?

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

PHẠM THỊ HOA TIÊN

TÍCH PHÂN VOLKENBORN

CHUYÊN NGÀNH: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

MÃ SỐ: 60.46.05

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. MỴ VINH QUANG

TP HỒ CHÍ MINH - 2010

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn nghiêm khắc và đầy trách nhiệm của PGS. TS. Mỵ Vinh Quang. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc của mình đến với PGS. TS. Mỵ Vinh Quang.

Tác giả xin chân thành được tỏ lòng biết ơn đến quý thầy cô giáo đã giảng dạy lớp Cao học Toán Khóa 18 của Trường ĐHSP Tp Hồ Chí Minh vì sự giảng dạy tận tình và sự quan tâm, động viên, khích lệ tác giả trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn đến BGH Trường ĐHSP Tp Hồ Chí Minh, Phòng Khoa học Công nghệ - Sau Đại học Trường ĐHSP Tp Hồ Chí Minh đã tạo điều kiện để tác giả hoàn thành công việc học tập, nghiên cứu của mình.

Tác giả xin chân thành cảm ơn lãnh đạo Sở Giáo dục và Đào tạo Đắk Lắk; Ban Giám hiệu, quý thầy cô Trường THPT Krông Ana, Đắk Lắk đã tạo mọi điều kiện về cơ sở vật chất, thời gian và thường xuyên động viên tác giả trong học tập.

Trong quá trình học tập tác giả luôn nhận được sự động viên, khích lệ của các bạn học viên trong lớp thạc sĩ khóa 18 chuyên ngành Đại số và lý thuyết số của Đại học sư phạm Tp Hồ Chí Minh cũng như tất cả các bạn bè thân hữu. Tác giả xin chân thành cám ơn.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn vô hạn đến Ba Mẹ, các Em, Bà nội, Ông Bà ngoại, các Bác, Chú Thím, Cậu Mợ, các Anh Chị luôn cổ vũ, động viên để tác giả an tâm học tập và nghiên cứu. Đặc biệt, luận văn không thể hoàn thành sau quá trình miệt mài học tập và nghiên cứu nếu thiếu sự cảm thông sâu sắc, sự khích lệ tinh thần thường xuyên của Chồng, Con tác giả.

Tác giả

DANH MỤC KÍ HIỆU

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$
$\mathbb{Q}$: trường các số hữu tỉ.
$\mathbb{Q}_p$: trường các số $p-$adic.
$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$: vành các số nguyên $p-$adic.
$T_p = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\}$
$B_0, B_1, ..., B_n$: các số Bernoulli.
$B_0(x), B_1(x), ..., B_n(x)$: đa thức Bernoulli.
$\exp t = e^t$, với $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
$\exp_p t$: hàm mũ $p-$adic.
$\log_p t$: hàm logarit $p-$adic.

$$\binom{x}{n} := \begin{cases} \dfrac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}, & \text{nếu } n \neq 0 \\ 1, & \text{nếu } n = 0 \end{cases}$$

với $n \in \mathbb{N}, x \in K$, trong đó K là trường giá trị phi Archimede đầy đủ chứa $\mathbb{Q}_p$ như trường con.

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Các số $p-$adic được Kurt Hensel mô tả đầu tiên năm 1897, hơn một trăm năm qua chúng dần thâm nhập vào các lĩnh vực khác nhau của toán học như lý thuyết số, hình học đại số, tôpô đại số, giải tích và cả vật lý, đặc biệt là vật lý lượng tử. Vào những năm 40 của thế kỉ XX, giải tích $p-$adic phát triển mạnh mẽ thành một chuyên ngành độc lập nhờ việc phát hiện những mối liên hệ sâu sắc của giải tích $p-$adic với những vấn đề lớn của số học và hình học đại số.

Trong giải tích $p-$adic có nhiều tương tự $p-$adic khác nhau của khái nhiệm tích phân, chẳng hạn như khái niệm tương tự $p-$adic của tích phân Riemann, tích phân Stieltjes, tích phân Shnirelman (tương tự $p-$adic của tích phân đường)...
Bên cạnh đó, tích phân Volkenborn là một tích phân khá đặc biệt, chỉ có trong giải tích $p-$adic và không là tương tự $p-$adic của bất kì tích phân nào đã biết. Hơn thế nữa, tích phân Volkenborn có khá nhiều ứng dụng trong nghiên cứu lý thuyết số. Bởi lý do đó, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu "Tích phân Volkenborn".

Trong luận văn này, chúng tôi sẽ giới thiệu một cách đầy đủ và chi tiết cách xây dựng, các tính chất cơ bản của tích phân Volkenborn, đồng thời giới thiệu một số áp dụng lý thú của nó, qua đó sẽ làm rõ ý nghĩa và vai trò của tích phân Volkenborn trong giải tích $p-$adic và lý thuyết số. Cụ thể như sau

Chương 1 **Kiến thức cơ bản**: trình bày một số kiến thức cơ bản về số $p-$adic, giải tích $p-$adic, khai triển Mahler của các hàm liên tục cần dùng cho các chương sau.

Chương 2 **Xây dựng tích phân Volkenborn**: giới thiệu về khái niệm tổng bất định của hàm số liên tục, tính tổng bất định của một số hàm liên tục trên $\mathbb{Z}_p$ thường gặp sau đó xây dựng tích phân Volkenborn của hàm số liên tục trên $\mathbb{Z}_p$ như là đạo hàm tại 0 của tổng bất định hàm số. Chương này cũng nghiên cứu một số tính chất cơ bản của tích phân Volkenborn, chủ yếu là của các hàm số khả vi liên tục trên $\mathbb{Z}_p$ đồng thời tính toán tích phân Volkenborn cho một số lớp hàm cơ bản quan trọng trong giải tích $p-$adic. Cuối chương là giới thiệu về khái niệm tích phân trên các tập con của $\mathbb{Z}_p$.

Chương 3 **Xây dựng một số ứng dụng của tích phân Volkenborn**: chương này sẽ ứng dụng tích phân Volkenborn để xây dựng và nghiên cứu một số tính chất quan trọng của các số Bernoulli - các số có vai trò quan trọng trong lý thuyết số - đặc biệt là đồng dư thức nổi tiếng của von Staudt và Clausen. Song song với việc chứng minh bằng kỹ thuật $p-$adic, chúng tôi cũng giới thiệu cách chứng minh đồng dư thức này bằng cách sử dụng các kỹ thuật của lý thuyết số để tiện đối chiếu. Cuối chương, chúng tôi giới thiệu cách xây dựng đa thức Bernoulli bằng tích phân Volkenborn.

Mặc dù bản thân tác giả đã rất cố gắng nhưng do trình độ và thời gian hạn chế nên luận văn có thể vẫn còn những thiếu sót. Kính mong quý thầy, cô và quý độc giả góp ý để luận văn được hoàn thiện hơn.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1.1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

ĐỊNH NGHĨA 1.1.1. ***Hàm giá trị (valuation)***

Cho K là một trường. Một *hàm giá trị* trên K (còn gọi là *chuẩn trên trường K*) là một ánh xạ $|| : K \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

(i) $\forall x \in K, |x| \geq 0, |x| = 0$ nếu và chỉ nếu $x = 0$

(ii) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in K$

(iii) $|xy| = |x||y|$

Cặp $(K, ||)$ gọi là trường giá trị.

VÍ DỤ 1.1.2.

1. Hàm lấy giá trị tuyệt đối trên trường số thực $\mathbb{R}$ là một hàm giá trị
2. Hàm lấy môđun trên trường số phức $\mathbb{C}$ cũng là một hàm giá trị
3. Trên một trường K bất kì, hàm $||$ được định nghĩa

$$|x| := \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0, \\ 1, & \text{nếu } x \neq 0. \end{cases}$$

   là một hàm giá trị, gọi là hàm giá trị tầm thường.

MỆNH ĐỀ 1.1.3. *Kí hiệu 1_K là phần tử đơn vị của trường giá trị $(K, ||)$. Ta có*

1. $|1_K| = 1$
2. $|-x| = |x|, x \in K$
3. $|x^{-1}| = |x|^{-1}, x \in K, x \neq 0$
4. $|x - y| \geq ||x| - |y||; x, y \in K$

Giả sử $(K, ||)$ là một trường giá trị. ánh xạ $d : K \times K \to \mathbb{R}$ cho bởi $d(x, y) = |x - y|$ là một metric, gọi là metric cảm sinh bởi $||$ trên K, metric này cũng cảm sinh một tôpô trên K, gọi là tôpô cảm sinh bởi $||$. K cùng với tôpô cảm sinh này trở thành một trường tôpô, nghĩa là phép cộng và phép nhân hai phần tử trên K là các ánh xạ liên tục.

Hai hàm giá trị trên K gọi là *hai hàm giá trị tương đương* nếu chúng cảm sinh cùng một tôpô trên K.

Trong định nghĩa hàm giá trị (1.1.1) ở trên, nếu thay điều kiện (ii) bởi điều kiện (ii′): $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ thì $(K, ||)$ gọi là *trường giá trị phi Archimede*, (ii′) gọi là *bất đẳng thức tam giác mạnh*. Khi đó mêtric cảm sinh bởi hàm giá trị phi Archimede thì gọi là *siêu mêtric*. Mọi trường K cùng với hàm giá trị tầm thường là trường giá trị phi Archimede. Trong luận văn này chỉ nghiên cứu các trường giá trị K là phi Archimede.

VÍ DỤ 1.1.4.

Lấy $\rho > 1$, với mỗi $f \in \mathbb{R}[X]$, đặt

$$|f| := \begin{cases} 0, & \text{nếu} f = 0 \\ \rho^{d(f)}, & \text{nếu } f \neq 0 \end{cases}$$

trong đó $d(f)$ là bậc của f.
Với $s \in \mathbb{R}(X)$, đặt

$$|s| := |f||g|^{-1}, (s = fg^{-1}; f, g \in \mathbb{R}[X], g \neq 0)$$

Thì $(\mathbb{R}(X), ||)$ là trường giá trị phi Archimede.

VÍ DỤ 1.1.5.

Lấy p là một số nguyên tố, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$ ta định nghĩa ord$_p n$ là số $i \in \mathbb{N}$ sao cho p^i chia hết n và p^{i+1} không chia hết n. Với $x \in \mathbb{Q}, x = \dfrac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$ ta định nghĩa ord$_p x$=ord$_p a$-ord$_p b$.
Khi đó $||_p$ được định nghĩa

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-ord_p x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

là một hàm giá trị phi Archimede trên $\mathbb{Q}$

MỆNH ĐỀ 1.1.6 (Nguyên lý tam giác cân).

Cho $||$ là một hàm giá trị phi Archimede trên trường K. Với mọi $x, y \in K$, nếu $|x| \neq |y|$ thì $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$.

MỆNH ĐỀ 1.1.7 (Mọi hàm giá trị trên $\mathbb{Q}$).

Mọi hàm giá trị không tầm thường trên $\mathbb{Q}$ đều tương đương với hoặc $||_p$ với p là một số nguyên tố nào đó hoặc là hàm giá trị tuyệt đối.

ĐỊNH NGHĨA 1.1.8. ***Trường thặng dư***

Giả sử $(K, ||)$ là trường giá trị phi Archimede.
Kí hiệu

$$B(0; 1) = \{x \in K||x| \leq 1\}$$

$$B^{-}(0; 1) = \{x \in K||x| < 1\}$$

Khi đó $k = B(0; 1)/B^{-}(0; 1)$ là một trường, gọi là *trường thặng dư của K.*

ĐỊNH NGHĨA 1.1.9. ***Số $p-$nguyên***

Cho số nguyên tố p. Một số $b \in \mathbb{Q}$ được gọi là *$p-$nguyên* nếu $b = \frac{m}{k}, (m, k) = 1$ và $p \nmid k$

ĐỊNH NGHĨA 1.1.10. *Đồng dư modulo n*

Cho $n \in \mathbb{N}^*; m, k \in \mathbb{Q}$. m gọi là đồng dư với k theo modudlo n nếu $n \mid (m - k)$, kí hiệu $m \equiv k(\text{mod } n)$

1.2 TRƯỜNG CÁC SỐ p-ADIC

Bao đủ (*completion*) của $\mathbb{Q}$ theo hàm giá trị tuyệt đối là trường số thực $\mathbb{R}$. Bao đủ của $\mathbb{Q}$ theo $||_p$ là trường $\mathbb{Q}_p$, gọi là *trường các số p-adic*. Ta cũng kí hiệu $||_p$ là mở rộng của $||_p$ trên $\mathbb{Q}_p$. Cụ thể hơn như sau
Kí hiệu S là tập tất cả các dãy số hữu tỉ Cauchy theo $||_p$. Trên S xác định quan hệ tương đương $\sim$:

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$$

Phần tử của $\mathbb{Q}_p$ chính là các lớp tương đương theo quan hệ $\sim$ với phép cộng và nhân trên $\mathbb{Q}_p$ được định nghĩa bởi:

$$\overline{\{x_n\}} + \overline{\{y_n\}} = \overline{\{x_n + y_n\}}$$

$$\overline{\{x_n\}}.\overline{\{y_n\}} = \overline{\{x_n.y_n\}}$$

$\mathbb{Q}$ được xem là trường con của $\mathbb{Q}_p$ nhờ ánh xạ nhúng mỗi $a \in \mathbb{Q}$ thành $\overline{\{a\}}$.

Với $\alpha \in \mathbb{Q}_p \Rightarrow \alpha = \overline{\{a_n\}}$, giá trị của α được xác định

$$|\alpha|_p = \lim_{n\to\infty} |a_n|_p$$

Như sẽ thấy ở mệnh đề (1.3.6), nếu $\alpha \neq 0$ thì có $N \in \mathbb{N}$ sao cho với $n > N$ thì $|\alpha|_p = |a_n|_p$

Bao đóng đại số $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$ của $\mathbb{Q}_p$ không đầy đủ. Bao đủ của $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$ đầy đủ và đóng đại số, kí hiệu là $\mathbb{C}_p$.

ĐỊNH NGHĨA 1.2.1. ***Số nguyên $p-$adic***

Một số $x \in \mathbb{Q}_p$ gọi là *số nguyên p-adic* nếu $|x|_p \leq 1$. Ta kí hiệu $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x|_p \leq 1\}$.

MỆNH ĐỀ 1.2.2. **i)** *$\mathbb{Z}_p$ là vành con của $\mathbb{Q}_p$ mà chứa $\mathbb{Z}$ thực sự.*

ii) *$\mathbb{Q}_p$ là trường các thương của $\mathbb{Z}_p$.*

iii) *$\mathbb{N}$ trù mật trong $\mathbb{Z}_p$.*

ĐỊNH NGHĨA 1.2.3. ***Khai triển p-adic***

Với mỗi $x \in \mathbb{Q}_p$, x có thể khai triển thành chuỗi

$$x = \sum_{j=m}^{\infty} a_j p^j, m \in \mathbb{Z}, 0 \le a_j < p$$

và gọi là *khai triển p-adic của x*
Trong khai triển này, nếu i là số nguyên nhỏ nhất sao cho $a_i \neq 0$ thì $|x|_p = p^{-i}$.

NHẬN XÉT 1.2.4.

1. Một phần tử $x \in \mathbb{Z}_p$ có nghịch đảo trong $\mathbb{Z}_p$ nếu và chỉ nếu $|x|_p = 1$.
2. Nếu x là phần tử khác 0 của $\mathbb{Z}_p$ thì $x = p^{\mathrm{ord}_p(x)} y$ với $y \in \mathbb{Z}_p, |y|_p = 1$.
3. Nếu $x \in \mathbb{Q}_p$ thì tồn tại $m \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{Z}_p$ sao cho $x = p^m \alpha$
4. Trong $\mathbb{Q}_p$, ta có $B^-(0; 1) = p\mathbb{Z}_p$, từ đó trường thặng dư của $\mathbb{Q}_p$ là $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$.

MỆNH ĐỀ 1.2.5.

Tập tất cả các giá trị của $||_p$ là $\{0\} \cup \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Đây là một nhóm, gọi là nhóm giá trị của $\mathbb{Q}_p$

1.3 MỘT SỐ KHÁI NIỆM, KẾT QUẢ VỀ GIẢI TÍCH SIÊU MÊTRIC

Từ mục này đến cuối luận văn, chỉ xét các trường giá trị phi Archimede K đầy đủ chứa $\mathbb{Q}_p$ như trường con.

ĐỊNH NGHĨA 1.3.1. ***Chuẩn trên không gian vectơ***

Cho E là một không gian vectơ trên K. Một ánh xạ $\|\| : E \to \mathbb{R}$ gọi là một *chuẩn* nếu

(i) $\|x\| \ge 0, \forall x \in E, \|x\| = 0$ nếu và chỉ nếu $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, với $x \in E, \lambda \in K$.

(iii) $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

$(E, \|\|)$ gọi là không gian định chuẩn trên K. Ta có thể chỉ viết E thay cho $(E, \|\|)$

VÍ DỤ 1.3.2.

Cho X là một tập, một hàm $f : X \to K$ gọi là bị chặn nếu

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty$$

Đặt $B(X \to K)$ là tập tất cả các hàm bị chặn từ X vào K thì $(B(X \to K), \|\|_\infty)$ là một không gian định chuẩn trên K.

ĐỊNH NGHĨA 1.3.3. ***ánh xạ liên tục trên không gian định chuẩn***

Cho E, F là các không gian định chuẩn trên K. ánh xạ K-tuyến tính $A : E \to F$ gọi là *liên tục* nếu với mọi dãy $x_1, x_2, ... \in E$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_E = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n\|_F = 0$.

MỆNH ĐỀ 1.3.4.

Cho E, F là các không gian định chuẩn trên K. ánh xạ K-tuyến tính $A : E \to F$ là liên tục nếu và chỉ nếu có $M \geq 0$ sao cho $\|Ax\|_F \leq M\|x\|_E, \forall x \in E$

ĐỊNH NGHĨA 1.3.5. ***Giới hạn $p-$adic***

Một dãy $a_1, a_2, ...$ trong K gọi là *hội tụ đến* $a \in K$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$, ta kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

MỆNH ĐỀ 1.3.6. *Lấy $a_1, a_2, ...$ là một dãy trong K với hàm giá trị phi Archimede $||$. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \neq 0$ thì $|a_n| = |a|$ với n đủ lớn.*

ĐỊNH NGHĨA 1.3.7. ***Hàm liên tục***

Cho $X \subset K$. Hàm $f : X \to K$ gọi là liên tục tại $a \in X$ nếu một trong các điều kiện tương đương sau đây được thỏa

(i) Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, có số $\delta > 0$ sao cho $|x - a| < \delta, x \in X$ kéo theo $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(ii) Nếu $a_1, a_2, ... \in X, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

Hàm f gọi là liên tục nếu nó liên tục tại mọi $x \in X$.

ĐỊNH NGHĨA 1.3.8. ***Hàm khả vi***

Lấy $X \subset K, a \in X$ là một điểm tụ của X. Hàm $f : X \to K$ gọi là *khả vi tại* a nếu đạo hàm $f'(a)$ của f tại a tồn tại, với

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

f gọi là *khả vi trên X* nếu $f'(a)$ tồn tại với mỗi $a \in X$. Hàm f' gọi là *đạo hàm của f*, f gọi là *nguyên hàm của f'*.

MỆNH ĐỀ 1.3.9.

Các quy tắc đã biết về tính khả vi của tổng, tích, thương, hợp thành của các hàm biến thực vẫn đúng trong trường hợp này. Do đó, đạo hàm của hàm đa thức $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ *trên* K *là* $f'(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1}$. *Các hàm hữu tỉ là khả vi. Một hàm khả vi là liên tục.*

ĐỊNH NGHĨA 1.3.10. ***Tập lồi***

Cho $x, y, z \in K$. Kí hiệu hình cầu nhỏ nhất chứa cả x và y là $[x, y]$. z gọi là *ở giữa x và y* nếu $z \in [x, y]$, ngược lại ta nói x, y *cùng phía với* z. Một tập con X của K gọi là *lồi* nếu $x, y \in X$ kéo theo $[x, y] \subset X$

MỆNH ĐỀ 1.3.11.

Tất cả các tập lồi trong K *là các hình cầu,* $\emptyset, K$ *và các tập gồm một phần tử* $\{a\}, a \in K$

ĐỊNH NGHĨA 1.3.12. ***Phần tử dương trong*** K

Một phần tử $x \in K$ gọi là *dương* nếu $|1 - x| < 1$. Tập tất cả các phần tử dương của K là một nhóm, kí hiệu là K^+

ĐỊNH NGHĨA 1.3.13. ***Hàm giải tích***

Xét tập con D của K là tập lồi. Một hàm $f : D \to K$ gọi là *giải tích* trên D nếu có các phần tử $u \in D$ và $a_0, a_1, ... \in K$ sao cho

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-u)^n, (x \in D)$$

MỆNH ĐỀ 1.3.14.

Một hàm giải tích là khả vi vô hạn lần.

ĐỊNH LÝ 1.3.15.

Cho $D \subset K$ là tập con lồi, mở và f giải tích trên D. Khi đó với mỗi $v \in D$, tồn tại các phần tử $b_0, b_1, ... \in K$ sao cho $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-v)^n, \forall x \in D$.

HỆ QUẢ 1.3.16.

Nếu D chứa 0 thì hàm f giải tích trên D có thể biểu diễn dạng $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

ĐỊNH NGHĨA 1.3.17. ***Hàm mũ p-adic***

Hàm mũ p-adic được cho bởi công thức

$$\exp_p x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, (x \in E)$$

Trong đó $E := \{x \in K : |x| < p^{\frac{1}{1-p}}\}$ là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

ĐỊNH NGHĨA 1.3.18. ***Hàm logarit $p-$adic***

Hàm logarit p-adic được định nghĩa là

$$\log_p(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}, x \in K^+$$

ĐỊNH NGHĨA 1.3.19. ***Hàm khả vi liên tục***

Cho X là tập con khác rỗng của K không chứa điểm cô lập, $f : X \to K$. *Sai phân* $\phi_1 f$ của f là hàm hai biến cho bởi $\phi_1 f : X \times X \setminus \triangle \to K, \triangle := \{(x, x) : x \in X\}$

$$\phi_1 f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, (x, y \in X, x \neq y)$$

f được gọi là *khả vi liên tục tại* $a \in X$, (f là C^1 tại a) nếu $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} \phi_1 f(x, y)$ tồn tại.

f gọi là *khả vi liên tục* (f là hàm C^1) nếu f là C^1 tại mọi $a \in X$. Tập tất cả các hàm $f : X \to K$ khả vi liên tục được kí hiệu là $C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$, là K - không gian vectơ đóng đối với phép nhân ánh xạ.
Đặt $\|f\|_1 := \|f\|_\infty \vee \|\phi_1 f\|_\infty$, thì $BC^1(X \to K) := \{f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K) : \|f\|_1 < \infty\}$ là không gian định chuẩn với chuẩn $\|\|_1$.

MỆNH ĐỀ 1.3.20. *Mọi hàm giải tích là* C^1.

ĐỊNH NGHĨA 1.3.21. ***Hàm khả vi liên tục cấp*** n Xét X là tập con khác rỗng của K không chứa điểm cô lập. Với $n \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$\nabla^n X := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n : \text{ nếu } i \neq j \text{ thì } x_i \neq x_j\}$$

Sai phân bậc n $\phi_n f : \nabla^{n+1} X \to K$ của hàm $f : X \to K$ được định nghĩa quy nạp bởi:

(i) $\phi_0 f := f$

(ii) Với $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \nabla^{n+1} X$:

$$\phi_n f(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) := \frac{\phi_{n-1} f(x_1, x_3, ..., x_{n+1}) - \phi_{n-1} f(x_2, x_3, ..., x_{n+1})}{x_1 - x_2}$$

f là một hàm C^n hay f là C^n nếu $\phi_n f$ có thể mở rộng thành một hàm liên tục $\overline{\phi_n} f : X^{n+1} \to K$.
Tập tất cả các hàm C^n $f : X \to K$ được kí hiệu là $C^n(X \to K)$
Hàm f gọi là C^n tại $a \in X$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\nu \to \alpha} \phi_n f(\nu), \ (\alpha := (a, a, ..., a) \in X^{n+1}, \nu \in \nabla^{n+1} X)$$

MỆNH ĐỀ 1.3.22. *Một hàm $f : X \to K$ là C^n nếu và chỉ nếu f là C^n tại mọi $a \in X$.*

MỆNH ĐỀ 1.3.23 (Biểu diễn Teichmuller). *Phương trình $x^p = x$ có đúng p nghiệm trong $\mathbb{Q}_p$. Tập nghiệm là $\{0, \theta, \theta^2, ...\theta^{p-1}\}$ với θ là một căn nguyên thủy bậc $p-1$ của 1 trong $\mathbb{Q}_p$, nghĩa là $n = p-1$ là số dương nhỏ nhất để $\theta^n = 1$.*
Khi đó, mọi phần tử $x \in \mathbb{Q}_p$ có thể được biểu diễn dạng $x = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n p^n, b_n \in \{0, \theta, \theta^2, ...\theta^{p-1}\}, b_{-n} = 0$ khi n đủ lớn và ngược lại, mỗi chuỗi như thế là biểu diễn cho một số p-adic.

ĐỊNH NGHĨA 1.3.24. ***Dãy nội suy được*** Cho $A \subset \mathbb{Z}$, A trù mật trong $\mathbb{Z}$ theo nghĩa p-adic. $n \mapsto a_n$ là một dãy trong K.
Dãy này gọi là *nội suy được* nếu tồn tại hàm liên tục $f : \mathbb{Z}_p \to K$ sao cho $f(n) = a_n, \forall n \in A$

ĐỊNH LÝ 1.3.25.

Cho $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$. Khi đó có duy nhất một hàm $F \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ sao cho

$$F(x+1) - F(x) = f(x), (x \in \mathbb{Z}_p),$$
$$F(0) = 0$$

HỆ QUẢ 1.3.26.

Nếu một dãy u_n trong K nội suy được thì dãy tổng riêng của u_n cũng nội suy được.

ĐỊNH LÝ 1.3.27.

Với $a \in K$ thì dãy $1, a, a^2...$ nội suy được nếu và chỉ nếu $a \in K^+$. Đặt

$$a^x := \lim_{n \to x} a^n, x \in \mathbb{Z}_p, a \in K^+$$

Khi đó, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_p, a \in K^+$ ta có

- $a^x \in K$

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{-x} = (a^x)^{-1}$

ĐỊNH LÝ 1.3.28. *Đặt* $E = \{x \in K : |x| < p^{\frac{1}{1-p}}\}$.
Các hàm mũ p-adic, hàm logarit p-adic và hàm a^x *có các tính chất sau*

1. $\exp_p$ *là khả vi trên* E *và* $\exp_p' = \exp$.
2. $\log_p$ *là khả vi trên* K^+ *và* $(\log_p x)' = \frac{1}{x}, x \in K^+$
3. $\exp_p(x+y) = (\exp_p x)(\exp_p y), (x, y \in E)$
4. $\log_p(xy) = \log_p x + \log_p y, (x, y \in K^+)$
5. $\log_p(\exp_p x) = x, \exp_p(\log_p y) = y, (x \in E, y \in 1 + E)$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log_p a$

ĐỊNH NGHĨA 1.3.29. $\binom{x}{n}$

Cho $n \in \mathbb{N}, x \in K$

$$\binom{x}{n} := \begin{cases} \dfrac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}, & \text{nếu } n \neq 0 \\ 1, & \text{nếu } n = 0 \end{cases}$$

MỆNH ĐỀ 1.3.30. *Kí hiệu* $\binom{\mathfrak{x}}{n}$ *là hàm* $x \mapsto \binom{x}{n}$. *Ta có*

(i) $\binom{\mathfrak{x}}{n}$ *là hàm đa thức bậc n. Nếu* $j \in \mathbb{N}, j < n$ *thì* $\binom{j}{n} = 0, \binom{n}{n} = 1$

(ii) *Với mọi* $x, y \in K, n \in \mathbb{N}$ *ta có* $\binom{x+y}{n} = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{x}{j}\binom{y}{n-j}$

(iii) *Với mọi* $x \in K, n \in \mathbb{N}$ *ta có* $\binom{x+1}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1}$

(iv) $|\binom{x}{n}|_p \leq 1, x \in \mathbb{Z}_p$

ĐỊNH LÝ 1.3.31.

Các hàm $\binom{\mathfrak{x}}{0}, \binom{\mathfrak{x}}{1}, \binom{\mathfrak{x}}{2}, ...$ *lập thành một cơ sở trực giao (gọi là cơ sở Mahler) của* $C(\mathbb{Z}_p \to K)$*, nghĩa là:*

(i) *Với mỗi $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ thì có duy nhất các số $a_0, a_1, ... \in K$ sao cho*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}, x \in \mathbb{Z}_p$$

Chuỗi này hội tụ đều, ta gọi đây là khai triển Mahler của f. Các số $a_0, a_1, ...$ gọi là các hệ số Mahler của f

(ii) *Nếu $a_0, a_1...$ là dãy dần về 0 trong K thì $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ xác định một hàm liên tục trên $\mathbb{Z}_p$.*

BỔ ĐỀ 1.3.32. *Đặt $|K^*| = \{|x|, x \in K, x \neq 0\}$.*

Cho $r \in |K^*|$ và hàm $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ với $x \in B_0(r)$. Khi đó, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, dãy các tổng riêng $m \mapsto \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ hội tụ đến f trong $C^n(\mathbb{Z}_p \to K)$.

ĐỊNH NGHĨA 1.3.33. γ_n

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta định nghĩa γ_n là các số nguyên sao cho

- Với $n = 0, \gamma_0 := 1$
- Với $n > 0$, n có khai triển $p-$adic là $n = a_0 + a_1 p + ... + a_s p^s$ thì $\gamma_n := a_s p^s$

BỔ ĐỀ 1.3.34. *Các số γ_n có các tính chất sau*

(i) $\frac{1}{n} \leq |\gamma_n|_p \leq \frac{p}{n}, n > 0$

(ii) $\frac{1}{p}|\gamma_n|_p \leq |\gamma_{n+1}|_p \leq |\gamma_n|_p, n \in \mathbb{N}$

ĐỊNH LÝ 1.3.35 (Đặc trưng của các hàm C^1 bởi hệ số Mahler).

Cho $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ có khai triển Mahler là $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{\mathfrak{x}}{n}$. Khi đó $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ nếu và chỉ nếu $\lim_{n \to \infty} |a_n| n = 0$. Hơn nữa nếu $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ thì $\|f\|_1 = \max\{|a_n||\gamma_n|_p^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ với

$$\|f\|_1 := \|f\|_\infty \vee \|\phi_1 f\|_\infty$$

CHƯƠNG 2

XÂY DỰNG TÍCH PHÂN VOLKENBORN

2.1 TỔNG BẤT ĐỊNH

ĐỊNH NGHĨA 2.1.1. ***Tổng bất định***

Cho $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$, khi đó theo hệ quả (1.3.26), dãy $n \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} f(j), n \in \mathbb{N}$ là nội suy được. Hàm số liên tục nội suy dãy $n \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} f(j), n \in \mathbb{N}$ gọi là tổng bất định của f, kí hiệu là Sf.

$$Sf(x) = \sum_{j=0}^{x-1} f(j) = \lim_{n \to x} \sum_{j=0}^{n-1} f(j), n \in \mathbb{N}^*$$

NHẬN XÉT 2.1.2. *Từ định lý (1.3.25), ta có :*

$$Sf(x+1) - Sf(x) = f(x), (x \in \mathbb{Z}_p),$$

$$Sf(0) = 0$$

VÍ DỤ 2.1.3. ***Tổng bất định của một vài hàm số trên*** $\mathbb{Z}_p$

1. Hàm số $f(x) = 1$
   Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(j) = n$$

Suy ra

$$Sf(x) = \lim_{n \to x} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) = x$$

2. Hàm số $f(x) = x, x \in \mathbb{Z}_p$

   Với $n \in \mathbb{N}, n > 0$, ta có

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(j) = 0 + 1 + ... + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

   Suy ra

$$Sf(x) = \lim_{n \to x} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) = \frac{(x-1)x}{2}$$

3. Hàm số $f(x) = x^2, x \in \mathbb{Z}_p$

   Với $n \in \mathbb{N}, n > 1$, ta có

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(j) = 0^2 + 1^2 + ... + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

   Suy ra

$$Sf(x) = \lim_{n \to x} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) = \frac{(x-1)x(2x-1)}{6} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

4. Hàm số $f(x) = x^3, x \in \mathbb{Z}_p$

   Với $n \in \mathbb{N}, n > 1$, ta có

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(j) = 0^3 + 1^3 + ... + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

   Suy ra

$$Sf(x) = \lim_{n \to x} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) = \frac{(x-1)^2 x^2}{4}$$

5. Hàm số $f(x) = a^x, x \in \mathbb{Z}_p, a \in \mathbb{C}_p^+, a \neq 1$

Xét $n \in \mathbb{N}, n > 1$, ta thấy

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(j) = a^0 + a^1 + ... + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Suy ra

$$Sf(x) = \lim_{n \to x} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) = \frac{a^x - 1}{a - 1}$$

Ta đã biết với một hàm số $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ cho trước, các hệ số Mahler trong khai triển Mahler hoàn toàn được xác định. Định lý sau đây đưa ra một công thức biểu diễn các hệ số Mahler qua các giá trị của f.

ĐỊNH LÝ 2.1.4.

Cho $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ có khai triển Mahler là $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ thì các hệ số a_n sẽ được xác định là

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(j), n \in \mathbb{N}$$

Chứng minh. Gọi I là toán tử đồng nhất. Đặt

$$(L_1 f)(x) := f(x+1), (x \in \mathbb{Z}_p)$$

$$\Delta f := L_1 f - f$$

thì

$$L_1 : C(\mathbb{Z}_p \to K) \to C(\mathbb{Z}_p \to K), \Delta : C(\mathbb{Z}_p \to K) \to C(\mathbb{Z}_p \to K)$$

Ta có $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x), x \in \mathbb{Z}_p$.

Giả sử $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ có khai triển Mahler là $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ thì

$$f(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x+1}{n}, (x \in \mathbb{Z}_p)$$

Mặt khác,

$$\binom{x+1}{n} = \begin{cases} \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1}, & \text{nếu } n \geq 1 \\ 1, & \text{nếu } n = 0 \end{cases}$$

Nên ta tính được

$$\begin{aligned} f(x+1) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{x+1}{n} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{x}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{x}{n-1} \\ &= f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \binom{x}{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \binom{x}{n}$$

Do đó

$$(\Delta f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \binom{\mathfrak{X}}{n}$$

Với $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta^k f = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \binom{\mathfrak{X}}{n}$$

Vì $\binom{0}{0} = 1$ và $\binom{0}{n} = 0, n > 0$ nên

$$(\Delta^k f)(0) = a_k \tag{2.1}$$

Mặt khác, $\Delta = L_1 - I$ nên đặt $L_j f(x) := f(x+j), x \in \mathbb{Z}_p$ ta có:

$$\Delta^k = (L_1 - I)^k = \sum_{j=0}^{k} L_1^j (-1)^{k-j} \binom{k}{j} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} L_j$$

Suy ra

$$(\Delta^k f)(0) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(j) \tag{2.2}$$

Từ (2.1) và (2.2) ta có

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(j), n \in \mathbb{N}$$

$\square$

MỆNH ĐỀ 2.1.5 (Hệ số Mahler của tổng bất định).

Lấy $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{\mathfrak{X}}{n} \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ thì tổng bất định của f có khai triển Mahler là

$$Sf = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \binom{\mathfrak{X}}{n}$$

Đặc biệt, $S\binom{\mathfrak{X}}{n} = \binom{\mathfrak{X}}{n+1}$

Chứng minh. Do Sf liên tục nên theo định lý (1.3.31), có các hệ số Mahler $b_0, b_1, ... \in K$ sao cho

$$Sf = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \binom{\mathfrak{X}}{n}$$

Từ $Sf(0) = 0$ ta có $b_0 = 0$. Mặt khác, $Sf(x+1) - Sf(x) = f(x)$ nên

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{\mathfrak{X}}{n} = f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \binom{\mathfrak{X}+1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \binom{\mathfrak{X}}{n}$$

áp dụng $\binom{x+1}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1}$, ta được

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{\mathfrak{X}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \binom{\mathfrak{X}}{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} \binom{\mathfrak{X}}{n}$$

Vậy $b_n = a_{n-1}, n \in \mathbb{N}, n > 0$.

Với $n = 0$, $\binom{x}{0} = 1$, $\binom{x}{1} = x$, theo ví dụ (2.1.3) ta có $S\binom{\mathfrak{X}}{0} = \binom{\mathfrak{X}}{0+1}$

Với $n > 0$, xét hàm $f = \binom{\mathfrak{X}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{\mathfrak{X}}{n}$ với $a_0 = ... = a_{n-1} = a_{n+1} = ... = 0, a_n = 1$, ta có $Sf = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \binom{\mathfrak{X}}{n} = \binom{\mathfrak{X}}{n+1}$.

Vậy $S\binom{\mathfrak{X}}{n} = \binom{\mathfrak{X}}{n+1}$. $\square$

ĐỊNH LÝ 2.1.6.

Cho $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$. Khi đó tổng bất định của f là Sf cũng thuộc $C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ và

$$\|f\|_1 \le \|Sf\|_1 \le p\|f\|_1$$

Chứng minh: Vì $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ nên có các $a_0, a_1, ... \in K$ sao cho $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ và theo định lý (1.3.35),

$$\|f\|_1 = \max_{n \ge 0} |a_n||\gamma_n|_p^{-1}$$

$$\lim_{n \to \infty} |a_n|n = 0$$

Khi đó theo mệnh đề (2.1.5), $Sf = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\binom{x}{n}$. Dễ thấy $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n|n = 0$ nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{n \to \infty} |a_{n-1}|n = 0$. Theo định lý (1.3.35)

$$Sf \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K), \|Sf\|_1 = \max_{n \ge 0} |a_n|\gamma_{n+1}|_p^{-1}$$

Theo bổ đề (1.3.34), ta có $\|f\|_1 \le \|Sf\|_1 \le p\|f\|_1$. □

2.2 ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ KẾT QUẢ VỀ TÍCH PHÂN VOLKENBORN

ĐỊNH NGHĨA 2.2.1. ***Tích phân Volkenborn***

Cho hàm $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$. f được gọi là *khả tích (khả tích Volkenborn)* nếu tồn tại hữu hạn giới hạn

$$\lim_{n \to \infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n - 1} f(j)$$

Khi đó, giới hạn này gọi là *tích phân Volkenborn của f* và kí hiệu:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx := \lim_{n \to \infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n - 1} f(j)$$

NHẬN XÉT 2.2.2. *1.* Do $p^{-n}\sum\limits_{j=0}^{p^n-1} f(j) = \frac{Sf(p^n)-Sf(0)}{p^n}$ nên

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = (Sf)'(0)$$

2. Theo định lý (2.1.6), nếu $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ thì $Sf \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ nên $Sf'(0)$ luôn tồn tại, vì vậy mọi hàm C^1 đều khả tích.

3. Với $\alpha, \beta \in K; f, g$ khả tích, ta có:

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx + \beta \int\limits_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx$$

4. Khác với hàm biến thực, tồn tại những hàm liên tục trên $\mathbb{Z}_p$ mà không khả tích.

VÍ DỤ 2.2.3. *Xét hàm $f(x) := |x|_p$.*

(i) *f liên tục trên $\mathbb{Z}_p$ vì*

- *Tại $x = 0$, với mọi dãy $\{x_n\} \subset \mathbb{Z}_p$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ thì theo định nghĩa giới hạn $p-$adic,*

$$f(0) = 0 = \lim_{n\to\infty} |x_n - 0|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Suy ra f liên tục tại $x = 0$.

- *Tại $x \neq 0$, với mọi dãy $\{x_n\} \subset \mathbb{Z}_p$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ thì theo mệnh đề (1.3.6), với n đủ lớn, $|x_n|_p = |x|_p$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, nghĩa là f liên tục tại x.*

(ii) *Xét giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p^n|_p - |0|_p}{p^n} = \lim_{n\to\infty} p^{-2n} = \infty$$

suy ra f không khả vi tại 0.

(iii) *Đặt $g := \Delta f$, nghĩa là $g(x) = |x+1|_p - |x|_p, x \in \mathbb{Z}_p$.*
Ta thấy $g \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ và với $m \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\begin{aligned} Sg(m) &= g(0) + g(1) + ... + g(m-1) \\ &= (f(1) - f(0)) + (f(2) - f(1)) + ... + (f(m) - f(m-1)) \\ &= f(m) - f(0) = |m|_p \end{aligned}$$

Do Sg liên tục và $\mathbb{N}$ trù mật trong $\mathbb{Z}_p$ nên $Sg(s) = |s|_p, s \in \mathbb{Z}_p$
Ta chứng minh g không khả tích.
Thật vậy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(0) + g(1) + ... + g(p^n - 1)}{p^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|p^n|_p}{p^n} = \infty$$

Một cách tương tự đối với bất kì hàm $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ mà không khả vi tại 0, nghĩa là *không tồn tại* giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(p^n) - f(0)}{p^n}$$

Xét $g := \Delta f$, nghĩa là $g(x) = f(x+1) - f(x), x \in \mathbb{Z}_p$ thì g liên tục trên $\mathbb{Z}_p$ và g không khả tích. Với $m \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\begin{aligned} Sg(m) &= g(0) + g(1) + ... + g(m-1) \\ &= (f(1) - f(0)) + (f(2) - f(1)) + ... + (f(m) - f(m-1)) \\ &= f(m) - f(0) \end{aligned}$$

Do Sg liên tục và $\mathbb{N}$ trù mật trong $\mathbb{Z}_p$ nên $Sg(s) = f(s) - f(0), s \in \mathbb{Z}_p$
Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(0) + g(1) + ... + g(p^n - 1)}{p^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(p^n) - f(0)}{p^n}$$

Theo cách chọn của f thì giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(p^n) - f(0)}{p^n}$ không tồn tại nên g không khả tích.

5. Như đã thấy ở nhận xét (2), tính khả vi liên tục là điều kiện đủ để một hàm khả tích, tuy nhiên đó không phải là điều kiện cần. Thực tế, tồn

tại những hàm không khả vi liên tục tại bất kì điểm nào trên $\mathbb{Z}_p$ nhưng vẫn khả tích.

VÍ DỤ 2.2.4. *Hàm số*

$$f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5, f(\sum_{k=0}^{\infty} a_k 5^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(a_k) 5^k$$

với $\sigma = (2;4)$ là một hoán vị của $\{0,1,2,3,4\}$ không khả vi liên tục tại bất kì điểm nào trên $\mathbb{Z}_p$ nhưng vẫn khả tích.

***Chứng minh*.** **(i)** Xét $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k 5^k, y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k 5^k \in \mathbb{Z}_5$ ta có $|x-y|_5 = 5^{-i}$, nghĩa là i là số nhỏ nhất mà $a_i \neq b_i$.

Khi đó, $\sigma(a_k) = \sigma(b_k)$ với mọi $k < i$, $\sigma(a_i) \neq \sigma(b_i)$ nên $|f(x) - f(y)|_5 = 5^{-i}$.

Như vậy, với mọi số dương ε cho trước, chọn $\delta = \varepsilon$ thì hàm f thỏa điều kiện liên tục trên $\mathbb{Z}_5$.

(ii) Ta chứng minh f không C^1 tại bất kì điểm $a \in \mathbb{Z}_5$.

Thật vậy, giả sử $a = a_0 + a_1 5 + ... + a_{n-1}5^{n-1} + a_n 5^n + ...$

Xét các dãy

$$x_n = a_0 + a_1 5 + ... + a_{n-1}5^{n-1} + 3.5^n$$

$$y_n = a_0 + a_1 5 + ... + a_{n-1}5^{n-1} + 5^n$$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$,

$f(x_n) - f(y_n) = 2.5^n, x_n - y_n = 2.5^n$ nên

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = 1$$

Lại xét các dãy

$x'_n = a_0 + a_1 5 + ... + a_{n-1}5^{n-1} + 2.5^n$

$y'_n = a_0 + a_1 5 + ... + a_{n-1}5^{n-1}$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} y'_n = a$,

$f(x'_n) - f(y'_n) = 4.5^n, x'_n - y'_n = 2.5^n$ nên

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x'_n) - f(y'_n)}{x'_n - y'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4.5^n}{2.5^n} = 2 \neq 1$$

Vậy f không C^1 tại a.

(iii) f khả tích.

Xét $M = \{0, 1, 2, ..., p^n - 1\}$.

$z \in M, z = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k 5^k$

Với mỗi $a_k \in I := \{0, 1, 2, 3, 4\}$, tồn tại $b_k \in I$ sao cho $b_k = \sigma(a_k)$ nên f là toàn ánh, lại do M hữu hạn nên f là song ánh.

Suy ra

$$f(0) + f(1) + ... + f(p^n - 1) = 0 + 1 + ... + p^n - 1 = \frac{(p^n - 1)p^n}{2}$$

Từ đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + ... + f(p^n - 1)}{p^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p^n - 1)p^n}{2p^n} = -\frac{1}{2}$$

□

MỆNH ĐỀ 2.2.5. *Cho f khả tích, với mỗi $m \in \mathbb{N}^*$ ta có*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(j + mx)dx$$

Chứng minh. Đặt

$$g(x) := \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f(j + mx)$$

thì $g \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ và

$$\begin{aligned}
g(0) &= \frac{1}{m}\left[f(0) + f(1) + ... + f(m-1)\right] && (2.3)\\
g(1) &= \frac{1}{m}\left[f(m) + f(m+1) + ... + f(2m-1)\right] && (2.4)\\
g(2) &= \frac{1}{m}\left[f(2m) + f(2m+1) + ... + f(3m-1)\right] && (2.5)\\
&\vdots && (2.6)\\
g(p^n - 1) &= \frac{1}{m}\left[f(mp^n - m) + ... + f(mp^n - 1)\right] && (2.7)
\end{aligned}$$

Từ các phương trình (2.3), (2.4), (2.5),..., (2.7) ta có

$$Sg(p^n) = \frac{1}{m} Sf(p^n.m)$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(j+mx)dx &= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{Sg(p^n)-Sg(0)}{p^n} \\
&= \frac{1}{m}\lim_{n\to\infty}\frac{Sf(mp^n)-Sf(0)}{p^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{Sf(mp^n)-Sf(0)}{mp^n} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{Sf(x)-Sf(0)}{x} \\
&= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx
\end{aligned}$$

□

MỆNH ĐỀ 2.2.6. *Với* $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ *ta có*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} Sf(x)dx = -\int\limits_{\mathbb{Z}_p}(x+1)f(x)dx$$

Chứng minh. Ta chứng minh

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} Sf(x)dx + \int\limits_{\mathbb{Z}_p}(x+1)f(x)dx = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} Sf(x)+(x+1)f(x)dx = 0$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
Sf(0) &= 0\\
Sf(1) &= f(0)\\
Sf(2) &= f(0)+f(1)\\
Sf(3) &= f(0)+f(1)+f(2)\\
&\vdots\\
Sf(p^n-1) &= f(0)+f(1)+f(2)+...+f(p^n-2)
\end{aligned}$$

Suy ra

$Sf(0)+Sf(1)+...+Sf(p^n-1) = (p^n-1)f(0)+(p^n-2)f(1)+...+f(p^n-2)$

Từ đó

$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} Sf(x)+(x+1)f(x)dx$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{[Sf(0)+Sf(1)+...+Sf(p^n-1)]+[f(0)+2f(1)+...+p^n f(p^n-1)]}{p^n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{[(p^n-1)f(0)+(p^n-2)f(1)+...+f(p^n-2)]+[f(0)+2f(1)+...+(p^n-1)f(p^n-2)+p^n f(p^n-1)]}{p^n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} p^n \frac{f(0)+f(1)+...+f(p^n-1)}{p^n}$

$= 0.\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = 0$

□

MỆNH ĐỀ 2.2.7.

$\int\limits_{\mathbb{Z}_p}$ là một hàm liên tục K - tuyến tính trên $C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$. Đặc biệt, nếu $f, f_1, f_2, \ldots \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ theo chuẩn $\|\|_1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f_n(x)dx = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx$$

Chứng minh: Theo định lý (2.1.6) ta có

$$|\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx| = |(Sf)'(0)| \le \|Sf\|_1 \le p\|f\|_1$$

Suy ra $\int\limits_{\mathbb{Z}_p}$ liên tục K - tuyến tính trên $C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$.

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ thì với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số nguyên dương N sao cho

$$\|f_n - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{p}, \forall n > N, n \in \mathbb{N}.$$

Do đó, với $n > N$

$$|\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f_n(x)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx| = |\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f_n(x) - f(x)dx| \leq p\|f_n - f\|_1 < \varepsilon$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f_n(x)dx = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx$$

$\square$

MỆNH ĐỀ 2.2.8.

Cho $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K), f$ *có khai triển Mahler là* $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$.
Khi đó

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Chứng minh: Theo mệnh đề 2.1.5 ta có $S\binom{x}{n} = \binom{x}{n+1}$ với mọi n do đó

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} dx = \lim_{x\to 0} x^{-1} \binom{x}{n+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)\dots(x-n)}{x(n+1)!}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)\dots(x-1-n+1)}{(n+1)n!}$$

$$= \frac{-1.(-2)...(-n)}{(n+1)n!} = \frac{(-1)^n.n!}{(n+1)n!} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Mặt khác $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ hội tụ trong $C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ nên theo mệnh đề (2.2.7) ta có

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$\square$

MỆNH ĐỀ 2.2.9 (Tích phân Volkenborn của hàm giải tích).

Cho $f : \mathbb{Z}_p \to K$ *là hàm giải tích,* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, (x \in \mathbb{Z}_p)$. *Khi đó*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^n dx$$

Chứng minh: Xét dãy các hàm $f_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ thì theo bổ đề (1.3.32), dãy f_n hội tụ về f. Bây giờ áp dụng mệnh đề (2.2.7), ta có

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^n dx$$

$\square$

MỆNH ĐỀ 2.2.10. *Với mỗi hàm* $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$

(i) $(Sf)' - Sf' = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx$ *hay* $(Sf)' - Sf'$ *là hàm hằng.*

(ii) *Với* $s \in \mathbb{Z}_p$ *thì*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx = (Sf)'(s) \tag{2.8}$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = (Sf')(s) \tag{2.9}$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s+1)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx = f'(s) \tag{2.10}$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)dx = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx + f'(0) \tag{2.11}$$

(iii) *Lấy Pf là một nguyên hàm bất kì của f. Với $s \in \mathbb{Z}_p$ ta có*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} Pf(x+s)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} Pf(x)dx = (Sf)(s) \tag{2.12}$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} Pf(x+s+1)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} Pf(x+s)dx = f(s) \tag{2.13}$$

Chứng minh. Gọi D là toán tử vi phân, $D : C^1(\mathbb{Z}_p \to K) \to C(\mathbb{Z}_p \to K)$, đặt $(L_1 f)(x) := f(x+1)$, với $x \in \mathbb{Z}_p, \Delta : C(\mathbb{Z}_p \to K) \to C(\mathbb{Z}_p \to K), \Delta(f) := L_1 f - f$.
Khi đó ta có $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x), f \in C(\mathbb{Z}_p \to K), x \in \mathbb{Z}_p$. Lấy bất kì $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K), \Delta D(f)(x) = Df(x+1) - Df(x)(x \in \mathbb{Z}_p), D\Delta(f)(x) = D\left(f(x+1) - f(x)\right) = Df(x+1) - Df(x)(x \in \mathbb{Z}_p)$. Như vậy với mọi $x \in \mathbb{Z}_p, \Delta D(f)(x) = D\Delta(f)(x)$ suy ra $\Delta D = D\Delta$ trên $C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$.
Mặt khác ΔS là đồng nhất vì với $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$,

$$\Delta S(f)(x) = Sf(x+1) - Sf(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{Z}_p$$

Ngoài ra ta có, với $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}(S\Delta f)(n) &= \Delta f(0) + \Delta f(1) + \ldots + \Delta f(n-1)\\ &= f(1) - (0) + f(2) - f(1) + \ldots + f(n) - f(n-1)\\ &= f(n) - f(0)\end{aligned}$$

Với mọi $x \in \mathbb{Z}_p$, do $\mathbb{N}$ trù mật trong $\mathbb{Z}_p$ nên tồn tại dãy $x_1, x_2, ...x_n \in \mathbb{N}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Do $S\Delta f$ liên tục nên

$$S\Delta f(x) = \lim_{n\to\infty} S\Delta f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x_n) - f(0)\right)$$

Lại do f liên tục trên $\mathbb{Z}_p$ nên $S\Delta f(x) = f(x) - f(0)$
ΔS là đồng nhất nên ta có $SD = SD\Delta S = S\Delta DS$ (vì $\Delta D = D\Delta$).
Như vậy, với $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K), s \in \mathbb{Z}_p$ ta có

$$SDf(s) = S\Delta(DSf)(s) = DSf(s) - DSf(0)$$

hay
$Sf'(s) = (Sf)'(s) - (Sf)'(0) = (Sf)'(s) - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx$ với mọi $s \in \mathbb{Z}_p$.

Vậy ta có (i).

Đặt $L_s f(x) := f(x+s)$ với $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K); x, s \in \mathbb{Z}_p$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx &= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} L_s f(x)dx \\ &= DSL_s f(0) = L_s DSf(0) = DSf(0+s) = (Sf)'(s)\end{aligned}$$

Vậy ta có (2.8).

Từ (i) ta có

$$(Sf)'(s) - Sf'(s) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx \Longleftrightarrow (Sf)'(s) - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = Sf'(s)$$

Theo (2.8), $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx = (Sf)'(s)$ ta có (2.9).

Để chứng minh (2.10), ta thấy

$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s+1)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx$

$= \left(\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s+1)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx\right) - \left(\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx\right)$

Theo (2.9) ta có

$\left(\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s+1)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx\right) - \left(\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx\right)$

$= Sf'(s+1) - Sf'(s) = f'(s)$

Cho $s = 0$, từ (2.10) ta có (2.11).

Từ (2.9) ta suy ra

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} Pf(x+s)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} Pf(x)dx = \left(S(Pf)'\right)(s) = Sf(s)$$

Ta có (2.12)

Từ (2.10) ta được

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} Pf(x+s+1)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} Pf(x+s)dx = (Pf)'(s) = f(s)$$

Ta có (2.13) $\square$

HỆ QUẢ 2.2.11. *Đặt* $N^1(\mathbb{Z}_p \to K) := \{f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K) : f' = 0\}$ *thì ta có*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx, f \in N^1(\mathbb{Z}_p \to K), s \in \mathbb{Z}_p$$

Chứng minh: Do $f' = 0$ nên $Sf' = 0$, áp dụng công thức (2.9) ta có ngay kết quả. $\square$

MỆNH ĐỀ 2.2.12.

Cho hàm $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$. *Khi đó*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(-x)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)dx$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}_p} f(-x)dx &= \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n-1} f(-j) \\
&= \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{j=1-p^n}^{0} f(j) \\
&= \lim_{n\to\infty} p^{-n}(Sf(1) - Sf(1-p^n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(Sf(1) - Sf(1-p^n))}{1-(1-p^n)} \\
&= (Sf)'(1) \\
&= \int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)dx \text{ (theo (2.8))}
\end{aligned}$$

$\square$

HỆ QUẢ 2.2.13.

Nếu $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K), f$ *là hàm lẻ thì* $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = -\frac{1}{2}f'(0)$.

Chứng minh. Nếu f là hàm lẻ thì $f(-x) = -f(x)$ với mọi x nên ta có

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx &= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(-x)dx = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx + f(0) \text{ theo } (2.11). \end{aligned}$$

Do đó ta có $-2\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = f'(0)$ hay $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = -\frac{1}{2}f'(0)$. □

2.3 TÍCH PHÂN VOLKENBORN CỦA MỘT SỐ HÀM ĐƠN GIẢN

VÍ DỤ 2.3.1.

Tính

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} a^x dx, (a \in \mathbb{C}_p^+, a \neq 1)$$

Giải

Đặt $f(x) := a^x$ theo ví dụ (2.1.3) ta có $Sf(x) = \dfrac{a^x - 1}{a - 1}, Sf(0) = 0$.
Suy ra

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} a^x dx = \lim_{x \to 0} \frac{Sf(x) - Sf(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x(a-1)} = \frac{\log_p a}{a - 1} \text{ (theo (1.3.28))}$$

Vậy $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} a^x dx = \dfrac{\log_p a}{a - 1}$

VÍ DỤ 2.3.2.

Tính

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \exp_p(\alpha x)dx, (\alpha \in E, \alpha \neq 0)$$

Giải

Ta có với $\alpha \in E, n \in \mathbb{N} : \exp_p(\alpha n) = (\exp_p \alpha)^n$

Nên

$\exp_p(\alpha x) = \lim\limits_{n\to x} \exp_p(\alpha n) = \lim\limits_{n\to x} (\exp_p \alpha)^n = (\exp_p \alpha)^x$

Do đó

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \exp_p(\alpha x)dx = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} (\exp_p \alpha)^x dx = \frac{\log_p \exp_p \alpha}{\exp_\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\exp_p \alpha - 1}$$

.

VÍ DỤ 2.3.3. **(i)** Theo hệ quả (2.2.13) ta có:

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} x dx = -\frac{1}{2}$$

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^3 dx = -\frac{1}{2}.0 = 0$$

(ii) $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^2 dx = \frac{1}{6}$

Thật vậy, vì với $f(x) = x^2$, thì theo ví dụ (2.1.3) ta có

$$Sf(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

Suy ra $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^2 dx = (Sf)'(0) = \frac{1}{6}$

(iii) $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$ *vì từ ví dụ (2.1.3) ta đã tính được* $S1 = x$ *và*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} dx = (x)'(0) = 1$$

2.4 TÍCH PHÂN TRÊN CÁC TẬP CON

ĐỊNH NGHĨA 2.4.1. ***Tích phân trên tập con***

Lấy U là tập con mở compact của $\mathbb{Z}_p$.

1. Với $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$, ta định nghĩa

$$\int_U f(x)dx := \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\xi_U(x)dx$$

với ξ_U là hàm đặc trưng của U, định nghĩa bởi

$$\xi_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu} \quad x \notin U, \\ 1 & \text{nếu} \quad x \in U. \end{cases}$$

2. Với $f \in C^1(U \to K)$, ta định nghĩa

$$\int_U f(x)dx := \int_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx$$

với

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in U, \\ 0, & \text{nếu } x \in \mathbb{Z}_p \setminus U. \end{cases} \tag{2.14}$$

MỆNH ĐỀ 2.4.2.

Với $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K), n \in \mathbb{N}, j \in \{0, 1, ..., p^n - 1\}$ *ta có:*

$$\int_{j+p^n\mathbb{Z}_p} f(x) = \int_{p^n\mathbb{Z}_p} f(j+x)dx = p^{-n} \int_{\mathbb{Z}_p} f(j+p^n x)dx \tag{2.15}$$

$$\int_{T_p} f(x)dx = p^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} (pf(x) - f(px))\, dx \tag{2.16}$$

trong đó $T_p = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$

Chứng minh. Ta có $\int\limits_{j+p^n\mathbb{Z}_p} f(x) = \int\limits_{p^n\mathbb{Z}_p} f(j+x)dx$

Vì

$$
\begin{aligned}
&f(j+0)\xi_{p^n\mathbb{Z}_p}(0)+...+f(j+p^m-1)\xi_{p^n\mathbb{Z}_p}(p^m-1)\\
&\quad = f(j+0).1+f(j+1).0+...+f(j+p^n-1).0+f(j+p^n).1\\
&+...+f(j+p^m-p^n).1+f(j+p^m-p^n+1).0+...+f(j+p^m-1).0\\
&\qquad = f(j)+f(j+p^n)+...+f(j+p^m-p^n).
\end{aligned}
$$

nên

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{p^n\mathbb{Z}_p} f(j+x)dx &= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(j+x)\xi_{p^n\mathbb{Z}_p}(x)dx\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{f(j)+f(j+p^n)+...+f(j+p^m-p^n)}{p^m}\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{f(j)+f(j+p^n)+...+f\left(j+(p^{m-n}-1)p^n\right)}{p^m}
\end{aligned}
$$

Nếu đặt $h(x) := f(j+p^n x), x\in\mathbb{Z}_p$ thì ta có

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{p^n\mathbb{Z}_p} f(j+x)dx &= \lim_{m\to\infty}\frac{h(0)+h(1)+h(2)+...+h(p^{m-n}-1)}{p^m}\\
&= p^{-n}\lim_{m\to\infty}\frac{h(0)+h(1)+h(2)+...+h(p^{m-n}-1)}{p^{m-n}}\\
&= p^{-n}\int\limits_{\mathbb{Z}_p} h(x)dx\\
&= p^{-n}\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(j+p^n x)dx
\end{aligned}
$$

Vậy ta có công thức (2.15).

Với công thức (2.16), trước hết ta thấy

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{T_p} f(x)dx &= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\xi_{T_p}(x)dx\\
&= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)\xi_{p\mathbb{Z}_p}(x)dx\\
&= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx - \int\limits_{p\mathbb{Z}_p} f(x)dx
\end{aligned}
$$

Vận dụng công thức (2.15) với $j = 0, n = 1$ ta có

$$\int\limits_{p\mathbb{Z}_p} f(x)dx = p^{-1} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(px)dx$$

Từ đó suy ra

$$\int\limits_{T_p} f(x)dx = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx - p^{-1} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(px) = p^{-1} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \left(pf(x) - f(px)\right) dx$$

□

VÍ DỤ 2.4.3.

1. Cho $f \in C^1(T_p \to \mathbb{Q}_p)$ và $f(-x) = -f(x), x \in T_p$. Ta có

$$\int\limits_{T_p} f(x)dx = 0$$

2. $\int\limits_{T_p} x^{-1}dx = \int\limits_{T_p} x^{-3}dx = \int\limits_{T_p} x^{-5}dx = ... = 0$

Chứng minh. 1. Đặt

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in T_p, \\ 0, & \text{nếu } x \in p\mathbb{Z}_p. \end{cases} \tag{2.17}$$

Ta có $g(-x) = -g(x), x \in \mathbb{Z}_p$ và $\int\limits_{T_p} f(x)dx = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx$

Theo hệ quả (2.2.13) ta có $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx = -\frac{1}{2}g'(0) = 0$, do $0 \in p\mathbb{Z}_p$

Vậy $\int\limits_{T_p} f(x)dx = 0$

2. Vì $0 \in p\mathbb{Z}_p$ nên các hàm $x \mapsto x^{-1}, x \mapsto x^{-3}, ...$ thỏa mãn giả thiết của 1) và ta có

$$\int\limits_{T_p} x^{-1}dx = \int\limits_{T_p} x^{-3}dx = \int\limits_{T_p} x^{-5}dx = ... = 0$$

□

CHƯƠNG 3

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN VOLKENBORN

Trong chương này sẽ trình bày vài ứng dụng của tích phân Volkenborn vào nghiên cứu các tính chất của các số Bernoulli, đặc biệt là đồng dư thức nổi tiếng của von Staudt và Clausen.

3.1 GIỚI THIỆU VỀ SỐ BERNOULLI VÀ ĐA THỨC BERNOULLI

Trong toán học, các số Bernoulli là một dãy các số hữu tỉ có mối liên hệ sâu sắc với lý thuyết số. Có nhiều cách định nghĩa khác nhau đối với các số này. Sau đây, xin giới thiệu một cách định nghĩa thường gặp trong lý thuyết số.

ĐỊNH NGHĨA 3.1.1. ***Số Bernoulli***

Các số Bernoulli B_n là các số thỏa mãn đồng nhất thức

$$\frac{t}{\exp t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

Các đa thức Bernoulli có thể xem là sự tổng quát hóa của các số Bernoulli, được định nghĩa tương tự các số Bernoulli.

ĐỊNH NGHĨA 3.1.2. ***Đa thức Bernoulli***

Các đa thức Bernoulli $B_n(x)$ là các đa thức thỏa mãn:

$$\frac{t\exp(xt)}{\exp t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Sau đây là một vài tính chất số học của các số Bernoulli đã được chứng minh trong lý thuyết số.

3.1.3. *Vài tính chất số học của các số Bernoulli*

1. Các số Bernoulli B_n với n lẻ bị triệt tiêu, trừ $B_1 = -\dfrac{1}{2}$.
2. Định lý Kummer 1
   Nếu p là số nguyên tố lẻ không chia hết tử số của bất kì số Bernoulli $B_2, B_4, ..., B_{p-3}$ thì phương trình $x^p + y^p + z^p = 0$ không có nghiệm nguyên dương.
   Các số nguyên tố p có tính chất này gọi là các số nguyên tố chính quy.
3. Định lý Kummer 2
   Cho p là số nguyên tố lẻ và b là số chẵn sao cho $p-1$ không chia hết b. Khi đó với bất kì số nguyên không âm k ta có
   $$\frac{B_{k(p-1)+b}}{k(p-1)+b} \equiv \frac{B_b}{b} \mod p.$$
4. Các đồng dư Ramanujan
   $$m \equiv 0 \mod 6 \qquad \binom{m+3}{m} B_m = \frac{m+3}{3} - \sum_{j=1}^{m/6} \binom{m+3}{m-6j} B_{m-6j}$$
   $$m \equiv 2 \mod 6 \qquad \binom{m+3}{m} B_m = \frac{m+3}{3} - \sum_{j=1}^{(m-2)/6} \binom{m+3}{m-6j} B_{m-6j}$$
   $$m \equiv 4 \mod 6 \qquad \binom{m+3}{m} B_m = -\frac{m+3}{6} - \sum_{j=1}^{(m-4)/6} \binom{m+3}{m-6j} B_{m-6j}.$$
5. pB_n là p-nguyên với mọi số nguyên tố p.

6. Định lý von Staudt - Claussen (sẽ trình bày chi tiết ở các mục (3.4) và (3.5)) *Nếu n chẵn thì*

$$B_n + \sum_{p-1|n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

Sau đây ta sẽ xây dựng và chứng minh một số tính chất của các số Bernoulli nhờ tích phân Volkenborn.

3.2 XÂY DỰNG CÁC SỐ BERNOULLI BẰNG TÍCH PHÂN VOLKENBORN

ĐỊNH NGHĨA 3.2.1. ***Số Bernoulli***

Các số Bernoulli là các số $B_0, B_1, ...$ cho bởi

$$B_n := \int_{\mathbb{Z}_p} x^n dx, (n \in \mathbb{N})$$

NHẬN XÉT 3.2.2.

1. Từ công thức $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = f'(0)$ ta có

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+1)^n dx - \int_{\mathbb{Z}_p} x^n dx = \begin{cases} 1, & \text{nếu } n = 1 \\ 0, & \text{nếu } n \neq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

2. Bằng cách khai triển nhị thức ta có

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+1)^n dx = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \int_{\mathbb{Z}_p} x^j dx$$

Từ đó

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+1)^n dx - \int_{\mathbb{Z}_p} x^n dx = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } n = 0 \\ \sum\limits_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j & \text{Nếu } n \neq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

3. • Cho $n = 1$, từ (3.1) ta có

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+1)dx - \int_{\mathbb{Z}_p} xdx = 1$$

Và theo (3.2) ta lại có

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+1)dx - \int_{\mathbb{Z}_p} xdx = B_0$$

nên ta được $B_0 = 1$ như đã tính ở ví dụ (2.3.3)

• Với $n \geq 2$, từ (3.1) và (3.2) ta có $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j = 0$

4. Từ nhận xét (3) ta thấy được mối liên hệ giữa các $B_i, i \in \mathbb{N}$. Hơn nữa B_i là các số hữu tỉ và chúng không phụ thuộc vào p. Nghĩa là, với p, q là hai số nguyên tố khác nhau thì $\int_{\mathbb{Z}_p} x^n dx = \int_{\mathbb{Z}_q} x^n dx$

Tiếp theo đây ta áp dụng các tính chất của tích phân Volkenborn để thấy được các số Bernoulli trong định nghĩa (3.1.1).
Như đã tính ở ví dụ (2.3.2), ta có

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \exp_p(\alpha x)dx = \frac{\alpha}{\exp_p \alpha - 1}, (\alpha \in E, \alpha \neq 0).$$

Mặt khác, theo mệnh đề (2.2.9) ta có

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \exp_p(\alpha x)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\alpha^n}{n!}$$

Do đó,

$$\frac{\alpha}{\exp_p \alpha - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\alpha^n}{n!}, (\alpha \in E, \alpha \neq 0)$$

Công thức này phù hợp với định nghĩa đã giới thiệu ở đầu chương của các số Bernoulli.

3.3 DÙNG TÍCH PHÂN VOLKENBORN ĐỂ CHỨNG MINH MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA CÁC SỐ BERNOULLI

MỆNH ĐỀ 3.3.1.

$B_1 = -\frac{1}{2}$ và $(-1)^n B_n = B_n, n \geq 2$

Chứng minh. Từ mệnh đề (2.2.13) ta có $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} (-x)^n dx = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} (x+1)^n dx$

Kết hợp với (3.1) ở nhận xét (3.2.2), $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} -x dx = B_1 + 1$ và $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} (-x)^n dx = B_n$ nếu $n \in \{0, 2, 3...\}$. Do đó $(-1)^n B_n = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} (-x)^n dx = B_n, n \geq 2$

Mặt khác, theo mệnh đề (2.2.13),

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} -x dx = -\frac{1}{2}.(-1) = \frac{1}{2}$$

Suy ra $B_1 + 1 = \dfrac{1}{2}$ hay $B_1 = -\dfrac{1}{2}$ □

Từ công thức $(-1)^n B_n = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} (-x)^n dx = B_n, n \geq 2$ ta có ngay hệ quả sau

HỆ QUẢ 3.3.2.

$$B_3 = B_5 = ... = 0$$

ĐỊNH LÝ 3.3.3.

pB_n là p-nguyên với mọi số nguyên tố p.

Chứng minh: Đặt $f(x) := x^n$, ta thấy

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |x^n|_p = 1$$

Theo phần chứng minh mệnh đề (2.2.7) ta có

$$|\int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(x) dx\,|_p \leq p\|f\|_1, \big(f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)\big)$$

Do đó

$$| B_n |_p = | \int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^n dx |_p \leq p \|f\|_1 = p$$

Từ nhận xét (3.2.2), mục 4, ta biết B_n là số hữu tỉ, giả sử $B_n = \frac{t}{m}$, với $t, m \in \mathbb{Z}, (t, m) = 1$ thì do $| B_n |_p \leq p$ nên $\text{ord}_p(m) = 0$ hoặc $\text{ord}_p(m) = 1$. Thật vậy, nếu $| B_n |_p \leq 1$ thì p không chia hết m nên $\text{ord}_p(m) = 0$; ngược lại, giả sử $m = pn$ thì $| B_n |_p = | \frac{t}{pn} |_p = p \mid \frac{t}{n} |_p \leq p$ kéo theo $| \frac{t}{n} |_p \leq 1$ suy ra $\text{ord}_p(n) = 0$ nên $\text{ord}_p(m) = 1$. Theo nhận xét (3.2.2), mục 4, với các số nguyên tố $q \neq p$ ta cũng có $\text{ord}_q(m) = 0$ hoặc $\text{ord}_q(m) = 1$ nên m là tích của các số nguyên tố khác nhau.
Vậy pB_n là p-nguyên với mọi p nguyên tố. □

ĐỊNH LÝ 3.3.4 (*Định lý von Staudt - Clausen*).

Nếu n chẵn thì

$$B_n + \sum_{p-1|n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

Chứng minh định lý von Staudt - Clausen sẽ được trình bày hai cách để so sánh ở hai mục sau.

3.4 CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ VON STAUDT - CLAUSEN THEO LÝ THUYẾT SỐ

ĐỊNH LÝ 3.4.1.

Với $m \geq 1$, ta có

$$(m+1)S_m(n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k} \tag{3.3}$$

với $S_m(n) = 1^m + 2^m + ... + (n-1)^m$.

Chứng minh. Từ phương trình

$$\exp(kt) = \sum_{m=0}^{\infty} k^m \frac{t^m}{m!}$$

cho $k = 1, 2, ..., n-1$ ta có

$$\exp t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \tag{3.4}$$

$$\exp(2t) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \frac{t^m}{m!} \tag{3.5}$$

$$\vdots$$

$$\exp((n-1)t) = \sum_{m=0}^{\infty} (n-1)^m \frac{t^m}{m!} \tag{3.6}$$

Cộng vế theo vế các phương trình (3.4), (3.5),..., (3.6) ta có

$$\exp t + \exp(2t) + ... + \exp((n-1)t) = \frac{\exp(nt)-1}{\exp t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(n) \frac{t^m}{m!}$$

Mặt khác,

$$\frac{\exp(nt)-1}{\exp t - 1} = \frac{\exp(nt)-1}{t} . \frac{t}{\exp t - 1}$$

và

$$\frac{\exp(nt)-1}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} n^k \frac{t^{k-1}}{k!}, \frac{t}{\exp t - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{t^j}{j!}$$

nên

$$\sum_{m=0}^{\infty} S_m(n) \frac{t^m}{m!} = \sum_{j=1}^{\infty} n^j \frac{t^{j-1}}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$$

Đồng nhất hệ số của t^m ở hai vế, ta được

$$S_m(n) \frac{1}{m!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{n^{m-k+1} B_k}{k!(m+1-k)!}$$

Suy ra

$$(m+1)S_m(n) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(m+1)! n^{m-k+1} B_k}{k!(m+1-k)!} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m-k+1}$$

$\square$

Trong (3.3), thay k bởi $m-k$ ta có

$$(m+1)S_m(n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{m-k} B_{m-k} n^{k+1}$$

Vì

$$\binom{m+1}{m-k} = \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k)!} = \frac{m+1}{k+1}\frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m+1}{k+1}\binom{m}{k}$$

nên

$$\begin{aligned} S_m(n) &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_{m-k} \frac{n^{k+1}}{k+1} && (3.7)\\ &= B_m n + \binom{m}{1} B_{m-1}\frac{n^2}{2} + ... + \frac{n^{m+1}}{m+1} && (3.8) \end{aligned}$$

MỆNH ĐỀ 3.4.2.

Cho p là số nguyên tố và số nguyên $m \geq 1$.Khi đó pB_m là p-nguyên và nếu $m \geq 2$ chẵn thì

$$pB_m \equiv S_m(p)(\text{mod } p) \tag{3.9}$$

Chứng minh. Ta đã chứng minh ý thứ nhất ở định lý (3.3.3) sử dụng tích phân Volkenborn, ở đây trình bày một chứng minh khác bằng quy nạp với các số Bernoulli được định nghĩa trong lý thuyết số.
Với $B_1 = \dfrac{-1}{2}$ ta có $pB_1 = \dfrac{-p}{2}$ là $p-$nguyên với mọi số nguyên tố p.
Giả sử $m > 1, k = 1, 2, ..., m-1$ ta có pB_{m-k} là p-nguyên.
Trong (3.8), thay $n = p$ ta có

$$\begin{aligned} S_m(p) &= pB_m + \binom{m}{1} B_{m-1}\frac{p^2}{2} + ... + \frac{p^{m+1}}{m+1} && (3.10)\\ \Leftrightarrow pB_m &= S_m(p) - \binom{m}{1} B_{m-1}\frac{p^2}{2} - ... - \frac{p^{m+1}}{m+1} && (3.11)\\ \Leftrightarrow pB_m &= S_m(p) - \binom{m}{1} pB_{m-1}\frac{p}{2} - ... - pB_0\frac{p^m}{m+1} && (3.12) \end{aligned}$$

Ta thấy $S_m(p) \in \mathbb{Z}, \dbinom{m}{k} \in \mathbb{Z}, \dfrac{p^k}{k+1}$ là $p-$nguyên vì $k+1 \leq p^k$ với mọi số nguyên tố p và theo giả thiết quy nạp thì với $k \geq 1, pB_{m-k}$ là $p-$nguyên

nên từ (3.12) ta có pB_m là $p-$nguyên.
Để chứng minh đồng dư thức (3.9), ta chứng minh một điều kiện đủ là

$$\binom{m}{k} pB_{m-k}\frac{p^k}{k+1} \equiv 0(\bmod p), k \geq 1$$

Thật vậy, với $k \geq 2$, vì $k+1 < 2^k \leq p^k$ nên $\dfrac{p^k}{k+1} \equiv 0(\bmod p)$ suy ra $\dbinom{m}{k} pB_{m-k}\dfrac{p^k}{k+1} \equiv 0(\bmod p)$.
Với $k = 1$, do m chẵn nên

$$\frac{m}{2}(pB_{m-1})p \equiv 0(\bmod p)$$

Như vậy, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\binom{m}{k} pB_{m-k}\frac{p^k}{k+1} \equiv 0(\bmod p)$ nên từ (3.12) ta có (3.9). □

BỔ ĐỀ 3.4.3.

Cho p là số nguyên tố, ta có

$$S_m(p) \equiv \begin{cases} 0(\bmod p), & \text{nếu } p-1 \nmid m \\ -1(\bmod p), & \text{nếu } p-1 \mid m \end{cases}$$

Chứng minh. Lấy g là một căn nguyên thủy (*primitive root*) modulo p, nghĩa là g là phần tử sinh của nhóm nhân xiclic cấp $p-1$ các số nguyên modulo p là $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Khi đó $\{1, 2, ..., p-1\}$ và $\{1, g, g^2, ..., g^{p-2}\}$ đều là các tập đại diện đầy đủ của $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ nên

$$\begin{aligned} S_m(p) =& 1^m + 2^m + ... + (p-1)^m \\ \equiv& 1^m + g^m + ... + g^{(p-2)m}(\bmod p) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nếu $p-1 \mid m$ thì $1^m \equiv g^m \equiv ... \equiv g^{(p-2)m} \equiv 1(\text{mod } p)$ nên $S_m(p) \equiv p-1 \equiv -1(\text{mod } p)$
Nếu $p-1 \nmid m$ thì $g^m \not\equiv 1(\text{mod } p)$. Từ (3.13) ta có

$$(g^m - 1)S_m(p) \equiv g^{m(p-1)} - 1 \equiv 0(\text{mod } p)$$

Do đó $S_m(p) \equiv 0(\text{mod } p)$ vì $g^m \not\equiv 1(\text{mod } p)$. □

Chứng minh định lý von Staudt - Clausen. Giả sử n chẵn, p là một số nguyên tố thì theo mệnh đề (3.4.2), pB_n là $p-$nguyên và $pB_n \equiv S_n(p) (\text{mod } p)$. Khi đó theo bổ đề (3.4.3), nếu $p-1 \nmid n$ thì B_n là p-nguyên và nếu $p-1 \mid n$ thì $pB_n \equiv -1 (\text{mod } p)$.

Đặt $A_n = B_n + \sum\limits_{p-1|n} \frac{1}{p}$, ta sẽ chứng minh A_n là p-nguyên với mọi số nguyên tố p.

Thật vậy, giả sử q là một số nguyên tố và $q-1 \nmid n$ thì B_n là q-nguyên và tổng $\sum\limits_{p-1|n} \frac{1}{p}$ không lấy q nên là q-nguyên, do đó A_n q-nguyên.

Ngược lại, nếu số nguyên tố q mà $q-1 \mid n$ thì $qB_n \equiv -1 (\text{mod } q)$ hay $\frac{qB_n+1}{q} \in \mathbb{Z}$

Do đó

$$\begin{aligned} A_n &= B_n + \frac{1}{q} + \sum_{p-1|n, p\neq q} \frac{1}{p} \\ &= \frac{qB_n+1}{q} + \sum_{p-1|n, p\neq q} \frac{1}{p} \\ &\equiv \sum_{p-1|n, p\neq q} \frac{1}{p} (\text{mod } \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Hiển nhiên $\sum\limits_{p-1|n, p\neq q} \frac{1}{p}$ là q-nguyên nên A_n là q-nguyên.

Như vậy, A_n là p-nguyên với mọi số nguyên tố p nên $A_n \in \mathbb{Z}$ hay $B_n + \sum\limits_{p-1|n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$. □

3.5 CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ VON STAUDT - CLAUSEN BẰNG GIẢI TÍCH $p-$ADIC

Tiếp theo ta sẽ chứng minh định lý *von Staudt - Clausen* bằng cách sử dụng các kĩ thuật của giải tích p-adic. Trước hết ta có các bổ đề sau

BỔ ĐỀ 3.5.1. *Với* $k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}$, *đặt* $R_0(k) = 1$ *với mọi* k,

$$R_n(k) := \frac{1}{p^k}\left(0^n + 1^n + ... + (p^k - 1)^n\right), n > 0$$

thì ta có $\lim\limits_{k\to\infty} R_n(k) = B_n$ *và*

$$R_n(k+1) - R_n(k) = \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} R_{n-s}(k) R_s(1) p^{ks}$$

Chứng minh. Đặt $f(x) = x^n$, ta thấy

$$\lim_{k\to\infty} R_n(k) = (Sf)'(0) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} x^n dx = B_n$$

Ta có

$$R_n(k+1) = \frac{1}{p^{k+1}} \sum_{s=0}^{p^{k+1}-1} z^n$$

Chia z cho p^k được thương j và số dư i, ta viết $z = i + jp^k$ và

$$\begin{aligned}
R_n(k+1) &= \frac{1}{p^{k+1}} \sum_{i=0}^{p^k-1} \sum_{j=0}^{p-1} (i + jp^k)^n \\
&= \frac{1}{p^{k+1}} \sum_{i=0}^{p^k-1} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} i^{n-s} (jp^k)^s \\
&= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \left(\frac{1}{p^k} \sum_{i=0}^{p^k-1} i^{n-s}\right) \left(\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} j^s\right) p^{ks} \\
&= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} R_{n-s}(k) R_s(1) p^{ks} \\
&= R_n(k) + \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} R_{n-s}(k) R_s(1) p^{ks} \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Từ đó ta rút ra được $R_n(k+1) - R_n(k) = \sum\limits_{s=1}^{n} \binom{n}{s} R_{n-s}(k) R_s(1) p^{ks}$ □

BỔ ĐỀ 3.5.2. *Với mọi số nguyên tố* $p \neq 2, n \in \mathbb{N}^*$ *ta có*

$$\mid B_n - \frac{1}{p}\left(0^n + 1^n + ... + (p-1)^n\right) \mid_p \leq 1$$

Công thức trên cũng đúng khi $p = 2$ *với* $n \in \mathbb{N}^*, n$ *chẵn.*

Chứng minh. Ta cần chứng minh $\mid B_n - R_n(1) \mid_p \leq 1$ với $R_n(k)$ được xác định như trong bổ đề (3.5.1).

Trước hết ta có

$$R_1(1) = \frac{1}{p}\left(0 + 1 + 2 + ... + (p-1)\right) = \frac{(p-1)p}{2p} = \frac{p-1}{2}$$

- Với $s \in \{2, 3, ...\}$ ta có:

$$\binom{n}{s} R_{n-s}(k) R_s(1) p^{ks} = \binom{n}{s} p^k R_{n-s}(k) p R_s(1) p^{ks-k-1} \in \mathbb{Z} \quad (3.15)$$

  vì với $s > 1, p^{ks-k-1} = p^{k(s-1)-1} \in \mathbb{Z}, p^t R_j(t) = \sum\limits_{i=0}^{p^t-1} i^j \in \mathbb{Z}$.

- Với $s = 1$ và p lẻ: $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{Z}, p^k R_{n-1}(k) \in \mathbb{Z}$, ta được

$$\binom{n}{1} R_{n-1}(k) R_1(1) p^k = np^k R_{n-1}(k) \frac{p-1}{2} \in \mathbb{Z} \quad (3.16)$$

- Với $s = 1, p = 2, n$ chẵn: $R_1(1) = \frac{1}{2}, \frac{n}{2} \in \mathbb{Z}, R_{n-1}(k) 2^k \in \mathbb{Z}$ ta có

$$\binom{n}{1} R_{n-1}(k) R_1(1) 2^k = \frac{n}{2} R_{n-1}(k) 2^k \in \mathbb{Z} \quad (3.16')$$

Như vậy, từ (3.15), (3.16) và ((3.16)′) ta thấy với cả hai trường hợp p lẻ và $p = 2, n$ chẵn ta đều có

$$R_n(k+1) - R_n(k) = \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} R_{n-s}(k) R_s(1) p^{ks} \in \mathbb{Z}$$

Từ đó suy ra

$$\mid R_n(k+1) - R_n(k) \mid_p = \mid \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} R_{n-s}(k) R_s(1) p^{ks} \mid_p \leq 1, (k \in \mathbb{N}^*)$$

Ta cũng có

$| R_n(k{+}2){-}R_n(k) |_p{=}| (R_n(k+2) - R_n(k+1)){+}(R_n(k+1) - R_n(k)) |_p$ $\leq \max\{| R_n(k+2) - R_n(k+1) |_p, | R_n(k+1) - R_n(k) |_p\} \leq 1$. Suy ra với $k > m, (k, m \in \mathbb{N})$

$$| R_n(k) - R_n(m) |_p \leq 1$$

Cho $k \to \infty$ và lấy $m = 1$ ta được

$$| B_n - R_n(1) |_p \leq 1$$

Vậy bổ đề được chứng minh xong. □

Chứng minh định lý von Staudt - Clausen. Gọi $\theta, \theta^2, ..., \theta^{p-1}$ là các căn bậc $p-1$ của đơn vị $\mathbb{Q}_p$ (mệnh đề 1.3.23). Khi đó cả hai tập $\{0, 1, ..., p-1\}$ và $\{0, \theta, \theta^2, ..., \theta^{p-1}\}$ đều là các tập đại diện đầy đủ của $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$. Do đó, với $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0^n + 1^n + ... + (p-1)^n \equiv \theta^n + \theta^{2n} + ... + \theta^{(p-1)n} (\text{mod } p\mathbb{Z}_p) \qquad (3.17)$$

Ta có $\theta^p = \theta$ nên

$$\begin{aligned} \theta^n - 1 &= \theta^{np} - 1 \\ &= (\theta^n - 1)\left(\sum_{j=0}^{p-1} \theta^{nj}\right) \\ &= (\theta^n - 1)(\theta^{n(p-1)} + \theta^{n(p-2)} + ... + \theta^n + 1) \end{aligned}$$

Suy ra

$$(\theta^n - 1)\left(\sum_{j=0}^{p-1} \theta^{nj} - 1\right) = (\theta^n - 1)\left(\sum_{j=1}^{p-1} \theta^{nj}\right) = 0$$

Do đó nếu n không chia hết cho $p-1$ thì $\theta^n \neq 1$ nên $\sum\limits_{j=1}^{p-1} \theta^{nj} = 0$

Nếu n chia hết cho $p-1$ thì $\theta^n = 1, \theta^{2n} = 1, ..., \theta^{(p-1)n} = 1$ dẫn tới

$$\sum_{j=1}^{p-1} \theta^{nj} = p - 1$$

Từ (3.17) ta có

$$\left(0^n + 1^n + ... + (p-1)^n\right) - \left(\theta^n + \theta^{2n} + ... + \theta^{(p-1)n}\right) = xp, x \in \mathbb{Z}_p$$

Như vậy

- Nếu n không chia hết cho $p-1$ thì vì $\sum\limits_{j=1}^{p-1} \theta^{nj} = 0$ nên

$$\begin{aligned} x &= \frac{(0^n + 1^n + ... + (p-1)^n) - (\theta^n + \theta^{2n} + ... + \theta^{(p-1)n})}{p} \\ &= \frac{1}{p}\left(0^n + 1^n + ... + (p-1)^n\right) \in \mathbb{Z}_p \end{aligned}$$

- Nếu n chia hết cho $p-1$ thì $\sum\limits_{j=1}^{p-1} \theta^{nj} = p-1$ nên

$$\begin{aligned} x &= \frac{(0^n + 1^n + ... + (p-1)^n) - (\theta^n + \theta^{2n} + ... + \theta^{(p-1)n})}{p} \\ &= \frac{0^n + 1^n + ... + (p-1)^n}{p} - \frac{p-1}{p} \\ &= \frac{0^n + 1^n + ... + (p-1)^n}{p} + \frac{1}{p} - 1 \in \mathbb{Z}_p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{0^n + 1^n + ... + (p-1)^n}{p} + \frac{1}{p} = y \in \mathbb{Z}_p$$

Theo bổ đề (3.5.2)

$$\mid B_n - \frac{1}{p}\left(0^n + 1^n + ... + (p-1)^n\right) \mid_p \leq 1$$

Nếu n chẵn, n không chia hết cho $p-1$ thì ta có

$$\mid B_n - x \mid_p \leq 1, (x \in \mathbb{Z}_p)$$

suy ra $\mid B_n \mid_p \leq 1$

Nếu n chẵn, n chia hết cho $p-1$ thì

$$\mid B_n + \frac{1}{p} - y \mid_p \leq 1, (y \in \mathbb{Z}_p)$$

suy ra $| B_n + \frac{1}{p} |_p \leq 1$
Xét mỗi số nguyên tố q, ta có

- Nếu n không chia hết cho $q-1$ thì $| B_n |_q \leq 1$ và với mọi số nguyên tố p mà $p-1 \mid n$ (khi đó $p \neq q$), $| \frac{1}{p} |_q = 1$ nên

$$| B_n + \sum_{p-1|n} \frac{1}{p} |_q \leq \max\{| B_n |_q, 1\} \leq 1$$

- Nếu n chia hết cho $q-1$ thì $| B_n + \frac{1}{q} |_q \leq 1$ suy ra với mọi số nguyên tố p, ta có

$$| B_n + \sum_{p-1|n} \frac{1}{p} |_q = | B_n + \frac{1}{q} + \sum_{p-1|n, p\neq q} \frac{1}{p} |_q \leq \max\{| B_n + \frac{1}{q} |_q, 1\} \leq 1$$

Tóm lại, ta có với mỗi số nguyên tố q
$| B_n + \sum\limits_{p-1|n} \frac{1}{p} |_q \leq 1$ hay $B_n + \sum\limits_{p-1|n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}_q$ với mọi q nguyên tố.
Như vậy, $B_n + \sum\limits_{p-1|n} \frac{1}{p} = \frac{m}{k} \in (\mathbb{Z}_q \cap \mathbb{Q}), (m, k) = 1$ với mọi số nguyên tố q.
Nghĩa là, với mọi số nguyên tố q thì k đều không chia hết cho q (vì $|\frac{m}{k}|_q \leq 1$) nên $k \in \{1, -1\}$ hay

$$B_n + \sum_{p-1|n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

$\square$

Tiếp theo, ta sẽ dùng tích phân Volkenborn để định nghĩa đa thức Bernoulli và chỉ ra được sự tương đương với định nghĩa đã biết.

3.6 ĐỊNH NGHĨA ĐA THỨC BERNOULLI BẰNG TÍCH PHÂN VOLKENBORN

ĐỊNH NGHĨA 3.6.1. ***Đa thức Bernoulli***

Đa thức Bernoulli $B_n(x)$ được cho bởi công thức

$$B_n(x) := \int\limits_{\mathbb{Z}_p} (x+t)^n dt, (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}_p)$$

Ta có định nghĩa quen thuộc của đa thức Bernoulli trong lý thuyết số như đã giới thiệu ở đầu chương qua mệnh đề sau.

MỆNH ĐỀ 3.6.2.

Với $x \in \mathbb{Z}_p, \alpha \in E, \alpha \neq 0$, ta có

$$\frac{\alpha \exp_p(\alpha x)}{\exp_p \alpha - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{\alpha^n}{n!}$$

Chứng minh. Ta có

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \exp_p(\alpha(x+t))dt = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \exp_p(\alpha x) \exp_p(\alpha t)dt = \exp_p(\alpha x) \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \exp_p(\alpha t)dt$$

áp dụng ví dụ (2.3.2)

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \exp_p(\alpha(x+t))dt = \frac{\alpha \exp_p(\alpha x)}{\exp_p \alpha - 1} \tag{3.18}$$

Mặt khác, $\exp_p(\alpha(x+t)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha^n (x+t)^n}{n!}$ nên

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \exp_p(\alpha(x+t))dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} (x+t)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{\alpha^n}{n!} \tag{3.19}$$

Vậy từ (3.18) và (3.19) ta có

$$\frac{\alpha \exp_p(\alpha x)}{\exp_p \alpha - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{\alpha^n}{n!}$$

□

Mệnh đề sau đây chỉ ra mối liên hệ giữa đa thức Bernoulli và các số Bernoulli.

MỆNH ĐỀ 3.6.3.

Với $x \in \mathbb{Z}_p$, ta có

(i) $B_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} B_j$

(ii)

$$B_n(x+1) - B_n(x) = \begin{cases} 0, & \textit{nếu } n = 0, \\ nx^{n-1}, & \textit{nếu } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} (t+x)^n dt = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} t^j dt \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} t^j dt \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} B_j \end{aligned}$$

Vậy ta có (i)

Với (ii) ta thấy

Nếu $n = 0$ thì $B_0(x+1) = B_0(x) = 1$ nên $B_n(x+1) - B_n(x) = 0$

Nếu $n > 0$ thì đặt $f(t) = t^n$, áp dụng (2.10) ta có

$$B_n(x+1) - B_n(x) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(t+x+1)dt - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(t+x)dt = f'(x) = nx^{n-1}$$

$\square$

Một hàm $p-$adic có liên quan đến đa thức Bernoulli là tổng bất định của "hàm lũy thừa"

MỆNH ĐỀ 3.6.4. *Xét hàm số* $f(x) = x^n, x \in \mathbb{Z}_p$.
Tổng bất định của f *là hàm số*

$$x \mapsto \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0))$$

Chứng minh. Một nguyên hàm của f là Pf với $Pf(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
Theo (2.12), ta có

$$\begin{aligned}
Sf(x) &= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} Pf(t+x)dt - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} Pf(t)dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \frac{(t+x)^{n+1}}{n+1}dt - \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \frac{t^{n+1}}{n+1}dt \\
&= \frac{1}{n+1}B_{n+1}(x) - \frac{1}{n+1}B_{n+1}
\end{aligned}$$

Với $B_{n+1}(0) = B_{n+1}$, ta có điều phải chứng minh. $\square$

KẾT LUẬN

Tóm lại, trong luận văn này chúng tôi đã làm được một số vấn đề sau đây:

- Xây dựng định nghĩa, nêu và chứng minh các tính chất cơ bản của tích phân Volkenborn.

- Định nghĩa tích phân trên các tập con mở, compact của $\mathbb{Z}_p$. Nêu và chứng minh một vài tính chất của tích phân trên các tập con đặc biệt của $\mathbb{Z}_p$.

- Tính toán được tích phân Volkenborn của một số hàm cơ bản quan trọng trong giải tích $p-$adic.

- Đặc biệt, chúng tôi đã tìm ra một số ví dụ cụ thể minh họa cho các hàm khả tích nhưng không khả vi liên tục, hàm liên tục nhưng không khả tích.

- Đưa ra một số ứng dụng của tích phân Volkenborn: dùng tích phân Volkenborn để định nghĩa số Bernoulli và đa thức Bernoulli, chỉ ra mối quan hệ giữa số Bernoulli và đa thức Bernoulli theo cách định nghĩa này; chứng minh một số tính chất quan trọng của các số Bernoulli mà quan trọng nhất là đồng dư thức **von Staudt - Clausen**.

Về ứng dụng của tích phân Volkenborn trong giải tích $p-$adic và trong lý thuyết số vẫn còn nhiều bài toán mở. Nếu có điều kiện cho phép chúng tôi sẽ trở lại với vấn đề này trong những lần tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Andrew Baker (2009), *An introduction to* $p-$*adic number and* $p-$*adic analysis*, Scotland.
2. Arnt Volkenborn (1974), *On generalized* $p-$*adic integration*, France.
3. Fernando Rodriguez Villegas (2006), *The congruences of Clausen - von Staudt and Kummer for half - intergral weight Eisenstein series*, Princeton, USA, 2006.
4. G. H. Hardy, E. M. Wright (1975), *An introduction to the theory of numbers*, Oxford university press.
5. Hu, D. C and Yang, C.C (2000), *Value distribution theory of* $p-$*adic meromorphic functions*, Hong Kong.
6. K. Mahler (1973), *Introduction to* $p-$*adic numbers and their function*, Cambridge university press.
7. Neal Koblitz (1996), $p-$*adic Numbers,* $p-$*adic Analysis, and Zeta - Functions*, Springer.
8. N. Koblitz (1980), $p-$*adic analysis: a short course on recent work*, Cambridge university press.
9. Serge Lang (1994), *Algebraic number theory*, Springer.

10. Svetlanta Katok (2001), *Real and $p-$adic analysis course notes for math 497C MASS program*, USA.

11. W. H. Schikhof (1984), *Ultrametric calculus*, Cambridge University Press.

DANH MỤC TỪ KHÓA