



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Trần Thanh Liêm

TÍNH LŨY LINH CỦA CÁC GIAO HOÁN TỬ TRONG VÀNH NGUYÊN TỐ

Chuyên ngành: **Đại số và lý thuyết số**

Mã số: **60 46 05**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC :

PGS. TS. BÙI TƯỜNG TRÍ

Thành phố Hồ Chí Minh – Năm 2010

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS. BÙI TUỜNG TRÍ.

Trước tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến Thầy PGS. TS. BÙI TUỜNG TRÍ – người đã trực tiếp ra đề tài và tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình thực hiện luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý Thầy Cô trong tổ Đại số của hai trường Đại học Sư phạm và Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh đã tận tình giảng dạy và trang bị cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong suốt quá trình học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý Thầy Cô cán bộ của phòng Khoa học Công nghệ và Sau Đại học của trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Ban Giám hiệu, quý Thầy Cô trong tổ Toán và các bạn đồng nghiệp của trường THPT Hàm Thuận Bắc – Bình Thuận đã tạo điều kiện thuận lợi và tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập cũng như thực hiện luận văn.

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 06 năm 2010

Người thực hiện

Trần Thanh Liêm

MỞ ĐẦU

Các kiến thức về Nhóm, Vành, Trường là một trong những kiến thức cơ bản của Đại số trừu tượng được rất nhiều các nhà Toán học quan tâm, nghiên cứu. Trong đó, các kiến thức về Vành đóng một vai trò khá quan trọng, đã có rất nhiều đề tài và công trình nghiên cứu về mảng kiến thức này.

Trên tinh thần đó, luận văn cũng tập trung tìm hiểu sâu sắc hơn về các tính chất của các phần tử trong những vành cụ thể mà đặc biệt là **Tính lũy linh của các giao hoán tử trong vành nguyên tố**. Đó cũng là mục đích chính của luận văn.

Cấu trúc luận văn được chia ra làm hai chương:

Chương 1. Các kiến thức cơ bản của lý thuyết vành không giao hoán.

Trong chương này luận văn chủ yếu nêu lên các định nghĩa, các định lý, hệ quả, các mệnh đề và các kết quả về vành không giao hoán cũng như các kết quả về các vành đặc biệt khác: vành nửa đơn, vành Artin, vành đơn, vành nguyên thủy và vành nguyên tố. Ngoài ra còn nêu lên mối quan hệ giữa các vành đặc biệt này.

Chương 2. Tính lũy linh của các giao hoán tử trong vành nguyên tố.

Trong chương này luận văn tập trung giải quyết hai vấn đề cơ bản sau.

Vấn đề 1. Cho R là một vành nguyên tố, phần tử $a \in R$.

Với mọi $x \in R$, nếu $[a, x] = ax - xa$ lũy linh thì phải chăng lúc đó $a \in Z$, với Z là tâm của vành R .

Một vấn đề tổng quát hơn được đặt ra nữa là :

Vấn đề 2. Cho R là một vành nguyên tố, phần tử $a \in R$.

Giả sử tồn tại một ideal U của R ($U \neq (0)$) sao cho với mọi $x \in U$, ta có $[a, x] = ax - xa$ lũy linh thì phải chăng lúc đó ta cũng được $a \in Z$.

Trong quá trình giải quyết những vấn đề nêu trên, chúng tôi đã cố gắng giải quyết các vấn đề này với R là vành chia được, R là vành nguyên thủy và R là một vành nửa đơn (nửa nguyên thủy). Từ đó chúng tôi đã xét thêm, với giả thiết R là vành nguyên thủy và R có đơn vị. Lấy $a \in R$, $a \notin Z$ sao cho $(ax - xa)^n \in Z, \forall x \in R$. Khi đó, ta được $Z \neq (0)$ là một trường và R là hữu hạn chiều trên tâm Z .

CHƯƠNG 1.

CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT VÀNH KHÔNG GIAO HOÁN

Trong chương này chủ yếu trình bày một số kiến thức cơ bản về vành không giao hoán như : Modules, Cấu trúc Radical Jacobson của một vành, các khái niệm về các vành nửa đơn, vành Artin, vành đơn, vành nguyên thủy và vành nguyên tố mà đặc biệt là mối quan hệ giữa các vành này.

1.1 Modules

Định nghĩa. Cho R là một vành tùy ý và M là một nhóm cộng aben. M được gọi là một R -module nếu có một ánh xạ $f : M \times R \rightarrow M$

$$(m, r) \mapsto f(m, r) = mr$$

Sao cho $\forall m, m_1, m_2 \in M$ và $\forall a, b \in R$ thì:

i) $m(a + b) = ma + mb$

ii) $(m_1 + m_2)a = m_1a + m_2a$

iii) $(ma)b = m(ab)$.

Nếu R có chứa phần tử đơn vị 1 và $m1 = m, \forall m \in M$ thì ta gọi M là R -module Unitary.

Định nghĩa. M được gọi là R -module trung thành nếu $Mr = 0$ kéo theo $r = 0$. Điều này có nghĩa là nếu $r \neq 0$ thì $Mr \neq 0$.

Nếu M là một R -module thì ta đặt $A(M) = \{x \in R \mid Mx = (0)\}$ và gọi là tập các linh hóa tử của R -module M .

Bổ đề 1.1.1 $A(M)$ là một ideal hai phía của R . Hơn nữa, M là một $R/A(M)$ -module trung thành.

Chứng minh

- $A(M)$ là một ideal hai phía của R .

$$\forall x, y \in A(M) : M(x - y) = Mx - My = 0 \Rightarrow x - y \in A(M)$$

$\forall x \in A(M), \forall r \in R$, ta có :

$$M(xr) = (Mx)r = (0)r = (0) \Rightarrow xr \in A(M)$$

$$M(rx) = (Mr)x \subseteq Mx = (0) \Rightarrow M(rx) = (0) \Rightarrow rx \in A(M).$$

- M là một $R/A(M)$ -module trung thành.

Với phép nhân ngoài $M \times R/A(M) \rightarrow M$ được xác định như sau :

$$\forall m \in M, \forall r + A(M) \in R/A(M) : (m, r + A(M)) \mapsto m(r + A(M)) = mr.$$

Đây là một định nghĩa tốt vì nếu $r + A(M) = r' + A(M)$ thì $r - r' \in A(M)$

Suy ra $m(r - r') = 0, \forall m \in M \Rightarrow mr = mr' \Rightarrow m(r + A(M)) = m(r' + A(M))$. Hơn nữa, nếu $M(r + A(M)) = (0)$ thì $Mr = (0) \Rightarrow r \in A(M) \Rightarrow r + A(M) = 0$

Do đó M là một $R/A(M)$ -module trung thành. ■

Cho M là một $R/A(M)$ -module. $\forall a \in R$ ta định nghĩa ánh xạ $T_a : M \rightarrow M$ cho bởi công thức $mT_a = ma, \forall m \in M$. Vì M là một $R/A(M)$ -module và

$$(m_1 + m_2)T_a = m_1T_a + m_2T_a, \forall m_1, m_2 \in M \text{ nên } T_a \text{ là một tự đồng cấu nhóm cộng của } M.$$

Đặt $E(M)$ là tập tất cả các tự đồng cấu nhóm cộng của M . Khi đó, ta định nghĩa phép cộng và nhân như sau:

$\forall m \in M, \forall \Phi, \Psi \in E(M) : m(\Phi + \Psi) = m\Phi + m\Psi$ và $m(\Phi\Psi) = (m\Phi)\Psi$. Vậy $E(M)$ lập thành một vành với phép cộng và phép nhân ánh xạ thông thường.

Ta định nghĩa ánh xạ $\Phi : R \rightarrow E(M)$ sao cho $\Phi(a) = T_a, \forall a \in R$, ta thấy rằng $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$ và $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ nên Φ là một đồng cấu vành. Hơn nữa, $\ker \Phi = A(M)$. Thật vậy,

$$\forall a \in A(M) \Leftrightarrow Ma = (0) \Leftrightarrow MT_a = (0) \Leftrightarrow \Phi(a) = T_a = 0 \Leftrightarrow a \in \ker \Phi \Leftrightarrow A(M) = \ker \Phi.$$

Do đó ảnh đồng cấu của R trong $E(M)$ đẳng cấu với $R/A(M)$.

Từ đó ta có bổ đề sau.

Bổ đề 1.1.2 $R/A(M)$ đẳng cấu với vành con của $E(M)$.

Nếu M là một R -module trung thành thì $A(M) = (0)$ hay $\ker \Phi = (0)$. Khi đó Φ là một đơn cấu và ta có thể nhúng vành R vào $E(M)$.

Định nghĩa. Vành các giao hoán tử của R trên M là

$$C(M) = \{\psi \in E(M) \mid T_a\psi = \psi T_a, \forall a \in R\}$$

Tất nhiên $C(M)$ là vành con của $E(M)$. Hơn nữa, nếu $\psi \in C(M)$ thì

$\forall m \in M, \forall a \in R$ ta có:

$$(m\psi)a = (m\psi)T_a = m(\psi T_a) = m(T_a\psi) = (mT_a)\psi = (ma)\psi$$

Từ đó ta nói ψ không những là một tự đồng cấu của M như là một nhóm cộng giao hoán mà còn là một tự đồng cấu của M như là một R -module. Chúng ta xem $C(M)$ như là vành của tất cả các tự đồng cấu module của M

Định nghĩa. M được gọi là một R -module bất khả quy nếu $MR \neq (0)$ và M không có module con thực sự nào. Tức M chỉ có hai module con tầm thường là (0) và M .

Định lý 1.1.1 Nếu M là một R -module bất khả quy thì $C(M)$ là một thể (hay vành chia được).

Chứng minh

Hiển nhiên, $C(M)$ là vành con của vành $E(M)$ nên $C(M)$ là một vành. Ta cần chứng minh : $\forall \theta \in C(M), \theta \neq 0$ đều tồn tại phần tử khả nghịch trong $C(M)$. Trước hết ta chứng minh $\forall \theta \in C(M), \theta \neq 0$ tồn tại phần tử khả nghịch trong $E(M)$. Thật vậy, $\forall r \in R$ ta có: $(M\theta)r = (M\theta)T_r = M(\theta T_r) = M(T_r\theta) = (MT_r)\theta = (Mr)\theta \subset M\theta$ nên $M\theta$ là module con của M lại do $\theta \neq 0$ suy ra $M\theta \neq (0)$ và M là một R -module bất khả quy. Do đó $M\theta = M$ suy ra θ là một toàn cấu.

Mặt khác, $\ker \theta$ cũng là một module con của module bất khả quy M nên nếu $\ker \theta \neq (0)$ thì $\ker \theta = M$ do đó $\theta = 0$ (mâu thuẫn). Từ đó ta có $\ker \theta = 0$ hay θ là một đơn cấu. Vậy θ là một đẳng cấu suy ra luôn tồn tại đẳng cấu ngược $\theta^{-1} \in E(M)$. Khi đó vì $\theta \in C(M)$ nên $T_a\theta = \theta T_a, \forall a \in R \Rightarrow \theta^{-1}T_a = T_a\theta^{-1}, \forall a \in R \Rightarrow \theta^{-1} \in C(M)$. ■

Định nghĩa. Ideal phải ρ của R được gọi là chính quy nếu tồn tại phần tử $r \in R$ sao cho $x - rx \in \rho, \forall x \in R$.

Nếu vành R có đơn vị (hay chỉ cần có đơn vị trái) thì mọi ideal ρ của R đều là ideal chính quy. Thật vậy, khi đó ta lấy $r = 1 \in R$ thì

$$x - 1x = x - x = 0 \in \rho, \forall x \in R.$$

Bổ đề 1.1.3 Nếu M là một R -module bất khả quy thì M đẳng cấu (như là một module) với R -module thương R/ρ trong đó, ρ là một ideal phải, tối đại và chính quy nào đó của R . Ngược lại, nếu ρ là một ideal phải, tối đại và chính quy của R thì R/ρ là một R -module bất khả quy.

Chứng minh

Do M là một R -module bất khả quy nên $MR \neq (0)$. Ta đặt $S = \{u \in M \mid uR = (0)\}$ thì dễ dàng kiểm tra được S là một module con của module bất khả quy M nên nếu $S \neq (0)$ thì $S = M \Rightarrow MR = (0)$ (mâu thuẫn) do đó $S = (0)$ điều này cũng có nghĩa là $\forall m \in M$ nếu $m \neq 0$ thì $mR \neq (0)$. Mặt khác, mR lại là một module con của module bất khả quy M nên $mR = M$.

Bây giờ ta định nghĩa ánh xạ $\psi : R \rightarrow M$ xác định bởi $\psi(r) = mr, \forall r \in R$

Dễ dàng kiểm tra được ψ là một đồng cấu và do $mR = M$ nên ψ là một toàn cấu. Theo định lý Noether ta có đẳng cấu $R/\ker \psi \cong M$.

Đặt $\rho = \ker \psi = \{x \in R \mid mx = 0\}$. Ta đi chứng minh ρ là một ideal phải, tối đại và chính quy của R .

- Hiển nhiên, ρ là một ideal phải của R .
- ρ là một ideal phải, tối đại

Giả sử có ρ' là một ideal phải của R sao cho ρ' chứa ρ thực sự. Khi đó, $\rho'/\rho \neq (0)$ và ρ'/ρ là một module con của R/ρ .

Mặt khác $R/\rho \cong M$ nên R/ρ cũng là R -module bất khả quy do đó $\rho'/\rho = R/\rho \Rightarrow \rho' = R$.

Vậy ρ là một ideal phải, tối đại của R .

- Tính chính quy của ρ

Do $mR = M$ suy ra tồn tại $r \in R$ sao cho $mr = m$.

Khi đó $m(x - rx) = mx - mrx = mx - mx = 0 \Rightarrow x - rx \in \ker \psi = \rho, \forall x \in R$.

Ngược lại, giả sử ρ là một ideal phải, tối đại và chính quy của R . Ta sẽ chứng minh R/ρ là một R -module bất khả quy.

- Dễ thấy R/ρ là một R -module với phép nhân ngoài cũng là phép nhân trong vành R

- $(R/\rho)R \neq (0)$

Do ρ là một ideal phải chính quy của R nên tồn tại $r \in R$ sao cho $x - rx \in \rho, \forall x \in R$.

Khi đó $\exists x \in R$ sao cho $rx \notin \rho \Rightarrow (R/\rho)R \neq (0)$. Vì nếu $\forall x \in R$ mà $rx \in \rho$ thì do

$x - rx \in \rho, \forall x \in R \Rightarrow x \in \rho \Rightarrow \rho = R$ (mâu thuẫn)

- Do ρ là ideal phải tối đại nên R/ρ không có module con thực sự nào.

Vậy R/ρ là một R -module bất khả quy. ■

1.2 Căn Jacobson của một vành

Định nghĩa. Căn Jacobson của vành R kí hiệu là $J(R)$ hoặc $Rad(R)$ là tập hợp tất cả các phần tử của R linh hóa được tất cả các R -module bất khả quy.

Nếu R không có module bất khả quy, ta quy ước $J(R) = R$. Khi đó, vành R được gọi là vành Radical. Như vậy theo định nghĩa ta có:

$$J(R) = \{r \in R \mid Mr = (0) \text{ với mọi } R\text{-module bất khả quy } M\}$$

Theo bổ đề 1.1.3 thì vành R là vành Radical nếu trên R không có ideal phải, tối đại và chính quy.

Nhận xét. Nếu R có đơn vị 1 thì R không là vành Radical.

Ta có : $A(M) = \{r \in R \mid Mr = (0)\}$.

Khi đó : $J(R) = \bigcap_M A(M)$, với M chạy qua khắp tất cả các R -module bất khả quy. Do $A(M)$ là một ideal hai phía của R nên $J(R)$ cũng là một ideal hai phía của R .

Mặt khác, vì chỉ xét M như là một R -module phải nên $J(R)$ còn được gọi là căn Jacobson phải của vành R . Tương tự, chúng ta có thể định nghĩa căn Jacobson trái của vành R . Thật may mắn là căn Jacobson phải và căn Jacobson trái của vành R lại trùng nhau nên không cần phân biệt trái hay phải đối với các căn Jacobson này.

Để hiểu rõ hơn về cấu trúc căn Jacobson của một vành, chúng ta sẽ cố gắng mô tả chi tiết cấu trúc của nó. Bản chất của căn Jacobson chính là giao của một lớp các ideal đặc biệt.

Định nghĩa. Với ρ là một ideal phải của R thì $(\rho : R) = \{x \in R \mid Rx \subset \rho\}$

- Xét trường hợp ρ là ideal phải, tối đại, chính quy của R và đặt

$M = R/\rho$ thì theo bổ đề 1.1.3 ta có M là một R -module bất khả quy và hơn nữa:

$$A(M) = \{r \in R \mid Mr = (0)\} = \{r \in R \mid (R/\rho)r = (0)\} = \{r \in R \mid Rx \subset \rho\} = (\rho : R) \text{ Do đó ta cũng có } (\rho : R) \text{ là một ideal hai phía của } R.$$

- Mặt khác ρ chính quy nên tồn tại $a \in R$ sao cho $x - ax \in \rho, \forall x \in R$.

Do đó nếu $x \in (\rho : R)$ thì $ax \in Rx \subset \rho$ suy ra $x \in \rho$. Vậy ta được $(\rho : R) \subset \rho$.

- Giả sử có ρ' là một ideal hai phía của R sao cho $\rho' \subset \rho$.

Khi đó $\forall x \in \rho'$ thì $Rx \subset \rho' \subset \rho \Rightarrow x \in (\rho : R)$ suy ra $\rho' \subset (\rho : R)$

Vậy $(\rho : R)$ là một ideal hai phía lớn nhất của R nằm trong ρ . ■

Từ những kết quả trên ta đi đến định lý sau.

Định lý 1.2.1 $J(R) = \bigcap_{\rho} (\rho : R)$. Trong đó ρ chạy qua tất cả các ideal phải, tối đại, chính quy của R và $(\rho : R)$ là một ideal hai phía lớn nhất của R nằm trong ρ .

Bổ đề 1.2.1 Nếu ρ là một ideal phải, chính quy, thực sự của R thì ρ có thể nhúng vào một ideal phải, tối đại, chính quy của R .

Chứng minh

Vì ρ là một ideal phải, chính quy, thực sự của R nên $\rho \neq R$ và tồn tại $a \in R$ sao cho $x - ax \in \rho, \forall x \in R$.

Suy ra $a \notin \rho$, vì nếu $a \in \rho$ thì $ax \in \rho \Rightarrow x \in \rho, \forall x \in R \Rightarrow \rho = R$ (mâu thuẫn).

Gọi $\mathfrak{M}$ là tập tất cả các ideal phải thực sự của R có chứa ρ . Nếu $\rho' \in \mathfrak{M}$ thì $a \notin \rho'$, vì nếu $a \in \rho'$ thì $ax \in \rho'$ và $x - ax \in \rho \subset \rho', \forall x \in R \Rightarrow x \in \rho', \forall x \in R \Rightarrow \rho' = R$ (mâu thuẫn).

Áp dụng bổ đề Zorn cho tập $\mathfrak{M}$ là tập tất cả các ideal phải, thực sự của R có chứa ρ ta được ρ_0 là một phân tử tối đại trong $\mathfrak{M}$.

Khi đó: $\rho \subset \rho_0$, ρ_0 chính quy vì $x - ax \in \rho \subset \rho_0, \forall x \in R$ và ρ_0 là một ideal phải tối đại của R vì nếu ρ_1 là một ideal phải của R có chứa ρ_0 mà $\rho_1 \neq R$ thì $\rho_1 \in \mathfrak{M}$, do tính tối đại của ρ_0 suy ra ρ_0 chứa ρ_1 hay $\rho_1 = \rho_0$. ■

Định lý 1.2.2 $J(R) = \bigcap_{\rho} \rho$. Trong đó ρ chạy qua tất cả các ideal phải, tối đại và chính quy của R .

Chứng minh

- Theo định lý 1.2.1 ta có $J(R) = \bigcap_{\rho} (\rho : R)$ vì $(\rho : R) \subset \rho$ nên

$J(R) \subset \bigcap_{\rho} \rho$ Trong đó ρ chạy qua tất cả các ideal phải, tối đại và chính quy của R .

- Chứng minh bao hàm ngược lại $\bigcap_{\rho} \rho \subset J(R)$:

Ta đặt $\tau = \bigcap_{\rho} \rho$, trong đó ρ chạy qua tất cả các ideal phải, tối đại và chính quy của R .

Với mỗi $x \in \tau$, xét tập $\rho' = \{xy + y | y \in R\}$ ta chứng minh $\rho' = R$. Giả sử $\rho' \neq R$, khi đó ρ'

là một ideal phải, chính quy, thực sự của R . ρ' chính quy là do ta chọn $a = -x$, suy ra $y - ay = y + xy \in \rho', \forall y \in R$. Theo bổ đề 1.2.1 ta có ρ' được nhúng vào một ideal phải, tối đại, chính quy ρ_0 nào đó của R . Khi đó, $\forall y \in R$ do $x \in \tau \subset \rho_0 \Rightarrow x \in \rho_0 \Rightarrow xy \in \rho_0$ và $y + xy \in \rho_0$ nên $y \in \rho_0$, suy ra $R \subset \rho_0$ (mâu thuẫn với tính tối đại của ρ_0).

Vậy $\rho' = R$. Do đó với mỗi $x \in \tau$ tồn tại $w \in R$ sao cho $-x = w + xw$ hay $x + w + xw = 0$ (*).

Ta chứng minh $\tau \subset J(R)$ bằng phản chứng. Giả sử $\tau \not\subset J(R)$, khi đó tồn tại một module bất khả quy M không bị τ linh hóa nghĩa là $M\tau \neq (0)$, suy ra tồn tại $m \in M$ sao cho $m\tau \neq (0)$. Ta dễ dàng kiểm tra $m\tau$ là một module con của M , lại do M là module bất khả quy nên $m\tau = M$. Do đó tồn tại $t \in \tau$ sao cho $mt = -m$, lại do $t \in \tau$ theo (*) thì tồn tại $s \in R$ sao cho $t + s + ts = 0$. Khi đó $0 = m(t + s + ts) = mt + ms + mts = -m + ms - ms = -m$. Suy ra $m = 0$ (mâu thuẫn với $m\tau \neq (0)$). Vậy $\tau \subset J(R)$ hay $\bigcap_{\rho} \rho \subset J(R)$. ■

Như vậy, chúng ta đã khảo sát cấu trúc của căn Jacobson trên cơ sở M là một R -module phải. Trong trường hợp M là một R -module trái ta cũng có kết quả hoàn toàn tương tự cho căn Jacobson trái.

Định nghĩa. Phần tử $a \in R$ được gọi là tựa chính quy phải nếu tồn tại $a' \in R$ sao cho $a + a' + aa' = 0$. Phần tử a' được gọi là tựa nghịch đảo phải của a .

Tương tự, ta cũng có định nghĩa phần tử tựa chính quy trái và phần tử tựa nghịch đảo trái.

Chú ý. Nếu R có phần tử đơn vị 1 thì phần tử $a \in R$ là tựa chính quy phải khi và chỉ khi $1 + a$ có nghịch đảo phải trong R .

Chứng minh

Giả sử phần tử $a \in R$ là tựa chính quy phải, khi đó tồn tại $a' \in R$ sao cho $a + a' + aa' = 0 \Rightarrow 1 + a + a' + aa' = 1 \Rightarrow (1 + a)(1 + a') = 1$. Do đó $1 + a$ có nghịch đảo phải là $1 + a'$.

Ngược lại, giả sử $1 + a$ có nghịch đảo phải trong R , khi đó tồn tại $r \in R$ sao cho $(1 + a)r = 1 \Rightarrow r - 1 + ar = 0$. Đặt $a' = r - 1$, ta có đẳng thức $a + a' + aa' = 0$. Do đó phần tử a là tựa chính quy phải. ■

Định nghĩa. Một ideal phải của R được gọi là tựa chính quy phải nếu mỗi phần tử của nó là tựa chính quy phải.

Từ chứng minh của định lý 1.2.2 ta đi đến hai kết quả sau:

1. $J(R)$ là tựa chính quy phải
2. Nếu ρ là một ideal phải tựa chính quy phải của R thì $\rho \subset J(R)$

Do đó chúng ta cũng có định lý sau

Định lý 1.2.3 $J(R)$ là một ideal phải tựa chính quy phải của R và nó chứa tất cả các ideal phải, tựa chính quy phải của R . Vì thế, $J(R)$ là một ideal phải, tựa chính quy phải, tối đại duy nhất của R .

Trong khi xây dựng căn Jacobson, ta chỉ xét M như là R -module phải nên $J(R)$ còn được gọi là căn Jacobson phải của R , kí hiệu là $J_{phải}(R)$. Tương tự, nếu ta xét M như là R -module trái thì $J(R)$ được gọi là căn Jacobson trái của R , kí hiệu là $J_{trái}(R)$.

Bây giờ ta sẽ đi chứng minh $J_{phải}(R) = J_{trái}(R)$.

Thật vậy, giả sử a vừa là phần tử tựa chính quy phải vừa là phần tử tựa chính quy trái của R . Khi đó tồn tại $b, c \in R$ sao cho $a + b + ba = 0$ và $a + c + ac = 0$ suy ra $ac + bc + bac = 0$ và $ba + bc + bac = 0$, do đó $ba = ac$ mà $a + b + ba = a + c + ac = 0 \Rightarrow b = c$. Nghĩa là, tựa nghịch đảo trái và tựa nghịch đảo phải của một phần tử là trùng nhau.

Giả sử $a \in J_{phải}(R)$ khi đó tồn tại $a' \in R$ sao cho $a + a' + aa' = 0$ suy ra $a' = -a - aa'$ và $a \in J_{phải}(R)$ nên $a' \in J_{phải}(R)$, tương tự vì $a' \in J_{phải}(R)$, khi đó lại tồn tại $a'' \in J_{phải}(R)$ sao cho $a' + a'' + a'a'' = 0$. Do đó a' có tựa nghịch đảo trái là a và tựa nghịch đảo phải là a'' nên $a = a''$. Dẫn đến $a' + a + a'a = 0$ hay a là phần tử tựa chính quy trái. Vậy $J_{phải}(R)$ cũng là một ideal tựa chính quy trái của R nên $J_{phải}(R) \subset J_{trái}(R)$, tương tự, ta cũng chứng minh được $J_{trái}(R)$ là một ideal tựa chính quy phải nên $J_{trái}(R) \subset J_{phải}(R)$

Vậy $J_{phải}(R) = J_{trái}(R)$. ■

Định nghĩa

- a) Phần tử $a \in R$ được gọi là lũy linh nếu tồn tại số nguyên dương m sao cho $a^m = 0$
- b) Một ideal phải (trái, hai phía) của R được gọi là nil-ideal nếu mọi phần tử của nó đều lũy linh.
- c) Một ideal phải (trái, hai phía) ρ của R được gọi là lũy linh nếu tồn tại

một số nguyên dương m sao cho $a_1 a_2 \dots a_m = 0, \forall a_1, a_2, \dots, a_m \in \rho$. Điều này có nghĩa là $\rho^m = (0)$.

Nhận xét.

- Một ideal phải (trái, hai phía) lũy linh là một nil-ideal, nhưng điều ngược lại thì không đúng
- Mọi phần tử lũy linh đều tựa chính quy trái (phải)

Thật vậy, giả sử $a \in R$ là một phần tử lũy linh, khi đó tồn tại số nguyên dương m sao cho $a^m = 0$ và ta đặt $b = -a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^{m-1} a^{m-1}$

Ta có : $ab = ba = -a^2 + a^3 - a^4 + \dots + (-1)^{m-2} a^{m-1}$

Suy ra $b + ab = b + ba = -a \Rightarrow a + b + ab = a + b + ba = 0$

Do đó mà mọi nil-ideal cũng là ideal tựa chính quy trái và cũng là ideal tựa chính quy phải.

Từ đó dẫn đến bổ đề sau

Bổ đề 1.2.2 Mọi nil-ideal phải (trái) của R đều chứa trong $J(R)$.

Định nghĩa. A được gọi là đại số trên trường F nếu A thỏa mãn các điều kiện sau:

- A là một vành
- A là không gian vector trên trường F
- $\forall a, b \in A, \forall \alpha \in F : \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$

Nếu A có đơn vị là 1 thì $F1$ nằm trong tâm của A . Thật vậy, $\forall \alpha \in F$ ta có $(\alpha 1)a = \alpha(1a) = \alpha(a1) = a(\alpha 1), \forall a \in A$.

Lưu ý. Khái niệm ideal của một đại số nghĩa là nó vừa có cấu trúc ideal của một vành, vừa có cấu trúc một không gian vector con.

Bổ đề 1.2.3 Nếu A là một đại số trên trường F thì căn Jacobson của đại số A trùng với căn Jacobson của vành A .

Chứng minh

Giả sử ρ là ideal phải tối đại chính quy của A thì ρ là vành con của A nên ρ là một vành. Hơn nữa, ρ là không gian con của A trên F , tức $F\rho \subset \rho$. Thật vậy, giả sử $F\rho \not\subset \rho$ thì $F\rho + \rho = A$ (do ρ là ideal phải tối đại của A và $F\rho$ là một ideal phải của A). Do đó, $A^2 = (F\rho + \rho)A \subset F\rho A + \rho A \subset \rho(FA) + \rho A \subset \rho$. Lại do ρ là chính quy nên tồn tại $a \in A$ sao cho $x - ax \in \rho, \forall x \in A$ nhưng $ax \in A^2 \subset \rho$ suy ra $x \in \rho, \forall x \in A \Rightarrow \rho = A$ (mâu thuẫn).

Ta có ρ là không gian con của A trên F . Từ đó, mọi ideal phải tối đại chính quy của A xem như một vành cũng chính là một ideal phải tối đại chính quy của A xem như một đại số.

Vậy theo định lý 1.2.2 thì $J_{\text{vành}}(A) = J_{\text{đại số}}(A)$. ■

1.3 Một số vành đặc biệt

1.3.1 Vành nửa đơn

Định nghĩa. Vành R được gọi là vành nửa đơn (hay nửa nguyên thủy) nếu $J(R) = (0)$.

Một vấn đề được đặt ra là nếu ta thương hóa vành R bởi căn Jacobson của nó thì vành thương nhận được sẽ có căn Jacobson như thế nào, câu trả lời được khẳng định trong định lý sau.

Định lý 1.3.1.1 Giả sử R là một vành thì $R/J(R)$ là một vành nửa đơn.

Chứng minh

Ta cần chứng minh $J(R/J(R)) = (0)$.

Đặt $\bar{R} = R/J(R)$ và ρ là một ideal phải, tối đại, chính quy của R . Khi đó $J(R) \subset \rho$. Do đó theo định lý đồng cấu, $\bar{\rho} = \rho/J(R)$ là một ideal phải, tối đại của $\bar{R}$.

Thật vậy, do $J(R) \subset \rho \subset R$ nên ta có: $R/\rho \cong (R/J(R))/(\rho/J(R))$

Từ tính tối đại của ρ trong vành R ta suy ra tính tối đại của $\rho/J(R)$ trong vành thương $R/J(R)$.

Ta sẽ chứng minh $\bar{\rho}$ cũng chính quy trong vành $\bar{R}$.

Do ρ chính quy nên tồn tại $a \in R$ sao cho $x - ax \in \rho, \forall x \in R$. Suy ra tồn tại $\bar{a} \in \bar{R}$ sao cho $\bar{x} - \bar{a}\bar{x} \in \bar{\rho}, \forall \bar{x} \in \bar{R}$.

Do $J(R) = \cap \rho$, với ρ chạy qua khắp các ideal phải, tối đại, chính quy của R nên ta có $\cap \bar{\rho} = (0)$. Theo định lý 1.2.2 $J(\bar{R})$ chính là giao của tất cả các ideal phải, tối đại, chính quy của $\bar{R}$ nên $J(\bar{R}) \subset \cap \bar{\rho} = (0)$.

Vậy $J(\bar{R}) = (0)$. ■

Tính chất của căn Jacobson trong định lý 1.3.1.1 là một trong những tính chất “radical-like” – “giống như căn”. Những nghiên cứu về các tính chất của căn Jacobson tổng quát đã được Amitssur và Kurosh tiến hành.

Từ nay để tránh nặng nề về mặt thuật ngữ, ta sẽ gọi một ideal hai phía của vành R là một ideal.

Định lý 1.3.1.2 Nếu A là một ideal của vành R thì $J(A) = A \cap J(R)$.

Chứng minh

• Nếu $a \in A \cap J(R)$ thì $a \in J(R)$, suy ra a là phần tử tựa chính quy phải của R nên tồn tại $a' \in R$ sao cho $a + a' + aa' = 0$, do đó $a' = -a - aa' \in A$, vậy a cũng là phần tử tựa chính quy phải của A . Suy ra, $A \cap J(R)$ là ideal tựa chính quy phải của A . Theo định lý 1.2.3 ta có $A \cap J(R) \subset J(A)$.

• Ngược lại, ta lấy ρ là ideal phải, tối đại, chính quy của R và đặt $\rho_A = A \cap \rho$. Nếu $A \not\subset \rho$ thì do tính tối đại của ρ ta có $A + \rho = R$. Do đó theo định lý đồng cấu ta có : $R/\rho = (A + \rho)/\rho \cong A/(A \cap \rho) = A/\rho_A$

Do ρ tối đại trong R nên R/ρ bất khả quy và do đó A/ρ_A cũng bất khả quy.

Suy ra ρ_A là ideal phải tối đại của A .

Ta sẽ chứng minh ρ_A chính quy trong A . Thật vậy, do ρ chính quy trong R nên tồn tại $b \in R$ sao cho $x - bx \in \rho, \forall x \in R$. Ta có: $b \in R = A + \rho \Rightarrow b = a + r$ với $a \in A, r \in \rho$. Khi đó $x - bx = x - ax - rx \in \rho$, do $rx \in \rho$ nên $x - ax \in \rho$.

Tóm lại, tồn tại $a \in A$ sao cho: $x - ax \in \rho \cap A = \rho_A, \forall x \in A$, hay ρ_A chính quy trong A . Vậy ta có $J(A) \subset \rho_A$ với mọi ρ là ideal phải, tối đại, chính quy của R mà $A \not\subset \rho$.

Nếu $A \subset \rho$ thì $\rho_A = A \cap \rho = A$ do đó $J(A) \subset \rho_A$. Với ρ chạy qua khắp các ideal phải, tối đại, chính quy của R ta có $J(A) \subset \bigcap \rho_A = \bigcap (A \cap \rho) = (\bigcap \rho) \cap A = J(R) \cap A$.

Vậy $J(A) = A \cap J(R)$. ■

Hệ quả. Nếu R là vành nửa đơn thì mọi ideal của R cũng là vành nửa đơn.

Chú ý. Kết quả của định lý 1.3.1.2 sẽ không còn đúng nếu A là ideal một phía của R .

Ví dụ. Cho R là vành các ma trận vuông cấp 2 trên trường F , trước tiên ta chứng tỏ R không có các ideal hai phía không tầm thường.

Thật vậy, giả sử A là một ideal hai phía của R và $A \neq (0)$.

Với $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ là đơn vị của vành R .

Ta đặt $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ vì $A \neq (0)$ nên tồn tại

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ mà } a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in A.$$

Giả sử $a_{11} \neq 0$, do A là một ideal hai phía của R nên

$$E_{11}aE_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{11} \in A \text{ và } E_{21}E_{11}E_{12} = E_{22} \in A, \text{ do đó}$$

$$E = E_{11} + E_{22} \in A. \text{ Suy ra } A = R$$

Vậy R không có các ideal hai phía không tầm thường.

Vì có đơn vị nên $J(R) \neq R$ và $J(R)$ là một ideal hai phía của R nên $J(R) = (0)$. Vậy R là vành nửa đơn.

Bây giờ ta xét $\rho = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in F \right\}$, dễ thấy ρ là một ideal phải của R . Ta lại có

$$\rho_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \beta \in F \right\} \text{ là một ideal phải của } \rho \text{ và } \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ do đó } \rho_1 \text{ là một nil-}$$

ideal phải khác (0) của ρ suy ra $\rho_1 \subset J(\rho)$ và $J(\rho) \neq (0)$

Mà $\rho \cap J(R) = (0)$ (do $J(R) = (0)$). Vậy $J(\rho) \neq \rho \cap J(R)$. ■

Một tính chất “radical-like” cơ bản khác nữa là kết quả nhận được của radical khi ta thay đổi từ một vành R sang vành các ma trận vuông cấp m lấy hệ tử trên vành R . Nếu R là một vành, kí hiệu R_m là vành các ma trận vuông cấp m trên R và $J(R)_m$ là vành các ma trận vuông cấp m trên $J(R)$ thì ta có định lý sau.

Định lý 1.3.1.3 $J(R_m) = J(R)_m$

Chứng minh

Lấy M là một R -module bất khả quy.

Đặt $M^{(m)} = \{(m_1, m_2, \dots, m_m) \mid m_i \in M\}$. Dễ dàng kiểm tra được $M^{(m)}$ là một R_m -module với phép cộng là phép cộng theo từng thành phần, phép nhân ngoài chẳng qua là phép nhân vào bên phải của một bộ trong $M^{(m)}$ với một ma trận trong R_m . Hơn nữa, $M^{(m)}$ còn là một R_m -module bất khả quy.

Thật vậy:

- Chứng minh $M^{(m)}R_m \neq (0)$

Do M là một R -module bất khả quy nên $MR \neq (0)$, do đó tồn tại $m \in M, r \in R$ sao cho $mr \neq 0$. khi đó

$$(m, m, \dots, m) \begin{bmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r \end{bmatrix} = (mr, mr, \dots, mr) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

Vậy $M^{(m)}R_m \neq (0)$.

- Chứng minh $M^{(m)}$ không có module con không tầm thường

Lấy $N \neq (0)$ là module con của $M^{(m)}$. Ta chứng minh $N = M^{(m)}$ hay chỉ cần chứng minh $M^{(m)} \subset N$. Thật vậy, do $N \neq (0)$ nên tồn tại $(m_1, m_2, \dots, m_m) \in N$ và $(m_1, m_2, \dots, m_m) \neq (0, 0, \dots, 0)$, do đó tồn tại $m_i \neq 0$ với $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Do $m_i R$ là một module con của module bất khả quy M mà $m_i R \neq (0)$ nên $m_i R = M$. Khi đó, với mọi $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in M^{(m)}$ luôn tồn tại $r_j \in R$, với $j = \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho $m_i r_j = x_j$. Do đó:

$$(m_1, \dots, m_i, \dots, m_m) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 & r_2 & \dots & r_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = (m_i r_1, m_i r_2, \dots, m_i r_m) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Suy ra $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in N$ hay $M^{(m)} \subset N$.

Vậy $M^{(m)}$ là một R_m -module bất khả quy.

- Chứng minh $J(R_m) \subset J(R)_m$

Nếu $(\alpha_{ij}) \in J(R_m)$ thì $M^{(m)}(\alpha_{ij}) = (0, 0, \dots, 0), \forall i, j = \overline{1, m}$.

Khi đó với mọi $m_i \in M, (m_1, m_2, \dots, m_m)(\alpha_{ij}) = (0, 0, \dots, 0), \forall i, j = \overline{1, m}$. Suy ra

$M\alpha_{ij} = (0), \forall i, j = \overline{1, m}$ và do đó $\alpha_{ij} \in J(R), \forall i, j = \overline{1, m}$.

Từ đó ta có $(\alpha_{ij}) \in J(R)_m$. Vậy $J(R_m) \subset J(R)_m$.

- Chứng minh $J(R)_m \subset J(R_m)$.

Thật vậy, xét

$$\rho_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mid \alpha_{1j} \in J(R) \right\}$$

Dễ dàng kiểm tra được ρ_1 là một ideal phải của R_m .

Ta tiếp tục chứng minh ρ_1 là ideal tựa chính quy phải của R_m .

$$\text{Với mọi } X \in \rho_1, X = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ nên } \alpha_{11} \in J(R) \Rightarrow \alpha_{11} \text{ là phần tử}$$

tựa chính quy phải của R do đó tồn tại $\alpha'_{11} \in R$ sao cho: $\alpha_{11} + \alpha'_{11} + \alpha_{11}\alpha'_{11} = 0$

$$\text{Lấy } Y = \begin{bmatrix} \alpha'_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \text{ Đặt } W = X + Y + XY \text{ thì ta có:}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ do đó } W^2 = 0 \text{ nên } W \text{ là phần tử lũy linh và nó cũng là phần tử tựa}$$

chính quy phải của R_m , khi đó tồn tại $Z \in R_m$ sao cho: $W + Z + WZ = 0$, thay

$W = X + Y + XY$ thì ta suy ra $X + (Y + Z + YZ) + X(Y + Z + YZ) = 0$, tức X là phần tử tựa

chính quy phải của R_m . Vậy ρ_1 là một ideal phải tựa chính quy phải của R_m và theo định lý

1.2.3 thì $\rho_1 \subset J(R_m)$.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\rho_i = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mid \alpha_{ij} \in J(R) \right\} \text{ là ideal phải tựa chính quy phải của } R_m \text{ và do đó}$$

$$\rho_i \subset J(R_m), \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Vì $J(R_m)$ là một ideal của R_m nên $J(R_m)$ đóng đối với phép cộng do đó ta có $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_m \subset J(R_m)$ hay $J(R)_m \subset J(R_m)$. ■

1.3.2 Vành Artin

Định nghĩa. Vành R được gọi là vành Artin phải nếu mọi tập khác rỗng các ideal phải của nó đều có phần tử tối tiểu.

Để ngắn gọn ta thường gọi vành Artin phải là vành Artin.

Dễ thấy rằng một vành là vành Artin khi và chỉ khi mọi dãy giảm các ideal phải của nó

$\rho_1 \supset \rho_2 \supset \dots \supset \rho_m \dots$ đều dừng tức $\exists n \in \mathbb{N}$ sao cho $\rho_n = \rho_{n+1} = \dots$

Một vài ví dụ của vành Artin

1. Một trường, thể (vành chia được) là vành Artin.
2. Vành các ma trận vuông cấp n trên một trường hay thể là vành Artin.
3. Tổng trực tiếp hữu hạn của các vành Artin là vành Artin.
4. Ảnh đồng cấu của vành Artin là vành Artin, vành thương của vành Artin là vành Artin.

Đối với các vành Artin thì căn Jacobson của nó khá đặc biệt, ta sẽ thấy điều này trong định lý sau.

Định lý 1.3.2.1 Nếu R là vành Artin thì $J(R)$ là một ideal lũy linh.

Chứng minh

Đặt $J = J(R)$. Xét dãy giảm các ideal phải của R : $J \supset J^2 \supset \dots \supset J^n \supset \dots$. Vì R là vành Artin nên tồn tại một số nguyên n sao cho $J^n = J^{n+1} = \dots = J^{2n} = \dots$. Do đó, nếu $xJ^{2n} = (0)$ thì $xJ^n = (0)$ (vì $J^{2n} = J^n$)

Ta sẽ chứng minh $J^n = (0)$. Thật vậy, đặt $W = \{x \in J \mid xJ^n = (0)\}$ thì W là một ideal của R .

Nếu $J^n \subset W$ thì $J^n J^n = (0)$, do đó $J^n = \dots = J^{2n} = (0)$.

Nếu $J^n \not\subset W$ thì ta xét vành thương $\bar{R} = R/W$ và ta có $\bar{J}^n = J^n/W \neq (0)$

Nếu $\overline{xJ^n} = (0)$ thì $xJ^n \subset W$ do đó $(0) = xJ^n J^n = xJ^{2n} = xJ^n$ suy ra $x \in W$ dẫn đến $\bar{x} = \bar{0}$.

Khi đó, $\overline{xJ^n} = (0)$ thì ta suy ra $\bar{x} = \bar{0}$. (*)

Vì R là vành Artin nên $\bar{R} = R/W$ cũng là vành Artin và nếu $\bar{J}^n \neq (0)$ ta suy ra $\bar{J}^n$ chứa một ideal phải tối tiểu $\bar{\rho} \neq (0)$, do tính tối tiểu nên ideal phải $\bar{\rho}$ cũng là một $\bar{R}$ -

module bất khả quy. Mặt khác, $\overline{J^n} \subset J(\overline{R})$ nên $\overline{\rho J^n} = (0)$ theo (*) suy ra $\overline{\rho} = (0)$ (mâu thuẫn $\overline{\rho} \neq (0)$).

Vậy $J^n = (0)$ và định lý được chứng minh. ■

Hệ quả. Trong một vành Artin, mọi nil-ideal đều là ideal lũy linh.

Nhận xét. Nếu vành R có ideal phải lũy linh khác (0) thì nó sẽ có ideal hai phía lũy linh khác (0) . Thật vậy, cho R là một vành bất kì và giả sử rằng $\rho \neq (0)$ là một ideal phải lũy linh của R .

- Nếu $R\rho = (0)$ thì hiển nhiên $R\rho \subset \rho$, khi đó ρ là ideal hai phía của R

Vậy ρ là ideal hai phía lũy linh khác (0) của R

- Nếu $R\rho \neq (0)$ thì $RR\rho \subset R\rho$ và $R\rho R \subset R\rho$ (ρ là ideal phải của R)

nên $R\rho$ là ideal hai phía của R . Vì ρ là một ideal phải lũy linh của R nên tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $\rho^m = (0)$, khi đó:

$$(R\rho)^m = R\rho R\rho \dots R\rho = R(\rho R)(\rho R) \dots (\rho R)\rho \subset \rho^m = (0) \Rightarrow (R\rho)^m = (0)$$

Vậy $R\rho$ là ideal hai phía lũy linh khác (0) của R . ■

Định nghĩa. Phần tử $e \neq 0$ trong vành R được gọi là phần tử lũy đẳng nếu $e^2 = e$.

Bổ đề 1.3.2.1 Cho R là vành không có ideal lũy linh khác (0) . Giả sử $\rho \neq (0)$ là một ideal phải, tối tiểu của R . Khi đó, tồn tại một phần tử lũy đẳng $e \in R$ sao cho $\rho = eR$.

Chứng minh

Vì R không có ideal lũy linh khác (0) nên theo nhận xét ở trên thì R cũng không có ideal phải lũy linh khác không và do đó $\rho^2 \neq (0)$. Khi đó, tồn tại $x \in \rho$ sao cho $x\rho \neq (0)$ và $x\rho \subset \rho$ vì ρ là ideal phải của R nên $x\rho$ cũng là ideal phải của R , do tính tối tiểu của ρ ta suy ra $x\rho = \rho$, do đó tồn tại $e \in \rho$ sao cho $xe = x \Rightarrow xe^2 = xe \Rightarrow x(e^2 - e) = 0$. Đặt

$$\rho_0 = \{a \in \rho \mid xa = 0\}, \text{ dễ thấy } \rho_0 \text{ là một ideal phải của } R \text{ và } \rho_0 \subset \rho \text{ và } \rho_0 \neq \rho \text{ vì } x\rho \neq (0).$$

Do tính tối tiểu của ρ ta suy ra $\rho_0 = (0)$. Ta có $x(e^2 - e) = 0 \Rightarrow e^2 - e \in \rho_0 \Rightarrow e^2 - e = 0$ hay $e^2 = e$. Vì $xe = x \neq 0$ nên $e \neq 0$.

Lại do $e \in \rho$ và ρ là ideal phải của R nên $eR \subset \rho$ và eR cũng là một ideal phải của R mà $eR \neq (0)$ (do $eR \supset e^2 = e \neq 0$) do tính tối tiểu của ρ nên $\rho = eR$. ■

Chúng ta thấy rằng trong một vành Artin một ideal phải chứa những phần tử lũy linh thì tự bản thân nó cũng là một ideal lũy linh. Điều gì xảy ra khi mà một ideal phải chứa những phần tử không lũy linh? Mục đích của chúng ta là chứng tỏ rằng khi đó nó phải chứa một phần tử lũy đẳng khác 0.

Để xác nhận điều này chúng ta cần có bổ đề sau.

Bổ đề 1.3.2.2 Cho R là một vành và giả sử tồn tại phần tử $a \in R$ sao cho $a^2 - a$ là phần tử lũy linh. Khi đó, hoặc a là phần tử lũy linh hoặc tồn tại đa thức $q(x)$ với hệ số nguyên sao cho $e = aq(x)$ là phần tử lũy đẳng khác 0.

Chứng minh

Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$(a^2 - a)^k = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^k C_k^i (a^2)^{k-i} (-1)^i a^i = \sum_{i=0}^k C_k^i a^{2k-i} (-1)^i = 0 \text{ suy ra } a^k = a^{k+1} p(a) \text{ trong đó, } p(x)$$

là một đa thức hệ số nguyên. Ta có $a^k = a^{k+1} p(a) = a \cdot a^k p(a) = a(a^{k+1} p(a)) p(a) = a^{k+2} p(a)^2$ tiếp tục như vậy ta sẽ được $a^k = a^{2k} P(a)^k$. Ta suy ra $a^k = 0$ hoặc $a^k \neq 0$. Nếu $a^k \neq 0$ thì đặt $e = a^k p(a)^k \neq 0$ và $e^2 = a^{2k} P(a)^{2k} = a^k p(a)^k = e$. Vậy e là phần tử lũy đẳng và tồn tại $q(x) = x^{k-1} p(x)^k$ với hệ số nguyên để $e = aq(a)$. ■

Bây giờ, chúng ta đi chứng minh định lý mà ta đề cập ở phần trên.

Định lý 1.3.2.2 Nếu R là vành Artin và $\rho \neq (0)$ là một ideal phải không lũy linh của R thì ρ có chứa phần tử lũy đẳng khác 0.

Chứng minh

Do ρ là một ideal phải không lũy linh của R , theo định lý 1.3.2.1 thì $\rho \not\subset J(R)$. Đặt $\bar{R} = R/J(R)$, do R là vành Artin nên $\bar{R}$ cũng là vành Artin và theo định lý 1.3.1.1 thì $\bar{R}$ cũng là vành nửa đơn nên vành $\bar{R}$ không có ideal lũy linh khác (0). $\bar{\rho} = \rho/J(R)$ vì $\rho \not\subset J(R)$ nên $\bar{\rho} \neq (0)$ suy ra nó chứa một ideal phải tối tiểu $\bar{\rho}_0$ của $\bar{R}$. Theo chứng minh bổ đề 1.3.2.1 $\bar{\rho}_0$ chứa một phần tử lũy đẳng $\bar{e} \neq 0$.

Xét ánh xạ $\varphi: R \rightarrow \bar{R} = R/J(R)$ là đồng cấu chiếu sao cho với $a \in \rho$, $\varphi(a) = \bar{a} = \bar{e}$, do đó $\varphi(a^2 - a) = \bar{e}^2 - \bar{e} = 0 \Rightarrow a^2 - a \in J(R) \Rightarrow a^2 - a$ lũy linh.

Do $\bar{a}^{-k} = \bar{e}^{-k} = \bar{e} \neq 0, \forall k \in N$ nên a không lũy linh, theo bổ đề 1.3.2.2 tồn tại một đa thức $q(x)$ hệ số nguyên sao cho $e = aq(a)$ là một phần tử lũy đẳng khác 0. Vì $a \in \rho$ nên $e \in \rho$. ■

Định lý 1.3.2.3 Cho R là một vành tùy ý và $e \in R$ là một phần tử lũy đẳng. khi đó ta có $J(eRe) = eJ(R)e$.

Chứng minh

- Chứng minh $J(eRe) \subset eJ(R)e$

Cho M là một R -module bất khả quy. Ta sẽ chứng minh hoặc $Me = (0)$ hoặc Me là một eRe -module bất khả quy.

Thật vậy, giả sử $Me \neq (0) \Rightarrow \exists m \in M : me \neq 0$. Ta có $(me)(eRe) = meRe$.

Dễ thấy meR là module con của R -module bất khả quy M và $meR \neq (0)$ suy ra $meR = M$ do đó $meRe = Me$. Ta có $MeeRe = MeRe \neq (0)$ và gọi $N \neq (0)$ là module con của eRe -module Me . Vì $meRe = Me$ suy ra $N = m_0eRe \neq (0)$ với $m_0 \in M$ nên ta cũng có m_0eR là module con của R -module bất khả quy M và $m_0eR \neq (0)$ suy ra $m_0eR = M \Rightarrow N = m_0eRe = Me$.

Từ đó, ta có Me là một eRe -module bất khả quy, do đó $MeJ(eRe) = (0)$ vì e là phần tử đơn vị của eRe nên $MeJ(eRe) = MJ(eRe) = (0)$. Còn nếu $Me = (0)$ thì $MeJ(eRe) = MJ(eRe) = (0)$. Trong mọi trường hợp ta đều có $MJ(eRe) = (0)$ với M là R -module bất khả quy tùy ý.

Vậy $J(eRe) \subset J(R)$ suy ra $J(eRe) = eJ(eRe)e \subset eJ(R)e$.

- Chứng minh $eJ(R)e \subset J(eRe)$

Ngược lại, nếu $a \in eJ(R)e$ thì $ae \in e^2J(R)e^2 = eJ(R)e \Rightarrow a \in J(R)$ do đó a có tựa nghịch đảo trái và phải trong R . Khi đó $\exists a' \in R$ sao cho $a + a' + aa' = 0$ suy ra $ae + ea'e + eaa'e = 0$ vì $a \in eJ(R)e$ nên $ae = a$ do đó $ae + ea'e + eaa'e = a + ea'e + eaa'e = 0$. Vì tựa nghịch đảo phải của a là duy nhất nên $a' = ea'e \in eRe$.

Vậy mọi phần tử trong $eJ(R)e$ đều tựa chính quy trong eRe và $eJ(R)e$ là một ideal của eRe , tức ta có $eJ(R)e$ là một ideal tựa chính quy của eRe do đó $eJ(R)e \subset J(eRe)$. ■

Định lý 1.3.2.4 Cho R là một vành không có ideal lũy linh khác (0) và giả sử $e \neq 0$ là một phần tử lũy đẳng trong R . Khi đó, eR là một ideal phải tối tiểu của R khi và chỉ khi eRe là một thể.

Chứng minh

- Chiều thuận

Giả sử $\rho = eR$ là một ideal phải tối tiểu của R . Vì R là một vành nên eRe cũng là một vành. Nếu $eae \in eRe$ và $eae \neq 0$ thì $eaeR \neq (0)$ (vì $eaeR = (0) \Rightarrow eae = 0$ mâu thuẫn) và $eaeR$ là một ideal của R mà $eaeR \subset eR$ suy ra $eaeR = eR$ (do eR là một ideal phải tối tiểu của R) do đó tồn tại $y \in R$ sao cho $eaey = e \Rightarrow eaeye = e^2 = e$ khi đó ta có $(eae)(eye) = e$.

Do đó eRe là một thể với phần tử đơn vị là e

- Chiều đảo

Giả sử eRe là một thể ta chứng minh $\rho = eR$ là một ideal phải tối tiểu của R . Gọi $\rho_0 \neq (0)$ là một ideal phải của R sao cho $\rho_0 \subset \rho$ ta chứng minh $\rho_0 = \rho$.

Thật vậy, ta có $\rho_0 e \neq (0)$ vì nếu $\rho_0 e = (0) \Rightarrow \rho_0^2 \subset \rho_0 \rho = \rho_0 eR = (0)$ (mâu thuẫn với R là một vành không có ideal lũy linh khác (0)). Khi đó tồn tại $x \in \rho_0$ sao cho $xe \neq 0$ mặt khác ta có $x \in \rho_0 \subset \rho = eR$ nên lại tồn tại $u \in R$ sao cho $x = eu$. Đặt $a = eue \in eRe \Rightarrow a = xe \neq 0$ và $a \in \rho_0$ (vì $x \in \rho_0$ và ρ_0 là một ideal phải của R), do eRe là một thể nên tồn tại $eu'e \in eRe$ sao cho $a(eu'e) = e$ suy ra $e \in \rho_0$ (do $a \in \rho_0$ và ρ_0 là một ideal phải của R). Do đó $eR \subset \rho_0$ hay $\rho \subset \rho_0 \Rightarrow \rho_0 = \rho$.

Vậy $\rho = eR$ là một ideal phải tối tiểu của R . ■

Chứng minh tương tự như trên ta cũng có : Cho R là một vành không có ideal lũy linh khác (0) và giả sử $e \neq 0$ là một phần tử lũy đẳng trong R . Khi đó, Re là một ideal trái tối tiểu của R khi và chỉ khi eRe là một thể.

Từ đó ta dẫn đến hệ quả sau.

Hệ quả. Cho R là vành không có ideal lũy linh khác (0) và e là một phần tử lũy đẳng trong R . Khi đó, eR là một ideal phải tối tiểu của R khi và chỉ khi Re là một ideal trái tối tiểu của R .

Định lý 1.3.2.5 Cho R là một vành Artin, nửa đơn và $\rho \neq (0)$ là một ideal phải của R . Khi đó tồn tại phần tử lũy đẳng $e \in R$ sao cho $\rho = eR$.

Chứng minh

Vì R là vành nửa đơn và $\rho \neq (0)$ là một ideal phải của R nên ρ không phải là ideal lũy linh (nếu ρ là ideal phải lũy linh thì $\rho \subset J(R) = (0) \Rightarrow \rho = (0)$). Vì R là vành Artin nên theo định lý 1.3.2.2 thì ρ có chứa phần tử lũy đẳng khác 0. Giả sử e là phần tử lũy đẳng trong ρ , đặt $A(e) = \{x \in \rho | ex = 0\}$, dễ thấy $A(e)$ là một ideal phải của R . Tập các ideal phải $\{A(e) | 0 \neq e^2 = e \in \rho\}$ của R là tập không rỗng và R là vành Artin nên tồn tại phần tử tối tiểu $A(e_0)$.

Nếu $A(e_0) = (0)$ thì $\forall x \in \rho$ ta có $e_0(x - e_0x) = 0 \Rightarrow x - e_0x \in A(e_0) = (0)$ suy ra $x - e_0x = 0 \Rightarrow x = e_0x, \forall x \in \rho$ do đó $\rho = e_0\rho \subset e_0R$ mà $e_0 \in \rho$ nên $e_0R \subset \rho$. Vậy $\rho = e_0R$ với e_0 là một phần tử lũy đẳng trong R .

Tiếp theo ta sẽ chứng minh không xảy ra trường hợp $A(e_0) \neq (0)$. Thật vậy, giả sử $A(e_0) \neq (0)$ và ta có $A(e_0)$ là một ideal phải của vành nửa đơn R nên $A(e_0)$ là một ideal phải không lũy linh của R . Theo định lý 1.3.2.2 thì $A(e_0)$ có chứa phần tử lũy đẳng e_1 . Vì $A(e_0) = \{x \in \rho | e_0x = 0\}$ nên $e_1 \in \rho$ và $e_0e_1 = 0$. Đặt $e^* = e_0 + e_1 - e_1e_0 \in \rho$ (vì $e_0 \in \rho, e_1 \in \rho$) do $e_0e_1 = 0$ nên ta có

$(e^*)^2 = (e_0 + e_1 - e_1e_0)(e_0 + e_1 - e_1e_0) = e_0 + e_1e_0 + e_1 - e_1e_0 - e_1e_0 = e_0 + e_1 - e_1e_0 = e^*$ và $e^*e_1 = (e_0 + e_1 - e_1e_0)e_1 = e_1 \neq 0 \Rightarrow e^* \neq 0$. Vậy $e^* \in \rho$ là phần tử lũy đẳng.

Khi đó $\forall x \in \rho$ nếu $e^*x = 0$ thì $(e_0 + e_1 - e_1e_0)x = 0 \Rightarrow e_0(e_0 + e_1 - e_1e_0)x = 0$ suy ra $e_0x = 0$, do đó ta có $A(e^*) \subset A(e_0)$ ta lại có $e_1 \in A(e_0)$ và $e_1 \notin A(e^*)$ (vì $e^*e_1 \neq 0$) nên $A(e^*) \neq A(e_0)$. Tức $A(e^*)$ chứa trong $A(e_0)$ thực sự (mâu thuẫn với tính tối tiểu của $A(e_0)$).

Vậy không xảy ra trường hợp $A(e_0) \neq (0)$, định lý được chứng minh. ■

Hệ quả 1 Nếu R là một vành Artin, nửa đơn và $A \neq (0)$ là một ideal của R thì $A = eR = Re$, trong đó e là phần tử lũy đẳng nằm trong tâm của R .

Chứng minh

Vì $A \neq (0)$ là một ideal của R , theo phần chứng minh định lý tồn tại phần tử lũy đẳng $e \in A$ sao cho $A = eR$. Gọi $B = \{x - xe | x \in A\}$, theo chứng minh định lý ta cũng có $ex = x, \forall x \in A \Rightarrow eA = A$ và $Be = (0)$ nên $BA = BeA = (0)$.

Mặt khác, A là một ideal trái của R nên B cũng là một ideal trái của R và $B \subset A \Rightarrow B^2 \subset BA = (0)$. Vì R là vành nửa đơn nên trong R không có ideal trái lũy linh khác (0) , do đó $B = (0)$. Suy ra

$$x - xe = 0, \forall x \in A \Rightarrow x = xe, \forall x \in A \Rightarrow A = Ae. \text{ Vậy } eA = Ae = A$$

Ta chứng minh $A = eR$.

Ta có $e \in A$, mà A là một ideal phải của R nên $eR \subset A$, mặt khác $A \subset R \Rightarrow A = eA \subset eR$. Do đó $A = eR$

Ta chứng minh e nằm trong tâm của R hay $e \in C(R)$

Lấy $y \in R \Rightarrow ye \in A$ (do $e \in A$) suy ra $ye = e(ye)$ vì e là đơn vị trái của A , tương tự ta có $ey \in A$ (do $e \in A$) $\Rightarrow ey = (ey)e$ vì e là đơn vị phải của A . Do đó $ye = eye = ey, \forall y \in R \Rightarrow Re = eR$ và e nằm trong tâm của R . ■

Hệ quả 2 Một vành Artin, nửa đơn luôn có phần tử đơn vị

Chứng minh

Vì vành R cũng là một ideal của chính nó nên theo chứng minh hệ quả 1 ta chỉ việc thay ideal A bằng ideal R ta có điều phải chứng minh. ■

Bổ đề 1.3.2.3 Một ideal của một vành Artin, nửa đơn cũng là một vành Artin, nửa đơn.

Chứng minh

Giả sử R là một vành Artin, nửa đơn và $A \neq (0)$ là một ideal của R . Theo hệ quả 1 của định lý 1.3.2.5 ta có $A = eR = Re$, trong đó $e \in Z$ và theo hệ quả 2 của định lý này thì R có phần tử đơn vị.

Lấy $x \in R$ ta có $x = xe + x(1 - e)$ do đó $R = Re + R(1 - e)$. Vì $1 - e \in Z$ nên $R(1 - e)$ là một ideal của R . Hơn nữa, $Re \cap R(1 - e) = (0)$, vì nếu $x \in Re \cap R(1 - e)$ thì $x = xe$ và $x = x(1 - e) \Rightarrow xe = 0$. Do đó $R = A \oplus R(1 - e)$ suy ra $A \cong R/R(1 - e)$ (đẳng cấu vành) hay A là ảnh đồng cấu của một vành Artin nên A cũng là một vành Artin. Mặt khác theo hệ quả của định lý 1.3.1.2 thì $A \neq (0)$ là một ideal của một vành nửa đơn R nên A cũng là một vành nửa đơn. ■

1.3.3 Vành đơn

Định nghĩa. Một vành R được gọi là vành đơn nếu $R^2 \neq (0)$ và R không có ideal thực sự nào.

Định lý 1.3.3.1 Một vành Artin, nửa đơn là tổng trực tiếp của một số hữu hạn các vành Artin, đơn.

Chứng minh

Giả sử R là một vành Artin, nửa đơn và $A \neq (0)$ là một ideal tối tiểu của R . Ta sẽ chứng minh A là đơn. Thật vậy, $A^2 \neq (0)$ vì nếu $A^2 = (0)$ thì A lũy linh nên $A \subset J(R) = (0) \Rightarrow A = (0)$ (mâu thuẫn).

Nếu $B \neq (0)$ là một ideal của A thì ABA là một ideal của R và $ABA \subset B$. Theo bổ đề 1.3.2.3 ta có A cũng là vành Artin, nửa đơn nên theo hệ quả 2 định lý 1.3.2.5 thì A có đơn vị do đó $AB \neq (0)$ và AB cũng là một ideal trái không lũy linh của R , từ đó suy ra $ABA \neq (0)$. Do tính tối tiểu của A nên ta có $A = ABA \subset B$. Do đó $B = A$. Vậy A là một vành Artin, đơn.

Theo chứng minh bổ đề 1.3.2.3 ta có $R = A \oplus T_0$ trong đó T_0 là một ideal của R , vì thế T_0 cũng là một vành Artin, nửa đơn. Ta tiếp tục lấy một ideal tối tiểu A_1 của R nằm trong T_0 làm tương tự trên ta cũng có A_1 là Artin, đơn và $T_0 = A_1 \oplus T_1$ cứ tiếp tục làm như trên ta có các ideal $A = A_0, A_1, \dots, A_k, \dots$ của R đều là các vành Artin, đơn và $A_0 + A_1 + \dots + A_k$ là tổng trực tiếp.

Ta sẽ chứng minh tồn tại số k sao cho $R = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_k$.

Thật vậy, nếu không ta đặt $R_0 = A_0 \oplus \dots \oplus A_k \oplus \dots, R_1 = A_1 \oplus \dots \oplus A_k \oplus \dots, \dots,$

$R_m = A_m \oplus \dots \oplus A_k \oplus \dots$ thì đây là một chuỗi giảm các ideal của R nên phải dừng (do R là vành Artin).

Khi đó $R = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, định lý được chứng minh. ■

Bổ đề 1.3.3.1 Nếu R là một vành Artin, nửa đơn và $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ trong đó với $i = 1, \dots, k$, A_i là đơn thì A_i vét hết tất cả các ideal tối tiểu của R .

Chứng minh

Giả sử $B \neq (0)$ là một ideal tối tiểu của R . Vì R là một vành Artin, nửa đơn nên theo hệ quả 2 định lý 1.3.2.5 thì R luôn có đơn vị do đó $RB \neq (0)$. Do $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ suy ra $RB = A_1B \oplus \dots \oplus A_kB$ do đó tồn tại i sao cho $A_iB \neq (0)$. Dễ thấy A_iB là một ideal của A_i và $A_iB \subset A_i$ lại do A_i là đơn nên $A_iB = A_i$. Mặt khác, $B \neq (0)$ là một ideal tối tiểu của R và $A_iB \subset B$ nên ta cũng có $A_iB = B$. Từ đó suy ra $B = A_iB = A_i$.

Vậy bổ đề được chứng minh ■

1.3.4 Vành nguyên thủy

Định nghĩa. Vành R được gọi là vành nguyên thủy nếu nó có module bất khả quy và trung thành.

Nhận xét

1. Nếu R là vành nguyên thủy thì tồn tại M là một R -module bất khả quy và trung thành. Suy ra $A(M) = \{r \in R \mid Mr = (0)\} = (0)$. Xét ánh xạ $\phi: R \rightarrow E(M)$ định bởi $\forall r \in R, \phi(r) = T_r$ với $T_r: M \rightarrow M$ sao cho $T_r(m) = mr, \forall m \in M$. Ta có: M trung thành khi và chỉ khi $A(M) = \ker \phi = (0)$, tức ϕ là một đơn cấu, khi đó R nhúng đẳng cấu vào trong $E(M)$.

2. Nếu R là vành nguyên thủy thì R có module bất khả quy và trung thành M_0 . Khi đó $A(M_0) = (0)$ và $J(R) = \cap A(M) \subset A(M_0) = (0) \Rightarrow J(R) = (0)$ hay R là vành nửa đơn.

Vậy mọi vành nguyên thủy đều là vành nửa đơn.

3. Cho R là vành tùy ý và M là R -module bất khả quy. Khi đó $A(M)$ là ideal hai phía của R và M là $R/A(M)$ -module bất khả quy và trung thành. Thật vậy ở bổ đề 1.1.1 ta đã chứng minh $A(M)$ là ideal hai phía của R và M là $R/A(M)$ -module trung thành. Với M là R -module bất khả quy ta có $M(R/A(M)) = MR \neq (0)$. Lấy $N \neq (0)$ là một $R/A(M)$ -module con của M ta có $N(R/A(M)) = NR \subset N$ suy ra N cũng là R -module con của module bất khả quy M nên $N = M$. Vậy M là cũng $R/A(M)$ -module bất khả quy.

Do đó $R/A(M)$ cũng là vành nguyên thủy.

4. Cho R là vành tùy ý và ρ là ideal phải, tối đại, chính quy của R . Khi đó $M = R/\rho$ là R -module bất khả quy và $A(M) = (\rho: R)$ là ideal hai phía lớn nhất của R nằm trong ρ .

Theo trên ta cũng suy ra $R/(\rho: R)$ là vành nguyên thủy.

Định nghĩa. Một ideal U của R được gọi là nguyên thủy trái (phải) nếu vành thương R/U là nguyên thủy trái (phải).

Bổ đề 1.3.4.1 Một ideal U của vành R là nguyên thủy trái khi và chỉ khi U là một linh hóa tử của R -module trái bất khả quy nào đó.

Chứng minh.

Giả sử $U = A(M)$ là một linh hóa tử của R -module trái bất khả quy M nào đó. Khi đó dễ thấy M cũng là một R/U -module trái bất khả quy và trung thành, do đó vành R/U là nguyên thủy trái nên U là một ideal nguyên thủy trái của R .

Ngược lại, giả sử U là một ideal nguyên thủy trái suy ra R/U là vành nguyên thủy trái, do đó nó có R/U -module trái bất khả quy và trung thành M nào đó. Khi đó, M cũng là một R -module trái bất khả quy và do M là R/U -module trái trung thành linh nên hóa tử của M trong R chính là U . ■

Nhận xét

Từ bổ đề trên và định nghĩa của căn Jacobson của vành R ta có thể định nghĩa căn Jacobson của vành R cũng là giao của tất cả các ideal nguyên thủy trái (phải) của R :

$J(R) = \bigcap_P P$ trong đó P chạy qua khắp các ideal nguyên thủy một phía của R .

Định lý 1.3.4.1 Vành R là vành nguyên thủy khi và chỉ khi tồn tại ρ là ideal phải, tối đại, chính quy trong R sao cho $(\rho : R) = (0)$. Trong trường hợp đó R là vành nửa đơn. Hơn nữa, nếu vành nguyên thủy R giao hoán thì R là một trường.

Chứng minh

- Chiều thuận

Nếu R là vành nguyên thủy thì tồn tại một R -module bất khả quy và trung thành M , theo bổ đề 1.1.3 ta có M đẳng cấu với R -module thương R/ρ trong đó ρ là ideal phải, tối đại, chính quy nào đó trong R .

Vì M là R -module trung thành nên R/ρ cũng là R -module trung thành. Do đó $\forall r \in R$ nếu $(R/\rho)r = (0)$ tức là $Rr \subset \rho$ thì $r = 0$, từ đó ta có $(\rho : R) = \{x \in R \mid Rx \subset \rho\} = (0)$.

- Chiều đảo

Giả sử, tồn tại một ρ là ideal phải, tối đại, chính quy trong R sao cho $(\rho : R) = (0)$. Thì theo bổ đề 1.1.3 ta cũng có $M = R/\rho$ là một R -module bất khả quy. Ta chứng minh $M = R/\rho$ là một R -module trung thành.

Nếu $Mr = (R/\rho)r = (0)$ thì $Rr \subset \rho \Rightarrow r \in (\rho : R) = (0) \Rightarrow r = 0$ nên $M = R/\rho$ là một R -module trung thành.

Vậy R là vành nguyên thủy.

- Ta chứng minh nếu vành nguyên thủy R giao hoán thì R là một trường. Thật vậy, vì R là vành nguyên thủy nên tồn tại ρ là ideal phải, tối đại, chính quy trong R sao cho $(\rho : R) = (0)$. Theo bài tập về đại số đại cương ta có R/ρ là một trường ta sẽ chứng minh R đẳng cấu với R/ρ

Xét toàn cấu chính tắc $p: R \rightarrow R/\rho$ xác định bởi $\forall r \in R, p(r) = \bar{r}$ ta chứng minh p cũng đơn cấu, thật vậy:

$$\ker p = \{r \in R \mid \bar{r} = 0\} = \{r \in R \mid r \in \rho\} \subset \{r \in R \mid Rr \subset \rho\} = (\rho : R) = (0)$$

Vậy p là một đẳng cấu hay $R \cong R/\rho$ nên R là một trường. ■

Định nghĩa. Cho $\{A_\alpha\}$ là một họ các đại số và $\prod A_\alpha$ là tích trực tiếp của họ các đại số $\{A_\alpha\}$. Một đại số con A của $\prod A_\alpha$ được gọi là tích trực tiếp con của họ $\{A_\alpha\}$ nếu với mỗi α ánh xạ chính tắc thu hẹp $\pi_\alpha|_A$ là một toàn cấu, trong đó π_α là đồng cấu chiếu từ $\prod A_\alpha$ lên A_α biến $\{a_\alpha\}$ thành a_α . Khi đó, cho $B_\alpha = \ker \pi_\alpha|_A$ thì $A/B_\alpha \cong A_\alpha$ và $\cap B_\alpha = (0)$. Ngược lại, giả sử A là một đại số bất kì và B_α là một tập các ideal của A sao cho $\cap B_\alpha = (0)$. Khi đó, A đẳng cấu với tích trực tiếp con của họ các đại số $\{A_\alpha\}$ trong đó $A_\alpha = A/B_\alpha$.

Bổ đề 1.3.4.2 Một đại số là nửa đơn (hay nửa nguyên thủy) khi và chỉ khi nó là tích trực tiếp con của các đại số nguyên thủy.

Chứng minh

- Chiều thuận.

Giả sử A là một đại số nửa đơn (hay nửa nguyên thủy) ta có

$$J(A) = \bigcap_{P \text{ nguyên thủy}} P = (0) \quad (P \text{ chạy khắp các ideal nguyên thủy của } A).$$

Khi đó, A là tích trực tiếp con của một họ các đại số $\{A/P\}$ trong đó P chạy khắp các ideal nguyên thủy của A .

Vì P là một ideal nguyên thủy của A nên A/P là một đại số nguyên thủy.

- Chiều đảo.

Giả sử A là tích trực tiếp con của một họ các đại số nguyên thủy $\{A_\alpha\}$.

Khi đó với $B_\alpha = \ker \pi_\alpha|_A$ thì $A/B_\alpha \cong A_\alpha$ và $\cap B_\alpha = (0)$. Vì A_α là đại số nguyên thủy nên A/B_α cũng là một đại số nguyên thủy. Do đó, B_α là một ideal nguyên thủy. Từ đó ta có $J(A) = \bigcap_{P \text{ nguyên thủy}} P \subset \cap B_\alpha = (0)$.

Vậy A là một đại số nửa nguyên thủy (hay nửa đơn). ■

Giả sử R là một vành nguyên thủy và M là một R -module bất khả quy và trung thành. Nếu $\Delta = C(M) = \{\varphi \in E(M) : \varphi T_r = T_r \varphi, \forall r \in R\}$ là vành các giao hoán tử của R trên M với $r \in R, T_r : M \rightarrow M$ sao cho $mT_r = mr$ thì theo bổ đề Schur (định lý 1.1.1) Δ là vành chia được.

Ta có thể xem M như là không gian vectơ phải trên Δ , trong đó với $m \in M, \alpha \in \Delta$ thì $m\alpha$ được xem như là tác động của một phần tử α trong $E(M)$ lên m .

Định nghĩa. Vành R được gọi là tác động dày đặc trong M (hay R dày đặc trong M) nếu với mỗi hệ n vector: $v_1, v_2, \dots, v_n \in M$ độc lập tuyến tính trên Δ và hệ n vector bất kì:

$w_1, w_2, \dots, w_n \in M$ thì tồn tại một phần tử $r \in R$ sao cho $w_i = v_i r, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Nhận xét

1. Ở đây khái niệm dày đặc được hiểu theo nghĩa: Lấy tùy ý hệ hữu hạn các vector của M độc lập tuyến tính trên Δ và một hệ hữu hạn vector bất kì của M với cùng số lượng, bao giờ cũng tồn tại phép biến đổi tuyến tính biến hệ độc lập này thành hệ kia.

2. Nếu $\dim_\Delta M = n$ là hữu hạn thì $\text{Hom}_\Delta(M, M) = R$. Thật vậy:

- $\forall r \in R$ phép nhân bên phải $v_i r$ là phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ M trên thể Δ : $r \equiv T_r \in \text{Hom}_\Delta(M, M), \forall r \in R$.

Do đó $R \subset \text{Hom}_\Delta(M, M)$.

- $\forall f \in \text{Hom}_\Delta(M, M)$, giả sử $e_1, e_2, \dots, e_n$ là một cơ sở của M . Đồng cấu f hoàn toàn được xác định nếu biết các ảnh $e_1 f, e_2 f, \dots, e_n f$. Theo tính dày đặc tồn tại $r \in R$ sao cho với mọi $w_1, w_2, \dots, w_n \in M$ ta có $e_i r = w_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Do đó $r = f$ suy ra $\text{Hom}_\Delta(M, M) \subset R$.

Định lý 1.3.4.2 (định lý dày đặc)

Cho R là vành nguyên thủy và M là R -module bất khả quy, trung thành. Nếu $\Delta = C(M)$ thì R là vành dày đặc các phép biến đổi tuyến tính trong M trên Δ .

Chứng minh

- Để chứng minh định lý dày đặc ta chỉ cần chứng minh điều sau:

Nếu V là một không gian con hữu hạn chiều của M trên Δ và $m \in M, m \notin V$ thì tồn tại $r \in R$ với $Vr = (0)$ nhưng $mr \neq 0$.

Từ kết quả này ta suy ra định lý dày đặc. Thật vậy, giả sử ta đã chứng minh được điều trên tức là tồn tại $r \in R$ với $Vr = (0)$ nhưng $mr \neq 0$. Khi đó $mrR \neq (0)$ là R -module con của M , do M là R -module bất khả quy nên $mrR = M$. Do đó, tồn tại $s \in R$ với mrs là tùy ý và $Vrs = (0)$.

Cho n vectơ $v_1, v_2, \dots, v_n \in M$ là độc lập tuyến tính trên Δ và n vectơ tùy ý $w_1, w_2, \dots, w_n \in M$. Gọi V_i (với $i = 1, 2, \dots, n$) là các không gian con của M sinh bởi các v_j với $j \neq i$. Vì $v_i \in M, v_i \notin V_i$ theo trên thì tồn tại $t_i \in R$ với $v_i t_i = w_i$ và $V_i t_i = (0)$. Nếu đặt $t = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ thì ta có $v_i t = w_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ do đó R dày đặc trong M .

- Ta sẽ chứng minh nếu V là một không gian con hữu hạn chiều của M trên Δ và $m \in M, m \notin V$ thì tồn tại $r \in R$ với $Vr = (0)$ nhưng $mr \neq 0$ bằng quy nạp theo số chiều của V trên Δ .

Gọi $V = V_0 + w\Delta$ trong đó $\dim V_0 = \dim(V) - 1$ và $w \notin V_0$. Theo giả thiết quy nạp, nếu đặt $A(V_0) = \{x \in R \mid V_0 x = (0)\}$ thì với $y \notin V_0$ tồn tại $r \in R$ mà $V_0 r = (0)$ và $yr \neq 0$ nói tóm lại nếu $y \notin V_0$ thì tồn tại $r \in A(V_0)$ sao cho $yr \neq 0$. Điều này cũng có nghĩa là nếu $mA(V_0) = (0)$ thì $m \in V_0$. (*)

Để thấy $A(V_0)$ là một ideal phải của R và $wA(V_0)$ là R -module con của module bất khả quy M . Vì $w \notin V_0$ nên tồn tại $r \in A(V_0)$ sao cho $wr \neq 0$ suy ra $wA(V_0) \neq (0)$. Do đó $wA(V_0) = M$.

Giả sử rằng nếu $m \in M, m \notin V$ mà $Vr = (0)$ thì $mr = 0$. Ta chứng minh điều này là không thể xảy ra. Tức là từ điều này sẽ dẫn đến mâu thuẫn.

Ta định nghĩa, $\tau : M \rightarrow M$ như sau với $x \in M$ do $M = wA(V_0)$ nên $x = wa$ với $a \in A(V_0)$, khi đó $x\tau = ma$.

Ta chứng minh τ là ánh xạ, giả sử $x = wa = wa'$ với $a, a' \in A(V_0)$ ta có $w(a - a') = 0$ và $a - a' \in A(V_0)$ nên $a - a'$ linh hóa cả w và V_0 do đó $a - a'$ linh hóa V hay $V(a - a') = 0$ theo điều giả sử trên thì $m(a - a') = 0$ suy ra $ma = ma'$ hay $wa\tau = wa'\tau$. Vậy τ là ánh xạ

Rõ ràng $\tau \in E(M)$, hơn nữa nếu $x = wa$ với $a \in A(V_0)$ thì $\forall r \in R$ suy ra $ar \in A(V_0)$. Khi đó $xr = (wa)r = w(ar) \Rightarrow (xr)\tau = m(ar) = (ma)r = (x\tau)r$. Từ đó ta có $\tau \in \Delta$. Do đó với $a \in A(V_0)$ ta có $ma = (wa)\tau = (w\tau)a$ suy ra $(m - w\tau)a = 0, \forall a \in A(V_0)$. Theo (*) thì $m - w\tau \in V_0$ do đó $m \in V_0 + w\tau \subset V_0 + w\Delta = V$ (mâu thuẫn).

Vậy định lý được chứng minh. ■

1.3.5 Vành nguyên tố

Định nghĩa. Vành R được gọi là vành nguyên tố nếu với mọi $a, b \in R$ thì từ đẳng thức $aRb = (0)$ suy ra $a = 0$ hay $b = 0$.

Nhận xét. Vành R là vành nguyên tố khi và chỉ khi nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- a) Linh hóa tử bên phải của một ideal phải khác (0) của R phải bằng 0
- b) Linh hóa tử bên trái của một ideal trái khác (0) của R phải bằng 0 .
- c) Nếu A, B là hai ideal của R và $AB = (0)$ thì suy ra $A = (0)$ hoặc

$B = (0)$.

Bổ đề 1.3.5.1 Mọi vành nguyên thủy đều là vành nguyên tố

Chứng minh

Cho R là một vành nguyên thủy. Ta sẽ chứng minh linh hóa tử phải của một ideal phải khác (0) của R là bằng 0 . Thật vậy, cho $\rho \neq (0)$ là một ideal phải của R và giả sử $\rho a = (0)$. Vì R là vành nguyên thủy nên tồn tại M là R -module bất khả quy và trung thành. Do M trung thành và $\rho \neq (0)$ nên suy ra $M\rho \neq (0)$, dễ thấy $M\rho$ là module con của module bất khả quy M do đó $M\rho = M$. Từ đó ta có $Ma = M\rho a = M(0) = (0)$, lại do M là module trung thành nên ta suy ra $a = 0$.

Vậy bổ đề được chứng minh. ■

Định nghĩa

Một ideal P của đại số A là nguyên tố nếu với mọi ideal B, C của A mà $BC \subset P$ thì $B \subset P$ hoặc $C \subset P$.

Đại số A được gọi là đại số nguyên tố nếu (0) là một ideal nguyên tố trong A .

Một đại số được gọi là nửa nguyên tố nếu nó không có ideal lũy linh khác (0) .

Một ideal B của đại số A được gọi là nửa nguyên tố nếu A/B là đại số nửa nguyên tố.

Bổ đề 1.3.5.2 Nếu A là đại số nguyên tố thì A là đại số nửa nguyên tố.

Chứng minh

Gọi I là một ideal lũy linh của đại số nguyên tố A sao cho n là một số nguyên dương nhỏ nhất để $I^n = (0) \Rightarrow I^{n-1} \cdot I = (0)$ suy ra I là linh hóa phải của ideal phải $I^{n-1} \neq (0)$ của A nên $I = (0)$. Vậy đại số A không chứa ideal lũy linh khác (0) nên A là một đại số nửa nguyên tố. ■

Định lý 1.3.5.1 A là đại số nửa nguyên tố khi và chỉ khi A là tích trực tiếp con của các đại số nguyên tố.

Chứng minh

- Chiều đảo.

Giả sử A là tích trực tiếp con của các đại số nguyên tố A_α và N là một ideal lũy linh của A . Khi đó, với mọi α thì $N_\alpha = \pi_\alpha(N)$ cũng là các ideal lũy linh của A_α . Do A_α là đại số nguyên tố theo bổ đề 1.3.5.2 thì A_α là đại số nửa nguyên tố từ đó suy ra $N_\alpha = (0)$ với mọi α nên $N = (0)$.

- Chiều thuận.

Giả sử A là đại số nửa nguyên tố và cho $B \neq (0)$ là một ideal của A . Chọn $b_1 \neq 0$ trong B , khi đó Ab_1A là một ideal khác (0) của A chứa trong B . Do đó

$(Ab_1A)^2 = Ab_1Ab_1A \neq (0)$ (do A là đại số nửa nguyên tố) suy ra $b_1Ab_1 \neq (0)$. Từ đó tồn tại $a_1 \in A$ sao cho $b_2 = b_1a_1b_1 \neq 0$ và $b_2 \in B$. Tiếp tục tiến trình này chúng ta sẽ thu được một dãy các phần tử khác 0 sau:

$b_1, b_2 = b_1a_1b_1, b_3 = b_2a_2b_2, \dots, b_i = b_{i-1}a_{i-1}b_{i-1}, \dots$ chứa trong B và với $k > i, j$ thì $b_k = b_i a_{ij} b_j$

trong đó $a_{ij} \in A$. Vì $(0) \cap \{b_i\} = \emptyset$ nên theo bổ đề Zorn tồn tại một ideal P của A sao cho

P là ideal tối đại trong tập hợp các ideal của A có giao với $\{b_i\}$ bằng $\emptyset$ do đó $P \cap \{b_i\} = \emptyset$.

Ta chứng minh P là một ideal nguyên tố của A . Cho C và D là hai ideal của A sao cho $C \not\subset P, D \not\subset P$. Khi đó, đặt $C_1 = C + P, D_1 = D + P$ thì $P \subset C_1, P \neq C_1$ và $P \subset D_1, P \neq D_1$ do đó tồn tại $b_i \in C_1$ và $b_j \in D_1$. Nếu $k > i, j$ thì $b_k = b_i a_{ij} b_j \in C_1 D_1$ do đó $C_1 D_1 \not\subset P$. Lại do

$C_1 D_1 \subset CD + P$ nên suy ra $CD \not\subset P$. Vậy P là một ideal nguyên tố của A . Vì $P \cap \{b_i\} = \emptyset$ và $\{b_i\} \subset B$ nên $B \not\subset P$. Tóm lại ta đã chứng minh được rằng nếu B là một ideal khác (0) bất kì của A thì luôn tồn tại một ideal nguyên tố P không chứa B . Từ đó dẫn đến

$\bigcap_{P \text{ nguyên tố}} P = (0)$. Thật vậy giả sử $\bigcap_{P \text{ nguyên tố}} P \neq (0)$ thì tồn tại một ideal nguyên tố P không chứa $\bigcap_{P \text{ nguyên tố}} P$ (mâu thuẫn) và do đó $\bigcap_{P \text{ nguyên tố}} P = (0)$.

Vậy A là tích trực tiếp con của các đại số nguyên tố A/P . ■

1.4 Mỗi quan hệ giữa các vành

1.4.1 Nếu R là vành đơn và R có đơn vị thì R là vành nửa đơn.

Thật vậy, vì R là vành đơn và $J(R)$ là một ideal của vành R nên xảy ra hai trường hợp : $J(R) = (0)$ hoặc $J(R) = R$. Mà vành R có đơn vị nên không xảy ra trường hợp $J(R) = R$.

Vậy $J(R) = (0)$ hay R là vành nửa đơn.

1.4.2 Nếu R vừa là vành đơn, vừa là vành Artin thì R là vành nửa đơn.

Thật vậy, vì R là vành đơn nên $R^2 \neq (0)$ và R^2 là một ideal của vành R , do đó $R^2 = R$. Hơn nữa, $J(R)$ cũng là một ideal của vành R và giả sử $J(R) \neq (0)$ suy ra $J(R) = R = R^2 \Rightarrow [J(R)]^n = R^n = R^2 \neq (0), \forall n \in \mathbb{N} (*)$. Mặt khác, R là vành Artin nên $J(R)$ là một ideal lũy linh do đó $\exists m \in \mathbb{N}$ sao cho $[J(R)]^m = (0)$ (mâu thuẫn với $(*)$).

Vậy $J(R) = (0)$ hay R là vành nửa đơn.

1.4.3 Nếu R là vành nguyên thủy thì R là vành nửa đơn.

Thật vậy, Nếu R là vành nguyên thủy thì tồn tại ideal phải, tối đại, chính quy ρ sao cho $(\rho : R) = (0)$, mà $J(R) = \bigcap (\rho : R)$ với ρ chạy qua khắp các ideal phải, tối đại, chính quy của R nên $J(R) = (0)$.

Vậy R là vành nửa đơn.

1.4.4 Nếu R vừa là vành đơn, vừa là vành nửa đơn thì R là vành nguyên thủy.

Thật vậy, với ρ là một ideal phải, tối đại, chính quy của R thì $(\rho : R)$ cũng là một ideal của R , do R là vành đơn nên $(\rho : R) = (0)$ hoặc $(\rho : R) = R$, cho ρ chạy qua khắp các ideal phải, tối đại, chính quy của R mà $(\rho : R) = R$ thì $J(R) = \bigcap (\rho : R) = R$ (mâu thuẫn với

R là vành nửa đơn), do đó phải tồn tại một ideal phải, tối đại, chính quy ρ_0 của R sao cho $(\rho_0 : R) = (0)$.

Vậy R là vành nguyên thủy.

1.4.5 Nếu R vừa là vành đơn, vừa là vành Artin thì R là vành nguyên thủy. Thật vậy, vì R vừa là vành đơn, vừa là vành Artin nên theo 1.4.2 thì R là vành nửa đơn. Ta có R vừa là vành đơn, vừa là vành nửa đơn nên theo 1.4.4 thì R là vành nguyên thủy.

1.5 Một số kiến thức về PI – Đại số

Định nghĩa.

- f được gọi là một đồng nhất thức của A nếu $f(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0, \forall a_i \in A$
- Đa thức f được gọi là đồng nhất thức thực sự nếu f là một đồng nhất thức của A và tồn tại một hệ số của f không linh hóa A .
- Một đại số A trên vành giao hoán có đơn vị K được gọi là PI – Đại số hay Đại số với đồng nhất thức đa thức nếu tồn tại một đa thức

$f(a_1, a_2, \dots, a_m) \in K[x]$ là đồng nhất thức thực sự của A .

Định lý 1.5 (Kaplansky – Amitsur) Cho R là một đại số nguyên thủy có một đồng nhất thức

thực bậc d . Khi đó, tâm Z của R là một trường, R là đơn và $[R : Z] \leq \left[\frac{d}{2} \right]^2$.

CHƯƠNG 2.

TÍNH LŨY LINH CỦA CÁC GIAO HOÁN TỬ TRONG VÀNH NGUYÊN TỐ

2.1 Các giao hoán tử của một vành

Định nghĩa. Cho R là một vành không giao hoán ta gọi các giao hoán tử của vành R là các phần tử của R có dạng $xy - yx$ trong đó $\forall x, y \in R$. Khi đó ta kí hiệu $[x, y] = xy - yx$.

Nếu R là vành giao hoán thì tất cả các giao hoán tử của R đều bằng 0.

Trong chương này chúng ta tập trung giải quyết hai vấn đề cơ bản sau.

Vấn đề 1. Cho R là một vành nguyên tố, phần tử $a \in R$.

Với mọi $x \in R$, nếu $[a, x] = ax - xa$ lũy linh thì phải chăng lúc đó $a \in Z$, với Z là tâm của vành R .

Một vấn đề tổng quát hơn được đặt ra nữa là :

Vấn đề 2. Cho R là một vành nguyên tố, phần tử $a \in R$.

Giả sử tồn tại một ideal U của R ($U \neq (0)$) sao cho với mọi $x \in U$, ta có $[a, x] = ax - xa$ lũy linh thì phải chăng lúc đó ta cũng được $a \in Z$.

Trong quá trình giải quyết những vấn đề cụ thể nêu trên, chúng tôi đã cố gắng giải quyết các vấn đề này với R là vành chia được, R là vành nguyên thủy và R là một vành nửa đơn (nửa nguyên thủy).

Với những vành cụ thể đặc biệt đã nói ở trên thì chúng ta có thể đưa ra dự đoán về tính chất của phần tử a cho hai vấn đề được nêu ra ở trên là $a \in Z$ với Z là tâm của vành R , điều dự đoán này sẽ được khẳng định trong những định lý và mệnh đề sau.

2.2 Tính lũy linh của các giao hoán tử trong vành nguyên tố

Trong phần này ta thống nhất về kí hiệu và ghi nhận một số kết quả sau:

2.2.1 Z là tâm của vành R , còn $Z(T)$ là tâm của một vành con T của R

2.2.2 $J = J(R)$ là kí hiệu cho căn Jacobson của vành R .

2.2.3 Ideal luôn là ideal hai phía.

2.2.4 Nếu x là tựa chính quy thì tựa nghịch đảo của x kí hiệu là x' , do đó ta có

$$x + x' + xx' = 0.$$

2.2.5 Nếu vành R không có đơn vị thì ta vẫn sẽ dùng kí $(1+x)a(a+x)^{-1}$ thay cho

$$(1+x)a(a+x') = a + xa + ax' + xax'.$$

2.2.6 Một miền là một vành (có thể không giao hoán) không có ước của 0.

2.2.7 Cho R là một vành nguyên tố và R không phải là một miền. Nếu $U \neq (0)$ là một ideal của R thì U cũng là vành nguyên tố và U cũng không phải là miền. Hơn nữa, U có phần tử lũy linh khác 0.

2.2.8 Nếu x là tựa chính quy và $ax = 0$ thì $ax' = 0$.

2.2.9 Nếu $a \in J$ và $x \in R$ thì $\exists t \in R : (ax)' = at$.

2.2.10 Cho R là vành nguyên tố và $U \neq (0)$ là một ideal của R . Nếu $a \in R, a \neq 0$ là một ước trái của 0 thì có một phần tử $x \in U$ sao cho $ax = 0$ nhưng $xa \neq 0$.

Định lý 2.2 Cho R là một vành nguyên tố mà $J \neq (0)$ và A là một vành con của R sao cho $(1+x)A(1+x)^{-1} \subset A, \forall x \in J$. Giả sử rằng tồn tại phần tử khác 0 của A là ước của 0 trong R . Nếu A không chứa ideal khác 0 của R thì N là vành con sinh bởi tất cả các phần tử lũy linh của J cũng không chứa ideal khác 0 của R .

Chứng minh

Trước tiên, ta chứng minh A phải tồn tại phần tử khác 0 mà có bình phương bằng 0. Thật vậy, giả sử a là ước của 0 trong R sao cho $0 \neq a \in A$ và tồn tại $0 \neq x \in R$ để $ax \neq 0$. Vì $J \neq (0)$ cũng là một ideal của R nên theo kết quả 2.2.10 khi đó tồn tại $y \in J$ sao cho $ay = 0, ya \neq 0$. Vì $y \in J$ nên y là tựa chính quy và $ay = 0$, theo 2.2.8 thì $ay' = 0$ suy ra $ya = ya + ay' + yay' = (1+y)a(1+y)^{-1} - a \in A$. Do $ay = 0$ nên $(ya)^2 = y(ay)a = 0$. Vậy tồn tại $0 \neq ya \in A$ và $(ya)^2 = 0$.

Lấy $0 \neq a \in A : a^2 = 0$. Nếu $x \in J$ thì $(1+ax)a(1+ax)^{-1} \in A$. Do tồn tại $t \in R$ sao cho $(1+ax)^{-1} = 1+at$ nên $(1+ax)a(1+ax)^{-1} = (1+ax)a = a + axa \in A \Rightarrow axa \in A$, từ đó suy ra $aJa \subset A$.

Nếu $b \in A$ thì với mọi $x \in J$ ta có $(b(ax) - (ax)b)(1+ax)^{-1} = b - (1+ax)b(1+ax)^{-1} \in A$. Nhân vào bên trái với a và áp dụng $a^2 = 0$ ta có $abax(1+ax)^{-1} \in A, \forall x \in J, \forall b \in A$. Tuy nhiên, nếu $y \in J$ thì $y = x(1+ax)^{-1} \Rightarrow y(1+ax) = x \Rightarrow y = x - yax \Rightarrow y = (1-ya)x$ suy ra $x = (1-ya)^{-1}y \in J$ do

đó $abaJ \subset A, \forall b \in A$. Nếu $t \in J$ thì $(1+t)abaJ(1+t)^{-1} \subset (1+t)A(1+t)^{-1} \subset A$ và dẫn đến $tabaJ \subset A$ hay ta có $JabaJ \subset A$.

Mặt khác $JabaJ$ lại là một ideal của R chứa trong A , theo giả thiết thì $JabaJ = (0)$, do tính nguyên tố của R nên suy ra $aba = 0$. Tóm lại, nếu $a \in A$ và $a^2 = 0$ thì $aAa = 0$.

Cho $a, b \in A$ sao cho $a^2 = b^2 = 0$ theo trên chúng ta đã chứng minh được $bJb \subset A \Rightarrow abJba \subset aAa = 0 \Rightarrow ab = 0$ hoặc $ba = 0$ (do R là vành nguyên tố). Nếu $x \in J$ thì $b = (1+x)a(1+x)^{-1} \in A$ và $b^2 = 0$. Do $ab = 0$ hoặc $ba = 0$ nên $a(1+x)a(1+x)^{-1} = 0$ hoặc $(1+x)a(1+x)^{-1}a = 0$, từ đó ta được $axa = 0$ hoặc $ax'a = 0$.

Nếu $u \in J$ thỏa $u^2 = 0$ thì $u' = -u - uu' = -u - u(-u - uu') = -u$, do đó ta có $aua = 0$ hoặc $au'a = -aua = 0$ tóm lại ta được $aua = 0$.

Chúng ta sẽ chứng minh rằng nếu $v \in J$ là lũy linh thì $ava = 0$. Như chứng minh trên, do $v \in J$ nên ta có $ava = 0$ hoặc $av'a = 0$. Vì

$v' = -v - vv' = -v - v(-v - vv') = \dots = -v + v^2 - v^3 + \dots$ và do v lũy linh nên với $i > 1$ là số nguyên dương nhỏ nhất mà $v^i = 0$.

$$\text{Ta có } v' = -v + v^2 - v^3 + \dots + (-v)^{i-1} = \frac{-v((-v)^{i-1} - 1)}{-v - 1} = \frac{v}{-v - 1}$$

Do đó, nếu $av'a = 0$ thì $ava = 0$. Vậy với mọi $v \in J$ là lũy linh thì $ava = 0$.

Từ đó suy ra $(av)^2 = 0$.

Giả sử rằng $u \in J, u^2 = 0$ và $r \in R$ thì $uru \in J$ và $(uru)^2 = 0$ nên theo chứng trên thì $aurua = 0$, lại do R là vành nguyên tố nên $au = 0$ hoặc $ua = 0$. Nếu $au = 0$ thì hiển nhiên $au \in A$. Mặt khác, nếu $au \neq 0$ thì $ua = 0$, tuy nhiên

$$a - (1+u)a(1+u)^{-1} = (au - ua)(1+u)^{-1} \in A \Rightarrow au(1+u)^{-1} \in A \text{ hay}$$

$$au(1+u') = au + auu' = au + au(-u - uu') = au \in A. \text{ Do đó với mọi } u \in J \text{ sao cho } u^2 = 0 \text{ thì}$$

$au \in A$. Hơn nữa theo chứng minh trên ta cũng có $aua = 0$ suy ra $(au)^2 = 0$. Vì thế, nếu

$v \in J$ sao cho $v^2 = 0$ thì $auv = (au)v \in A$. Thật vậy, vì nếu $au = 0$ thì hiển nhiên $(au)v \in A$, còn nếu $au \neq 0$ thì do $au \in A$ và $(au)^2 = 0$ nên theo chứng minh trên ta cũng có $(au)v \in A$.

Từ đó ta đi đến kết luận: Nếu B là một vành con của R sinh bởi các phần tử trong J có bình phương bằng 0 thì $aB \subset A$.

Nếu B chứa ideal $V \neq (0)$ của R thì $aV \subset A$. Kết hợp với $1+x$ trong đó $x \in J$ ta có $(1+x)aV(1+x)^{-1} \subset (1+x)A(1+x)^{-1} \subset A$ suy ra $xaV \subset A$ dẫn đến $JaV \subset A$, mâu thuẫn với giả thiết A không chứa ideal khác 0 của R . Do đó B không chứa ideal khác 0 của R .

Tuy nhiên, B là một vành con của R có ước của 0, B bất biến đối với mọi tự đẳng cấu của R và B không chứa ideal khác 0 của R . Những điều lý luận trên A áp dụng cho B ta được, nếu $u \in B$, $u^2 = 0$ và $x \in J$ là lũy linh thì $uxu = 0$ và do đó $ux \in B$. Như trên, nếu N là một vành con của R sinh bởi tất cả các phần tử lũy linh của J thì $uN \subset B$. Vì B không chứa ideal khác 0 của R nên N cũng không chứa ideal khác 0 của R . ■

Để giải quyết hai vấn đề đã được nêu ra ở trên đây ta sẽ tìm cách giải quyết bài toán sau đây :

Bài toán. Cho R là một vành nguyên tố, có đơn vị và $U \neq (0)$ là một ideal của R . Nếu $a \in R$ sao cho $(au - ua)^n = 0, \forall u \in U$ thì phải chăng $a \in Z$.

Tương đương với điều này chúng ta có thể phát biểu : Nếu $a \notin Z$ thì chắc chắn sẽ tồn tại phần tử $u \in U, u \neq 0$ để $au - ua$ không lũy linh.

Để giải quyết bài toán này, trước hết chúng tôi sẽ cố gắng giải quyết bài toán này trong một số trường hợp đặc biệt của vành R như : R là vành chia được, R là vành nguyên thủy và R là một vành nửa đơn (nửa nguyên thủy).

Mệnh đề 2.2 Giả sử R là một vành nguyên tố, nửa đơn và $U \neq (0)$ là một ideal của R . Nếu $a \in R$ sao cho $(au - ua)^n = 0, \forall u \in U$ thì $a \in Z$.

Chứng minh

Trước hết, nếu R là vành chia được thì bổ đề hiển nhiên đúng. Thật vậy, bằng phản chứng giả sử $a \notin Z$ tức tồn tại $x \in R$ sao cho $ax - xa \neq 0$ vì R là vành chia được nên $ax - xa$ khả nghịch.

Mặt khác từ giả thiết của mệnh đề 2.2 ta chọn $U = R$ khi đó $(ax - xa)^n = 0$ vì $ax - xa$ khả nghịch nên $(ax - xa)^{n-1} = 0$ cứ tiếp tục nhân hai vế cho phần tử nghịch đảo của $ax - xa$ ta được $ax - xa = 0$ (mâu thuẫn).

Vậy bổ đề đúng với R là vành chia được.

Bây giờ, giả sử R là vành nguyên thủy và cho M là một R -module bất khả quy và trung thành. Thì M cũng là một U -module bất khả quy và trung thành. Thật vậy, hiển nhiên M là một U -module trung thành.

Ta chứng minh M là một U -module bất khả quy.

Nếu $MU = (0)$ thì do M trung thành nên $U = (0)$ (mâu thuẫn) do đó ta phải có $MU \neq (0)$.

Giả sử $N \neq (0)$ là một U -module con của M ta có $NU \subset N \subset M \Rightarrow NUR \subset MR \subset M$ nên NU là R -module con của M mà

M là một R -module bất khả quy và $NU \neq (0)$ nên $NU = M \Rightarrow M \subset N \Rightarrow N = M$.

Vậy M cũng là một U -module bất khả quy.

Từ đó ta thấy U cũng là một vành nguyên thủy với M là một U -module bất khả quy và trung thành do đó theo định lý dày đặc U tác động dày đặc trong M như một không gian vectơ trên vành chia được

$$\Delta = C(M) = \{ \varphi \in E(M) : \varphi T_u = T_u \varphi, \forall u \in U \}.$$

Giả sử tồn tại $v \in M$ sao cho v và va độc lập tuyến tính trên Δ bởi tác động dày đặc của U trong M nên có $u \in U$ sao cho $vu = 0$ và $(va)u = v$. Từ đó ta có $v(au - ua) = v$ suy ra $v(au - ua)^n = v$. Mà $(au - ua)^n = 0$ nên $v = 0$ (mâu thuẫn). Do đó với mọi $v \in M$ thì v và va phải phụ thuộc tuyến tính trên Δ hay $va = \lambda(v)v$ trong đó $\lambda(v) \in \Delta$. Vì thế, nếu $x \in R$ thì $(vx)a = \lambda(v)vx$ và

$$(va)x = (\lambda(v)v)x = \lambda(v)vx \text{ suy ra } (vx)a = (va)x \Rightarrow v(xa - ax) = 0, \forall v \in M \text{ hay}$$

$M(xa - ax) = (0)$. Lại do M là R -module trung thành nên ta có $xa - ax = 0, \forall x \in R$. Vậy $a \in Z$.

Tiếp theo, ta giả sử R là vành nguyên tố và nửa đơn.

Gọi $Q = \{ P \mid U \not\subset P, P \text{ là ideal nguyên thủy của } R \}$ và

$$W = \{ P \mid U \subset P, P \text{ là ideal nguyên thủy của } R \}.$$

Đặt $I_1 = \bigcap_{P \in Q} P$ và $I_2 = \bigcap_{P \in W} P$. Vì mỗi $P \in W$ đều có chứa U nên $I_2 \supset U \Rightarrow I_2 \neq (0)$. Tuy nhiên $I_1 \cap I_2 = \bigcap_{P \in Q \cup W} P = J = (0)$ (vì R là vành nửa đơn). Do $I_1 I_2 \subset I_1 \cap I_2 = (0)$ và $I_2 \neq (0)$ nên ta có $I_1 = (0)$ (vì R là vành nguyên tố). Ta có $I_1 = \bigcap_{P \in Q} P = 0$ vì thế R là tích trực tiếp con của họ $\{ R/P \}$ trong đó $P \in Q$. Vì P là ideal nguyên thủy của vành R nên R/P cũng là vành nguyên thủy. Theo trên thì trong mỗi R/P ảnh của a nằm trong tâm của R/P . Tức là $\overline{ax} - \overline{xa} = \overline{0}, \forall x \in R/P$. Do đó $ax - xa \in P, \forall x \in R$, từ đó $ax - xa \in \bigcap_{P \in Q} P = I_1 = (0)$. Vậy $a \in Z$. ■

Nếu chúng ta xét tập hợp tất cả các phần tử $a \in R$ sao cho : $(au - ua)^n = 0$ với $u \in U$ thì tập hợp này là bất biến đối với tất cả các tự đẳng cấu của R mà biến U thành U . Đặc biệt, tập hợp này còn bất biến đối với các tự đẳng cấu trong xác định bởi $1+x$ trong đó $x \in J$.

Hệ quả. Giả sử R là một vành nguyên thủy và R có đơn vị, với $a \in R, a \notin Z$ sao cho

$(ax - xa)^n \in Z, \forall x \in R$. Khi đó, $Z \neq (0)$ là một trường, R là vành đơn và R là hữu hạn chiều trên tâm Z .

Chứng minh

Nếu $Z = (0)$ ta có $(ax - xa)^n \in Z \Rightarrow (ax - xa)^n = 0, \forall x \in R$ và R là vành nguyên thủy, có đơn vị nên R là vành nguyên tố (bổ đề 1.3.5.1) và nửa đơn (1.4.3) theo mệnh đề 2.2 suy ra $a \in Z$ (mâu thuẫn giả thiết $a \notin Z$).

Vậy $Z \neq (0)$.

Vì $Z \neq (0)$ nên tồn tại $(ax - xa)^n \neq 0, (ax - xa)^n \in Z$. Khi đó, R thỏa mãn đồng nhất thức thực sự không tầm thường $(ax - xa)^n y - y(ax - xa)^n = 0$ nên R là một PI – Đại số. Do đó theo định lý 1.5 (Kaplansky – Amitsur) thì tâm $Z \neq (0)$ của R là một trường, R là một vành đơn và R là hữu hạn chiều trên tâm Z . ■

KẾT LUẬN

Qua việc tìm hiểu về căn Jacobson của một vành, mối quan hệ giữa các vành đặc biệt và các giao hoán tử trong vành nguyên tố chúng tôi rút ra được một số kết quả như sau:

- $J_{\text{phải}}(R) = J_{\text{trái}}(R)$ và $J_{\text{vành}}(A) = J_{\text{đại số}}(A)$.
- Nếu R là vành đơn và R có đơn vị thì R là vành nửa đơn.
- Nếu R vừa là vành đơn, vừa là vành Artin thì R là vành nửa đơn.
- Nếu R là vành nguyên thủy thì R là vành nửa đơn.
- Nếu R là vành nguyên thủy thì R là nguyên tố.
- Nếu R vừa là vành đơn, vừa là vành nửa đơn thì R là vành nguyên thủy.
- Nếu R vừa là vành đơn, vừa là vành Artin thì R là vành nguyên thủy.
- Cho R là vành nguyên tố có đơn vị với Z là tâm của R . Nếu R là một vành chia được hay một vành nguyên thủy hay một vành nửa đơn (nửa nguyên thủy) và giả sử tồn tại một ideal U của R ($U \neq (0)$) sao cho với mọi $x \in U$, mà $[a, x] = ax - xa$ lũy linh thì ta có $a \in Z$.

Như vậy bài toán đã được giải quyết cho một vài trường hợp đặc biệt của vành R , đó là R là một vành nguyên tố có đơn vị và R là vành chia được hay một vành nguyên thủy hay một vành nửa đơn (nửa nguyên thủy). Trường hợp tổng quát nếu R là một vành nguyên tố tùy ý thì phải chăng ta vẫn có được kết quả $a \in Z$. Và đó cũng chính là một câu hỏi được đặt ra và cũng là một hướng cần thiết để luận văn phát triển thêm

Ngoài ra nếu ta thay $[a, x] = ax - xa$ lũy linh bằng $[a, x] = ax - xa \in Z$ thì tính chất được rút ra cho phần tử a sẽ là gì?

Vì kiến thức còn hạn chế và thời gian có hạn nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý, chỉ bảo chân thành của quý Thầy, Cô và các bạn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hoàng Xuân Sính, *Đại số Đại cương*, NXB Giáo dục.
2. A. I. Kostrikin, I. R. Shafarevich (Eds), *Algebra II Noncommutative Rings Identities*, Pringger-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest.
3. I. N. Herstein, *Noncommutative Rings*, published by The Mathematical Association of America.
4. I. N. Herstein, *Center-like Elements in Prime Rings*, University of Chicago, 5734 University Avenue, Chicago, Illinois 60637, communicated by the Editors, 1979.
5. Nathan Jacobson, *PI-Algebras An Introduction*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
6. T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Pringger-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest.