

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

Vũ Thị Lệ Thủy

**SỰ DAO ĐỘNG CỦA NGHIỆM
CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
BẬC MỘT**

Chuyên ngành: Toán Giải Tích

Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. TRẦN ĐÌNH THANH**

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin chân thành cảm ơn Thầy PGS. TS. Lê Hoàn Hóa và Thầy TS. Trần Đình Thanh đã tận tình hướng dẫn cho tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin cảm ơn các Thầy Cô khoa Toán – Tin học Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh đã tận tình giảng dạy tôi từ ngày đầu tiên vào trường Sư phạm cho đến khi tôi học Cao học. Đặc biệt tôi xin chân thành cảm ơn quý Thầy Cô đã tham gia giảng dạy lớp Cao học Giải Tích khóa 18.

Tôi cũng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám Hiệu, khoa Khoa Học Cơ Bản Trường Cao Đẳng Công Nghệ Thủ Đức đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong công tác để tôi có thể yên tâm tham gia đầy đủ khóa học.

Tôi xin cảm ơn Khoa Toán – Tin học và Phòng KHCN&SDH Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học và hoàn thành luận văn Cao học.

Sau cùng, tôi xin cảm ơn các bạn bè đồng nghiệp, các bạn học viên lớp Cao học Giải tích K.18 đã động viên, giúp đỡ tôi trong suốt khóa học.

TP. Hồ Chí Minh, Tháng 8 năm 2010

Vũ Thị Lệ Thủy

MỞ ĐẦU

Trong thời đại khoa học công nghệ, khoa học sinh học phát triển nhanh chóng như hiện nay, đã có nhiều nghiên cứu cho thấy những ứng dụng quan trọng của phương trình vi phân đối số lệch vào các lãnh vực vật lí, sinh học, sinh thái học và sinh lí học.

Nhiều nhà toán học trên thế giới đã và đang tiếp tục nghiên cứu nhiều về phương trình vi phân đối số lệch. Đặc biệt, quan tâm nghiên cứu sự dao động của nghiệm cho phương trình vi phân bậc một.

Trên tinh thần tìm hiểu rõ hơn về vấn đề dao động của nghiệm cho phương trình vi phân trung hòa đối số lệch bậc một loại tuyến tính và không tuyến tính, tôi chọn đề tài này làm nội dung nghiên cứu của luận văn nhằm học tập và phát triển đề tài theo hướng nghiên cứu trên.

Luận văn đi sâu vào nghiên cứu hai trong những hướng cơ bản của Lý thuyết định tính phương trình vi phân có nhiều ứng dụng trong thực tiễn, đó là sự dao động và tính ổn định của nghiệm cho phương trình vi phân trung hòa đối số lệch bậc một loại tuyến tính và không tuyến tính.

Luận văn gồm có ba chương. Chương 1, trình bày một số kết quả về sự dao động của nghiệm cho phương trình vi phân đối số lệch bậc một:

$$\frac{d}{dt}x(t) + \sum_{i=1}^n P_i(t)x(t-a_i) = 0.$$

trích từ bài báo [1]

Chương 2 của luận văn, khảo sát sự dao động của nghiệm cho phương trình vi phân không tuyến tính trung hòa đối số lệch bậc một:

$$\frac{d}{dt}[x(t) + px(t-a)] + Q(t)f(x(t-b)) = 0, \quad t \geq t_0$$

trích từ bài báo [2].

Chương 3 của luận văn, trình bày một số kết quả về tính ổn định của nghiệm cho phương trình vi phân tuyến tính trung hòa đối số lệch bậc một:

$$\frac{d}{dt}[x(t) - P(t)x(t-a)] + Q(t)x(t-b) = 0, \quad t \geq t_0$$

trích từ bài báo [3].

Trong luận văn một số kết quả được sử dụng sẽ được phát biểu dưới dạng định lí hoặc bổ đề và không chứng minh.

CHƯƠNG 1. SỰ DAO ĐỘNG CỦA NGHIỆM CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Xét phương trình vi phân đối số lệch cấp một:

$$x'(t) + P(t)x(t-a) = 0 \quad (1.1)$$

trong đó:

i) $P(t) \geq 0$, là hàm liên tục

ii) a : là hằng số dương

Hay tổng quát hơn:

$$x'(t) + \sum_{i=1}^n P_i(t)x(t-a_i) = 0 \quad (1.2)$$

trong đó:

i) $P_i(t) \geq 0$ là những hàm liên tục, với $i \in \overline{1, n}$

ii) a_i là những hằng số dương, với $i \in \overline{1, n}$

Với một nghiệm của phương trình (1.1) (hay (1.2)), chúng ta có một hàm $x \in C\left(\left[\bar{t}-\rho, \infty\right), \mathbb{R}\right)$, với $\rho = a$ (hay $\rho = \max_{1 \leq i \leq n} \{a_i\}$), $\forall t \geq \bar{t}$.

Nghiệm của phương trình (1.1) (hay (1.2)) được gọi là dao động nếu nó có vô số không điểm. Chúng ta sẽ thiết lập những điều kiện cho sự dao động của nghiệm cho phương trình vi phân (1.1) (hay (1.2)).

1.1. Những bổ đề.

Bổ đề 1.1:

Nếu

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds > 0$$

với i nào đó và $x(t)$ là một nghiệm dương của phương trình (1.2) thì

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t-a_i)}{x(t)} < \infty \quad (1.3)$$

Chứng minh.

Theo giả thiết, tồn tại hằng số dương d và dãy $\{t_k\}$ sao cho: $t_k \rightarrow \infty$, khi $k \rightarrow \infty$ và $\int_{t_k}^{t_k+a_i} P_i(s) ds \geq d$
, $k = 1, 2, \dots$

lúc đó, tồn tại $b_i \in (t_k, t_k + a_i)$, với mỗi k có:

$$\int_{t_k}^{b_k} P_i(s) ds \geq \frac{d}{2}$$

và (1.4)

$$\int_{t_k}^{t_k + a_i} P_i(s) ds \geq \frac{d}{2}$$

Theo cách viết khác, từ phương trình (1.2) kéo theo:

$$x'(t) + P_i(t)x(t - a_i) \leq 0 \quad (1.5)$$

Lấy tích phân trong (1.5) trên đoạn $[t_k, b_k]$ và đoạn $[b_k, t_k + a_i]$, ta có:

$$x(b_k) - x(t_k) + \int_{t_k}^{b_k} P_i(s)x(s - a_i) ds \leq 0 \quad (1.6)$$

và

$$x(t_k + a_i) - x(b_k) + \int_{b_k}^{t_k + a_i} P_i(s - a_i) ds \leq 0 \quad (1.7)$$

Bỏ qua số hạng đầu tiên trong (1.6) và (1.7), bằng việc sử dụng tính giảm của hàm $x(t)$ và từ (1.4), ta có:

$$-x(t_k) + \frac{d}{2}x(b_k - a_i) \leq 0 \quad \text{và} \quad -x(b_k) + \frac{d}{2}x(t_k) \leq 0$$

hay

$$\frac{x(b_k - a_i)}{x(b_k)} \leq \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Từ đó, dẫn tới:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t - a_i)}{x(t)} < \infty$$

Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 1.2:

Nếu phương trình (1.2) có một nghiệm dương, khi đó:

$$\int_t^{t+a_i} P_i(s) ds \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.8)$$

Chứng minh.

Xem chứng minh của định lý 2.1.3 trong [4]

1.2. Các kết quả cơ bản.

Định lý 1.1.

Giả sử
$$\int_t^{t+a} P(s)ds > 0, \forall t \geq t_0, \text{ với } t_0 > 0$$

và

$$\int_{t_0}^{\infty} P(t) \ln \left(e \int_t^{t+a} P(s)ds \right) dt = \infty \quad (1.9)$$

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (1.1) dao động.

Chứng minh.

Bằng phương pháp phản chứng, giả sử phương trình (1.1) có nghiệm dương $x(t)$, rõ ràng $x(t)$ có thể đơn điệu giảm.

Đặt : $\lambda(t) = -\frac{x'(t)}{x(t)}$, khi đó với t đủ lớn thì hàm số $\lambda(t)$ không âm, liên tục

và
$$x(t) = x(t_1) \exp\left(-\int_{t_1}^t \lambda(s)ds\right), \quad x(t_1) > 0, \quad \text{với } t_1 \geq t_0$$

Hơn nữa $\lambda(t)$ thỏa:

$$\lambda(t) = P(t) \exp\left(\int_{t-a}^t \lambda(s)ds\right) \quad (1.10)$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$e^{rx} \geq x + \frac{\ln(er)}{r}, \quad \text{với } x > 0 \text{ và } r > 0$$

Như vậy:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= P(t) \exp(A(t)) \cdot \frac{1}{A(t)} \cdot \int_{t-a}^t \lambda(s)ds \\ &\geq P(t) \left[\frac{1}{A(t)} \int_{t-a}^t \lambda(s)ds + \frac{\ln(eA(t))}{A(t)} \right] \end{aligned}$$

trong đó

$$A(t) = \int_t^{t+a} P(s)ds$$

Dẫn đến:

$$\lambda(t) \int_t^{t+a} P(s)ds - P(t) \int_{t-a}^t \lambda(s)ds \geq P(t) \ln\left(e \int_t^{t+a} P(s)ds\right) \quad (1.11)$$

Khi đó với $N > T$, ta có:

$$\int_T^N \lambda(t) \left[\int_t^{t+a} P(s) ds \right] dt - \int_T^N P(t) \left[\int_{t-a}^t \lambda(s) ds \right] dt \geq \int_T^N P(t) \ln(e \int_t^{t+a} P(s) ds) dt \quad (1.12)$$

Do:

$$\begin{aligned} \int_T^N P(t) \int_{t-a}^t \lambda(s) ds dt &\geq \int_T^{N-T} \left(\int_s^{s+a} P(t) \lambda(s) dt \right) ds \\ &= \int_T^{N-a} \lambda(s) \int_s^{s+a} P(t) dt ds \\ &= \int_T^{N-a} \lambda(t) \int_t^{t+a} P(s) ds dt \end{aligned} \quad (1.13)$$

Từ (1.12) và (1.13) dẫn đến:

$$\int_{N-a}^N \lambda(t) \int_t^{t+a} P(s) ds dt \geq \int_T^N P(t) \ln(e \int_t^{t+a} P(s) ds) dt \quad (1.14)$$

Theo bổ đề 1.2, ta có:

$$\int_t^{t+a} P(s) ds \leq 1 \quad (1.15)$$

Từ (1.14) và (1.15), dẫn đến:

$$\int_{N-a}^N \lambda(t) dt \geq \int_T^N P(t) \ln(e \int_t^{t+a} P(s) ds) dt$$

hoặc

$$\ln \frac{x(N-a)}{x(N)} \geq \int_T^N P(t) \ln(e \int_t^{t+a} P(s) ds) dt \quad (1.16)$$

Từ (1.9), ta có:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t-a)}{x(t)} = \infty \quad (1.17)$$

Theo cách viết khác, từ (1.9) dẫn tới tồn tại một dãy $\{t_n\}$: $t_n \rightarrow \infty$, khi $n \rightarrow \infty$ mà

$$\int_{t_n}^{t_n+a} P(s) ds \geq \frac{1}{e}, \forall n$$

Khi đó theo bổ đề (1.1), ta phải có:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t-a)}{x(t)} < \infty$$

Điều này mâu thuẫn với (1.17).

Định lí được chứng minh.

Định lí 1.2.

Giả sử $a_n = \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Với giả thiết

$$\sum_{i=1}^n \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds > 0, \quad t \geq t_0, \quad \text{với } t_0 > 0$$

và

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+a_n} P_n(s) ds > 0 \quad (1.18)$$

Nếu

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n P_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds \right) dt = \infty \quad (1.19)$$

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (1.2) dao động.

Chứng minh.

Bằng phương pháp phản chứng, giả sử phương trình (1.2) có một nghiệm dương $x(t)$ và $x(t)$ có thể đơn điệu giảm.

Đặt:

$$\lambda(t) = -\frac{x'(t)}{x(t)}$$

Khi đó, $\lambda(t)$ không âm, liên tục và tồn tại $t_1 \geq t_0$, sao cho: $x(t_1) > 0$

Như vậy:

$$x(t) = x(t_1) \exp \left(- \int_{t_1}^t \lambda(s) ds \right)$$

Hơn nữa $\lambda(t)$ thỏa:
$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) \exp \left(\int_{t-a_i}^t \lambda(s) ds \right)$$

Nếu đặt:

$$B(t) = \sum_{i=1}^n \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$e^{rx} \geq x + \frac{\ln(er)}{r}, \quad \text{với } x > 0 \text{ và } r > 0$$

Ta tìm thấy:

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) \exp \left(B(t) \cdot \frac{1}{B(t)} \int_{t-a_i}^t \lambda(s) ds \right)$$

$$\geq \sum_{i=1}^n P_i(t) \left[\frac{1}{B(t)} \int_{t-a_i}^t \lambda(s) ds + \ln \frac{(eB(t))}{B(t)} \right]$$

hay

$$\left(\sum_{i=1}^n \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds \right) \lambda(t) - \sum_{i=1}^n P_i(t) \int_{t-a_i}^t \lambda(s) ds dt \geq \left(\sum_{i=1}^n P_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds \right) \quad (1.20)$$

Khi đó với $N > T$, ta có:

$$\begin{aligned} \int_T^N \left(\sum_{i=1}^n \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds \right) \lambda(t) dt - \sum_{i=1}^n \int_T^N P_i(t) \int_{t-a_i}^t \lambda(s) ds dt &\geq \\ &\geq \int_T^N \left(\sum_{i=1}^n P_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds \right) dt \end{aligned} \quad (1.21)$$

Do:

$$\begin{aligned} \int_T^N \sum_{i=1}^n P_i(t) \int_{t-a_i}^t \lambda(s) ds dt &\geq \sum_{i=1}^n \int_T^{N-a_i} \left(\int_s^{s+a_i} P_i(s) \lambda(s) dt \right) ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_T^{N-a_i} \lambda(t) \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds dt \end{aligned} \quad (1.22)$$

Từ (1.21) và (1.22), ta có:

$$\sum_{i=1}^n \int_{N-a_i}^N \lambda(t) \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds dt \geq \int_T^N \left(\sum_{i=1}^n P_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds \right) dt \quad (1.23)$$

Mặt khác theo bổ đề 1.2, ta có:

$$\int_t^{t+a_i} P_i(s) ds \leq 1, \quad i=1,2,\dots,n \quad (1.24)$$

Khi đó, do (1.23) và (1.24), ta có:

$$\sum_{i=1}^n \int_{N-a_i}^N \lambda(t) dt \geq \int_T^N \left(\sum_{i=1}^n P_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds \right) dt$$

Hay

$$\sum_{i=1}^n \ln \frac{x(N-a_i)}{x(t)} \geq \int_T^N \left(\sum_{i=1}^n P_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^n \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds \right) dt \quad (1.25)$$

Trong (1.20), ta có:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{x(t-a_i)}{x(t)} = \infty \quad (1.26)$$

Từ đó, suy ra:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t-a_n)}{x(t)} = \infty \quad (1.27)$$

Mặt khác theo bổ đề 1.1, ta có:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t - a_n)}{x(t)} < \infty$$

Điều này mâu thuẫn với (1.27).

Từ đó, định lí được chứng minh.

Hệ quả 1.1.

Nếu

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds > \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.28)$$

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (1.2) dao động.

Chứng minh.

Giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

Khi đó, từ (1.28) có m thỏa: $1 \leq m \leq n$ sao cho

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+a_m} P_m(s) ds > 0 \quad (1.29)$$

và

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m P_i(s) ds > \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.30)$$

Giả sử phương trình (1.2) có nghiệm dương $x(t)$.

Khi đó $x(t)$ cũng là nghiệm dương thỏa mãn bất đẳng thức

$$x'(t) + \sum_{i=1}^m P_i(t)x(t - a_i) \leq 0 \quad (1.31)$$

Theo bất đẳng thức 3.2.2 trong [5], ta biết phương trình

$$y'(t) + \sum_{i=1}^n P_i(t)y(t - a_i) = 0 \quad (1.32)$$

có nghiệm dương thực sự.

Mặt khác, từ (1.29) ta có với, $t_0 > 0$ thì:

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^m P_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^m \int_t^{t+a_i} P_i(s) ds \right) dt = \infty \quad (1.33)$$

Theo định lí 1.2, mỗi nghiệm của phương trình (1.32) dao động

Điều này vô lí.

Từ đó, hệ quả được chứng minh.

CHƯƠNG 2. SỰ DAO ĐỘNG CỦA NGHIỆM CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN KHÔNG TUYẾN TÍNH TRUNG HÒA ĐỐI SỐ LỆCH

Xét phương trình vi phân trung hòa đối số lệch không tuyến tính

$$(x(t) + px(t-a))' + Q(t)f(x(t-b)) = 0 \quad (2.1)$$

trong đó

i) $p \in \mathbb{R}$, a và b là những hằng số dương.

ii) $Q \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$.

iii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm thực liên tục và thỏa $u.f(u) > 0$ với $u \neq 0$ và có một hằng số dương M sao cho $\frac{f(u)}{u^\alpha} \geq M > 0$ với α là một tỉ số của những số nguyên dương lẻ.

Đặt $r = \max\{a, b\}$ và $T \geq t_0$.

Ta nói một hàm thực liên tục $x: [T-r, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ là một nghiệm của phương trình (2.1) nếu hàm $x(t) + px(t-a)$ khả vi liên tục với $t \geq T$ và x thỏa (2.1) với mọi $t \geq T$.

Nghiệm của phương trình (2.1) được gọi là dao động nếu nó có vô số không điểm. Trong trường hợp ngược lại, nghiệm được gọi là không dao động.

2.1. Các kết quả cơ bản.

Bổ đề 2.1. (Xem chứng minh ở chương 1). Cho phương trình

$$x'(t) + \sum_{i=1}^n P_i(t)x(t-a_i) = 0$$

trong đó $P_i(t) \geq 0$ là những hàm liên tục và a_i là những hằng số dương.

Hàm $x \in C([t_0 - \rho, \mathbb{R}), \rho = \max_{1 \leq i \leq n} \{a_i\})$ được gọi là nghiệm của phương trình nếu $x(t)$ thỏa phương trình với mọi $t \geq t_0$.

Nếu

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+a_i} P_i(s)ds > 0$$

và $x(t)$ là một nghiệm dương của phương trình thì

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t-a_i)}{x(t)} < \infty$$

với i nào đó.

Bổ đề 2.2. Giả sử $b > a$, $p \in (1, \infty)$, $\alpha = 1$ và

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \int_t^{t+b-a} Q(s)ds > 0 \quad (2.2)$$

Nếu $x(t)$ là một nghiệm dương bất kì của phương trình (2.1), thì

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf \frac{z(t-b+a)}{z(t)} < \infty \quad (2.3)$$

trong đó $z(t) = x(t) + px(t-a)$

Chứng minh.

Từ giả thiết ta có $z(t) > 0$, và từ phương trình (2.1) ta thấy $z(t)$ là hàm giảm.

Mặt khác:

$$px(t-a) = z(t) - x(t) \quad (2.4)$$

và

$$z(t+a) = x(t+a) + px(t)$$

Do $z(t)$ là hàm giảm nên ta có:

$$z(t) > z(t+a) \geq px(t)$$

Từ (2.4) ta thu được:

$$p^2 x(t-a) \geq pz(t) - z(t)$$

Vì thế

$$x(t-a) \geq \frac{p-1}{p^2} z(t)$$

hay

$$x(t-b) \geq \frac{p-1}{p^2} z(t+a-b) \quad (2.5)$$

Từ (2.1) và (2.5), ta có:

$$z'(t) + \frac{M(p-1)}{p^2} Q(t)z(t+a-b) \leq 0 \quad (2.6)$$

Kết hợp với bổ đề 2.1, bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 2.3.

Giả sử $b > a$, $p \in (1, \infty)$, $\alpha = 1$. Nếu phương trình (2.1) có nghiệm dương tùy ý, thì

$$\int_t^{t+b-a} Q(s)ds \leq \frac{p^2}{M(p-1)} \quad (2.7)$$

với t đủ lớn.

Chứng minh.

Bằng phương pháp chứng minh tương tự bổ đề 2.2, ta có bất đẳng thức (2.6), đó là:

$$z'(t) + \frac{M(p-1)}{p^2} Q(t)z(t+a-b) \leq 0$$

Lấy tích phân 2 vế của (2.6) từ t đến $t+b-a$ và dùng tính biến thiên của hàm $z(t)$, ta có:

$$z(t+b-a) + \left(\frac{M(p-1)}{p^2} \int_t^{t+b-a} Q(s)ds - 1 \right) z(t) \leq 0 \quad (2.8)$$

vì $z(t) > 0$, nên từ (2.8) kéo theo

$$\frac{M(p-1)}{p^2} \int_t^{t+b-a} Q(s)ds - 1 \leq 0 \quad (2.9)$$

với t đủ lớn.

Vậy:

$$\int_t^{t+b-a} Q(s)ds \leq \frac{p^2}{M(p-1)}$$

Bổ đề được chứng minh.

2.2. Những kết quả về sự dao động.

Định lý 2.1.

Giả sử $b > a$, $p \in (1, \infty)$, $\alpha = 1$ và (2.2) thỏa. Nếu

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(t) \left(\ln \left(\frac{eM(p-1)}{p^2} \right) \int_t^{t+b-a} Q(s)ds \right) dt = \infty \quad (2.10)$$

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (2.1) dao động.

Chứng minh.

Bằng phương pháp phản chứng, giả sử phương trình (2.1) có nghiệm dương $x(t)$.

Đặt

$$z(t) = x(t) + px(t-a)$$

Khi đó $z(t)$ dương và giảm, thỏa mãn bất đẳng thức:

$$z'(t) + \frac{M(p-1)}{p^2} Q(t)z(t+a-b) \leq 0 \quad (2.11)$$

Đặt

$$\lambda(t) = -\frac{z'(t)}{z(t)}$$

Khi đó, $\lambda(t)$ liên tục và không âm, vì thế tồn tại $t_1 \geq t_0$ với $z(t_1) > 0$ sao cho:

$$z(t) = z(t_1) \exp \left(-\int_{t_1}^t \lambda(s)ds \right)$$

Hơn nữa $\lambda(t)$ thỏa:

$$\lambda(t) \geq \frac{M(p-1)}{p^2} Q(t) \exp\left(\int_{t+a-b}^t \lambda(s) ds\right) \quad (2.12)$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$e^{rx} \geq x + \frac{\ln(re)}{r}, \quad \text{với } x > 0 \text{ và } r > 0$$

Từ (2.12), ta có:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &\geq \frac{M(p-1)}{p^2} Q(t) \exp\left(A(t) \cdot \frac{1}{A(t)} \cdot \int_{t+a-b}^t \lambda(s) ds\right) \\ &\geq \frac{M(p-1)}{p^2} Q(t) \left[\frac{1}{A(t)} \int_{t+a-b}^t \lambda(s) ds + \frac{\ln(eA(t))}{A(t)} \right] \end{aligned}$$

trong đó chọn

$$A(t) = \frac{M(p-1)}{p^2} \int_t^{t+b-a} Q(s) ds$$

Dẫn đến

$$\lambda(t) \int_t^{t+b-a} Q(s) ds - Q(t) \int_{t+a-b}^t \lambda(s) ds \geq Q(t) \ln\left(\frac{eM(p-1)}{p^2} \int_t^{t+b-a} Q(s) ds\right)$$

Khi đó với $u > T+b-a$, ta có:

$$\begin{aligned} \int_T^u \lambda(t) \left(\int_t^{t+b-a} Q(s) ds \right) dt - \int_T^u Q(t) \left(\int_{t+a-b}^t \lambda(s) ds \right) dt &\geq \\ &\geq \int_T^u Q(t) \ln\left(\frac{eM(p-1)}{p^2} \int_t^{t+b-a} Q(s) ds\right) dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mặt khác:

$$\int_T^u Q(t) \int_{t+a-b}^t \lambda(s) ds dt \geq \int_T^{u+a-b} \lambda(t) \left(\int_t^{t+b-a} Q(s) ds \right) dt \quad (2.14)$$

Từ (2.13) và (2.14), dẫn đến:

$$\int_{u+a-b}^u \lambda(t) \left(\int_t^{t+b-a} Q(s) ds \right) dt \geq \int_T^u Q(t) \ln\left(\frac{eM(p-1)}{p^2} \int_t^{t+b-a} Q(s) ds\right) dt \quad (2.15)$$

Áp dụng bổ đề 2.3, ta có:

$$\int_{u+a-b}^u \lambda(t) dt \geq \frac{M(p-1)}{p^2} \int_T^u Q(t) \ln\left(\frac{eM(p-1)}{p^2} \int_t^{t+b-a} Q(s) ds\right) dt$$

hay

$$\ln \frac{z(u+a-b)}{z(u)} \geq \frac{M(p-1)}{p^2} \int_t^u Q(t) \ln \left(\frac{eM(p-1)}{p^2} \int_t^{t+b-a} Q(s) ds \right) dt$$

Theo (2.10), ta phải có

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z(t+a-b)}{z(t)} = \infty \quad (2.16)$$

Điều này mâu thuẫn với (2.3).

Định lí được chứng minh.

Định lí 2.2.

Giả sử $b > a$, $p \in (1, \infty)$, $\alpha = 1$, và tồn tại một hằng số $k > 0$ sao cho

$$\frac{1}{e} \leq \int_{t-b+a}^t Q(s) ds < k \quad (2.17)$$

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (2.1) dao động.

Chứng minh.

Tương tự như chứng minh của định lí 2.1, ta đặt $z(t) = x(t) + p x(t-a)$, có $z(t)$ là một hàm dương, giảm và thỏa mãn (2.11)

Đặt:

$$\lambda(t) = -\frac{z'(t)}{z(t)}$$

Ta có bất đẳng thức:

$$\lambda(t) \geq \frac{M(p-1)}{p^2} Q(t) \exp \left(\int_{t+a-b}^t \lambda(s) ds \right)$$

Nếu đặt

$$B(t) = \exp \left(e \int_{t+a-b}^t Q(s) ds \right)$$

Khi đó bất đẳng thức trên được viết lại:

$$B(t) \lambda(t) \geq \frac{M(p-1)}{p^2} B(t) Q(t) \exp \left(\frac{B(t)}{B(t)} \int_{t+a-b}^t \lambda(s) ds \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$e^{\frac{x}{r}} \geq 1 + \frac{x}{r^2}, \quad \text{với } x > 0 \text{ và } r > 1$$

Ta thu được:

$$B(t) \lambda(t) - Q(t) \frac{M(p-1)}{p^2} \int_{t+a-b}^t \lambda(s) ds \geq Q(t) A(t)$$

trong đó $A(t) = \frac{M(p-1)}{p^2} B(t)$. Khi đó với $u > T + b - a$, ta có:

$$\int_T^u \lambda(t) B(t) dt - \int_T^u Q(t) \frac{M(p-1)}{p^2} \left(\int_{t+a-b}^t \lambda(s) ds \right) dt \geq \int_T^u Q(t) A(t) dt \quad (2.18)$$

Do:

$$\int_T^u Q(t) \int_{t+a-b}^t \lambda(s) ds dt \geq \int_T^{u+a-b} \lambda(t) \left(\int_{t+a-b}^t Q(s) ds \right) dt \quad (2.19)$$

Từ (1.18) và (1.19) cho ta:

$$\int_T^u \lambda(t) B(t) dt - \frac{M(p-1)}{p^2} \int_T^{u+a-b} \lambda(t) \left(\int_{t+a-b}^t Q(s) ds \right) dt \geq \int_T^u Q(t) A(t) dt$$

và từ đó:

$$\int_T^u \lambda(t) B(t) dt + \int_{u+a-b}^T \lambda(t) B(t) dt \geq \int_T^u Q(t) A(t) dt \quad (2.20)$$

Do:

$$B(t) = \exp \left(e \int_{t+a-b}^t Q(s) ds \right) \geq \int_{t+a-b}^t Q(s) ds$$

Mặt khác, vì $e \leq B(t) < k_1$, với $k_1 > 0$ nên từ (2.20) cho ta:

$$\int_{u+a-b}^u \lambda(t) dt \geq \frac{1}{k_1} \int_T^u Q(t) A(t) dt$$

hay

$$\ln \frac{z(u+a-b)}{z(u)} \geq \frac{1}{k_1} \int_T^u Q(t) A(t) dt$$

Theo (2.17), ta thấy tích phân ở vế phải của bất đẳng thức trên phân kỳ khi $u \rightarrow \infty$

Từ đó, ta có:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z(t+b-a)}{z(t)} = \infty$$

Điều này mâu thuẫn với (2.3)

Định lí được chứng minh.

Định lí 2.3.

Giả sử $b > a$, $p \in (1, \infty)$, $\alpha > 1$, và tồn tại một hàm khả vi liên tục $\phi(t)$ sao cho

$$\phi'(t) > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \infty \quad (2.21)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi'(t+a-b)}{\phi'(t)} < \frac{1}{\alpha} \quad (2.22)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{p-1}{p^2} \right)^\alpha Q(t) \frac{e^{-\phi(t)}}{\phi'(t)} \right] > 0 \quad (2.23)$$

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (2.1) dao động.

Chứng minh.

Tương tự như trong chứng minh của định lý 2.1, ta nhận xét $z(t)$ là hàm giảm, xác định dương và thỏa mãn bất đẳng thức:

$$z'(t) + M \left(\frac{p-1}{p^2} \right)^\alpha Q(t) z^\alpha(t+a-b) \leq 0 \quad (2.24)$$

Từ (2.21), (2.22) ta có:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha \phi(t+a-b)}{\phi(t)} < 1 \quad (2.25)$$

Từ (2.22) và (2.25), suy ra tồn tại $0 < l < 1$, $\varepsilon > 0$, và $T \geq t_0$ sao cho:

$$\frac{(1+\varepsilon)\alpha \phi'(t+a-b)}{\phi'(t)} \leq l$$

và (2.26)

$$\frac{(1+\varepsilon)\alpha \phi(t+a-b)}{\phi(t)} \leq l$$

với $t \geq T$. Theo (2.23), ta có thể chọn $T_0 > T$ sao cho:

$$M \left(\frac{p-1}{p^2} \right)^\alpha Q(t) \geq \phi'(t) e^{\frac{\alpha \phi(t)}{1+\alpha}} \quad (2.27)$$

Với $t \geq T_0$, đặt $P(t) = \phi'(t) e^{\frac{\alpha \phi(t)}{1+\alpha}}$, khi đó $P(t)$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$z'(t) + P(t) z^\alpha(t+a-b) \leq 0 \quad (2.28)$$

thay cho (2.24) (xem [5]). Ta có $z(t+a-b) \geq z(t)$. Vì thế:

$$z'(t) + P(t) z^\alpha(t) \leq z'(t) + P(t) z^\alpha(t+a-b) \leq 0$$

và

$$\frac{z'(t)}{z^\alpha(t)} \leq -P(t)$$

Lấy tích phân 2 vế của bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{z^{1-\alpha}(t) - z^{1-\alpha}(T)}{1-\alpha} \rightarrow -\infty \quad \text{khi } t \rightarrow \infty$$

Kéo theo $z^{1-\alpha}(t) \rightarrow +\infty, z(t) \rightarrow 0$. Vì thế tồn tại $T_1 > T_0$ sao cho

$$0 < z(t) < 1, \quad z'(t) \leq 0 \quad \text{với } t \geq T_1$$

Đặt $y(t) = -\ln z(t)$, với $t \geq T_2 = T_1 + b - a$, khi đó $y(t) > 0$ với $t \geq T_2$ và (2.28) kéo theo

$$y'(t) \geq P(t)e^{y(t) - \alpha y(t-b+a)}, \quad \text{với } t \geq T_2$$

Phần còn lại của định lí được chứng minh tương tự như định lí 1 trong [5].

CHƯƠNG 3. TÍNH ỔN ĐỊNH TIỆM CẬN CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH TRUNG HÒA ĐỐI SỐ LỆCH

Xét phương trình vi phân tuyến tính trung hòa đối số lệch

$$\frac{d}{dt}[x(t) - P(t)x(t-a)] + Q(t)x(t-b) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (3.1)$$

trong đó

i) a, b là những số thực dương.

ii) $P \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}), Q \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$.

Định nghĩa 3.1. Nghiệm $x_0(t)$ của phương trình (3.1) được gọi là ổn định nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ và $t_0 \in \mathbb{R}_+$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sao cho với mọi nghiệm của phương trình (3.1) thỏa điều kiện $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$ thì $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$.

Định nghĩa 3.2. Nghiệm $x_0(t)$ của phương trình (3.1) được gọi là ổn định đều nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon)$ sao cho với mọi nghiệm $x(t)$ của phương trình (3.1) thỏa mãn tại một điểm $t_0 \in \mathbb{R}_+$ nào đó điều kiện $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$ thì $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$.

Định nghĩa 3.3. Nghiệm $x_0(t)$ của phương trình (3.1) được gọi là ổn định tiệm cận đều nếu nó ổn định và với mỗi $t \in \mathbb{R}$, tồn tại $\delta = \delta(t_0) > 0$ sao cho với mọi nghiệm $x(t)$ của phương trình (3.1) thỏa điều kiện $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$ thì $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_0(t)| = 0, \forall t \geq t_0$.

Trong chương này ta sẽ thiết lập các điều kiện để nghiệm không của phương trình (3.1) là ổn định đều và tất cả các nghiệm của phương trình đều ổn định tiệm cận.

3.1. Tính ổn định đều và ổn định tiệm cận trong trường hợp $P(t)$ không là hàm hằng.

Định lý 3.1.

Giả sử $|P(t)| \leq p, p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và

$$p < \frac{1}{4}, 2p + \int_t^{t+b} Q(s)ds \leq \frac{3}{2}, t \geq t_0 \quad (3.2)$$

hoặc

$$\frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2}, \int_t^{t+b} Q(s)ds \leq \sqrt{2(1-2p)}, t \geq t_0 \quad (3.3)$$

Khi đó nghiệm không của phương trình (3.1) là ổn định đều.

Chứng minh.

Đặt $M = \max \{a, b\}$, $m = \min \{a, b\}$.

Chọn một số nguyên dương k sao cho $km \geq 3b$. Với $\varepsilon > 0$ bất kì, đặt:

$$\eta = \frac{(1-p)\varepsilon}{(1+p)(2p+3)^k}$$

Ta sẽ chứng minh với bất kì $t' \geq t_0, \phi \in C([t' - M, t'], (-\eta, \eta))$, ta có:

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad t \geq t' \quad (3.4)$$

trong đó $x(t)$ là nghiệm của phương trình (3.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $x(s) = \phi(s)$, với $s \in [t' - M, t']$.

Đặt

$$z(t) = x(t) - P(t)x(t - a) \quad (3.5)$$

Ta có kết quả (Xem Định lí 1 trong [7]), ta có:

$$|x(t)| < (2p+3)^k \eta, \quad t \in [t', t' + km] \quad (3.6)$$

Để chứng minh (3.4), bằng phương pháp phản chứng, giả sử (3.4) không đúng, khi đó theo (3.6), có $T > t' + km$ sao cho $|x(T)| = \varepsilon$ và $|x(t)| < \varepsilon$ với $t' \leq t < T$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x(T) = \varepsilon$. Ta có:

$$z(T) = x(T) - P(T)x(T - a) > (1-p)\varepsilon > 0 \quad (3.7)$$

và

$$z(t' + km) = x(t' + km) - P(t' + km)x(t' + km - a) < (1-p)\varepsilon \leq z(T)$$

Từ (3.7), tồn tại $T_0 \in (t' + km, T]$ sao cho $z(T_0) = \max \{z(t), t' + km \leq t \leq T\}$ và $z(t) < z(T_0)$ với $t' + km \leq t < T_0$.

Đặt

$$y(t) = z(t) - p\varepsilon, \quad \text{với } t \geq t' \quad (3.8)$$

Khi đó

$$\begin{aligned} -x(t - b) &= -z(t - b) - P(t - b)x(t - b - a) \\ &\leq -z(t - b) + p\varepsilon = -y(t - b), \quad t' + b \leq t \leq T_0 \end{aligned}$$

Từ (3.1) và (3.8), ta có:

$$y'(t) = z'(t) = -Q(t)x(t - b) \leq -Q(t)y(t - b), \quad t' + b \leq t \leq T_0 \quad (3.9)$$

Do $0 < p < \frac{1}{2}$, nên ta dễ dàng thấy rằng: $y(T_0) \geq z(T) - p\varepsilon > (1 - 2p)\varepsilon > 0$.

Tiếp theo ta chứng minh : $y(T_0 - b) \leq 0$.

Giả sử ngược lại: $y(T_0 - b) > 0$. Khi đó có một lân cận trái $(T_0 - b - h, T_0 - b)$ của $T_0 - b$, với $h > 0$, sao cho $y(t) > 0$ trên $(T_0 - b - h, T_0 - b)$, và $y(t - b) > 0$ trên $(T_0 - h, T_0)$. Vì thế theo (3.9), ta thấy $z(t)$ không tăng trên $(T_0 - h, T_0)$. Điều này mâu thuẫn với:

$$z(T_0) = \max \{z(t), t' + km \leq t \leq T\} \quad \text{và} \quad z(t) < z(T_0) \quad \text{với} \quad t' + km \leq t < T_0.$$

Vậy: $y(T_0 - b) \leq 0$. Do đó, tồn tại $\xi \in [T_0 - b, T_0)$ sao cho: $y(\xi) = 0$.

Từ (3.9), ta có:

$$y'(t) \leq Q(t)\varepsilon, t' + b \leq t \leq T_0 \quad (3.10)$$

Lấy tích phân hai vế của (3.10) từ $t - b$ đến ξ ta được:

$$-y(t - b) \leq \varepsilon \int_{t-b}^{\xi} Q(s)ds, \xi \leq t \leq T_0$$

Kết hợp với (3.9) ta có:

$$y'(t) \leq \varepsilon Q(t) \int_{t-b}^{\xi} Q(s)ds, \xi \leq t \leq T_0 \quad (3.11)$$

Cuối cùng ta chứng minh:

$$y(T_0) \leq (1 - 2p)\varepsilon \quad (3.12)$$

Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1. $0 < p < \frac{1}{4}, \int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds \leq 1$

Lấy tích phân 2 vế của (3.11) từ ξ đến T_0 , ta có:

$$\begin{aligned} y(T_0) &\leq \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \int_{t-b}^{\xi} Q(s)ds dt = \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \left[\int_{t-b}^t Q(s)ds - \int_{\xi}^t Q(s)ds \right] dt \\ &\leq \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \left[\frac{3}{2} - 2p - \int_{\xi}^t Q(s)ds \right] dt = \varepsilon \left[\left(\frac{3}{2} - 2p \right) \int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds \right)^2 \right] \\ &\leq (1 - 2p)\varepsilon. \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $0 < p < \frac{1}{4}, \int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds > 1$.

Chọn $T_1 \in (\xi, T_0)$ sao cho $\int_{T_1}^{T_0} Q(s)ds = 1$. Sau đó lần lượt lấy tích phân trong (3.10), từ ξ đến T_1 và

lấy tích phân trong (3.11) từ T_1 đến T_0 , ta có:

$$\begin{aligned}
y(T_0) &\leq \varepsilon \int_{\xi}^{T_1} Q(t) dt + \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-b}^{\xi} Q(s) ds dt \\
&= \varepsilon \left[\int_{T_1}^{T_0} Q(t) dt \int_{\xi}^{T_1} Q(s) ds + \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-b}^{\xi} Q(s) ds dt \right] \\
&= \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-b}^{T_1} Q(s) ds dt \\
&\leq \varepsilon \left[\left(\frac{3}{2} - 2p \right) \int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
&= (1 - 2p) \varepsilon .
\end{aligned}$$

Trường hợp 3. $\frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2}, \int_{\xi}^{T_0} Q(s) ds \leq \sqrt{2(1-2p)} .$

Lấy tích phân trong (3.11) từ ξ đến T_0 , ta được:

$$\begin{aligned}
y(T_0) &\leq \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \int_{t-b}^{\xi} Q(s) ds dt \\
&= \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \left[\int_{t-b}^t Q(s) ds - \int_{\xi}^t Q(s) ds \right] dt \\
&\leq \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \left[\sqrt{2(1-2p)} - \int_{\xi}^t Q(s) ds \right] dt \\
&= \varepsilon \left[\sqrt{2(1-2p)} \int_{\xi}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\xi}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
&\leq (1-2p) \varepsilon .
\end{aligned}$$

Vậy, ta luôn có:

$$y(T_0) \leq (1-2p) \varepsilon$$

Điều này mâu thuẫn với: $y(T_0) \geq z(T) - p\varepsilon > (1-2p)\varepsilon > 0.$

Do đó, ta có:

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad t \geq t'$$

Định lí được chứng minh.

Định lí 3.2.

Giả sử $|P(t)| \leq p, p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(s)ds = \infty \quad (3.13)$$

Nếu

$$p < \frac{1}{4}, 2p + \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-b}^t Q(s)ds < \frac{3}{2} \quad (3.14)$$

hoặc

$$\frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2}, \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-b}^t Q(s)ds < \sqrt{2(1-2p)} \quad (3.15)$$

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (3.1) tiến về 0 khi $t \rightarrow \infty$.

Chứng minh.

Gọi $x(t)$ là một nghiệm của phương trình (3.1). Ta sẽ chứng minh

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (3.16)$$

Trường hợp $x(t)$ không dao động, định lí đã được chứng minh (Xem định lí 2 trong [7]).

Ở đây ta xét $x(t)$ dao động. Đặt $z(t)$ như trong chứng minh của định lí 3.1, nghĩa là: $z(t) = x(t) - P(t)x(t-a)$

Theo chứng minh của định lí 3.1, ta có $x(t)$ bị chặn.

Đặt: $\mu = \limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)|$. Khi đó $0 \leq \mu < \infty$ và

$$k = \limsup_{t \rightarrow \infty} |z(t)| \geq (1-p)\mu \quad (3.17)$$

Ta sẽ chứng minh: $\mu = 0$.

Ngược lại, giả sử $\mu > 0$. Khi đó với bất kì $\varepsilon \in (0, (1-2p)\mu)$, tồn tại $A \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$, $B \in \left(0, \sqrt{2(1-2p)}\right)$ và

$T > t_0$ sao cho:

$$|x(t)| < \mu + \varepsilon, t \geq T - M$$

và

$$\int_{t-b}^t Q(s)ds < \begin{cases} A - 2p, p < \frac{1}{4} \\ B, \frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2} \end{cases} \quad t \geq T \quad (3.18)$$

Đặt

$$y(t) = z(t) - p(\mu + \varepsilon), t \geq T - b \quad (3.19)$$

Khi đó

$$-x(t-b) = -z(t-b) - P(t-b)x(t-b-a)$$

$$\leq -z(t-b) + p(\mu + \varepsilon) = -y(t-b), \quad t \geq T$$

Từ (3.1) và (3.19), ta có:

$$y'(t) = z'(t) = -Q(t)x(t-b) \leq -Q(t)y(t-b), \quad t \geq T \quad (3.20)$$

Ở đây $z'(t)$ là đạo động, và có một dãy tăng $\{T_n\}$ sao cho $T_n > T + a + 2b, T_n \rightarrow \infty, |z(T_n)| \rightarrow k$ khi $n \rightarrow \infty$, $|z(T_n)| > (1-p)(\mu - \varepsilon)$, và T_n là cực đại địa phương trái của $|z(t)|$.

Khi đó có hai trường hợp:

Trường hợp 1: $z(T_n) \leq 0$ là đơn giản.

Trường hợp 2: Ta xét $z(T_n) > 0$. Khi đó ta có:

$$y(T_n) \geq z(T_n) - p(\mu + \varepsilon) > (1-2p)(\mu + \varepsilon) - \varepsilon > 0$$

Do định nghĩa của T_n , ta cũng dễ dàng thấy rằng $y(T_n - b) \leq 0$. Vì thế tồn tại $\xi_n \in [T_n - b, T_n)$ sao cho: $y(\xi_n) = 0$.

Từ (3.20), ta có:

$$y'(t) \leq Q(t)(\mu + \varepsilon), \quad t \geq T \quad (3.21)$$

Lấy tích phân hai vế của (3.21) từ $t - b$ đến ξ_n , ta được:

$$-y(t-b) \leq (\mu + \varepsilon) \int_{t-b}^{\xi_n} Q(s)ds, \quad \xi_n \leq t \leq T_n$$

Thế vào (3.20), ta có:

$$y'(t) \leq (\mu + \varepsilon)Q(t) \int_{t-b}^{\xi_n} Q(s)ds, \quad \xi_n \leq t \leq T_n \quad (3.22)$$

Đặt

$$L = \begin{cases} \max \left\{ A - 2p - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, & p < \frac{1}{4} \\ \frac{B^2}{2}, & \frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có: $L < 1 - 2p$. **Ta sẽ chứng minh:**

$$y(T_n) \leq L(\mu + \varepsilon) \quad (3.23)$$

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1. $0 < p < \frac{1}{4}, \int_{\xi_n}^{T_n} Q(s)ds \leq 1$.

Lấy tích phân (3.22), từ ξ_n đến T_n , ta có:

$$y(T_n) \leq (\mu + \varepsilon) \int_{\xi_n}^{T_n} Q(t) \int_{t-b}^{\xi_n} Q(s)ds dt$$

$$\begin{aligned}
&= (\mu + \varepsilon) \int_{\xi_n}^{T_n} Q(t) \left[\int_{t-b}^t Q(s) ds - \int_{\xi_n}^t Q(s) ds \right] dt \\
&\leq (\mu + \varepsilon) \int_{\xi_n}^{T_n} Q(t) \left[A - 2p - \int_{\xi_n}^t Q(s) ds \right] dt \\
&= (\mu + \varepsilon) \left[(A - 2p) \int_{\xi_n}^{T_n} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\xi_n}^{T_n} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
&\leq (\mu + \varepsilon) \left[\max \{ A - 2p, 1 \} - \frac{1}{2} \right] \\
&= L(\mu + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $0 < p < \frac{1}{4}, \int_{\xi_n}^{T_n} Q(s) ds > 1$.

Chọn $\eta_n \in (\xi_n, T_n)$ sao cho: $\int_{\eta_n}^{T_n} Q(s) ds = 1$.

Sau đó lấy tích phân (3.21) từ ξ_n đến η_n và lấy tích phân (3.22) từ η_n đến T_n , ta có:

$$\begin{aligned}
y(T_n) &\leq (\mu + \varepsilon) \int_{\xi_n}^{\eta_n} Q(t) dt + (\mu + \varepsilon) \int_{\eta_n}^{T_n} Q(t) \int_{t-b}^{\xi_n} Q(s) ds dt \\
&= (\mu + \varepsilon) \left[\int_{\eta_n}^{T_n} Q(t) dt \int_{\xi_n}^{\eta_n} Q(s) ds + \int_{\eta_n}^{T_n} Q(t) \int_{t-b}^{\xi_n} Q(s) ds dt \right] = (\mu + \varepsilon) \int_{\eta_n}^{T_n} Q(t) \int_{t-b}^{\eta_n} Q(s) ds dt \\
&\leq (\mu + \varepsilon) \left[(A - 2p) \int_{\eta_n}^{T_n} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\eta_n}^{T_n} Q(s) ds \right)^2 \right] = (\mu + \varepsilon) \left(A - 2p - \frac{1}{2} \right) \\
&\leq L(\mu + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Trường hợp 3. $\frac{1}{4} \leq p < \frac{1}{2}, \int_{\xi_n}^{T_n} Q(s) ds \leq B$.

Lấy tích phân (3.22) từ ξ_n đến T_n , ta được:

$$\begin{aligned}
y(T_n) &\leq (\mu + \varepsilon) \int_{\xi_n}^{T_n} Q(t) \int_{t-b}^{\xi_n} Q(s) ds dt = (\mu + \varepsilon) \int_{\xi_n}^{T_n} Q(t) \left[\int_{t-b}^t Q(s) ds - \int_{\xi_n}^t Q(s) ds \right] dt \\
&\leq (\mu + \varepsilon) \int_{\xi_n}^{T_n} Q(t) \left[B - \int_{\xi_n}^t Q(s) ds \right] dt = (\mu + \varepsilon) \left[B \int_{\xi_n}^{T_n} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\xi_n}^{T_n} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{2} B^2 (\mu + \varepsilon) = L(\mu + \varepsilon)
\end{aligned}$$

Cả 3 trường hợp cho thấy (3.23) được thỏa, và từ (3.23) có:

$$z(T_n) \leq (L + p)(\mu + \varepsilon)$$

Cho $n \rightarrow \infty$ và $\varepsilon \rightarrow 0$, ta có:

$$K = \limsup_{n \rightarrow \infty} z(T_n) \leq (L + p)\mu < (1 - p)\mu$$

Điều này mâu thuẫn với (3.17). Do đó $\mu = 0$.

Định lí được chứng minh.

Định lí 3.3.

Giả sử $0 \leq P(t) \leq p$, $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và tồn tại một số nguyên dương N sao cho $p + \frac{3}{2}p^N \leq 1$

và

$$2p \left(1 - \frac{1}{4}p\right) + \int_t^{t+3b+(N-1)a} Q(s)ds \leq \frac{3}{2}, \quad t \geq t_0 \quad (3.24)$$

Khi đó nghiệm không của phương trình (3.1) là ổn định đều

Chứng minh.

Đặt $M = \max\{a, b\}$, $m = \min\{a, b\}$

Chọn một số nguyên dương k sao cho $km \geq 2(3b + Na)$. Với $\varepsilon > 0$ bất kì,

đặt
$$\eta = \frac{(1-p)\varepsilon}{(1+p)(2p+3)^k}.$$

Ta sẽ chứng minh với bất kì $t' \geq t_0$, $\phi \in C([t' - M, t'], (-\eta, \eta))$, ta luôn có:

$$|x(t)| < \varepsilon, \forall t \geq t'.$$

trong đó $x(t)$ là nghiệm của phương trình (3.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $x(s) = \phi(s)$,

với $s \in [t' - M, t']$.

Tương tự như định lí 3.1, ta có

$$|x(t)| < (2p+3)^k \eta, t \in [t', t' + km]$$

Kéo theo $|x(t)| < \varepsilon, t' \leq t \leq t' + km$

Tiếp theo ta chứng minh: $|x(t)| < \varepsilon, t > t' + km$

Bằng phương phản chứng, giả sử có $T > t' + km$ sao cho $|x(T)| = \varepsilon$ và $|x(t)| < \varepsilon$, với $t' \leq t < T$.

Không làm mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $x(T) = \varepsilon$. Vì vậy (3.7) là đúng và tồn tại

$T_0 \in (t' + km, T]$ sao cho $z(T_0) = \max\{z(t), t' + km \leq t \leq T\}$ và $z(t) < z(T_0)$ với $t' + km \leq t < T_0$, khi đó có

hai khả năng xảy ra:

$$z(t) > 0, t \in [T_0 - (3b + (N-1)a), T_0]$$

hoặc

Tồn tại $\xi \in [T_0 - (3b + (N-1)a), T_0]$ sao cho $z(\xi) = 0, z(t) > 0, t \in (\xi, T_0]$

Xét khả năng 1: $z(t) > 0$.

Ta có:

$$-x(t) < p^i \varepsilon, t \in [T_0 - (3b + (N-i)a), T_0], i=1, 2, \dots, N \quad (3.25)$$

và

$$\begin{aligned} z'(t) &= Q(t)[-z(t-b) - P(t-b)x(t-b-a)] \\ &\leq -Q(t)[z(t-b) - P^N \varepsilon], t \in [T_0 - 2b, T_0] \end{aligned}$$

Đặt

$$y(t) = z(t) - p^N \varepsilon, t \geq t' \quad (3.26)$$

Khi đó

$$y'(t) = z'(t) = -Q(t)x(t-b) \leq -Q(t)y(t-b), t \in [T_0 - 2b, T_0] \quad (3.27)$$

Tương tự, chứng minh của định lý 3.1, từ (3.27) dễ dàng kết luận được $y(T_0 - b) \leq 0$.

Hơn nữa: $y(T_0) \geq z(T) - p^N \varepsilon > (1 - p - p^N) \varepsilon > 0$

Do đó tồn tại: $\xi \in [T_0 - b, T_0)$ sao cho: $y(\xi) = 0$

Từ (3.26) và (3.27), ta có:

$$y'(t) \leq Q(t)p^N \varepsilon, t \in [T_0 - 2b, T_0] \quad (3.28)$$

Lấy tích phân (3.28) từ ξ đến T_0 , ta có:

$$-y(t-b) \leq p^N \varepsilon \int_{t-b}^{\xi} Q(s)ds, t \in [T_0 - b, T_0]$$

Thế vào (3.27), ta có:

$$y'(t) \leq p^N \varepsilon Q(t) \int_{t-b}^{\xi} Q(s)ds, t \in [T_0 - b, T_0] \quad (3.29)$$

Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1. $\int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds \leq 1 - p$.

Lấy tích phân (3.29) từ ξ đến T_0 ta có:

$$y(T_0) \leq p^N \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \int_{t-b}^{\xi} Q(s)ds$$

$$\begin{aligned}
&= p^N \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \left[\int_{t-b}^t Q(s) ds - \int_{\xi}^t Q(s) ds \right] dt \\
&\leq p^N \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \left[\frac{(1-p)(3-p)}{2} - \int_{\xi}^t Q(s) ds \right] dt \\
&= p^N \varepsilon \left[\frac{(1-p)(3-p)}{2} \int_{\xi}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\xi}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
&\leq (1-p)^2 p^N \varepsilon \leq (1-p-p^N) \varepsilon
\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $\int_{\xi}^{T_0} Q(s) ds > 1-p$.

Chọn $T_1 \in (\xi, T_0)$ sao cho: $\int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds = 1-p$. Sau đó lần lượt lấy tích phân (3.28) từ ξ đến T_1 và lấy

tích phân (3.29) từ T_1 đến T_0 , ta có:

$$\begin{aligned}
y(T_0) &\leq p^N \varepsilon \int_{\xi}^{T_1} Q(t) dt + p^N \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-b}^{\xi} Q(s) ds dt \\
&= p^N \varepsilon \left[\int_{T_1}^{T_0} Q(t) dt \int_{\xi}^{T_1} Q(s) ds + p \int_{\xi}^{T_1} Q(s) ds + \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-b}^{\xi} Q(s) ds dt \right] \\
&= p^N \varepsilon \left[\int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-b}^{T_1} Q(s) ds dt + p \left(\int_{\xi}^{T_0} Q(s) ds - \int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds \right) \right] \\
&\leq p^N \varepsilon \left[\frac{(1-p)(3-p)}{2} \int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 + p \left(\frac{(1-p)(3-p)}{2} - \int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds \right) \right] \\
&= (1-p)^2 p^N \varepsilon \leq (1-p-p^N) \varepsilon
\end{aligned}$$

Vậy cả 2 trường hợp cho thấy:

$$y(T_0) \leq (1-p-p^N) \varepsilon \quad (3.30)$$

Điều này mâu thuẫn với: $y(T_0) \geq y(T) > (1-p-p^N) \varepsilon$

Xét khả năng 2: Tồn tại $\xi \in [T_0 - (3b + (N-1)a), T_0]$ sao cho $z(\xi) = 0$, $z(t) > 0$,

$t \in (\xi, T_0]$, ta có:

$$z'(t) \leq Q(t) \varepsilon, t' \leq t \leq T_0 \quad (3.31)$$

và

$$z'(t) \leq \varepsilon Q(t) \left[p + \int_{t-(3b+(N-1)a)}^{\xi} Q(s) ds \right], \xi \leq t \leq T_0 \quad (3.32)$$

Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1. $\int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds \leq 1-p$.

Lấy tích phân (3.32) từ ξ đến T_0 , ta có

$$\begin{aligned}
 z(T_0) &\leq \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \left[p + \int_{t-3b-(N-1)a}^{\xi} Q(s)ds \right] dt \\
 &= \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \left[p + \int_{t-3b-(N-1)a}^t Q(s)ds - \int_{\xi}^t Q(s)ds \right] dt \\
 &= \varepsilon \left[\frac{3-2p+p^2}{2} \int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds \right)^2 \right] \\
 &\leq (1-p)\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $\int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds > 1-p$.

Chọn $T_2 \in (\xi, T_0)$ sao cho $\int_{T_2}^{T_0} Q(s)ds = 1-p$. Sau đó lần lượt lấy tích phân (3.31) từ ξ đến T_2 và lấy

tích phân (3.32) từ T_2 đến T_0 , ta có:

$$\begin{aligned}
 z(T_0) &\leq \varepsilon \int_{\xi}^{T_2} Q(t)dt + \varepsilon \int_{T_2}^{T_0} Q(t) \left[p + \int_{t-3b-(N-1)a}^{\xi} Q(s)ds \right] dt \\
 &= \varepsilon \left[\int_{T_2}^{T_0} Q(t)dt \int_{\xi}^{T_2} Q(s)ds + p \int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds + \int_{T_2}^{T_0} Q(t) \int_{t-3b-(N-1)a}^{\xi} Q(s)ds dt \right] \\
 &= \varepsilon \left[\int_{T_2}^{T_0} Q(t) \int_{t-3b-(N-1)a}^{T_2} Q(s)ds dt + p \int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds \right] \\
 &\leq \varepsilon \left[\frac{(1-p)(3-p)}{2} \int_{T_2}^{T_0} Q(s)ds - \frac{1}{2} \left(\int_{T_2}^{T_0} Q(s)ds \right)^2 + p \frac{(1-p)(3-p)}{2} \right] \\
 &= (1-p)\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Vậy trong cả 2 trường hợp ta có:

$$z(T_0) \leq (1-p)\varepsilon \quad (3.33)$$

Điều này mâu thuẫn với: $z(T_0) \geq z(T) > (1-p)\varepsilon$.

Do đó, ta phải có:

$$|x(t)| < \varepsilon, t > t' + km.$$

Vậy

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t'.$$

Định lí được chứng minh.

Tương tự định lí 3.2 và 3.3, kết hợp với bổ đề sau.

Bổ đề: (Xem Bổ đề 6.4.1 trong [5]). Cho phương trình

$$\frac{d}{dt}(x(t) + P(t)x(t-a)) + Q(t)x(t-b) = 0, \quad t \geq t_0$$

trong đó $P \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}]$, $Q \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+]$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Gọi $x(t)$ là một nghiệm dương của phương trình trên

Đặt $z(t) = x(t) + P(t)x(t-a)$.

Giả sử $\int_{t_0}^{\infty} Q(s)ds = \infty$.

Khi đó các phát biểu sau là đúng:

- (i) $z(t)$ là một hàm giảm.
- (ii) Nếu $P(t) \leq -1$ thì $z(t) < 0$.
- (iii) Nếu $-1 \leq P(t) \leq 0$ thì $z(t) > 0$ và $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

Từ đó, ta đưa ra định lí sau về tiêu chuẩn tiệm cận của nghiệm cho phương trình (3.1), đó là:

Định lí 3.4.

Giả sử $0 \leq P(t) \leq p$, $p \in (0, \frac{1}{2})$ và tồn tại số nguyên dương N sao cho $p + \frac{3}{2}p^N \leq 1$.

Nếu $\int_{t_0}^{\infty} Q(s)ds = \infty$

và

$$2p(1 - \frac{1}{4}p) + \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-(3b+(N-1)a)}^t Q(s)ds < \frac{3}{2}$$

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (3.1) dần về 0 khi $t \rightarrow \infty$.

3.2. Tính ổn định đều và ổn định tiệm cận trong trường hợp P(t) là hàm hằng

Định lí 3.5.

Giả sử $|P(t)| \equiv p$, $p \in (0, \frac{1}{2})$ và tồn tại một số nguyên dương N sao cho $4p^N \leq 1$ và

$$\int_t^{t+b+(N-1)a} Q(s)ds \leq \frac{3-4p^N}{2(1-p^N)}(1-p), t \geq t_0 \quad (3.34)$$

Khi đó nghiệm không của phương trình (3.1) là ổn định đều.

Chứng minh.

Đặt $M = \max \{a, b\}$, $m = \min \{a, b\}$

Chọn một số nguyên dương k sao cho $km \geq 2(b + Na)$. Với $\varepsilon > 0$ bất kì, đặt

$$\eta = \frac{(1-p)\varepsilon}{(1+p)(2p+3)^k}$$

Ta sẽ chứng minh: Với bất kì $t' \geq t_0$, $\phi \in C([t' - M, t'], (-\eta, \eta))$, ta có:

$$|x(t)| < \varepsilon, t \geq t'$$

trong đó $x(t)$ là nghiệm của phương trình (3.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $x(s) = \phi(s)$, với $s \in [t' - M, t']$.

Đặt: $z(t) = x(t) - P(t)x(t - a)$.

Tương tự như định lý 3.1, ta có:

$$|x(t)| < (2p+3)^k \eta, t \in [t', t' + km]$$

Tiếp theo ta chứng minh: $|x(t)| < \varepsilon, t \geq t'$

Bằng phương pháp phản chứng, giả sử điều này không đúng, khi đó theo (3.6) có $T > t' + km$, sao cho $x(T) = \varepsilon$ và $|x(t)| < \varepsilon$, với $t' \leq t < T$. Không làm mất tính tổng quát, ta có thể giả rằng $x(T) = \varepsilon$.

Vì vậy: $z(T) = x(T) - P(T)x(T - a) > (1-p)\varepsilon > 0$ và tồn tại $T_0 \in (t' + km, T]$

sao cho: $z(T_0) = \max \{z(t), t' + km \leq t \leq T\}$ và $z(t) < z(T_0)$ với $t' + km \leq t < T_0$

$$\text{Đặt: } y(t) = z(t) - \frac{1-p}{1-p^N} p^N \varepsilon, t \geq t' \quad (3.35)$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} -x(t-b) &= -\sum_{i=0}^{N-1} p^i z(t-b-ia) - p^N x(t-b-Na) \\ &\leq -\sum_{i=0}^{N-1} p^i z(t-b-ia) + p^N \varepsilon = -\sum_{i=0}^{N-1} p^i y(t-b-ia), T_0 - b - (N-1)a \leq t \leq T_0 \end{aligned}$$

Từ (3.1) và (3.35) ta có:

$$y'(t) = z'(t) = -Q(t)x(t-b), t \geq t' \quad (3.36)$$

và

$$y'(t) \leq -Q(t) \sum_{i=0}^{N-1} p^i y(t-b-ia), T_0-b-(N-1)a \leq t \leq T_0 \quad (3.37)$$

Để dàng thấy rằng:
$$y(T_0) \geq z(T) - \frac{(1-p)p^N \varepsilon}{1-p^N} > \frac{(1-2p^N)(1-p)\varepsilon}{1-p^N}$$

Tiếp theo ta đi chứng minh: Tồn tại $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ sao cho: $y(T_0-b-ja) \leq 0$. Giả sử ngược lại, $y(T_0-b-ja) > 0$ với $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Khi đó có một lân cận trái $(T_0-b-ja-h, T_0-b-ja)$ với $h > 0$ của T_0-b-ja sao cho $y(t) > 0$ trên $(T_0-b-ja-h, T_0-b-ja)$, và $y(t-b-ja) > 0$ trên (T_0-h, T_0) , với $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Vì thế theo (3.37), ta thấy $y(t)$ không tăng trên (T_0-h, T_0) . Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của T_0

Vậy

$$y(T_0-b-ja) \leq 0, \text{ với } j \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Do đó tồn tại $\xi \in [T_0-b-(N-1)a, T_0]$ sao cho $y(\xi) = 0$ và $y(t) > 0, t \in (\xi, T_0]$

Từ (3.36), ta có:

$$y'(t) \leq Q(t)\varepsilon, \quad t' \leq t \leq T_0 \quad (3.38)$$

Nếu $t-b-ia \leq \xi$ với $t \in [T_0-b-(N-1)a, T_0]$, khi đó lấy tích phân trong (3.38) từ $t-b-(N-1)a$ đến ξ ta được:

$$-y(t-b-ia) \leq \varepsilon \int_{t-b-(N-1)a}^{\xi} Q(s)ds, \quad t-b-ia \leq \xi$$

Nếu $\xi < t-b-ia \leq T_0$ với $t \in [T_0-b-(N-1)a, T_0]$ khi đó, tương tự ta có

$$-y(t-b-ia) < 0 \leq \varepsilon \int_{t-b-(N-1)a}^{\xi} Q(s)ds, \quad \xi \leq t-b-ia \leq T_0$$

Kết hợp với (3.37), ta có:

$$y'(t) \leq \varepsilon \frac{1-p^N}{1-p} Q(t) \int_{t-b-(N-1)a}^{\xi} Q(s)ds, \quad \xi \leq t \leq T_0 \quad (3.39)$$

Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1. $\frac{1-p^N}{1-p} \int_{\xi}^{T_0} Q(s)ds \leq 1.$

Lấy tích phân (3.39) từ ξ đến T_0 , ta có:

$$y(T_0) \leq \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \int_{t-b-(N-1)a}^{\xi} Q(s)ds dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \left[\int_{t-b-(N-1)a}^t Q(s) ds - \int_{\xi}^t Q(s) ds \right] dt \\
&\leq \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{\xi}^{T_0} Q(t) \left[\frac{3-4p^N}{2(1-p^N)} (1-p) - \int_{\xi}^t Q(s) ds \right] dt \\
&= \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \left[\frac{3-4p^N}{2(1-p^N)} (1-p) \int_{\xi}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\xi}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
&\leq \frac{1-2p^N}{1-p^N} (1-p) \varepsilon
\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $\frac{1-p^N}{1-p} \int_{\xi}^{T_0} Q(s) ds > 1$.

Chọn $T_1 \in (\xi, T_0)$ sao cho: $\frac{1-p^N}{1-p} \int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds = 1$. Sau đó, lần lượt lấy tích phân (3.38) từ ξ đến T_1 và

lấy tích phân (3.39) từ T_1 đến T_0 , ta có:

$$\begin{aligned}
y(T_0) &= \varepsilon \int_{\xi}^{T_1} Q(t) dt + \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-b-(N-1)a}^{\xi} Q(s) ds dt \\
&= \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) dt \int_{\xi}^{T_1} Q(s) ds + \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-b-(N-1)a}^{\xi} Q(s) ds dt \\
&= \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \int_{T_1}^{T_0} Q(t) \int_{t-b-(N-1)a}^{T_1} Q(s) ds dt \\
&\leq \frac{1-p^N}{1-p} \varepsilon \left[\frac{3-4p^N}{2(1-p^N)} (1-p) \int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds - \frac{1}{2} \left(\int_{T_1}^{T_0} Q(s) ds \right)^2 \right] \\
&= \frac{1-2p^N}{1-p^N} (1-p) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cả hai trường hợp cho thấy:

$$y(T_0) \leq \frac{1-2p^N}{1-p^N} (1-p) \varepsilon \quad (3.40)$$

Điều này mâu thuẫn với: $y(T_0) \geq z(T) - \frac{(1-p)p^N \varepsilon}{1-p^N} > \frac{(1-2p^N)(1-p)\varepsilon}{1-p^N}$.

Định lí được chứng minh.

Tương tự định lí 3.2, định lí 3.5, kết hợp với bổ đề sau

Bổ đề: (Xem Bổ đề 6.4.2 trong [5]) Cho phương trình:

$$\frac{d}{dt}(x(t) + px(t-a)) + Q(t)x(t-b) = 0, \quad t \geq t_0$$

trong đó $p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $Q \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+]$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Gọi $x(t)$ là một nghiệm dương của phương trình trên.

Đặt $z(t) = x(t) + px(t-a)$.

Giả sử $\int_{t_0}^{\infty} Q(s)ds = \infty$

Khi đó các phát biểu sau là đúng:

(i) $z(t)$ là một hàm giảm và hoặc $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -\infty$ hoặc $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

(ii) Các phát biểu sau là tương đương:

a. $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -\infty$.

b. $p < -1$.

c. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$.

(iii) Các phát biểu sau là tương đương:

a. $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

b. $p > -1$.

c. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Ta đưa ra định lý sau, về một tiêu chuẩn tiệm cận của nghiệm cho phương trình (3.1), đó là

Định lý 3.6.

Giả sử $|P(t)| \equiv p$, $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và tồn tại một số nguyên dương N sao cho $4p^N \leq 1$. Nếu $\int_{t_0}^{\infty} Q(s)ds = \infty$

và $\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-(b+(N-1)a)}^t Q(s)ds < \frac{3-4p^N}{2(1-p^N)}(1-p)$.

Khi đó mọi nghiệm của phương trình (3.1) dần về 0 khi $t \rightarrow \infty$.

KẾT LUẬN

Như vậy luận văn đã trình bày tính ổn định của nghiệm, sự tồn tại nghiệm dao động cho phương trình vi phân đối số lệch cấp một loại trung hòa bao gồm trường hợp tuyến tính và không tuyến tính. Các kết quả trong 3 bài báo không trùng lặp và bổ sung cho nhau để có những cách nhìn mới trong ứng dụng về sự dao động của nghiệm cho phương trình vi phân đối số lệch cấp một.

Chương 1 trình bày một số kết quả về sự dao động của nghiệm cho phương trình vi phân đối số lệch bậc một dạng (1.1) hay tổng quát hơn dạng (1.2).

Chương 2, luận văn xét tính dao động của nghiệm cho phương trình phi tuyến (2.1) với p là hằng số lớn hơn 1, trong đó hàm f liên tục và thỏa mãn $u.f(u) > 0$ khi $u \neq 0$.

Chương 3 xét tính ổn định của nghiệm cho phương trình tuyến tính (3.1) với $P(t)$, $Q(t)$ là hàm liên tục. Đặc biệt khi $P(t)$ là hàm hằng luận văn chỉ xét trường hợp $P(t) \equiv p$ với $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Qua quá trình nghiên cứu để thực hiện luận văn tôi học tập được một số kỹ thuật để xác định tính ổn định của nghiệm, sự dao động của nghiệm cho phương trình vi phân đối số lệch bậc một.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn vẫn còn có nhiều hạn chế, do vậy tôi mong muốn được tiếp tục nghiên cứu thêm về các vấn đề đặt ra trong phương trình vi phân đối số lệch loại trung hòa bậc một loại tuyến tính hoặc không tuyến tính.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] X.H.Tang and XingFu Zou, *Asymptotic Stability of a Neutral Differential Equation*, Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society (2002) 45,33 –347.
- [2] John R.Graef, R. Savithri, E.Thandapani, *Oscillation of First Order Neutral Delay Differential Equations*, Electronic Journal of Qualitative, Theory of Differential Equations (2004) 12,1 - 11.
- [3] Christos G. Philos and Ioannis K. Purnaras, *Asymptotic Properties, Nonoscillation, and Stability for Scalar First Order Linear Autonomous Neutral Delay Differential Equations*, Electronic Journal of Differential Equations (2004) 03, 1 – 17.
- [4] G. S. Ladde, V. Lakshmikantham and B. G. Zhang, *Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments* (Marcel Dekker, New York, 1987).
- [5] I. Györi and G. Ladas, *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications* (Clarendon, Oxford, 1991).
- [6] X. H. Tang, *Oscillation for the First Order Superlinear Delay Differential Equations*, J. London Math. Soc. 65 (2002), 115 - 122.
- [7] J. S. Yu, *Asymptotic Stability for Nonautonomous Scalar Neutral Differential Equations*, J. Math. Analysis Appli. 203 (1996), 850 – 860.
- [8] Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phú, *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, Nhà xuất bản Giáo dục 2000.
- [9] Hoàng Tụy, *Hàm thực và Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.