lý 2 và các trường hợp đặc biệt của nó trong phần 3. Trong trường hợp của tam giác ta sẽ sử dụng các công thức ở định lý 7. Chú ý rằng trong trường hợp này chúng ta biết cả tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp, và phần trước thì không có trường hợp này.

Tuy nhiên, cũng chú ý các công thức ở định lý 7 tỏ ra phức tạp, vì thế ta nên chú ý thực hiện trong đường tròn như đường tròn đơn vị bất cứ lúc nào có thể.

Bài toán 3.4.1. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC và nó tiếp xúc với các cạnh AB , BC , CA tại M , K , E tương ứng. Gọi P là giao điểm của MK và AC . Chứng minh $OP \perp BE$.

Bài toán 3.4.2(BMO 2005). Cho tam giác ABC nhọn và đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB và AC tại R , Q tương ứng. Lấy Y , Z là giao điểm của phân giác góc ACB , ABC với đường thẳng RQ . Lấy X là trung điểm BC . Chứng minh rằng tam giác XYZ là tam giác đều khi và chỉ khi $A = 60^\circ$.

3.5. Trung điểm của cung

Chúng ta thường tình cờ gặp trong những vấn đề là một vài điểm được xác định là trung điểm của một cung. Một trong những khó khăn trong việc sử dụng số phức là việc nhận ra các cung của đường tròn. Vì thế, nếu chúng ta xác định trung điểm của một cung như là giao điểm của phân giác của cung tương ứng với đường tròn, chúng ta sẽ có hai nghiệm. Vấn đề này có thể dễ dàng giải quyết bằng cách sử dụng phần 1 của định lý 8. Hơn nữa phần 2 của định lý 8 có thể cho một cách khác để giải quyết vấn đề với đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp. Chú ý rằng tọa độ của các điểm quan trọng này là gắn với việc giải các phương trình đơn giản như những phần trước. Tuy nhiên, chúng ta có những vấn đề khi tính toán các tiếp

điểm d, e, f của đường tròn nội tiếp với các cạnh, vì thế trong trường hợp này ta sử dụng định lý của phần phía trước.

Bài toán 3.5.1(Kvant M769). Gọi L là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và các đường thẳng AL, BL, CL cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_1, A_2, A_3 tương ứng. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và r là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng:

$$(a) \frac{LA_1 \cdot LC_1}{LB} = R, \quad (b) \frac{LA \cdot LB}{LC_1} = 2r. \quad (c) \frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = \frac{2r}{R}$$

Bài toán 3.5.2(Kvant M860). Gọi O và R tương ứng là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và gọi Z và r tương ứng là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi K là trọng tâm của tam giác được tạo bởi các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp và các cạnh. Chứng minh rằng Z thuộc đường thẳng OK và $OK : ZK = 3R/r$.

3.6. Điểm quan trọng. Tứ giác

Trong mục cuối của 3 phần trước có những điểm chúng ta xem như khởi đầu, tọa độ của chúng là “rất quan trọng”. Tất cả chúng đều có tính chất giống nhau (chúng là điểm của một đường tròn, giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn...). Tuy nhiên có những vấn đề mà các điểm được xem xét để nhận ra một điểm mà trên các cơ sở khác để tìm các điểm khác. Điểm này sẽ được chọn làm gốc. Đặc biệt là sử dụng trong trường hợp tứ giác (không nội tiếp và ngoại tiếp được một đường tròn)- trong trường hợp giao điểm của các đa giác

có thể là một sự lựa chọn tốt cho gốc. Chúng ta có thể sử dụng các công thức ở mục 9.

Bài toán 3.6.1. Gọi O là giao điểm của các đường chéo của tứ giác $ABCD$ và M, N là trung điểm của các cạnh AB, CD tương ứng. Chứng minh rằng $OM \perp CD$ và $ON \perp AB$ thì tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Bài toán 3.6.2. Cho F là điểm trên đáy AB của hình thang $ABCD$ sao cho $DF=CF$. Lấy E là giao điểm của AC và BD và O_1 và O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF và tam giác FBC tương ứng. Chứng minh rằng $FE \perp O_1O_2$.

3.7. Giao điểm không duy nhất và công thức Viet

Điểm là giao điểm của hai đường thẳng có thể xác định được từ hệ của hai phương trình tương ứng, xác định điều kiện để điểm này thuộc một đường thẳng. Tuy nhiên phương pháp này có thể dẫn đến khó khăn. Như chúng ta đề cập đến phương pháp trước đây có thể dẫn đến giao điểm không duy nhất. Ví dụ, nếu chúng ta muốn xác định giao điểm của hai đường tròn chúng ta sẽ có một phương trình bậc hai, không ngạc nhiên rằng hai đường tròn tổng quát sẽ có hai giao điểm. Vì vậy, trong nhiều vấn đề chúng ta không cần cả hai điểm đó, chỉ hướng đường thẳng xác định chúng. Một cách đơn giản chúng ta biết được một điểm của chúng. Và chúng ta sẽ sử dụng công thức Vi- et có tổng và tích của chúng. Vì thế chúng ta có thể nói “lấy nghiệm bậc hai của một số phức”. Lưu ý: Nếu chúng ta cần xác định tọa độ của một trong các giao điểm của hai đường tròn, chúng ta

không cần biết điểm khác, một cách để giải quyết vấn đề này là sử dụng số phức xác định điểm như là một điểm quan trọng.

Bài toán 3.7.1. Giả sử rằng tiếp tuyến của đường tròn T tại A và B cắt nhau tại C . Đường tròn T_1 đi qua C và tiếp xúc AB tại B cắt đường tròn T tại M . Chỉ ra rằng đường thẳng AM chia đôi đoạn BC .

Bài toán 3.7.2(Trung Quốc 1996). Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Tiếp tuyến từ A đến đường tròn đường kính BC cắt đường tròn tại P và Q . Chứng minh rằng P, Q và H thẳng hàng.

3.8. Các vấn đề khác – các phương pháp khác

Trong phần này, bạn sẽ tìm thấy các vấn đề không liên quan mật thiết tới các chương trước, cũng như vài vấn đề liên quan tới nhiều chương trước cùng lúc. Lời khuyên hữu ích là suy nghĩ cẩn thận các đầu mối ban đầu, nguồn gốc. Bởi vì vấn đề chính để giải quyết các vấn đề này là thời gian. Nên nếu ta đang ở trong một kỳ thi và ta muốn sử dụng số phức, việc phỏng đoán thời gian cần thiết để giải là rất quan trọng. Cũng bởi vấn đề này nên ta phải học số phức càng sớm càng tốt.

Ta sẽ thấy có vài vấn đề sử dụng định lý 3, 4 và 5

Bài toán 3.8.1. Cho 4 đường tròn k_1, k_2, k_3, k_4 , giả sử rằng $k_1 \cap k_2 = \{A_1, B_1\}$, $k_2 \cap k_3 = \{A_2, B_2\}$, $k_3 \cap k_4 = \{A_3, B_3\}$, $k_4 \cap k_1 = \{A_4, B_4\}$. Nếu bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 nằm trên một đường tròn hoặc trên một đường thẳng, chứng minh rằng các điểm B_1, B_2, B_3, B_4 nằm trên một đường tròn hoặc trên một đường thẳng.

KẾT LUẬN

Nội dung của luận văn gồm ba phần là mở bài, nội dung và kết luận. Phần nội dung gồm ba chương. Chương 1 giới thiệu các kiến thức cơ bản về số phức và các định lý nhằm chuẩn bị cho hai chương sau. Chương 2 đề cập đến các ứng dụng của số phức vào hệ phương trình, tổ hợp và lượng giác. Chương 3 đề cập đến các ứng dụng của số phức vào hình học, chương này tác giả đã đưa ra nhiều dạng toán hình học, ví dụ như đa giác nội tiếp đường tròn, đa giác ngoại tiếp đường tròn, trung điểm của cung, phép biến hình ... thì sử dụng số phức như thế nào.

Luận văn trình bày được nhiều bài toán trong các kì thi quốc gia và quốc tế, một số bài toán trên các tạp chí toán học thế giới.

Luận văn có nêu một số bài toán mà bằng phương pháp tổng quát, tương tự, đặc biệt tác giả đã tự nghiên cứu các bài toán về hệ phương trình.