

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM
KHOA TOÁN



LUẬN VĂN THẠC SỸ

ĐỀ TÀI:

T - NHÓM HỮU HẠN

GVHD : PGS.TS. BÙI XUÂN HẢI
SVTH : LƯƠNG QUANG DƯƠNG

TP. HỒ CHÍ MINH - 2006



LỜI CẢM ƠN

Cho em xin được bày tỏ lòng thành kính biết ơn sâu sắc đối với Thầy hướng dẫn, PGS. TS Bùi Xuân Hải, thuộc Trường Đại học khoa học tự nhiên, ĐHQG thành phố Hồ Chí Minh; đã dành nhiều công sức và thời gian quý báu giúp em nghiên cứu Toán học; rất trách nhiệm và nghiêm túc trong khoa học, nhân hậu và rộng mở trong tình cảm.

Đồng thời, cho em xin được bày tỏ lòng thành kính biết ơn sâu sắc đối với quý Thầy PGS. TS Bùi Tường Trí, TS Trần Huyền, PGS. TS My Vinh Quang, cùng quý Thầy, Cô Trường ĐHSP thành phố Hồ Chí Minh, những người Thầy đã nhiệt thành và tận tụy trong giảng dạy, đức độ và phúc hậu trong tình cảm; giúp cho em cùng các bạn lớp Cao học khóa 12 - chuyên ngành Đại số được hiểu biết vững vàng về kiến thức, được tiếp nhận những giá trị nhân văn sâu sắc.

Xin thành kính cảm ơn quý Thầy, Cô trong Ban Giám hiệu, Phòng Khoa học công nghệ - Sau đại học, Khoa Toán - Tin học Trường ĐHSP thành phố Hồ Chí Minh đã tạo điều kiện thuận lợi giúp cho em cùng các bạn lớp Cao học khóa 12 - chuyên ngành Đại số học tập nghiêm túc, thành đạt.

Xin thành kính cảm ơn quý Thầy, Cô trong Ban Giám đốc, Phòng Giáo dục trung học, các Phòng chức năng Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Đồng Nai luôn động viên, quan tâm tạo điều kiện thuận lợi giúp tôi hoàn thành khóa học tốt đẹp.

Xin chân thành cảm ơn quý Thầy, Cô trong Ban Giám hiệu, Tổ Toán và các đồng chí, đồng nghiệp Trường THPT Đoàn Kết - huyện Tân Phú - tỉnh Đồng Nai đã động viên, tạo điều kiện giúp tôi vượt qua khó khăn, học tập đạt kết quả viên mãn.

Xin chân thành cảm ơn quý Thầy, Cô; anh, chị; thân hữu luôn động viên, tạo điều kiện giúp tôi học tập tiến triển.



LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết nhóm tuyến tính là một môn học trong chương trình Cao học, chuyên ngành Đại số của Trường ĐHSP thành phố Hồ Chí Minh; phần mở đầu của môn học này, có một số nội dung về lý thuyết nhóm; điều đó giúp nhớ về những kỷ niệm của “thuở ban đầu” học Toán ở Trường ĐHSP Quy Nhơn.

Xin viết Luận văn sau khi học môn Lý thuyết nhóm tuyến tính là xuất phát từ tình cảm tự nhiên “thuở ban đầu” thân thương ấy. Được sự đồng ý của Thầy hướng dẫn, sự cho phép của Trường ĐHSP thành phố Hồ Chí Minh, chúng tôi thực hiện Luận văn “*T - nhóm hữu hạn*”. Đây là nhân duyên rất tốt, giúp tiếp cận, bước đầu hiểu biết một số cấu trúc về nhóm. *Luận văn phát triển theo hướng tìm điều kiện để một nhóm có mọi nhóm con là pronormal, là đa chuẩn tắc*; có hai kết quả về vấn đề trên được phát biểu và chứng minh trong tài liệu tham khảo. Luận văn thực hiện lại điều đó bằng ngôn ngữ học tập được ở quý Thầy; những người Thầy khả kính có nhiều đóng góp căn bản cho sự phát triển Toán học tại các tỉnh, thành phía nam, đặc biệt là thành phố Hồ Chí Minh.

Được Thầy PGS. TS Bùi Xuân Hải hướng dẫn, rất trách nhiệm và nghiêm túc trong khoa học, nhân hậu và rộng mở trong tình cảm nên Luận văn hoàn thành viên mãn. Nội dung của Luận văn gồm hai chương :

Chương I : *Một số khái niệm cơ bản*

Trình bày một số khái niệm và tính chất về nhóm con đa chuẩn tắc; nhóm Quaternion; nhóm giải được; nhóm lũy linh; nhóm các tự đẳng cấu của nhóm cyclic.

Chương II : *T - nhóm và T -nhóm*

Trình bày một số khái niệm và kết quả về nhóm Dedekind; về tâm hóa tử; về nhóm con Fitting của T - nhóm; về T - nhóm và T - nhóm.

Vì năng lực, thời gian, kiến văn có hạn chế nên Luận văn có thể có những thiếu sót, sai sót. Kính mong quý Thầy, Cô chỉ dạy; các bạn đồng nghiệp góp ý.

Cuối cùng cho em xin được bày tỏ lòng thành kính, biết ơn sâu sắc đối với Thầy PGS. TS Bùi Xuân Hải, Thầy PGS. TS Bùi Tường Trí, Thầy TS Trần Huyền, Thầy PGS. TS Mỹ Vinh Quang cùng quý Thầy, Cô tham gia giảng dạy, quản lý lớp Cao học khóa 12 - chuyên ngành Đại số đã nhiệt thành, tận tụy giảng dạy, hướng dẫn giúp em hoàn thành khóa học tốt đẹp.



MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

§1. NHÓM CON ĐA CHUẨN TẮC

1.1. Nhóm con quật

1.1.1. Định nghĩa. Cho D là một nhóm con của nhóm G . Khi đó, nhóm con H của G được gọi là một *nhóm con trung gian của G đối với D* nếu D là một nhóm con của H ; trường hợp không nhầm lẫn có thể nói ngắn gọn H là một *nhóm con trung gian*.

1.1.2. Định nghĩa. (Z.I. Borevich) Cho G là một nhóm, D là một nhóm con của G , và cho họ khác rỗng $M = \{(G_\alpha, N_G(G_\alpha))\}_{\alpha \in I}$ gồm những nhóm con trung gian G_α cùng chuẩn hóa tử $N_G(G_\alpha)$ của chúng.

Ta nói M là *quật* của G đối với D nếu với mỗi nhóm con trung gian H tồn tại duy nhất chỉ số $\alpha \in I$ sao cho $G_\alpha \leq H \leq N_G(G_\alpha)$.

Khi đó $G_\alpha, N_G(G_\alpha)/G_\alpha$ lần lượt được gọi là *nhóm con cơ sở, bộ phận* của quật M .

Nếu đối với D tồn tại quật thì D được gọi là một *nhóm con quật* của G .

Ví dụ 1.1. Mọi *nhóm con chuẩn tắc* D trong một nhóm G đều là *nhóm con quật* của G .

Thật vậy, D là một nhóm con quật của G , với quật là họ chỉ gồm một phần tử $M = \{(D, N_G(D))\}$.

1.1.3. Định nghĩa. Cho G là một nhóm, D là một nhóm con của G , A là một tập con khác rỗng của G , với a, x là phần tử tùy ý của G . Khi đó, ký hiệu :

$$x^a = a^{-1}xa, D^a = \{x^a / x \in D\}, D^A = \langle D^a / a \in A \rangle.$$

1.1.4. Định nghĩa. Cho G là một nhóm và $D \leq F \leq G$. Khi đó, F được gọi là một nhóm con *đầy đủ* của G đối với D nếu $D^F = F$.

Ví dụ 1.2. Cho D là một nhóm con của nhóm G . Khi đó, D là một nhóm con đầy đủ của G đối với D (vì $D^D = D$).

Chú ý 1.1. Cho G là một nhóm và $D \leq F \leq G$. Khi đó, $D^F \trianglelefteq F$.

1.2. Khái niệm nhóm con đa chuẩn tắc

1.2.1. Định nghĩa. (Z.I. Borevich) Cho D là một nhóm con của nhóm G . Khi đó, D được gọi là một *nhóm con đa chuẩn tắc* của G nếu D là nhóm con quật và mọi nhóm con cơ sở của quật đều đầy đủ.

Ví dụ 1.3. Mọi nhóm con chuẩn tắc trong nhóm G đều là nhóm con đa chuẩn tắc của G , quật xác định như Ví dụ 1.1.

Khái niệm sau đây, thêm một minh họa về nhóm con đa chuẩn tắc mà ở Chương II sẽ vận dụng

1.2.2. Định nghĩa. (Ph. Hall) Nhóm con D của một nhóm G được gọi là *pronormal* trong G nếu với mọi $x \in G$, tồn tại $u \in \langle D, D^x \rangle$ sao cho $D^x = D^u$.

Ví dụ 1.4. Mọi nhóm con chuẩn tắc trong một nhóm G đều là nhóm con pronormal trong G .

Chúng minh. Giả sử $D \triangleleft G$; nên $D^x = D$, vậy $D^x = D^1$, với mọi $x \in G$. $\uparrow$

Nhận xét 1.1. Cho D là nhóm con pronormal trong một nhóm G . Khi đó, $\langle D, D^x \rangle$ là *nhóm con đầy đủ* của G đối với D , với mọi $x \in G$.

Chúng minh. Lấy x tùy ý thuộc G , tồn tại $u \in \langle D, D^x \rangle$ sao cho $D^x = D^u$; khi đó ta có $\langle D, D^x \rangle = \langle D, D^u \rangle$.

Vì $u \in \langle D, D^x \rangle$; nên $D^u \leq D^{\langle D, D^x \rangle}$; từ đó $\langle D, D^u \rangle \leq D^{\langle D, D^x \rangle}$.

Vậy $\langle D, D^x \rangle \leq D^{\langle D, D^x \rangle}$; mà $D^{\langle D, D^x \rangle} \triangleleft \langle D, D^x \rangle$; nên $\langle D, D^x \rangle = D^{\langle D, D^x \rangle}$. $\uparrow$

Chú ý 1.2. (Z.I. Borevich) Nhóm con thỏa kết luận của Nhận xét 1.1 được gọi là một nhóm con *paranormal*.

Nhận xét 1.2. Mọi nhóm con *paranormal* trong một nhóm G đều là nhóm con đa chuẩn tắc của G .

Chúng minh. Giả sử D là nhóm con paranormal trong G , với $x \in G$, $m \in \mathbb{Z}$, ta có

$$D^{x^m} \leq \langle D, D^{x^m} \rangle = D^{\langle D, D^{x^m} \rangle}, \text{ do } \langle D, D^{x^m} \rangle \text{ đầy đủ.}$$

$$\text{Mà } \langle D, D^{x^m} \rangle \leq D^{\langle x \rangle}, \text{ nên } D^{\langle D, D^{x^m} \rangle} \leq D^{D^{\langle x \rangle}}, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall x \in G.$$

$$\text{Từ đó } D^{\langle x \rangle} = \langle \dots, D^{x^{-2}}, D^{x^{-1}}, D, D^{x^1}, D^{x^2}, \dots \rangle \leq D^{D^{\langle x \rangle}}.$$

$$D^{D^{\langle x \rangle}}$$

$$D^{D^{\langle x \rangle}}$$

Hiển nhiên $\trianglelefteq D^{\langle x \rangle}$, vậy $\trianglelefteq D^{\langle x \rangle} = D^{\langle x \rangle}$, $\forall x \in G$.

Do đó $D^{\langle x \rangle}$ là nhóm con đầy đủ, $\forall x \in G$.

Theo Định lý 1.3.2 (chứng minh sau), ta có D là nhóm con đa chuẩn tắc của G .

1.3. Một số kết quả của nhóm con đa chuẩn tắc

1.3.1. Định lý. Cho G là một nhóm và $D \leq G$. Khi đó, D là một nhóm con đa chuẩn tắc của G nếu và chỉ nếu D^H là nhóm con đầy đủ của G đối với D , với mọi nhóm con trung gian H .

Chứng minh. ($\Rightarrow$) : Giả sử D là một nhóm con đa chuẩn tắc của G .

Vậy tồn tại quật $M = \{(G_\alpha, N_G(G_\alpha))\}_{\alpha \in I}$ của D , mà G_α là nhóm con đầy đủ của G đối với D , với mọi $\alpha \in I$.

Xét H là một nhóm con trung gian của G đối với D ; theo định nghĩa quật, tồn tại duy nhất chỉ số $\alpha \in I$ thỏa $G_\alpha \leq H \leq N_G(G_\alpha)$.

Vì $G_\alpha \trianglelefteq N_G(G_\alpha)$; nên $G_\alpha \trianglelefteq H$; suy ra $G_\alpha^H = G_\alpha$.

$$\text{Mà } \begin{cases} D^{G_\alpha} \leq D^H \leq G_\alpha^H \text{ (vì } D \leq G_\alpha \leq H) \\ G_\alpha = D^{G_\alpha}, \text{ do } G_\alpha \text{ là nhóm con đầy đủ của } G \text{ đối với } D \end{cases}.$$

Từ đó $G_\alpha = D^{G_\alpha} \leq D^H \leq G_\alpha^H = G_\alpha$; vậy $D^H = G_\alpha$.

Do đó D^H là nhóm con đầy đủ của G đối với D .

($\Leftarrow$) : Giả sử D^H là nhóm con đầy đủ của G đối với D , với mọi nhóm con trung gian H .

Xét họ $M = \{(G_\alpha, N_G(G_\alpha))\}_{\alpha \in I}$, với G_α là nhóm con đầy đủ của G đối với D , nhận thấy $M \neq \emptyset$; vì $(D, N_G(D)) \in M$.

Với H là một nhóm con trung gian của G đối với D , cần chứng tỏ tồn tại duy nhất chỉ số $\alpha \in I$ sao cho $G_\alpha \leq H \leq N_G(G_\alpha)$.

Thật vậy, hiển nhiên $D \leq D^H \leq G$.

Và theo giả thuyết, D^H là nhóm con đầy đủ của G đối với D .

Nên $(D^H, N_G(D^H)) \in M$, vậy tồn tại $\alpha \in I$ thỏa $G_\alpha = D^H$.

Mà D^H là nhóm con chuẩn tắc nhỏ nhất của H chứa D , vậy $G_\alpha = D^H \trianglelefteq H$.

Do đó $G_\alpha \leq H \leq N_G(G_\alpha)$, vì $N_G(G_\alpha)$ là nhóm con lớn nhất của G nhận G_α làm nhóm con chuẩn tắc.

Bây giờ, giả sử tồn tại $\beta \in I$ sao cho $G_\beta \leq H \leq N_G(G_\beta)$.

Nên $G_\beta \trianglelefteq H$ (vì $G_\beta \trianglelefteq N_G(G_\beta)$).

Vậy $G_\alpha = D^H \leq G_\beta^H = G_\beta$ (vì $D \leq G_\beta$).

Mà $\begin{cases} D^{G_\beta} \leq D^H = G_\alpha \text{ (vì } G_\beta \leq H) \\ G_\beta = D^{G_\beta}, \text{ do } G_\beta \text{ là nhóm con đầy đủ của } G \text{ đối với } D \end{cases}$.

Vậy $G_\beta = D^{G_\beta} \leq D^H = G_\alpha$.

Từ đó $G_\alpha = G_\beta$, nghĩa là $\alpha = \beta$.

Vậy với mọi H là nhóm con trung gian của G đối với D , tồn tại duy nhất chỉ số $\alpha \in I$ sao cho $G_\alpha \leq H \leq N_G(G_\alpha)$.

Nên $M = \{(G_\alpha, N_G(G_\alpha))\}_{\alpha \in I}$ là quạt của D , ở đó G_α là nhóm con đầy đủ của G đối với D , với mọi $\alpha \in I$.

Do đó D là một nhóm con đa chuẩn tắc của G . †

1.3.2. Định lý. Cho G là một nhóm và D là nhóm con của G . Khi đó, D là một nhóm con đa chuẩn tắc của G nếu và chỉ nếu $D^{\langle x \rangle}$ là nhóm con đầy đủ của G đối với D , với mọi x thuộc G .

Chứng minh. ($\Rightarrow$) : Giả sử D là một nhóm con đa chuẩn tắc của G .

Vậy D^H là nhóm con đầy đủ của G đối với D , với mọi nhóm con trung gian H (Định lý 1.3.1).

Mà $D \leq \langle x, D \rangle \leq G$, $\forall x \in G$; nên $D^{\langle x, D \rangle}$ là nhóm con đầy đủ của G đối với D , $\forall x \in G$.

Mặt khác $D^{\langle x \rangle} = D^{\langle x, D \rangle}$, $\forall x \in G$.

Do đó $D^{\langle x \rangle}$ là nhóm con đầy đủ của G đối với D , $\forall x \in G$.

($\Leftarrow$) : Giả sử $D^{\langle x \rangle}$ là nhóm con đầy đủ của G đối với D , $\forall x \in G$.

Xét họ $M = \{(G_\alpha, N_G(G_\alpha))\}_{\alpha \in I}$, với G_α là nhóm con đầy đủ của G đối với D .

Hiển nhiên $M \neq \emptyset$, vì $(D, N_G(D)) \in M$.

Lấy H là nhóm con trung gian tùy ý, cần chứng tỏ tồn tại duy nhất $\alpha \in I$ sao cho $G_\alpha \leq H \leq N_G(G_\alpha)$.

Thật vậy, ta có $D \leq D^H \leq G$ và $D^H = \langle D^x / x \in H \rangle = \langle D^{\langle x \rangle} / x \in H \rangle$.

Mà $D^{\langle x \rangle}$ là nhóm con đầy đủ của G đối với D , $\forall x \in G$.

Vậy D^H là nhóm con đầy đủ của G đối với D .

Nên $(D^H, N_G(D^H)) \in M$.

Nghĩa là tồn tại $\alpha \in I$ sao cho $G_\alpha = D^H$.

Mặt khác D^H là nhóm con chuẩn tắc nhỏ nhất của H chứa D ; nên $G_\alpha = D^H \leq H$; do đó $G_\alpha \leq H \leq N_G(G_\alpha)$.

Bây giờ, giả sử tồn tại $\beta \in I$ sao cho $G_\beta \leq H \leq N_G(G_\beta)$; vì $G_\beta \triangleleft N_G(G_\beta)$.

Nên $G_\beta \triangleleft H$

Vậy $G_\alpha = D^H \leq G_\beta^H = G_\beta$ (vì $D \leq G_\beta$).

Mà $\begin{cases} D^{G_\beta} \leq D^H = G_\alpha \text{ (vì } G_\beta \leq H) \\ G_\beta = D^{G_\beta}, \text{ do } G_\beta \text{ là nhóm con đầy đủ của } G \text{ đối với } D \end{cases}$.

Từ đó $G_\beta = D^{G_\beta} \leq D^H = G_\alpha$.

Từ đó $G_\alpha = G_\beta$, nghĩa là $\alpha = \beta$.

Vậy với mọi H là nhóm con trung gian của G đối với D , tồn tại duy nhất chỉ số $\alpha \in I$ sao cho $G_\alpha \leq H \leq N_G(G_\alpha)$.

Nên $M = \{(G_\alpha, N_G(G_\alpha))\}_{\alpha \in I}$ là quật của D , mà G_α là nhóm con đầy đủ của G đối với D , với mọi $\alpha \in I$.

Do đó D là một nhóm con đa chuẩn tắc của G .

↑



§2. NHÓM QUATERNION

2.1. Bổ đề. Cho G là một nhóm con của nhóm $GL_2(C)$ sinh bởi hai phần tử

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & b \end{pmatrix}.$$

Khi đó, ta có những điều khẳng định sau đây :

- i/ G là nhóm không Abel cấp 8.
- ii/ G có duy nhất một nhóm con cấp 2.
- iii/ Mọi nhóm con của G đều chuẩn tắc trong G .

Chứng minh. i/ Ta có

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = b^2.$$

Nên $a^4 = b^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, với 1 là ma trận đơn vị của $GL_2(C)$.

Vậy $a^3 = a^{-1}$, $b^3 = b^{-1}$;

$$\text{Suy ra } b^{-1} = b^3 = b^2 b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Do đó } b^{-1}a = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = ab.$$

Từ đó ta thấy G biểu diễn được dưới dạng các phần tử sinh và đồng nhất thức như sau

$$G = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}a = ab \rangle.$$

Vậy mỗi phần tử $x \in G$ đều được viết dưới dạng

$$x = a^\alpha b^\beta, \text{ với } 0 \leq \alpha \leq 3, 0 \leq \beta \leq 1.$$

Nên $G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

Nghĩa là $|G| = 8$.

$$\text{Mặt khác } ab = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = ba.$$

Do đó G là nhóm không Abel cấp 8.

ii/ Ta có $(a^2)^2 = 1$, nên a^2 là phần tử cấp 2 của G ;

Vậy $\langle a^2 \rangle$ là nhóm con cấp 2 của G .

Mặt khác :

a, b là phần tử cấp 4 của G ;

a^3 là phần tử cấp 4 của G ; vì $(a^3)^2 = a^2 \neq 1$, $(a^3)^3 = a \neq 1$, $(a^3)^4 = 1$.

ab là phần tử cấp 4 của G ; vì $(ab)^2 = a^2 \neq 1$, $(ab)^3 = a^2ab = a^3b \neq 1$, $(ab)^4 = (a^2)^2 = a^4 = 1$.

a^2b là phần tử cấp 4 của G ; vì $(a^2b)^2 = a^2ba^2b = a^2b^4 = a^2 \neq 1$, $(a^2b)^3 = a^2(a^2b) = b \neq 1$, $(a^2b)^4 = a^4 = 1$.

a^3b là phần tử cấp 4 của G ; vì $(a^3b)^2 = a^3ba^3b = a^2b^{-1}aa^3b = a^2 \neq 1$, $(a^3b)^3 = a^2a^3b = ab \neq 1$, $(a^3b)^4 = a^4 = 1$.

Do đó $\langle a^2 \rangle$ là nhóm con cấp 2 duy nhất của G .

iii/ Lấy H là một nhóm con tùy ý của G .

Vì $|G| = 8$, theo Định lý Lagrange, ta có $|H| = 1, 2, 4, 8$.

Trường hợp $|H| = 1$ hoặc $|H| = 8$, hiển nhiên $H \trianglelefteq G$.

Trường hợp $|H| = 2$; vậy $|H^x| = 2$, với mọi $x \in G$, vì H^x là nhóm con liên hợp với H trong G ; nên $H^x = H$, với mọi $x \in G$, do G có duy nhất nhóm con cấp 2; suy ra $H \trianglelefteq G$.

Trường hợp $|H| = 4$; Theo Định lý Lagrange, ta có $[G : H] = 2$; kéo theo $H \trianglelefteq G$.

Do đó mọi nhóm con của G đều chuẩn tắc trong G .

↑

2.2. Định nghĩa. Nhóm nói tới trong Bổ đề 2.1 được gọi là *nhóm Quaternion* và ký hiệu Q_8 .



§3. NHÓM GIẢI ĐƯỢC

3.1. Nhóm con đặc trưng

3.1.1. Định nghĩa. Cho G là một nhóm. Khi đó, ta nói đẳng cấu từ G vào G là *tự đẳng cấu của G* ; tập hợp các tự đẳng cấu của G ký hiệu $\text{Aut } G$ (kiểm tra được $\text{Aut } G$ là nhóm với phép nhân đồng cấu). Nhóm con H của G được gọi là *nhóm con đặc trưng* của G , ký hiệu $H \text{ char } G$, nếu $\varphi(H) = H$, với mọi φ thuộc $\text{Aut } G$.

Ví dụ 3.1. Từ Bổ đề 2.1 ii/, ta có $\langle a^2 \rangle \text{ char } Q_8$.

3.1.2. Mệnh đề. Cho G là một nhóm, H là một nhóm con của G . Khi đó, ta có những điều khẳng định sau đây :

i/ Nếu $\varphi(H) \leq H, \forall \varphi \in \text{Aut } G$ thì $H \text{ char } G$.

ii/ Nếu $H \text{ char } G$ thì $H \trianglelefteq G$.

iii/ Nếu $H \text{ char } K$ và $K \text{ char } G$ thì $H \text{ char } G$, với K là nhóm con trung gian cho trước.

iv/ Nếu $H \text{ char } G$ và $K/H \text{ char } G/H$ thì $K \text{ char } G$, với K là nhóm con trung gian cho trước.

Chứng minh. (Xem [1], Tr 43, 44). †

Từ Mệnh đề 3.1.2 i/, thu được

Nhận xét 3.1. Cho G là một nhóm. Khi đó $[G, G] \text{ char } G$, vậy $[G, G] \trianglelefteq G$;

vì $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)], \forall \varphi \in \text{Aut } G, \forall a, b \in G$.

3.2. Về nhóm hoán vị bậc n

Khái niệm sau là khá quen biết nên không nêu định nghĩa; đó là *nhóm hoán vị bậc n* , ký hiệu S_n ; và *nhóm thay phiên bậc n* (tập các hoán vị chẵn trong S_n), ký hiệu A_n ; ở đây trình bày một kết quả mà trong Luận văn sẽ vận dụng.

Mệnh đề. Ta có hai điều khẳng định sau đây :

i/ A_n sinh bởi các 3 - chu trình, $\forall n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 3$.

ii/ $[S_n, S_n] = A_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Chứng minh. i/ Lấy $\delta \in A_n$, vậy δ là hoán vị chẵn.

Nên δ được biểu diễn thành tích của một số chẵn các chuyển vị.

Xét $(i j), (k l)$ là hai chuyển vị độc lập, với $i, j, k, l = \overline{1, n}$ và khác nhau từng đôi một; khi đó $(i j)(k l) = (i k j)(i l j)(i j k)(i j l)$.

Xét hai chuyển vị không độc lập; chẳng hạn $(i j), (i k)$, với $i, j, k = \overline{1, n}$ và khác nhau từng đôi một; ta có $(i j)(i k) = (i k j)$.

Từ đó A_n sinh bởi các 3 - chu trình.

ii/ Khi $n = 1$ hoặc $n = 2$ ta có điều phải chứng minh.

Xét trường hợp $n \geq 3$

Lấy δ, τ thuộc S_n , vậy $\text{sgn}([\delta, \tau]) = \text{sgn}(\delta^{-1}\tau^{-1}\delta\tau) = (\text{sgn}\delta)^2(\text{sgn}\tau)^2 = 1$.

Từ đó $[\delta, \tau] \in A_n, \forall \delta, \tau \in S_n$.

Nên $[S_n, S_n] \leq A_n$.

Mặt khác với $(i j k)$ là một 3 - chu trình trong S_n , ta có

$$(i j k) = (i j)(i k)(i j)(i k) = (i j)^{-1}(i k)^{-1}(i j)(i k) = [(i j), (i k)].$$

Vậy $(i j k) \in [S_n, S_n]$;

Nghĩa là $A_n \leq [S_n, S_n]$.

Do đó $[S_n, S_n] = A_n$.

†

3.3. Khái niệm nhóm giải được

3.3.1. Định nghĩa. Cho G là một nhóm. Khi đó, dãy các nhóm con

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n = 1$$

được gọi là *một dãy chuẩn tắc* nếu $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$, với mọi $i = \overline{1, n}$.

3.3.2. Định nghĩa. Cho nhóm G có dãy chuẩn tắc là

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n = 1 \quad (1)$$

Khi đó, (1) được gọi là *dãy Abel* nếu G_{i-1} / G_i là nhóm Abel, với mọi $i = \overline{1, n}$.

3.3.3. Định nghĩa. Nhóm G được gọi là *nhóm giải được* nếu G có dãy Abel.

Ví dụ 3.2. Mọi nhóm Abel là nhóm giải được (dãy Abel là $G \geq 1$).

Ví dụ 3.3. S_4 là nhóm giải được không Abel.

Chứng minh. Xét tập con của S_4 là $V_4 = \{1, (1 2)(3 4), (1 3)(2 4), (1 4)(2 3)\}$.

Đặt $a = (1 2)(3 4), b = (1 3)(2 4), c = (1 4)(2 3)$.

Kiểm tra được bảng nhân của V_4 như sau

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

Vậy V_4 là nhóm Abel cấp 4.

Hiển nhiên $V_4 \leq A_4$ (các phần tử đều là hoán vị chẵn),

Từ đó ta có dãy $S_4 \geq A_4 \geq V_4 \geq 1$ (2)

Ta sẽ chứng tỏ (2) là dãy chuẩn tắc

Thật vậy $A_4 \trianglelefteq S_4$ (vì $[S_n : A_n] = 2$).

Ta có $V_4 \trianglelefteq S_4$

(Vì với mọi $(i j) \in S_4, \forall \delta \in S_4$, với mọi $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, khi đó

$$\delta^{-1}(i j)\delta(k) = \begin{cases} k, & \text{nếu } \delta(k) \neq i \text{ và } \delta(k) \neq j. \\ \delta^{-1}(j), & \text{nếu } \delta(k) = i. \\ \delta^{-1}(i), & \text{nếu } \delta(k) = j. \end{cases}$$

Nên $\delta^{-1}(i j)\delta = (\delta^{-1}(i) \delta^{-1}(j))$.

Vậy $\delta^{-1}a\delta = \delta^{-1}(1 2)(3 4)\delta = \delta^{-1}(1 2)\delta \delta^{-1}(3 4)\delta =$
 $= (\delta^{-1}(1) \delta^{-1}(2)) (\delta^{-1}(3) \delta^{-1}(4)) \in V_4$, do δ^{-1} là song ánh.

Tương tự $\delta^{-1}b\delta, \delta^{-1}c\delta \in V_4, \forall \delta \in S_4$.

Do đó $V_4 \trianglelefteq S_4$.

Từ đó $V_4 \trianglelefteq A_4$.

Do đó (2) là dãy chuẩn tắc.

Đến đây, ta chứng minh (2) là dãy Abel

Thật vậy, $|S_4| = 4! = 24, |A_4| = 12$.

Theo Định lý Lagrange $|S_4 / A_4| = 2$ (nguyên tố).

Nên S_4 / A_4 là nhóm Abel.

Tương tự A_4 / V_4 là nhóm Abel.

Hiển nhiên $V_4 / 1$ là nhóm Abel.

Vậy (2) là dãy Abel.

Từ đó S_4 là một nhóm giải được.

Tuy nhiên S_4 không Abel (vì $(1 2)(1 3) = (1 3 2) \neq (1 2 3) = (1 3)(1 2)$).

Do đó S_4 là một nhóm giải được không Abel. ↑

Chú ý 3.1. V_4 được gọi là *nhóm Klein*.

Chú ý 3.2. S_3 là một nhóm giải được không Abel (với $S_3 \geq A_3 \geq 1$ là dãy Abel của S_3).

3.4. Bậc của nhóm giải được

3.4.1. Định nghĩa. Cho G là một nhóm. Ký hiệu :

$$G^{(0)} = G;$$

$$G^{(1)} = [G^{(0)}, G^{(0)}] \text{ (Nhóm con hoán tử của } G^{(0)} \text{)};$$

$$G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \text{ (Nhóm con hoán tử của } G^{(i-1)} \text{)}, i \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\text{Khi đó, ta nói dãy dẫn xuất của } G \text{ là } G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots \quad (3)$$

Chú ý 3.3. $G^{(1)} = [G^{(0)}, G^{(0)}]$ thường được ký hiệu $G' = [G, G]$.

3.4.2. Mệnh đề. Cho G là một nhóm. Khi đó $G^{(i)} \text{ char } G, \forall i \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Quy nạp theo i

Hiển nhiên $G^{(0)} = G \text{ char } G$.

Giả sử $G^{(i)} \text{ char } G$.

Ta có $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$.

Lấy φ tùy ý thuộc $\text{Aut } G^{(i)}$, với mọi a, b thuộc $G^{(i)}$ khi đó

$$\varphi([a, b]) = (\varphi(a))^{-1}(\varphi(b))^{-1}\varphi(a)\varphi(b) = [\varphi(a), \varphi(b)] \in [G^{(i)}, G^{(i)}] = G^{(i+1)}.$$

Nên $\varphi(G^{(i+1)}) = \varphi([G^{(i)}, G^{(i)}]) \leq G^{(i+1)}$.

Áp dụng Mệnh đề 3.1.2 ta có $G^{(i+1)} \text{ char } G^{(i)}$.

Mà $G^{(i)} \text{ char } G$ (giả thuyết quy nạp).

Vậy $G^{(i+1)} \text{ char } G$ (Mệnh đề 3.1.2).

Theo nguyên lý quy nạp $G^{(i)} \text{ char } G, \forall i \in \mathbb{N}$. †

Nhận xét 3.2. Ta có các khẳng định sau :

$$\text{i/ } G^{(i)} \trianglelefteq G, \forall i \in \mathbb{N}.$$

$$\text{ii/ } G^{(i+1)} \trianglelefteq G^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

$$\text{iii/ } G^{(i)} / G^{(i+1)} \text{ là Abel, } \forall i \in \mathbb{N}.$$

3.4.3. Mệnh đề. Cho G là một nhóm giải được và có dãy Abel là

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n = 1.$$

Gọi dãy dẫn xuất của G là $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$

Khi đó, $G^{(i)} \leq G_i, \forall i \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Quy nạp theo i

Hiển nhiên $G_0 = G = G^{(0)}$.

Giả sử $G^{(i)} \leq G_i$, với $i \in \mathbb{N}$.

Vậy $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \leq [G_i, G_i]$.

Mặt khác G_i / G_{i+1} là Abel.

Nên $x_i y_i G_{i+1} = y_i x_i G_{i+1}$, $\forall x_i, y_i \in G_i$.

Vậy $x_i^{-1} y_i^{-1} x_i y_i \in G_{i+1}$, $\forall x_i, y_i \in G_i$.

Nghĩa là $[x_i, y_i] \in G_{i+1}$, $\forall x_i, y_i \in G_i$.

Do đó $[G_i, G_i] \leq G_{i+1}$.

Từ đó $G^{(i+1)} \leq G_{i+1}$. ↑

3.4.4. Định lý. Cho G là một nhóm. Khi đó G là nhóm giải được nếu và chỉ nếu dãy dẫn xuất của G là dừng, nghĩa là tồn tại số tự nhiên n trong dãy (3) sao cho $G^{(n)} = 1$.

Chứng minh. Xét dãy dẫn xuất của G là $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$

($\Rightarrow$) : Giả sử G là một nhóm giải được.

Vậy G có dãy Abel là $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n = 1$.

Áp dụng Mệnh đề 3.4.3 ta có $G^{(n)} \leq G_n = 1$.

Do đó $G^{(n)} = 1$.

($\Leftarrow$) : Giả sử $G^{(n)} = 1$,

Từ Nhận xét 3.2, ta có $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq \dots \geq G^{(n)} = 1$ là một dãy Abel của G .

Do đó G là một nhóm giải được. ↑

3.4.5. Định nghĩa. Cho G là một nhóm giải được, số n nhỏ nhất ở (3) sao cho $G^{(n)} = 1$ được gọi là *bậc giải được* của nhóm G .

Ví dụ 3.4. Mọi nhóm Abel khác 1 có bậc giải được bằng 1.

3.5. Nhóm Metabelian

3.5.1. Định nghĩa. Nhóm G được gọi là nhóm *Metabelian* nếu $G' = [G, G]$ là nhóm Abel.

Ví dụ 3.5. Mọi nhóm Abel đều là nhóm Metabelian.

Ví dụ 3.6. S_3 là nhóm Metabelian không Abel (vì theo Mệnh đề 3.2 ta có $[S_3, S_3] = A_3$, mà $A_3 = \{1, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ là một nhóm Abel).

Nhận xét 3.3. Ta có hai điều khẳng định sau :

i/ Cho G là một nhóm Metabelian, khi đó G là nhóm giải được (dãy Abel của G là $G \geq G' = [G, G] \geq 1$).

ii/ Mọi nhóm Metabelian không Abel đều có bậc giải được bằng 2.

Chú ý 3.4. Nhóm giải được có thể không là Metabelian.

Phản ví dụ sau đây, minh họa cho vấn đề này :

3.5.2. Phản ví dụ. S_4 là một nhóm giải được không là Metabelian.

Chứng minh. Theo Ví dụ 3.3, ta có S_4 là một nhóm giải được.

Mặt khác $[S_4, S_4] = A_4$ (Mệnh đề 3.2).

Với $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 4) \in A_4$, nhận thấy $ab = (2\ 3\ 4) \neq (1\ 2\ 4) = ba$.

Vậy $[S_4, S_4]$ không Abel;

Nên S_4 không là Metabelian.

†



§4. NHÓM LŨY LINH

4.1. Khái niệm nhóm lũy linh

4.1.1. Bổ đề. Cho G là một nhóm. Xét dãy các tập con của G được định nghĩa bằng quy nạp như sau :

$$\xi_0(G) = 1, \xi_{n+1}(G) = \{x \in G / [x, y] \in \xi_n(G), \forall y \in G\}, n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, ta có những điều khẳng định sau đây :

- i/ $\xi_n(G) \leq G, \forall n \in \mathbb{N}.$
- ii/ $1 = \xi_0(G) \leq \xi_1(G) \leq \dots \leq \xi_n(G) \leq \dots$ (4)
- iii/ $\xi_n(G) \trianglelefteq G, \forall n \in \mathbb{N}.$

Chứng minh. i/ Quy nạp theo n

Hiển nhiên $\xi_0(G) = 1 \leq G.$

Giả sử $\xi_k(G) \leq G, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n.$

Nhận thấy $\xi_{n+1}(G) \neq \emptyset$ (vì $1 \in \xi_{n+1}(G)$ (do $[1, y] = 1 \in \xi_n(G), \forall y \in G$).

Lấy a, b tùy ý thuộc $\xi_{n+1}(G)$, với y tùy ý thuộc G , ta có

$$\begin{aligned} [ab^{-1}, y] &= ba^{-1}y^{-1}ab^{-1}y = b(a^{-1}y^{-1}ay)y^{-1}b^{-1}y = b[a, y](y^{-1}b^{-1}yb)b^{-1} \\ &= b[a, y][y, b]b^{-1} = (b[a, y]b^{-1}[a, y]^{-1})[a, y]b[y, b]b^{-1} \\ &= [b^{-1}, [a, y]^{-1}][a, y][y, b]([y, b]^{-1}b[y, b]b^{-1}) \\ &= [b^{-1}, [a, y]^{-1}][a, y][y, b][[y, b], b^{-1}] \\ &= [[a, y]^{-1}, b^{-1}]^{-1}[a, y][b, y]^{-1}[[b, y]^{-1}, b^{-1}] \in \xi_n(G) \end{aligned}$$

(vì $[u, v][v, u] = 1$ khi và chỉ khi $[v, u] = [u, v]^{-1}, \forall u, v \in G$).

Vậy $ab^{-1} \in \xi_{n+1}(G), \forall a, b \in G.$

Nên $\xi_{n+1}(G) \leq G.$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

ii/ Hiển nhiên $\xi_n(G) \subseteq \xi_{n+1}(G), \forall n \in \mathbb{N}$ Kết hợp với i/, ta có

$$\xi_0(G) = 1 \leq \xi_1(G) \leq \dots \leq \xi_n(G) \leq \xi_{n+1}(G) \leq \dots$$

iii/ Quy nạp theo n

Hiển nhiên $\xi_0(G) = 1 \trianglelefteq G.$

Giả sử $\xi_k(G) \trianglelefteq G, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n.$

Lấy a tùy ý thuộc $\xi_{n+1}(G)$, với b, y tùy ý thuộc G , khi đó

$$[a^b, y] = [b^{-1}ab, y] = b^{-1}a^{-1}by^{-1}b^{-1}aby = b^{-1}(a^{-1}bab^{-1})ba^{-1}y^{-1}b^{-1}aby =$$

$$\begin{aligned}
&= (b^{-1}[a, b^{-1}]b)(a^{-1}y^{-1}ay)y^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)y \\
&= [a, b^{-1}]^b[a, y](y^{-1}[a, b]y) \\
&= [a, b^{-1}]^b[a, y][a, b]^y \in \xi_n(G).
\end{aligned}$$

Vậy $a^b \in \xi_{n+1}(G)$, $\forall a \in \xi_{n+1}(G)$, $\forall b \in G$.

Nên $\xi_{n+1}(G) \trianglelefteq G$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh. †

Chú ý 4.1. $\xi_1(G) = Z(G)$.

Nhận xét 4.1. $\xi_0(G) = 1 \trianglelefteq \xi_1(G) \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \xi_n(G) \trianglelefteq \xi_{n+1}(G) \trianglelefteq \dots$

4.1.2. Định nghĩa. Cho G là một nhóm; dãy (4) trình bày trong Bổ đề 4.1.1 được gọi là *dãy tâm trên* của G .

Ví dụ 4.1. Nhóm Abel G có dãy tâm trên là $\xi_0(G) = 1 \leq \xi_1(G) = G$.

4.1.3. Mệnh đề. Cho một nhóm G có dãy tâm trên là (4) (Bổ đề 4.1.1), khi đó $\xi_n(G)$ là nhóm con đặc trưng của G , $\forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Quy nạp theo n

Hiển nhiên $\xi_0(G) = 1 \text{ char } G$.

Giả sử $\xi_k(G) \text{ char } G$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

Ta có $\xi_n(G) \trianglelefteq G$ và $\xi_n(G) \trianglelefteq \xi_n(G)$.

Nên $Z(G / \xi_n(G)) = \xi_{n+1}(G) / \xi_n(G)$

(vì $\forall \bar{a} = a\xi_n(G) \in G / \xi_n(G)$ (với $a \in G$), ta có :

$$\bar{a} = a\xi_n(G) \in Z(G / \xi_n(G))$$

$$\Leftrightarrow \bar{a}\bar{u} = \bar{u}\bar{a}, \forall \bar{u} = u\xi_n(G) \in G / \xi_n(G), \text{ với } u \in G$$

$$\Leftrightarrow \bar{a}^{-1}\bar{u}^{-1}\bar{a}\bar{u} = \bar{1} = \xi_n(G), \forall u \in G$$

$$\Leftrightarrow [\bar{a}, \bar{u}] = \bar{1}, \forall u \in G$$

$$\Leftrightarrow \overline{[a, u]} = [a, u]\xi_n(G) = \bar{1}, \forall u \in G; \text{ do } [\bar{a}, \bar{u}] = a^{-1}b^{-1}ab\xi_n(G) = \overline{a^{-1}b^{-1}ab} = \overline{[a, u]}$$

$$\Leftrightarrow [a, u] \in \xi_n(G), \forall u \in G$$

$$\Leftrightarrow a \in \xi_{n+1}(G)$$

$$\Leftrightarrow \bar{a} = a\xi_n(G) \in \xi_{n+1}(G) / \xi_n(G).$$

Hiển nhiên $Z(G / \xi_n(G)) \text{ char } G / \xi_n(G)$.

Từ đó $\xi_{n+1}(G) / \xi_n(G) \text{ char } G / \xi_n(G)$.

Mặt khác theo Bổ đề 4.1.1, ta có $\xi_n(G) \leq \xi_{n+1}(G) \leq G$.

Mà $\xi_n(G) \text{ char } G$ (giả thuyết quy nạp).

Vậy $\xi_{n+1}(G) \text{ char } G$ (Mệnh đề 3.1.2).

Theo nguyên lý quy nạp, đi đến điều phải chứng minh. $\uparrow$

Nhận xét 4.2. Từ chứng minh trên, thu được hai điều khẳng định sau :

i/ $\xi_{n+1}(G) / \xi_n(G) = Z(G / \xi_n(G))$, $\forall n \in N$.

ii/ $\xi_{n+1}(G) / \xi_n(G)$ là Abel, $\forall n \in N$.

4.1.4. Định nghĩa. Cho nhóm G có dãy tâm trên là (4), trong Bổ đề 4.1.1. Khi đó, G gọi là *một nhóm lũy linh* nếu tồn tại số tự nhiên n sao cho $\xi_n(G) = G$.

Ví dụ 4.2. Mọi nhóm Abel đều là nhóm lũy linh, dãy tâm trên của nhóm Abel trình bày Ví dụ 4.1.

Chú ý 4.2. Tồn tại nhóm lũy linh không Abel, chẳng hạn như nhóm Q_8 , vì Q_8 là một 2 - nhóm, theo Định lý 4.3.2 (chứng minh sau), ta có Q_8 là lũy linh.

Nhận xét 4.3. Mọi nhóm lũy linh đều là nhóm giải được, khi đó dãy tâm trên trở thành dãy Abel.

Chú ý 4.3. Tồn tại nhóm giải được không lũy linh, chẳng hạn như S_3, S_4 .

Chứng minh. Theo chú ý 3.2, ta có S_3 là nhóm giải được; S_3 không lũy linh được chứng minh (bằng phương pháp kiểm tra $Z(S_3) = 1$) tương tự như S_4 .

Từ Ví dụ 3.3, nhận thấy S_4 là nhóm giải được.

Sau đây, chứng tỏ S_4 không lũy linh, bằng phương pháp kiểm tra để khẳng định $Z(S_4) = 1$.

Thật vậy,

$$\begin{aligned} S_4 = \{ & 1, (1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), \\ & (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), \\ & (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), \\ & (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2) \}. \end{aligned}$$

Vì $(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3) \neq (1\ 3) = (1\ 2\ 3)(1\ 2) (*)$, nên $(1\ 2) \notin Z(S_4)$.

Tương tự $(1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4) \notin Z(S_4)$.

Và $(*)$ khẳng định $(1\ 2\ 3) \notin Z(S_4)$.

Tương tự $(1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3) \notin Z(S_4)$.

Ta có $(1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 4) \neq (1\ 3) = (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2)(3\ 4)$ (**).

Vậy $(1\ 2)(3\ 4) \notin Z(S_4)$, tương tự $(1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3) \notin Z(S_4)$.

Và (**) khẳng định $(1\ 2\ 3\ 4) \notin Z(S_4)$.

Tương tự $(1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2) \notin Z(S_4)$.

Từ đó $Z(S_4) = 1$, suy ra $\xi_1(S_4) = 1$.

Vậy S_4 có dãy tâm trên là $\xi_0(S_4) = 1 = \xi_1(S_4) = \dots = \xi_n(S_4) = \dots$

Do đó S_4 không là một nhóm lũy linh. †

4.2. Lớp của nhóm lũy linh

4.2.1. Bổ đề. Cho G là một nhóm. Xét dãy các nhóm con của G được định nghĩa bằng quy nạp

$$Y_0(G) = G, Y_{n+1}(G) = [Y_n(G), G], n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, ta có hai điều khẳng định sau đây :

- i/ $G = Y_0(G) \geq Y_1(G) \geq \dots \geq Y_n(G) \geq \dots$
 - ii/ $Y_n(G)$ là một nhóm con đặc trưng của G , với mọi $n \in \mathbb{N}$.
- (5)

Chứng minh. i/ Quy nạp theo n .

Hiển nhiên $Y_1(G) = [G, G] = G' \leq G = Y_0(G)$.

Giả sử $Y_{n+1}(G) \leq Y_n(G)$.

Khi đó $Y_{n+2}(G) = [Y_{n+1}(G), G] \leq [Y_n(G), G] = Y_{n+1}(G)$.

ii/ Quy nạp theo n .

Hiển nhiên $Y_0(G) = G \text{ char } G$.

Giả sử $Y_n(G) \text{ char } G$.

Tức là $\varphi(Y_n(G)) = Y_n(G), \forall \varphi \in \text{Aut}(G)$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \varphi(Y_{n+1}(G)) &= \varphi[Y_n(G), G] = [\varphi(Y_n(G)), \varphi(G)] \\ &= [Y_n(G), G] = Y_{n+1}(G), \text{ với mọi } \varphi \in \text{Aut}(G). \end{aligned}$$

Nên $Y_{n+1}(G) \text{ char } G$. †

Nhận xét 4.4. Từ kết quả trên, thu được bốn kết quả sau :

$$\text{i/ } Y_1(G) = [G, G] = G'.$$

ii/ $\gamma_n(G) \trianglelefteq G, \forall n \in N$, vì mọi nhóm con đặc trưng của một nhóm G đều chuẩn tắc trong G .

iii/ $\gamma_{n+1}(G) \trianglelefteq \gamma_n(G), \forall n \in N$.

iv/ $\gamma_n(G) / \gamma_{n+1}(G) \leq Z(G / \gamma_{n+1}(G))$, vì với mọi x thuộc $\gamma_n(G)$, với mọi y thuộc G ta có $[x, y] \in [\gamma_n(G), G] = \gamma_{n+1}(G)$; nên $x^{-1}y^{-1}xy \in \gamma_{n+1}(G)$; do đó $xy\gamma_{n+1}(G) = yx\gamma_{n+1}(G)$.

4.2.2. Định nghĩa. Cho G là một nhóm. Khi đó, dãy (5) trình bày trong Bổ đề 4.2.1 được gọi là *dãy tâm dưới* của G .

Ví dụ 4.3. Nhóm Abel G có dãy tâm dưới là $G = \gamma_0(G) \geq \gamma_1(G) = 1$.

4.2.3. Định nghĩa. Cho G là một nhóm lũy linh có dãy tâm trên là (4) (Bổ đề 4.1.1), gọi n là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa $\xi_n(G) = G$. Khi đó, n được gọi là *lớp của nhóm lũy linh G* .

Ví dụ 4.4. Mọi nhóm Abel đều là nhóm lũy linh có lớp bằng 1 (Ví dụ 4.1).

4.2.4. Định lý. Cho G là một nhóm có dãy tâm trên là (4), trong Bổ đề 4.1.1 và có dãy tâm dưới là (5), trong Bổ đề 4.2.1; giả sử tồn tại số tự nhiên n sao cho $\xi_n(G) = G$ hoặc $\gamma_n(G) = 1$. Khi đó $\gamma_i(G) \leq \xi_{n-i}(G)$, với mọi $i \in N, i \leq n$.

Chứng minh. Giả sử $\xi_n(G) = G$.

Với giả thuyết $\xi_n(G) = G$, chứng minh quy nạp theo i .

Hiển nhiên $\gamma_0(G) = G = \xi_n(G)$.

Giả sử $\gamma_i(G) \leq \xi_{n-i}(G)$, với $i \in N, i \leq n - 1$.

Ta có $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \leq [\xi_{n-i}(G), G] \leq \xi_{n-i-1}(G)$ (vì $[x, y] \in \xi_{n-i-1}(G)$, với mọi $x \in \xi_{n-i}(G)$, với mọi $y \in G$).

Vậy có được điều phải chứng minh.

Với giả thuyết $\gamma_n(G) = 1$, chứng minh quy nạp lùi theo i (tức là quy nạp theo $n - i$).

Hiển nhiên $\gamma_n(G) = 1 = \xi_0(G)$.

Giả sử $\gamma_{n-i}(G) \leq \xi_i(G)$, với $i \in N, 1 \leq i \leq n$.

Xét ánh xạ $f: G / \gamma_{n-i}(G) \rightarrow G / \xi_i(G)$

$$x\gamma_{n-i}(G) \rightarrow f(x\gamma_{n-i}(G)) = x\xi_i(G) \quad (x \in G).$$

Kiểm tra được f là toàn cấu.

Từ nhận xét 4.4 iv/, ta có

$$f(\gamma_{n-i-1}(G) / \gamma_{n-i}(G)) \leq f(Z(G / \gamma_{n-i}(G))) = Z(f(G / \gamma_{n-i}(G))) =$$

$$= Z(G / \xi_i(G)) = \xi_{i+1}(G) / \xi_i(G) \text{ (Nhận xét 4.2i/)}.$$

$$\text{Mà } f(Y_{n-i-1}(G) / Y_{n-i}(G)) = Y_{n-i-1}(G)\xi_i(G) / \xi_i(G).$$

$$\text{Vậy } Y_{n-i-1}(G)\xi_i(G) / \xi_i(G) \leq \xi_{i+1}(G) / \xi_i(G).$$

$$\text{Nên } Y_{n-i-1}(G)\xi_i(G) \leq \xi_{i+1}(G).$$

$$\text{Hơn nữa } Y_{n-i-1}(G) \leq Y_{n-i}(G)\xi_i(G).$$

$$\text{Từ đó } Y_{n-i-1}(G) \leq \xi_{i+1}(G).$$

Theo nguyên lý quy nạp, đi đến điều phải chứng minh. $\uparrow$

4.2.5. Định lý. Cho G là một nhóm có dãy tâm dưới là (5), trong Bổ đề 4.2.1. Khi đó G là một nhóm lũy linh lớp n nếu và chỉ nếu $Y_n(G) = 1$ và $Y_{n-1}(G) \neq 1$.

Chứng minh. Dãy tâm dưới của G là $G = Y_0(G) \geq Y_1(G) \geq \dots \geq Y_i(G) \geq \dots$

($\Rightarrow$) : Giả sử G là một nhóm lũy linh lớp n , có dãy tâm trên của G là

$$1 = \xi_0(G) \leq \xi_1(G) \leq \dots \leq \xi_n(G) = G, \text{ với } \xi_{n-1}(G) \neq G.$$

Theo Định lý 4.2.4, ta có $Y_n(G) \leq \xi_0(G) = 1$, vậy $Y_n(G) = 1$.

$$\text{Và } Y_{n-1}(G) \leq \xi_1(G) \leq \xi_{n-1}(G) \neq 1.$$

($\Leftarrow$) : Giả sử $Y_n(G) = 1$ và $Y_{n-1}(G) \neq 1$,

Áp dụng Định lý 4.2.4, ta có $G = Y_0(G) \leq \xi_n(G)$; nên $\xi_n(G) = G$.

Và $\xi_{n-1}(G) \neq G$ (vì giả sử $\xi_{n-1}(G) = G$, tương tự ta có $Y_{n-1}(G) = 1$, điều này mâu thuẫn với $Y_{n-1}(G) \neq 1$).

Do đó G là một nhóm lũy linh lớp n . $\uparrow$

4.3. Một số kết quả của nhóm lũy linh

4.3.1. Định lý. Ta có hai điều khẳng định sau :

i/ Mọi nhóm con của một nhóm lũy linh lớp n là nhóm lũy linh có lớp không vượt quá n .

ii/ Mọi nhóm thương của một nhóm lũy linh lớp n là nhóm lũy linh có lớp không vượt quá n .

Chứng minh. Giả sử G là nhóm lũy linh lớp n và H là một nhóm con của G .

Theo Định lý 4.2.5, ta có $Y_n(G) = 1$ (với $Y_{n-1}(G) \neq 1$).

i/ Chứng tỏ $Y_i(H) \leq Y_i(G)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, bằng quy nạp theo i .

$$\text{Hiển nhiên } Y_0(H) = H \leq G = Y_0(G).$$

Giả sử $Y_i(H) \leq Y_i(G)$, với $i \in \mathbb{N}$.

Vậy $\Upsilon_{i+1}(H) = [\Upsilon_i(H), H] \leq [\Upsilon_i(G), G] = \Upsilon_{i+1}(G)$.

Từ đó $\Upsilon_n(H) \leq \Upsilon_n(G) = 1$.

Do đó H là nhóm lũy linh có lớp không vượt quá n .

ii/ Giả sử $H \triangleleft G$.

Xét toàn cầu $f: G \rightarrow G/H$
 $x \rightarrow f(x) = xH$

Chúng ta $\Upsilon_i(G/H) \leq f(\Upsilon_i(G))$, với mọi $i \in \mathbb{N}$, bằng quy nạp theo i

Hiển nhiên $\Upsilon_0(G/H) = G/H = f(G) = f(\Upsilon_0(G))$.

Giả sử $\Upsilon_i(G/H) \leq f(\Upsilon_i(G))$, với $i \in \mathbb{N}$.

Từ đó $\Upsilon_{i+1}(G/H) = [\Upsilon_i(G/H), G/H] \leq [f(\Upsilon_i(G)), f(G)] = [\Upsilon_i(G), G] =$
 $= f(\Upsilon_{i+1}(G)).$

Vậy $\Upsilon_{i+1}(G/H) \leq f(\Upsilon_{i+1}(G))$.

Nghĩa là $\Upsilon_n(G/H) \leq f(\Upsilon_n(G)) = f(1) = 1$.

Do đó G/H là nhóm lũy linh có lớp không vượt quá n . †

4.3.2. Định lý. Mọi p - nhóm hữu hạn đều là nhóm lũy linh.

Chứng minh. Xét G là một p - nhóm hữu hạn, và có dãy tâm trên

$$1 = \xi_0(G) \leq \xi_1(G) \leq \dots \leq \xi_n(G) \leq \dots$$

Giả sử $\xi_n(G) \leq G$ và $\xi_n(G) \neq G$.

Khi đó $G / \xi_n(G) \neq 1$;

Mà $G / \xi_n(G)$ là một p - nhóm hữu hạn.

Vậy $Z(G / \xi_n(G)) \neq 1$.

Mặt khác $Z(G / \xi_n(G)) = \xi_{n+1}(G) / \xi_n(G)$.

Nên $\xi_{n+1}(G) / \xi_n(G) \neq 1$.

Từ đó $\xi_{n+1}(G) \neq \xi_n(G)$.

Vậy $\xi_n(G) \leq \xi_{n+1}(G)$ và $\xi_n(G) \neq \xi_{n+1}(G)$.

Vì G là hữu hạn, nên tồn tại n sao cho $\xi_n(G) = G$.

Do đó G là một nhóm lũy linh.

4.3.3. Định nghĩa. Nhóm con H của một nhóm G được gọi là một nhóm con *á chuẩn tắc* (*subnormal*) trong G nếu tồn tại dãy nhóm con của G thỏa :

$$H \triangleleft H_1 \triangleleft H_2 \triangleleft \dots \triangleleft H_n \triangleleft G.$$

Ví dụ 4.5. Trong S_4 , xét $H = \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle$; từ Ví dụ 3.3 suy ra :

$$\trianglelefteq \quad \not\trianglelefteq \quad \not\trianglelefteq \quad A_4 \quad S_4.$$

Vậy H là một nhóm con á chuẩn tắc trong S_4 (nhưng H không chuẩn tắc trong S_4 ; vì $(1\ 2)(3\ 4)^{(2\ 3)} = (1\ 3)(2\ 4) \notin H$).

4.3.4. Định lý. Cho G là một nhóm lũy linh và H là một nhóm con của G , khi đó H là một nhóm con á chuẩn tắc trong G .

Chứng minh. Vì G là một nhóm lũy linh, nên tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để dãy tâm trên của G có dạng $\xi_0(G) = 1 \leq \xi_1(G) \leq \dots \leq \xi_n(G) = G$.

Mà $\xi_i(G) \trianglelefteq G, \forall i \in \mathbb{N}, i \leq n$.

Vậy $H\xi_i(G) \leq G, \forall i \in \mathbb{N}, i \leq n$ (do $H \leq G$).

Hiển nhiên $H\xi_i(G) \subseteq H\xi_{i+1}(G), \forall i \in \mathbb{N}, i \leq n - 1$.

Từ đó $H\xi_i(G) \leq H\xi_{i+1}(G), \forall i \in \mathbb{N}, i \leq n - 1$.

Vậy $H = H\xi_0(G) \leq H\xi_1(G) \leq \dots \leq H\xi_n(G) = G$.

Cần chứng tỏ $H\xi_i(G) \trianglelefteq H\xi_{i+1}(G), \forall i \in \mathbb{N}, i \leq n - 1$.

Nhận thấy với mọi $h \in H$, với mọi $x \in \xi_{i+1}(G)$ ta có

$$h^x = x^{-1}hx = h(h^{-1}x^{-1}hx) = h[h, x] \in H\xi_i(G)$$

(do $x \in \xi_{i+1}(G)$ nên $[h, x] = [x, h]^{-1} \in \xi_i(G)$).

Và với mọi $g \in \xi_i(G)$, với mọi $x \in \xi_{i+1}(G)$ ta có $g^x \in \xi_i(G) \leq H\xi_i(G)$.

Từ đó với mọi $x \in \xi_{i+1}(G)$, với mọi $h \in H$, với mọi $g \in \xi_i(G)$ ta có

$$(hg)^x = x^{-1}hgx = (x^{-1}hx)(x^{-1}gx) = h^x g^x \in H\xi_i(G).$$

Nghĩa là $x \in N_G(H\xi_i(G)), \forall x \in \xi_{i+1}(G)$.

Nên $\xi_{i+1}(G) \leq N_G(H\xi_i(G))$.

Kết hợp với $H \leq H\xi_i(G) \trianglelefteq N_G(H\xi_i(G))$, ta có $H\xi_{i+1}(G) \leq N_G(H\xi_i(G))$.

Vậy $H\xi_i(G) \leq H\xi_{i+1}(G) \leq N_G(H\xi_i(G))$ và $H\xi_i(G) \trianglelefteq N_G(H\xi_i(G))$.

Do đó $H\xi_i(G) \trianglelefteq H\xi_{i+1}(G), \forall i \in \mathbb{N}, i \leq n - 1$.

Từ đó $H = H\xi_0(G) \trianglelefteq H\xi_1(G) \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H\xi_n(G) = G$.

Nghĩa là H á chuẩn tắc trong G . †

4.3.5. Định lý. Cho G là một nhóm và H, K là hai nhóm con chuẩn tắc lũy linh của G . Khi đó HK là một nhóm con chuẩn tắc lũy linh của G .

Chứng minh. Hiển nhiên $HK \leq G$.

Lấy h, k, x tùy ý lần lượt thuộc H, K, G ta có

$$(hk)^x = x^{-1}h k x = (x^{-1}h x)(x^{-1}k x) = h^x k^x \in HK; \text{ vì } H \triangleleft G, K \triangleleft G.$$

Vậy $(HK)^x \leq HK$, với mọi $x \in G$.

Nghĩa là $HK \triangleleft G$.

Bây giờ chứng minh HK nhóm lũy linh.

Thật vậy, vì H, K là nhóm lũy linh; nên gọi m, n lần lượt là lớp của chúng; không giảm tính tổng quát giả sử $m \leq n$; ta có :

$$1 = \xi_0(H) \triangleleft \xi_1(H) \triangleleft \dots \triangleleft \xi_m(H) = H;$$

$$1 = \xi_0(K) \triangleleft \xi_1(K) \triangleleft \dots \triangleleft \xi_n(K) = K.$$

Chứng tỏ $\xi_i(H)\xi_i(K) \leq \xi_i(HK)$, với mọi i thuộc N , bằng phương pháp quy nạp theo i .

Hiển nhiên $\xi_0(H)\xi_0(K) = 1 = \xi_0(HK)$.

Giả sử $\xi_i(H)\xi_i(K) \leq \xi_i(HK)$, với i thuộc N .

Lấy h, k tùy ý lần lượt thuộc $\xi_{i+1}(H), \xi_{i+1}(K)$, và với mọi y thuộc G , ta có

$$\begin{aligned} [hk, y] &= k^{-1}h^{-1}y^{-1}hky = k^{-1}(h^{-1}y^{-1}hy)y^{-1}ky = k^{-1}[h, y]y^{-1}kyk^{-1}k \\ &= k^{-1}[h, y][y, k^{-1}]k = k^{-1}[h, y][k^{-1}, y]^{-1}k \\ &= ([h, y][k^{-1}, y]^{-1})^k \in \xi_i(HK) \end{aligned}$$

(vì $[h, y] \in \xi_i(H)$ và $[k^{-1}, y]^{-1} \in \xi_i(K)$ nên $[h, y][k^{-1}, y]^{-1} \in \xi_i(H)\xi_i(K) \leq \xi_i(HK)$; mà $\xi_i(HK) \leq HK$, kết hợp $k \in HK$; vậy $([h, y][k^{-1}, y]^{-1})^k \in \xi_i(HK)$).

Suy ra $hk \in \xi_{i+1}(HK)$, với mọi h, k lần lượt thuộc $\xi_{i+1}(H), \xi_{i+1}(K)$.

Vậy $\xi_{i+1}(H)\xi_{i+1}(K) \leq \xi_{i+1}(HK)$.

Nghĩa là $\xi_i(H)\xi_i(K) \leq \xi_i(HK)$, với mọi i thuộc N .

Từ đó $HK = \xi_m(H)\xi_n(K) = \xi_n(H)\xi_n(K) \leq \xi_n(HK)$.

Mặt khác theo Bổ đề 4.1.1, ta có $\xi_n(HK) \leq HK$.

Do đó $\xi_n(HK) = HK$.

Suy ra HK là nhóm lũy linh có lớp không vượt quá n .



§5. NHÓM CÁC TỰ ĐẲNG CẤU CỦA NHÓM CYCLIC

5.1. Mệnh đề. Cho G là một nhóm cyclic cấp vô hạn. Khi đó, ta có :

$$\text{Aut } G = \{Id_G, \delta\}, \text{ với } \delta: G \rightarrow G \\ x \rightarrow \delta(x) = x^{-1}.$$

Chứng minh. Gọi a là một phần tử sinh của G , nghĩa là $G = \langle a \rangle$; lấy f tùy ý thuộc $\text{Aut } G$.

Xảy ra một trong ba khả năng sau

i. Trường hợp $f(a) = a$.

Khi đó $f(a^k) = (f(a))^k = a^k, \forall k \in \mathbb{Z}$; vậy $f = Id_G$.

ii. Trường hợp $f(a) = a^{-1}$.

Khi đó $f(a^k) = (f(a))^k = (a^{-1})^k = (a^k)^{-1}, \forall k \in \mathbb{Z}$; vậy $f = \delta$.

iii. Trường hợp $f(a) = a^n$, với $n \neq \pm 1$.

Khi đó $n \neq 0$ (Vì nếu $n = 0$, ta có $f(a^k) = (f(a))^k = (a^0)^k = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$; vậy f không là đơn cấu - vô lý).

Từ đó tồn tại $k \in \mathbb{Z}^+$ thỏa $|n| < k < 2|n|$.

Khi đó, với $a^k \in G$ suy ra tồn tại $a^m \in G$ ($m \in \mathbb{Z}$) sao cho $f(a^m) = a^k$ (do f là đẳng cấu nên f là toàn cấu).

Mà $f(a^m) = (f(a))^m = (a^n)^m = a^{nm}$, vậy $a^{nm} = a^k$.

Nghĩa là $nm = k$ (vì G là một nhóm cyclic cấp vô hạn).

Nên $|n| < nm < 2|n|$, từ đó $|n| < |n||m| < 2|n|$, do đó $1 < |m| < 2$, vô lý.

Vậy khả năng này không xảy ra.

Do đó $\text{Aut } G \subseteq \{Id_G, \delta\}$.

Hiển nhiên $\{Id_G, \delta\} \subseteq \text{Aut } G$;

Từ đó $\text{Aut } G = \{Id_G, \delta\}$. †

Nhận xét 5.1. Giả sử G là một nhóm cyclic cấp vô hạn, khi đó $\text{Aut } G$ là một nhóm cyclic cấp 2.

5.2. Mệnh đề. Cho G là một nhóm cyclic cấp n . Khi đó,

$$\text{Aut } G = \{\delta_k: G \rightarrow G \mid k \in \mathbb{Z}^+, k \leq n-1 \text{ và } (k, n) = 1\}. \\ x \rightarrow \delta_k(x) = x^k$$

Chứng minh. Gọi a là một phần tử sinh của G , nghĩa là

$$G = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}.$$

$$\text{Đặt } A = \{\delta_k : G \rightarrow G \text{ với } k \in \mathbb{Z}^+, k \leq n-1 \text{ và } (k, n) = 1\}.$$

$$x \rightarrow \delta_k(x) = x^k$$

Lấy f tùy ý thuộc $\text{Aut } G$.

Giả sử $f(a) = a^k$, với $k \in \mathbb{Z}$, $k \leq n-1$.

Gọi $d = (n, k)$.

$$\text{Ta có } (f(a))^{\frac{n}{d}} = a^{\frac{kn}{d}} = (a^n)^{\frac{k}{d}} = 1.$$

Và với m tùy ý thuộc $\mathbb{Z}$, ta có

$$(f(a))^m = 1 \Leftrightarrow a^{km} = 1 \Leftrightarrow km : n \Leftrightarrow \frac{k}{d}md : \frac{n}{d}d \Leftrightarrow \frac{k}{d}m : \frac{n}{d}$$

$$\Leftrightarrow m : \frac{n}{d}, \text{ vì } \left(\frac{n}{d}, \frac{k}{d}\right) = 1.$$

$$\text{Vậy } |f(a)| = \frac{n}{d}.$$

Mặt khác với m tùy ý thuộc $\mathbb{Z}$, ta có

$$(f(a))^m = 1, \text{ từ đó } f(a^m) = 1 = f(1), \text{ vậy } a^m = 1 \text{ (vì } f \text{ là đẳng cấu).}$$

Nên $m : n$ (vì a là một phần tử sinh của nhóm cyclic G cấp n).

$$\text{Hiển nhiên } (f(a))^n = 1.$$

Vậy $f(a)$ là một phần tử sinh của G .

$$\text{Từ đó } \frac{n}{d} = n.$$

$$\text{Nghĩa là } d = 1.$$

$$\text{Suy ra } (k, n) = 1.$$

Thêm nữa với mọi $x = a^m \in G$ (với $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n-1$), ta có :

$$f(x) = f(a^m) = (f(a))^m = (a^k)^m = (a^m)^k = x^k.$$

Do đó $f \in A$, với mọi $f \in \text{Aut } G$.

Nghĩa là $\text{Aut } G \subseteq A$.

Hiển nhiên $A \subseteq \text{Aut } G$.

Từ đó $\text{Aut } G = A$.

Từ Mệnh đề ở 5.2, thu được :

Nhận xét 5.2. Nếu G là một nhóm cyclic cấp n thì $|\text{Aut } G| = \varphi(n)$, (Với φ là hàm Euler, nghĩa là $\varphi(n)$ bằng số các số tự nhiên nhỏ hơn n mà nguyên tố cùng nhau với n).



T - NHÓM VÀ $\bar{T}$ - NHÓM

§1. NHÓM DEDEKIND

1.1. Nhóm Dedekind

1.1.1. Định nghĩa. Nhóm G được gọi là một *nhóm Dedekind* nếu mọi nhóm con của G đều là nhóm con chuẩn tắc của G .

Ví dụ 1.1. Mọi nhóm Abel đều là nhóm Dedekind.

Ví dụ 1.2. Nhóm *Quaternion* (tức Q_8) là một nhóm Dedekind không Abel.

Chú ý 1.1. Nhóm Dedekind không Abel được gọi là nhóm *Hamilton*.

1.1.2. Định nghĩa. Cho G là nhóm, p là một số nguyên tố; G được gọi là một *p - nhóm Abel sơ cấp* nếu $G \simeq \underbrace{Z_p \times Z_p \times \dots \times Z_p}_{(n \text{ lần})}$

Định lý sau đây là một kết quả rất quan trọng về cấu trúc của các nhóm Dedekind. Chứng minh Định lý này rất phức tạp và được trình bày chi tiết trong [5]. Sau đây, chỉ phát biểu mà không chứng minh :

1.1.3. Định lý. (Dedekind - Baer) Cho G là một nhóm. Khi đó G là một nhóm Dedekind nếu và chỉ nếu hoặc G là một nhóm Abel hoặc G đẳng cấu với $Q_8 \times G_1 \times G_2$ với G_1 là một nhóm Abel sơ cấp, G_2 là một nhóm Abel mà mọi phần tử đều có cấp lẻ.

1.2. T - nhóm

1.2.1. Định nghĩa. Nhóm G được gọi là một *T - nhóm* nếu mọi nhóm con á chuẩn tắc của G đều là nhóm con chuẩn tắc của G .

Ví dụ 1.3. S_3 là một T - nhóm.

Chứng minh. Nhận thấy S_3 chỉ có sáu nhóm con là 1, $\langle(1\ 2)\rangle$, $\langle(1\ 3)\rangle$, $\langle(2\ 3)\rangle$, A_3 , S_3 .

Chứng tỏ $\langle(1\ 2)\rangle$ không là nhóm con á chuẩn tắc của S_3 .

Thật vậy, vì $(1\ 2)^{(1\ 3)} = (1\ 3)^{-1}(1\ 2)(1\ 3) = (2\ 3) \notin \langle (1\ 2) \rangle$; nên $\langle (1\ 2) \rangle$ không là nhóm con chuẩn tắc của S_3 .

Mặt khác $|\langle (1\ 2) \rangle| = 2, |S_3| = 6$.

Vậy gọi H là nhóm con trung gian của S_3 đối với $\langle (1\ 2) \rangle$, suy ra $|H| = 2$ hoặc $|H| = 6$, nên $H = \langle (1\ 2) \rangle$ hoặc $H = S_3$.

Kéo theo, không tồn tại dãy $\langle (1\ 2) \rangle \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_n \trianglelefteq S_3$.

Từ đó $\langle (1\ 2) \rangle$ không là nhóm con á chuẩn tắc của S_3 .

Tương tự $\langle (1\ 3) \rangle, \langle (2\ 3) \rangle$ không là nhóm con subnormal của S_3 .

Ta có $A_3 \trianglelefteq S_3$ (vì $[S_3 : A_3] = 2$); hiển nhiên $1 \trianglelefteq S_3, S_3 \trianglelefteq S_3$.

Vậy trong S_3 chỉ có ba nhóm con $1, A_3$ và S_3 là á chuẩn tắc của S_3 đồng thời là chuẩn tắc của S_3 .

Do đó S_3 là T - nhóm. ↑

Phản ví dụ. S_4 không là một T - nhóm.

Chứng minh. Theo Ví dụ 3.3, §3, Ch I, ta có $V_4 \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$.

Xét $D = \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle = \{1, (1\ 2)(3\ 4)\}$ (do $(1\ 2)(3\ 4)(1\ 2)(3\ 4) = 1$).

Mà $V_4 = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.

Suy ra $D \leq V_4$; vậy $D \trianglelefteq V_4$ (vì $[V_4 : D] = 2$); từ đó $D \trianglelefteq V_4 \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$.

Nghĩa là D là một nhóm con á chuẩn tắc của S_4 .

Mặt khác $(1\ 2)(3\ 4)^{(2\ 3)} = (2\ 3)(1\ 2)(3\ 4)(2\ 3) = (1\ 3)(2\ 4) \notin \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle$.

Vậy D không là nhóm con chuẩn tắc của S_4 .

Do đó S_4 không là T - nhóm. ↑

Nhận xét. Mọi nhóm Dedekind đều là T - nhóm.

Chú ý 1.2. Tồn tại T - nhóm, mà chúng không là nhóm Dedekind, chẳng hạn như S_3 .

1.2.2. Mệnh đề. Cho G là một nhóm. Khi đó, G là một T - nhóm nếu và chỉ nếu với $H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ ta có $H \trianglelefteq G$, với mọi H, K là các nhóm con của G .

Chứng minh. ($\Rightarrow$) : Hiển nhiên.

($\Leftarrow$) : Giả sử G là nhóm mà với mọi nhóm con H, K thỏa $H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ ta có $H \trianglelefteq G$; cần chứng minh G là T - nhóm.

Thật vậy, lấy H là một nhóm con á chuẩn tắc tùy ý của G , vậy tồn tại

dãy nhóm của G sao cho $H = H_1 \triangleleft H_2 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$.

Chúng tỏ $H \triangleleft G$ bằng phương pháp quy nạp theo n .

Với $n \leq 3$, điều phải chứng minh là hiển nhiên.

Giả sử điều phải chứng minh đúng với $n = k \geq 3$.

Xét trường hợp $n = k + 1$, nghĩa là ta có $H = H_1 \triangleleft H_2 \triangleleft \dots \triangleleft H_{k+1} = G$.

Khi đó $H_{k-1} \triangleleft H_k \triangleleft H_{k+1} = G$.

Theo giả thuyết $H_{k-1} \triangleleft G$.

Nên từ dãy trên, viết lại $H = H_1 \triangleleft H_2 \triangleleft \dots \triangleleft H_{k-1} \triangleleft G$ (coi $H_k = G$).

Theo giả thuyết quy nạp ta có $H \triangleleft G$.

Vậy H là nhóm con chuẩn tắc của G , với mọi H là á chuẩn tắc của G .

Do đó G là một T - nhóm. †

1.2.3. Định lý. Cho G là một nhóm lũy linh. Khi đó, hai mệnh đề sau là tương đương :

i/ G là một T - nhóm.

ii/ G là một nhóm Dedekind.

Chứng minh. $i/ \Rightarrow ii/$: Vì G lũy linh nên theo Định lý 4.3.4, § 4, Ch I, ta có mọi nhóm con của G đều là nhóm con á chuẩn tắc của G .

Mà G là một T - nhóm; nên mọi nhóm con á chuẩn tắc của G đều là nhóm con chuẩn tắc của G .

Do đó G là một nhóm Dedekind.

$ii/ \Rightarrow i/$: Hiển nhiên. †



§2. TÂM HÓA TỬ

2.1. Định nghĩa. Cho G là một nhóm và $\emptyset \neq X \subseteq G$. Xét tập hợp :

$$C_G(X) = \{x \in G / xy = yx, \forall y \in X\} \text{ (Kiểm tra được } C_G(X) \leq G).$$

Khi đó, ta nói $C_G(X)$ là *tâm hóa tử của X trong G* .

Ví dụ. Tâm hóa tử của A_4 trong S_4 bằng 1.

Chứng minh. Đặt $G = S_4$,

$$X = A_4 = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 3), \\ (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}.$$

Khi đó, vận dụng kết quả (*) trong chứng minh Chú ý 4.3, §4, Ch I, ta có $(1\ 2) \notin C_G(X)$; tương tự $(1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4) \notin C_G(X)$.

$$\text{Ta có } (1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 4) \neq (1\ 3\ 4) = (1\ 2\ 3)(1\ 2)(3\ 4).$$

Nên $(1\ 2)(3\ 4) \notin C_G(X), (1\ 2\ 3) \notin C_G(X)$; tương tự $(1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3) \notin Z(S_4)$.

$$\text{Và } (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2\ 4) \neq (1\ 3\ 4\ 2) = (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4).$$

Vậy $(1\ 2\ 3\ 4) \notin C_G(X)$; tương tự $(1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2) \notin C_G(X)$.

$$\text{Do đó } C_G(X) = 1.$$

Nhận xét 2.1. Cho nhóm G . Khi đó $C_G(G)$ gọi là *tâm của nhóm G* - đây là khái niệm quen thuộc, và ký hiệu $Z(G)$.

2.2. Mệnh đề. Cho G là một nhóm. Đặt $C = C_G(G')$, với $G' = [G, G]$. Khi đó, ta có hai điều khẳng định sau :

i/ C là một nhóm lũy linh.

ii/ C char G .

Chứng minh. i/ Vì $C = C_G(G') = \{x \in G / xy = yx, \forall y \in G'\}$, nên với mọi c thuộc C và với mọi $[a, b]$ thuộc $[C, C] \leq [G, G]$, ta có $[a, b]c = c[a, b]$.

Nghĩa là $[a, b]^{-1}c^{-1}[a, b]c = 1; \forall c \in C, \forall [a, b] \in [C, C]$, ở đó $a, b \in C$.

Vậy $[[a, b], c] = 1, \forall c \in C, \forall [a, b] \in [C, C]$, ở đó $a, b \in C$.

Từ đó $[[C, C], C] = 1$.

Do đó dãy tâm dưới của C là :

$$C = \Upsilon_0(C) \geq \Upsilon_1(C) = [C, C] \geq \Upsilon_2(C) = [[C, C], C] = 1.$$

Áp dụng Định lý 4.2.5, § 4, Ch I, ta có C là một nhóm lũy linh có lớp không vượt quá 2.

ii/ Lấy φ tùy ý thuộc $\text{Aut } G$, cần chứng tỏ $\varphi(C) \leq C$.

Thật vậy; lấy x tùy ý thuộc $\varphi(C)$, tồn tại $a \in C$ sao cho $\varphi(a) = x$; lấy y tùy ý thuộc $[G, G]$, tồn tại $b \in G$ sao cho $\varphi(b) = y$ (do φ thuộc $\text{Aut } G$).

Mà $[G, G] \text{ char } G$ (Mệnh đề 3.4.2, § 3, Ch I); nên $\varphi([G, G]) = [G, G]$; vậy $b \in [G, G]$; từ đó $ab = ba$.

Suy ra $\varphi(ab) = \varphi(ba)$.

Hay $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a)$.

Từ đó $xy = yx$, với mọi $y \in [G, G]$.

Nên $x \in C$.

Vậy $\varphi(C) \leq C$.

Do đó $C \text{ char } G$ (Áp dụng Mệnh đề 3.1.2, §3, Ch I).

↑

Từ kết quả trên, kết hợp Mệnh đề 3.1.2 (§3, Ch I), thu được :

Nhận xét 2.2. Ta có $C = C_G(G') \trianglelefteq G$.



§3. NHÓM CON FITTING CỦA T - NHÓM

3.1. Định nghĩa. Cho G là một nhóm. Nhóm con sinh bởi tất cả các nhóm con chuẩn tắc lũy linh của G được gọi là *nhóm con Fitting* của G , ký hiệu là $\text{Fit } G$.

Ví dụ. $A_3 = \text{Fit } S_3$.

Chứng minh. Nhận thấy S_3 chỉ có sáu nhóm con là $1, \langle(1\ 2)\rangle, \langle(1\ 3)\rangle, \langle(2\ 3)\rangle, A_3, S_3$; trong đó $A_3 = S_3$; $\langle(1\ 2)\rangle, \langle(1\ 3)\rangle, \langle(2\ 3)\rangle$ không là nhóm con chuẩn tắc của S_3 (Ví dụ 1.3, §1, Ch II).

Mặt khác $|A_3| = 3$, nên A_3 là 3 - nhóm hữu hạn, vậy A_3 là một nhóm lũy linh (Định lý 4.3.2, §4, Ch I).

Mà S_3 không là nhóm lũy linh (Chú ý 4.3, §4, Ch I).

Từ đó $A_3 = \text{Fit } S_3$.

Từ Mệnh đề 2.2 và Nhận xét 2.1 (§2, Ch II) đi đến :

Nhận xét. Cho G là một nhóm. Ta có $C = C_G(G') \leq \text{Fit } G$.

Trường hợp $G = S_4$, ta có $G' = [S_4, S_4] = A_4$.

Theo Ví dụ 2.1 (§2, Ch II), suy ra $C = C_G(G') = 1$.

Mà $\text{Fit } S_4 \neq 1$ (Ví dụ 3.3, §3, Ch I ta có $V_4 \trianglelefteq S_4$ và V_4 là nhóm Abel, nên lũy linh; kéo theo $V_4 \leq \text{Fit } S_4$).

Vậy trong quan hệ nhóm con nói trên, điều này minh họa khả năng tâm hóa tử là nhóm con thực sự của nhóm con Fitting. Câu hỏi tự nhiên được đặt ra, khi nào chúng trùng nhau ? Kết quả sau, là một hướng trả lời khẳng định.

3.2. Định lý. Cho G là một T - nhóm và $C = C_G(G')$. Khi đó C là nhóm con Fitting của G .

Chứng minh. Ta có $C = C_G(G') \leq \text{Fit } G$.

Cần chứng tỏ $\text{Fit } G \leq C$.

Thật vậy, Lấy H là nhóm con tùy ý của G sao cho H lũy linh và $H \trianglelefteq G$, và lấy x tùy ý thuộc H .

Vì H lũy linh nên theo Định lý 4.3.4 (§4, Ch I) ta có $\langle x \rangle$ là nhóm con á chuẩn tắc trong H .

Mà $H \trianglelefteq G$.

Kéo theo $\langle x \rangle$ là một nhóm con á chuẩn tắc của G .

Vậy $\langle x \rangle \trianglelefteq G$ (vì G là một T - nhóm).

Với a tùy ý thuộc G , xét ánh xạ $\tau_a : \langle x \rangle \rightarrow \langle x \rangle$

$$x^m \rightarrow \tau_a(x^m) = (x^m)^a \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Vì $\langle x \rangle \trianglelefteq G$ nên $(x^m)^a \in \langle x \rangle$, với mọi $m \in \mathbb{N}$, với mọi $a \in G$.

Từ đó $\tau_a \in \text{Aut } \langle x \rangle$, với mọi $a \in G$.

Xét tương ứng $\psi : G \rightarrow \text{Aut } \langle x \rangle$

$$a \rightarrow \psi(a) = \tau_a, \text{ với } \tau_a(x^m) = (x^m)^a \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Hiển nhiên ψ là ánh xạ.

Khi đó với mọi a, b thuộc G , với mọi x^m thuộc $\langle x \rangle$ ($m \in \mathbb{N}$), ta có :

$$\psi(ab)(x^m) = \tau_{ab}(x^m) = (x^m)^{ab} = b^{-1}a^{-1}(x^m)ab.$$

Đặt $a^{-1}xa = x^n$, $b^{-1}xb = x^k$ (với $n, k \in \mathbb{N}$).

$$\text{Vậy } \psi(ab)(x^m) = b^{-1}(a^{-1}(x^m)a)b =$$

$$= b^{-1} \underbrace{(a^{-1}xa)(a^{-1}xa) \dots (a^{-1}xa)}_{m \text{ lần}} b = b^{-1}x^{nm}b =$$

$$= \underbrace{(b^{-1}xb)(b^{-1}xb) \dots (b^{-1}xb)}_{nm \text{ lần}} = x^{knm}.$$

$$\text{Mà } \psi(a)\psi(b)(x^m) = \tau_a\tau_b(x^m) = \tau_a(b^{-1}x^mb) =$$

$$= \tau_a \underbrace{((b^{-1}xb)(b^{-1}xb) \dots (b^{-1}xb))}_{m \text{ lần}} = \tau_a(x^{km}) = a^{-1}x^{km}a =$$

$$= \underbrace{(a^{-1}xa)(a^{-1}xa) \dots (a^{-1}xa)}_{km \text{ lần}} = x^{nkm} = x^{knm}.$$

$$\text{Vậy } \psi(ab)(x^m) = \psi(a)\psi(b)(x^m), \quad \forall x^m \in \langle x \rangle \quad (m \in \mathbb{N}).$$

$$\text{Nên } \psi(ab) = \psi(a)\psi(b), \quad \forall a, b \in G.$$

Do đó ψ là một đồng cấu nhóm.

$$\text{Mặt khác } a \in \text{Ker } \psi \Leftrightarrow \psi(a) = \text{Id}_{\langle x \rangle} \Leftrightarrow \tau_a = \text{Id}_{\langle x \rangle}$$

$$\Leftrightarrow \tau_a(x^m) = (x^m), \quad \forall x^m \in \langle x \rangle \quad (m \in \mathbb{N}).$$

$$\Leftrightarrow a^{-1}(x^m)a = (x^m), \quad \forall x^m \in \langle x \rangle \quad (m \in \mathbb{N}).$$

$$\Leftrightarrow a(x^m) = (x^m)a, \quad \forall x^m \in \langle x \rangle \quad (m \in \mathbb{N}).$$

$$\Leftrightarrow a \in C_G(\langle x \rangle).$$

Vậy $\text{Ker } \psi = C_G(\langle x \rangle)$.

Suy ra $C_G(\langle x \rangle) \trianglelefteq G$ (do $\text{Ker } \psi \trianglelefteq G$).

Mà $G / \text{Ker } \psi \simeq \text{Im } \psi \leq \text{Aut } \langle x \rangle$ (đề ý $\text{Aut } \langle x \rangle$ là nhóm Abel).

Từ đó $G / C_G(\langle x \rangle)$ là nhóm Abel.

Do đó $G' = [G, G] \leq C_G(\langle x \rangle)$.

Vậy $\forall y \in G'$ thì $y \in C_G(\langle x \rangle)$ nên $xy = yx$ (do $x \in \langle x \rangle$).

Nghĩa là $xy = yx, \forall y \in G'$.

Suy ra $x \in C_G(G'), \forall x \in H$.

Từ đó $H \leq C_G(G'), \forall H \leq G$ thỏa H lũy linh và $H \trianglelefteq G$.

Nên $\text{Fit } G \leq C = C_G(G')$.

Do đó $C = \text{Fit } G$.

†



§4. T - NHÓM VÀ $\overline{T}$ - NHÓM

4.1. T - nhóm giải được

Khái niệm T - nhóm được trình bày ở Định nghĩa 1.2.1 (§1, Ch II); còn khái niệm nhóm Metabelian trình bày ở Định nghĩa 3.5.1 (§3, Ch I); kết quả sau là tính chất của T - nhóm, nhờ đó chứng minh được một điều kiện đủ để nhận biết một nhóm là Metabelian.

4.1.1. Mệnh đề. *Ta có hai điều khẳng định sau :*

i/ *Ảnh đồng cấu của một T - nhóm là một T - nhóm.*

ii/ *Nhóm thương của một T - nhóm là một T - nhóm.*

Chứng minh. i/ Giả sử G là một T - nhóm, G' là một nhóm và $f : G \rightarrow G'$ là một đồng cấu nhóm.

Lấy H' là một nhóm con á chuẩn tắc tùy ý của $\text{Im } f$.

Vậy tồn tại dãy nhóm con của $\text{Im } f$ thỏa $H' \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_n \trianglelefteq \text{Im } f$.

Ta có $f^{-1}(H_n) \trianglelefteq G$

(vì $f(xy) = f(y^{-1}xy) = (f(y))^{-1}f(x)f(y) \in H_n, \forall x \in f^{-1}(H_n), \forall y \in G$; kéo theo $x^y \in f^{-1}(H_n), \forall x \in f^{-1}(H_n), \forall y \in G$).

Tương tự $f^{-1}(H') \trianglelefteq f^{-1}(H_1) \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G, f^{-1}(H_n) \trianglelefteq G$.

Nên $f^{-1}(H')$ là một nhóm con á chuẩn tắc của G .

Vậy $f^{-1}(H') \trianglelefteq G$ (vì G là một T - nhóm).

Từ đó với mọi $x' \in H'$, với mọi $y' \in \text{Im } f$; kéo theo tồn tại $x \in f^{-1}(H')$

và tồn tại $y \in G$ sao cho $f(x) = x', f(y) = y'$.

Khi đó $x^y \in f^{-1}(H')$.

Nên $(y')^{-1}x'y' = f(y^{-1})f(x)f(y) = f(y^{-1}xy)$
 $= f(x^y) \in H', \forall x' \in H', \forall y' \in \text{Im } f$.

Vậy $H' \trianglelefteq \text{Im } f$.

Do đó $\text{Im } f$ là một T - nhóm.

ii/ Giả sử G là một T - nhóm và $H \trianglelefteq G$.

Xét đồng cấu $f : G \rightarrow G/H$
 $x \rightarrow f(x) = xH$.

Hiển nhiên f là toàn cấu.

Áp dụng kết quả trên, ta có $G / H = \text{Im } f$ là một T - nhóm.

†

Ta đã biết, mọi nhóm Metabelian đều là nhóm giải được (Nhận xét 3.3, §3, Ch I). Điều ngược lại có thể không đúng, chẳng hạn như S_4 là nhóm giải được nhưng không Metabelian (Phản ví dụ 3.5.2, §3, Ch I). Kết quả sau, là một trường hợp về hướng bổ sung giả thuyết đề mệnh đề đảo là đúng.

4.1.2. Định lý. Cho G là một T - nhóm giải được. Khi đó G là một nhóm Metabelian.

Chứng minh. Vì G là một nhóm giải được.

Nên theo Định lý ở 3.4.4 (§3, Ch I) thì dãy dẫn xuất của G là dừng.

Nghĩa là tồn tại $n \in \mathbb{N}$ thỏa $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq \dots \geq G^{(n)} = 1$, với $G^{(n-1)} \neq 1$.

Giả sử G không là Metabelian, suy ra $n \geq 3$.

Theo Mệnh đề 3.4.2 (§3, Ch I) ta có $G^{(3)} \text{ char } G$.

Nên $G^{(3)} \trianglelefteq G$, suy ra $G^{(3)} \trianglelefteq G^{(i)}$, $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Vậy $G^{(0)} / G^{(3)} \geq G^{(1)} / G^{(3)} \geq G^{(2)} / G^{(3)} \geq G^{(3)} / G^{(3)} = 1$, với $G^{(2)} / G^{(3)} \neq 1$.

Đặt $H = G / G^{(3)}$.

Ta có $H^{(1)} = [G / G^{(3)}, G / G^{(3)}] = [G, G] / G^{(3)} = G^{(1)} / G^{(3)}$.

Tương tự $H^{(2)} = G^{(2)} / G^{(3)}$, $H^{(3)} = G^{(3)} / G^{(3)} = 1$.

Vậy H có dãy dẫn xuất là $H = H^{(0)} \geq H^{(1)} \geq H^{(2)} \geq H^{(3)} = 1$.

Nên H là một nhóm giải được.

Và $H^{(2)}$ là Abel (vì $1 = H^{(3)} = [H^{(2)}, H^{(2)}]$).

Suy ra $H^{(2)}$ là lũy linh, vì mọi nhóm Abel đều là nhóm lũy linh.

Mà $H^{(2)} \trianglelefteq H$ (Nhận xét 3.2, §3, Ch I).

Từ đó $H^{(2)} \leq \text{Fit } H$.

Vì G là một T - nhóm; nên theo Mệnh đề 4.1.1 (§3, Ch II) suy ra

$$H = G / G^{(3)} \text{ là một T - nhóm.}$$

Kéo theo $\text{Fit } H = C_H(H')$ (Áp dụng Định lý 3.2, §3, Ch II).

Vậy $H^{(2)} \leq C_H(H')$.

Do đó $[H^{(2)}, H'] = 1$.

Suy ra $H' = [H, H]$ có dãy tâm dưới là :

$$\begin{aligned} H' &= \gamma_0(H') \geq \gamma_1(H') = [H', H'] = [H^{(1)}, H^{(1)}] = H^{(2)} \geq \gamma_2(H') = [H^{(2)}, H'] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 4.2.5 (§4, Ch I) ta có H' là một nhóm lũy linh.

Mà $H' = [H, H] \trianglelefteq H$ (Nhận xét 3.2, §3, Ch I).

Từ đó $H' \leq \text{Fit } H = C_H(H')$.

Suy ra $H^{(2)} = [H', H'] = 1$.

Nghĩa là $G^{(2)} / G^{(3)} = 1$.

Đây là điều mâu thuẫn.

Do đó G là một nhóm Metabelian.

†

4.2. Nhóm với mọi nhóm con đều pronormal

Khái niệm nhóm con pronormal được trình bày ở Định nghĩa 1.2.2 (§1, Ch I). Kết quả sau là khá thú vị, vì từ đó xác định được một điều kiện đủ để nhận biết một nhóm là T - nhóm nhờ khái niệm nhóm con pronormal.

4.2.1. Bổ đề. Cho H là một nhóm con pronormal trong nhóm G và cho K là một nhóm con của G chứa H . Khi đó, H là á chuẩn tắc của K nếu và chỉ nếu H là chuẩn tắc của K .

Chứng minh. ($\Rightarrow$): Giả sử H là á chuẩn tắc của K , vậy tồn tại dãy sau đây :

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft L_m \quad L_{m+1} = K \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Ta cần chứng minh $H \trianglelefteq K$.

Lấy x tùy ý thuộc K .

Vì H là pronormal trong G , nên với $x \in G$ (Do $x \in K \leq G$) tồn tại

$$u_m \in \langle H, H^x \rangle \text{ sao cho } H^x = H^{u_m}.$$

Mặt khác $H^x \leq L_m^x$.

Mà $L_m^x = L_m$ (Vì $L_m \trianglelefteq L_{m+1} = K$ và $x \in K$).

Suy ra $H^x \leq L_m$.

Và hiển nhiên $H \leq L_m$.

Vậy $\langle H, H^x \rangle \leq L_m$.

Nên $u_m \in L_m$.

Từ đó với $x \in K$ tồn tại $u_m \in L_m$ sao cho $H^x = H^{u_m}$.

Tương tự, vì H là pronormal trong G , với $u_m \in L_m$ (suy ra $u_m \in G$).

Vậy tồn tại $u_{m-1} \in \langle H, H^{u_m} \rangle$ sao cho $H^{u_m} = H^{u_{m-1}}$.

Lý luận tương tự, ta có $u_{m-1} \in L_{m-1}$.

Vậy $H^x = H^{u_{m-1}}$.

...

Tiếp tục quá trình tương tự như trên, ta có :

Tồn tại $u_1 \in L_1$ sao cho $H^x = H^{u_1}$.

Cuối cùng vì $H^{u_1} = H$ (do $H = L_0 \triangleleft L_1$ và $u_1 \in L_1$).

Do đó $H^x = H, \forall x \in K$.

Nghĩa là $H \triangleleft K$.

($\Leftarrow$) : Hiển nhiên.

↑

4.2.2. Định lý. Cho G là một nhóm có mọi nhóm con đều là pronormal trong G . Khi đó, G là một T - nhóm.

Chứng minh. Giả sử H là một nhóm con á chuẩn tắc trong G .

Vì H là pronormal trong G (giả thuyết), mà $H \leq G \leq G$.

Nên theo Bổ đề 4.2.1 (§4, Ch II) ta có $H \trianglelefteq G$.

Do đó G là một T - nhóm.

↑

4.3. Nhóm với mọi nhóm con đều đa chuẩn tắc

4.3.1. Định nghĩa. Nhóm G được gọi là một $\overline{T}$ - nhóm nếu với mọi nhóm con D, K, L của G thỏa $D \trianglelefteq K \trianglelefteq L$ thì theo $D \trianglelefteq L$.

Ví dụ. Mọi nhóm Abel đều là $\overline{T}$ - nhóm.

Nhận xét. Ta có hai điều khẳng định sau :

i/ Mọi $\overline{T}$ - nhóm là T - nhóm.

ii/ Cho G là một nhóm. Khi đó, G là $\overline{T}$ - nhóm nếu và chỉ nếu mọi nhóm

con của G đều là T - nhóm.

Khái niệm nhóm con đa chuẩn tắc được trình bày ở Định nghĩa 1.2.1 (§1, Ch I). Kết quả sau là sự liên hệ giữa $\overline{T}$ - nhóm và nhóm con đa chuẩn tắc.

4.3.2. Định lý. Cho G là một nhóm. Khi đó, mọi nhóm con của G đều là nhóm

con đa chuẩn tắc trong G nếu và chỉ nếu G là $\overline{T}$ - nhóm.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) : Giả sử mọi nhóm con của G đều là đa chuẩn tắc trong G ;

ta cần chứng tỏ G là $\overline{T}$ -nhóm.

Thật vậy, lấy D, K, L là ba nhóm con tùy ý của G sao cho $D \leq K \leq L$.

Ta có D là đa chuẩn tắc trong G , mà L nhóm con trung gian của G đối với D ; vậy theo Định lý 1.3.1 (§1, Ch I) ta có D^L là một nhóm con đầy đủ

của G đối với D , nghĩa là

$$D^L \cap D = D^L.$$

Mặt khác $D^L \leq K^L = K$, suy ra

$$D^L \leq K^L \leq D \Rightarrow D^L \leq D = D^K = D.$$

Từ đó $D^L \leq D$.

Suy ra $D^x \leq D$, với mọi x thuộc L .

Vậy $D \trianglelefteq L$.

Do đó G là $\overline{T}$ -nhóm.

($\Leftarrow$) : Giả sử G là $\overline{T}$ -nhóm.

Lấy D là một nhóm con tùy ý của G , ta cần chứng tỏ D là nhóm con đa chuẩn tắc trong G .

Thật vậy, lấy H là nhóm con trung gian tùy ý của G đối với D , nghĩa là

$$D \leq H \leq G.$$

Theo Chú ý 1.1, § 1, Ch I ta có $D^H \trianglelefteq \overline{T}$; mà $\overline{T}$ là $\overline{T}$ -nhóm, vậy

$$D^H \trianglelefteq D \leq H.$$

Mặt khác D^H là nhóm con chuẩn tắc nhỏ nhất của H chứa D ; và D

D^H

vừa được khẳng định ở trên là nhóm con chuẩn tắc của H , hiển nhiên chúng chứa D ; vì vậy

$$\begin{aligned} D^H &\leq D. \\ \text{Từ đó } D &= D^H. \end{aligned}$$

Vậy D^H là nhóm con đầy đủ của G đối với D , với mọi H là nhóm con trung gian của G đối với D .

Theo Định lý 1.3.1 (§1, Ch I) ta có D là nhóm con đa chuẩn tắc trong G .



KẾT LUẬN

Luận văn xây dựng khái niệm T - nhóm, T - nhóm $\overline{T}$ một số khái niệm khác liên quan và những ví dụ minh họa tương ứng; tất cả các vấn đề này đều được trình bày trong một số Tài liệu tham khảo.

Các kết quả trình bày trong Luận văn là không mới, tất cả đều được phát biểu và chứng minh trong một số Tài liệu tham khảo. Trong đó, có nhiều kết quả mà tác giả của Luận văn đã đọc và suy nghĩ nhiều lần vẫn chưa hiểu sáng tỏ; các khó khăn này được Thầy hướng dẫn gợi ý, giảng giải.

Luận văn trình bày chứng minh Định lý 4.3.5 (§4. Ch I, Tr 25); cách chứng minh này, xuất phát từ phần chứng minh Định lý 9.18 (Xem [1], Tr 60); triển khai cụ thể của chứng minh Định lý 4.3.5 có khác về mặt kỹ thuật so với phần chứng minh Định lý 9.18.

Vì thời gian không còn cho phép nên Luận văn chưa thực hiện được việc chứng minh một kết quả khá đẹp và quan trọng về T - nhóm hữu hạn, giải được liên quan đến nhóm con pronormal.



TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Bùi Xuân Hải (chủ biên), Trịnh Thanh Đèo (2002), *Đại số hiện đại*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.
- [2]. Bùi Xuân Hải (2002), *Nhóm tuyến tính (Chuyên đề cao học)*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.
- [3]. P.A. Gavron and L. Yu. Kolotilina (1980), *Subgroups in T - groups*, Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Int. Steklov., AN SSSR, Vol. 103, pp. 62 - 65.
- [4]. T. A. Peng (1969), *Finite groups With pro - normal Subgroups*, Proc. Amer. Math. Soc., 20, No 1, 232 - 234.
- [5]. Derek J. S. Robinson (1995), *A course in the Theory of groups*, Second Editaon Springer - Verleg.

