

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Lê Thanh Hải

**TIẾP CẬN KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH
VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN
Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG**

Chuyên ngành : **Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán**
Mã số : **60 14 10**

LUẬN VĂN THẠC SĨ GIÁO DỤC HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. LÊ VĂN TIẾN**

Thành phố Hồ Chí Minh – 2009

LỜI CẢM ƠN

Đầu tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS.TS. Lê Văn Tiến, người đã tận tình chỉ bảo tôi về mặt nghiên cứu khoa học và hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn này.

Xin trân trọng cảm ơn: PGS.TS. Lê Thị Hoài Châu, TS. Nguyễn Chí Thành, TS Trần Lương Công Khanh, TS. Lê Thái Bảo Thiên Trung và các quý thầy cô đã tham gia giảng dạy cho lớp cao học chuyên ngành didactic toán khóa 17.

Xin chân thành cảm ơn: Ban Giám Hiệu và các đồng nghiệp trong tổ Toán trường THPT Ngô Quyền – Đồng Nai đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này.

Xin chân thành cảm ơn các bạn cùng lớp Didactic khóa 17 đã luôn động viên và chia sẻ những vui buồn và khó khăn trong suốt thời gian học tập

Cuối cùng, tôi xin chân thành cảm ơn gia đình và những bạn bè thân thiết đã luôn bên cạnh, ủng hộ và động viên tôi trong suốt thời gian qua.

Lê Thanh Hải

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

SGK	: sách giáo khoa
SGV	: sách giáo viên
THCS	: trung học cơ sở
GV	: giáo viên
HS	: học sinh
MTCT	: máy tính cầm tay

MỞ ĐẦU

1. Những ghi nhận ban đầu và câu hỏi xuất phát

Phương trình là một trong những chủ đề quan trọng và lâu đời nhất trong lịch sử toán học. Do đó, giảng dạy phương trình luôn có tầm quan trọng đặc biệt trong dạy học toán ở bất cứ nền giáo dục nào. Dù thể hiện dưới dạng ngầm ẩn hay tường minh, thì phương trình cũng đã được đưa vào chương trình toán từ rất sớm – từ những năm đầu tiên của chương trình toán tiểu học, và tiến triển liên tục, ở những mức độ khác nhau, lần lượt qua các chương trình toán trung học cơ sở, rồi đến những năm đầu của chương trình toán phổ thông trung học. Do đó, phương trình – trong đó có phương trình bậc nhất một ẩn – đã trải qua nhiều dạng khác nhau, tương ứng với nó là nhiều cách giải khác nhau.

Câu hỏi đặt ra là:

- Vì sao với cùng một khái niệm phương trình lại có thể đưa vào với nhiều cấp độ, cho nhiều đối tượng, lứa tuổi như vậy ?
- Có những tri thức nào liên quan đến phương trình ? Tri thức này liên hệ với tri thức kia ra sao ? Đây là sự tiến triển của chúng ?
- Nhìn từ góc độ tri thức phương trình trong lịch sử phát triển của nó, thì tri thức phương trình trong giảng dạy toán ở Việt Nam có những gì giống và khác? Điều đó được thể hiện ở những giai đoạn nào ? Với những mức độ nào ? Lý do của sự khác biệt đó ?
- Cách trình bày của sách giáo khoa (SGK) ảnh hưởng như thế nào đến ứng xử của giáo viên (GV) và học sinh (HS) khi dạy – học các tri thức liên quan đến phương trình ?

Những câu hỏi này đã dẫn chúng tôi đến việc cần phải nghiên cứu các vấn đề liên quan đến tri thức phương trình, đặc biệt là các dạng thể hiện và kỹ thuật giải chúng, không những trong lịch sử phát triển của phương trình mà còn trong SGK, đặc biệt là phân tích sự tiến triển của các dạng thể hiện và các kỹ thuật giải.

Trong phạm vi của một đề tài thạc sỹ, để đảm bảo được trọng tâm và mức độ khả thi, chúng tôi chọn **tiếp cận khái niệm phương trình và phép biến đổi phương trình bậc nhất một ẩn ở trường phổ thông**. Cụ thể, chúng tôi sẽ nghiên cứu các dạng thể hiện và các phép biến đổi phương trình trong chương trình toán từ lớp 1 đến hết THPT.

Lựa chọn này xuất phát từ các lý do:

- Các khái niệm phương trình và giải phương trình là gần như không thể tách rời. Hơn nữa, hình thức thường gặp và cơ bản nhất của phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn.
- Trong chương trình toán Việt Nam, HS được tiếp cận khái niệm phương trình bậc nhất một cách tường minh. Chúng tôi muốn đặc biệt quan tâm đến các cách tiếp cận phương trình bậc nhất một ẩn trong quá trình từ giai đoạn nguyên thủy nhất đến khi được phát biểu tường minh.

2. Mục tiêu tổng quát

- Làm rõ các cách tiếp cận khác nhau về khái niệm phương trình và các khái niệm liên quan như ẩn, nghiệm của phương trình, giải phương trình... và các phép biến đổi phương trình bậc nhất một ẩn.
- Làm rõ quan niệm của GV và HS về các khái niệm trên.

3. Phạm vi lý thuyết tham chiếu và phương pháp nghiên cứu

Để đạt được mục tiêu trên, chúng tôi đặt nghiên cứu của mình trong phạm vi của didactic toán. Cụ thể, chúng tôi sẽ vận dụng một số công cụ của lý thuyết nhân chủng học (mối quan hệ thể chế, mối quan hệ cá nhân, hoạt động toán học...), và các khái niệm của hợp đồng didactic.

Cụ thể, chúng tôi đặt lại các câu hỏi trên cơ sở lý thuyết tham chiếu đã chọn như sau :

- Q1: Mối quan hệ thể chế với khái niệm phương trình đã được hình thành và tiến triển ra sao ? Chúng có những đặc trưng gì ? Có những ràng buộc nào của

thể chế trên các khái niệm này ? Cụ thể hơn, khái niệm phương trình, ẩn, nghiệm và các phép biến đổi phương trình có những cách tiếp cận nào ? Đặc trưng của từng cách tiếp cận ? Có những kỹ thuật giải phương trình nào ?

- Q2: Sự tiến triển của các tổ chức toán học liên quan đến phương trình bậc nhất một ẩn diễn tiến ra sao ? Những tiến triển của các dạng phương trình và các kỹ thuật giải có tương ứng với nhau không ? Những quy tắc nào của hợp đồng didactic có thể được hình thành giữa GV và HS trong quá trình tiếp cận với các tri thức phương trình trong từng giai đoạn tiếp cận ?
- Q3: Quan niệm của GV và HS về phương trình và các phép biến đổi phương trình bậc nhất là gì ? Đây là nguyên nhân chủ yếu của các quan niệm đó ?

Từ đó chúng tôi đề ra những phương pháp nghiên cứu sau

- Tóm tắt các cách đưa vào khái niệm phương trình, các khái niệm liên quan và các kỹ thuật giải tương ứng từ những công trình, bài báo chuyên môn đề cập đến vấn đề để xây dựng một tham chiếu cho phân tích ở các phần sau.
- Phân tích các tổ chức toán học liên quan đến phương trình trong chương trình và SGK toán phổ thông hiện hành (từ tiểu học đến hết chương trình toán THPT), trên cơ sở đối chiếu với tham chiếu đã xây dựng từ phân tích trên. Qua đó trả lời cho các câu hỏi Q1 và Q2.
- Phân tích mối quan hệ thể chế với tri thức trong quá trình tiếp cận với các dạng khác nhau của phương trình sẽ giúp chúng tôi rút ra được một số giả thuyết nghiên cứu mà tính hợp thức của chúng sẽ được kiểm chứng qua những thực nghiệm phù hợp. Từ đó rút ra câu trả lời cho câu hỏi Q2 và Q3.

4. Tổ chức của luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, phần kết luận và hai chương I và II.

Phần mở đầu

Chúng tôi trình bày lý do chọn đề tài, câu hỏi xuất phát, mục tiêu tổng quát, phạm vi lý thuyết tham chiếu, phương pháp nghiên cứu và giới thiệu cấu trúc của luận văn.

Chương 1. Quan hệ thể chế với đối tượng phương trình bậc nhất một ẩn

- I.1. Xây dựng cơ sở tham chiếu
 - Tóm tắt các cách đưa vào khái niệm phương trình và các khái niệm liên quan.
 - Tóm tắt các kỹ thuật giải phương trình.
- I.2. Phân tích chương trình và SGK toán phổ thông hiện hành
 - Chương trình và SGK toán tiểu học.
 - Chương trình và SGK toán trung học cơ sở (toán 6, toán 7, toán 8).
 - Chương trình và SGK toán 10.
- Từ đó rút ra những giả thuyết cần thiết.

Chương 2. Thực nghiệm

Xây dựng thực nghiệm phù hợp trên GV và HS nhằm kiểm chứng những giả thuyết rút ra được trong quá trình nghiên cứu.

Phần kết luận

Tóm tắt những kết quả đạt được, chỉ ra những lợi ích của đề tài, đồng thời mở rộng hướng nghiên cứu cho luận văn.

Chương 1. MỐI QUAN HỆ THỂ CHẾ VỚI KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1.1. Mục tiêu của chương

Mục tiêu của chương này nhằm tìm hiểu mối quan hệ thể chế với đối tượng phương trình bậc nhất một ẩn. Thể chế được nói đến ở đây được hiểu là thể chế dạy-học toán tại Việt Nam trong giai đoạn hiện nay. Cụ thể hơn, đó là thể chế **dạy học toán tiểu học và trung học cơ sở**.

Để có được cái nhìn toàn diện và khách quan về “cuộc sống” của đối tượng phương trình bậc nhất một ẩn, chúng tôi tiến hành xây dựng một cơ sở tham chiếu về cách tiếp cận phương trình bậc nhất một ẩn và các khái niệm liên quan. Đồng thời liệt kê các kỹ thuật giải phương trình bậc nhất một ẩn được đề cập đến trong phạm vi toán phổ thông.

1.2. Cơ sở tham chiếu

Như đã giới thiệu ở trên, chúng tôi sẽ phân tích và tổng hợp một số công trình nghiên cứu khoa học để tóm tắt các cách đưa vào khái niệm phương trình và một số khái niệm liên quan. Cụ thể, chúng tôi sẽ tuần tự trả lời các câu hỏi sau:

- Phương trình bậc nhất một ẩn có những hình thức thể hiện nào ? Ứng với mỗi hình thức thể hiện thì các khái niệm liên quan như ẩn, nghiệm... được hiểu ra sao ? Đặc trưng cơ bản của mỗi hình thức thể hiện là gì ?
- Ứng với mỗi hình thức thể hiện phương trình như vậy thì có những cách giải phương trình tương ứng nào ? Tiến triển của các kỹ thuật giải phương trình diễn ra ra sao ? Chúng phụ thuộc vào những yếu tố gì ?

Tài liệu chúng tôi dùng để phân tích gồm:

- Bài báo của Aude SAINFORD: Memoire sur une inconnue.
- Bài báo của Joelle Vlassis, Isabelle Demonty: La resolution des equations du premier degre a une inconnue và Apprendre à résoudre des équations.

- “Từ điển toán học thông dụng”, Ngô Thúc Lan chủ biên.

1.2.1 Cách tiếp cận khái niệm phương trình

Aude SAINFORD phân biệt 4 cách đưa vào khái niệm phương trình một ẩn.

1.2.1.a. Cách tiếp cận “nguyên thủy”

Vấn đề là tìm một số còn thiếu điền vào một vị trí nào đó trong dãy phép tính để được một đẳng thức đúng. Vị trí cần điền được biểu thị bởi một ô trống $\square$, dấu ba chấm ... hoặc chữ x.

Ví dụ

Hoàn thành: $17 + \square = 9$, $23 - \square = 40,2$, $\square \times 11 = 3,3$.

Hoặc chỉ ra giá trị của x để được đẳng thức: $-8 + x = 5$; $4,5 \times x = 0$.

Nhận xét

Phương trình ở đây chưa có tên gọi chính thức, nó đang mang nghĩa là một đẳng thức đúng, mà một thành phần của phép toán đã bị “giấu đi”, người giải cần phải “khôi phục lại” số đã bị giấu đi đó. Phương trình thường được đi kèm với lời dẫn, yêu cầu là “Tìm số thích hợp điền vào ô trống”, hay “tìm số bị thiếu điền vào chỗ trống để được đẳng thức đúng” ...

Vị trí cần điền số thường được xác định bởi một ô trống $\square$, dấu ba chấm ..., hay một chữ cái đại diện nào đó (x, n). Tuy nhiên, khái niệm “ẩn” đang là ngầm ẩn, chưa có tên gọi chính thức. Trong trường hợp này, “giá trị cần tìm” thường được biểu diễn bằng “ô trống”, “chỗ trống”, hay “chữ x”... - là biểu tượng mà nó đang chứa trong đó và do đó mang đậm nét “hình ảnh trực quan”.

Theo Aude Sainford, **có một số ràng buộc được thiết lập với cách tiếp cận phương trình nguyên thủy:**

- Luôn tìm được số thích hợp để đẳng thức được xảy ra. Nói cách khác, phương trình luôn có nghiệm và nghiệm là một giá trị không quá phức tạp để tìm ra,

thành phần tham gia trong phép toán cho phép các phép toán được thực hiện dễ dàng.

- Giá trị tìm được là duy nhất.

1.2.1.b. Cách tiếp cận “phô bày”

Chỉ ra phương trình bằng các ví dụ cụ thể.

Ví dụ. $3x + 4 = 10$ là một phương trình bậc nhất ẩn x trên tập $\mathbf{R}$.

Nhận xét

Phương trình ở đây đã có tên gọi chính thức, tuy nhiên chưa có định nghĩa tổng quát. Khái niệm phương trình chỉ được mô tả qua các ví dụ cụ thể, đó là những đẳng thức chứa các số, phép toán và chữ. Phương trình khi được tiếp cận theo cách này thường được đi với lời dẫn “Giải phương trình...”

Khái niệm “ẩn” được nêu ra tường minh. Đó là tên gọi cho đối tượng “chữ” có trong phương trình. Ẩn ở đây là một số chưa biết, hoặc đã bị giấu đi trong phép toán.

Nghiệm của phương trình cũng đã có tên gọi chính thức, đó chính là số thay vào vị trí của ẩn được đẳng thức đúng.

1.2.1.c. Cách tiếp cận “công cụ”

Từ một vấn đề, thường là một bài toán bằng lời, dẫn đến phương trình như là một công cụ để giải quyết vấn đề ban đầu.

Ví dụ. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp có tổng bằng 51.

Nhận xét

Khái niệm “phương trình” không được phát biểu tường minh ngay từ đầu, người giải cũng có thể chưa thấy ngay được đối tượng phương trình trong bài toán đặt ra. Chỉ khi thực hiện các liên kết thông tin trong bài toán hoặc trong các hoạt động giải toán thì phương trình mới xuất hiện, như là một công cụ, một bước phải thực hiện trong hoạt động giải bài toán.

Đối tượng “ẩn” do chính người giải toán đặt ra, với ý nghĩa và đặc trưng phụ thuộc vào người giải toán. Ngay sau khi đặt ẩn (thường là đại lượng mà bài toán ban đầu yêu cầu phải tìm), người giải toán phải tự đưa ra được phương trình thể hiện mối liên quan giữa ẩn và các yếu tố còn lại của bài toán. Từ đó dẫn đến nhu cầu phải giải phương trình để đưa ra câu trả lời cho bài toán ban đầu. Với mỗi cách đặt ẩn khác nhau thì có thể sẽ đưa đến một phương trình khác nhau tương ứng. Như vậy, với cách tiếp cận này thì ẩn xuất hiện trước phương trình và quy định các tính chất, đặc điểm của phương trình.

Khái niệm “nghiệm” của phương trình không được nêu ra tường minh, nó mang nghĩa là đáp số của bài toán (nếu từ đầu người giải đặt ẩn là số phải tìm), hoặc là đại lượng trung gian cần thiết để đưa ra đáp số cho bài toán ban đầu. Tuy không được nêu ra tường minh, hay có yêu cầu tường minh về việc phải tìm nghiệm của phương trình, nhưng nhu cầu tìm nghiệm mặc nhiên xuất hiện ngay trong nội tại người giải toán, từ khi đưa ra ẩn và dẫn đến phương trình. Như vậy, nhu cầu tìm nghiệm xuất hiện ngay từ khi ẩn được đưa ra.

1.2.1.d. Cách tiếp cận “hình thức”

Có hai cách tiếp cận hình thức, được phân loại dựa vào “chất liệu” để xây dựng phương trình.

- **Cách 1.** Dựa vào mệnh đề chứa biến: Phương trình bậc nhất ẩn x là một mệnh đề chứa biến có dạng $ax + b = 0$, với $a \neq 0$.
- **Cách 2.** Dựa vào hàm số bậc nhất: Cho f là một hàm số bậc nhất trên $\mathbf{R}$. Giải phương trình ẩn x là tìm tất cả các giá trị của x để có $f(x) = 0$ là một đẳng thức đúng. Giá trị x tìm được gọi là nghiệm của phương trình.

Nhận xét

Khái niệm “phương trình” đã có tên gọi và được định nghĩa chính thức bằng chất liệu mệnh đề chứa biến hoặc hàm số.

Khái niệm ẩn số được đưa ra tường minh đi kèm ngay trong định nghĩa của phương trình. Ẩn có nguồn gốc là một biến của mệnh đề chứa biến hoặc biến của hàm số.

Khái niệm nghiệm của phương trình cũng được đề cập tường minh, có tên gọi, và mang nghĩa là giá trị của biến để tạo thành đẳng thức đúng.

Nhận xét các cách tiếp cận phương trình

Theo cách phân loại của Aude SAINFORD thì có 4 cách tiếp cận phương trình như trên, với mức độ tường minh của các khái niệm liên quan khác nhau. Trong đó, với cách tiếp cận nguyên thủy, phương trình mang nghĩa là một đẳng thức mà một phần của phép toán đã bị che giấu, người giải cần phải tìm lại giá trị đã bị che giấu đó. Đồng thời, giá trị bị che giấu có nhiều hình thức thể hiện là ô trống, chỗ trống, hoặc một chữ...

- Ô trống hoặc chỗ chấm đóng vai trò chỉ vị trí của số cần tìm.
- Chữ (thường là chữ x) đóng vai trò vừa chỉ vị trí của số chưa biết, vừa chỉ bản thân số chưa biết đó.

Do đó, xét về mức độ tường minh của khái niệm ẩn trong trường hợp này, theo chúng tôi, **nên chia cách tiếp cận nguyên thủy thành 2 loại khác nhau, với 2 hình thức khác nhau:**

- Hình thức 1. Điền vào ô trống hoặc chỗ chấm: khi đó vị trí của ẩn là ô trống hoặc dấu ba chấm ... tương ứng.
- Hình thức 2. Tìm giá trị của chữ: khi đó ẩn là một chữ (x).

Như vậy, có thể có 5 cách tiếp cận phương trình, được tóm tắt trong bảng 1.1 .

Bảng I.1. Các phương pháp tiếp cận phương trình bậc nhất một ẩn

Phương pháp tiếp cận	Nguyên thủy		Phổ bày	Công cụ	Hình thức
	Hình thức 1	Hình thức 2			
Phương trình	Là một dãy phép tính có một thành phần nào đó chưa biết.		Được chỉ ra thông qua các ví dụ cụ thể.	Là công cụ để giải quyết một bài toán khác.	Được định nghĩa thông qua mệnh đề chứa biến hoặc hàm số.
	Có cơ chế ngấm ẩn, chưa có định nghĩa và tên gọi.		Không có định nghĩa nhưng đã có tên gọi.	Không có định nghĩa và không có tên gọi.	Có định nghĩa và tên gọi.
Ẩn	Là một ô trống $\square$ hoặc chỗ chấm	Là một chữ cái ($x, n, \dots$).	Là một chữ cái ($x, n, \dots$).	Do người giải toán tự đặt ra, thường là một chữ cái và mang nghĩa phụ thuộc vào người giải toán.	Có xuất phát là biến của mệnh đề chứa biến hoặc biến của hàm số ban đầu.
	Chỉ thể hiện vị trí của số cần tìm.	Vừa thể hiện vị trí, vừa thể hiện bản thân số cần tìm.			
Yêu cầu bài toán	Không có định nghĩa và tên gọi.		Không có định nghĩa nhưng có tên gọi.	Không có định nghĩa và tên gọi.	Có định nghĩa và tên gọi.
	Điền số vào ô trống (hoặc chỗ chấm).	Tìm x .	Giải phương trình.	Không có yêu cầu, người giải toán tự phát sinh nhu cầu tìm nghiệm.	Giải phương trình.
Nghiệm	Là một số thích hợp điền vào chỗ trống để được đẳng thức đúng.	Là một giá trị thích hợp của chữ để được đẳng thức đúng.	Là giá trị thích hợp của ẩn.	Là một giá trị thích hợp của ẩn, đóng vai trò là đáp số của bài toán ban đầu hoặc là giá trị trung gian, cho phép giải bài toán ban đầu.	Là một giá trị thích hợp của ẩn.
	Không có tên gọi.		Có tên gọi.	Không có tên gọi.	Có tên gọi.

1.2.2 Kỹ thuật giải phương trình

Để có một tham chiếu cho nghiên cứu các kỹ thuật giải phương trình trong thể chế dạy học toán, chúng tôi tiến hành tổng hợp các kỹ thuật giải phương trình từ một số tài liệu:

- Bộ sách giáo khoa và sách giáo viên toán tiểu học và trung học cơ sở;
- Bài báo của Aude SAINFORD: Memoire sur une inconnue.
- Tài liệu “Hướng dẫn sử dụng máy tính bỏ túi” của Nguyễn Trường Cháng.

1.2.2.a. τ_1 : “Thử-sai”

Thử lần lượt các giá trị cần tìm, cho đến khi đạt được đẳng thức đúng.

Công nghệ θ_1 : Khái niệm đẳng thức.

Ví dụ: Điền số thích hợp vào ô trống: $3 + \square = 5$.

Thử lần lượt một số giá trị vào ô trống:

$3 + \boxed{1} = 5$ (không đúng);

$3 + \boxed{2} = 5$ (đúng). Vậy, giá trị cần tìm là 2.

1.2.2.b. τ_2 : “Dò bảng phép toán”

Sử dụng bảng phép toán, đối chiếu xác định giá trị cần tìm để được đẳng thức đúng.

Công nghệ θ_2 : Bảng phép toán.

Ví dụ: Tìm x, biết $2 + x = 7$.

Dò bảng cộng, ta thấy:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$2 + 5 = 7$ nên $x = 5$.

1.2.2.c. τ_3 : “Xét dấu hiệu hai vế”

Sử dụng các tính chất của phép toán để xác định giá trị cần tìm.

- Nếu trong phép toán cộng có số hạng bằng 0 thì số hạng còn lại bằng tổng.
- Nếu trong phép toán trừ có số trừ bằng 0 thì số bị trừ bằng hiệu.
- Nếu trong phép toán nhân có số thừa số bằng 1 thì thừa số còn lại bằng tích.
- Nếu trong phép toán chia có số chia bằng 1 thì số bị chia bằng thương.
- Trong phép toán cộng, nếu vế chứa số phải tìm có dạng tổng của hai số hạng, trong đó có một số hạng bằng một số hạng ở vế còn lại thì số cần tìm bằng với số hạng còn lại ở vế kia.
- Trong phép toán nhân, nếu vế chứa số phải tìm có dạng tích của hai thừa số, trong đó có một thừa số bằng một thừa số ở vế còn lại thì số cần tìm bằng thừa số còn lại ở vế kia.

Công nghệ θ_3 : Tính chất của phép toán

- Tính chất của số 0: số nào cộng với 0 (hoặc trừ đi 0) cũng bằng chính số đó.
- Tính chất của số 1: số nào nhân với 1 (hoặc chia cho 1) cũng bằng chính số đó.
- Tính chất giao hoán của phép cộng: $a + b = b + a$.
- Tính chất giao hoán của phép nhân: $a \times b = b \times a$.

Ví dụ:

Điền số thích hợp vào ô trống:

a) $32 + \square = 32$

b) $25 \times 17 = \square \times 25$

Ở câu a), có một số hạng bằng tổng nên số hạng còn lại bằng 0. Như vậy số cần điền vào ô trống là 0: $32 + \boxed{0} = 32$.

Ở câu b), hai vế đều có dạng một tích, trong đó vế phải có một thừa số bằng với một thừa số ở vế trái nên hai thừa số còn lại ở hai vế bằng nhau. Do đó số cần điền vào ô trống là 17, theo tính chất giao hoán của phép nhân:

$$25 \times 17 = \boxed{17} \times 25.$$

1.2.2.d. τ_4 : “Tính thành phần chưa biết”

- Nếu số chưa biết là một số hạng trong phép cộng, lấy tổng trừ đi số hạng đã biết.
- Nếu số chưa biết là số bị trừ trong phép trừ, lấy hiệu cộng với số trừ.
- Nếu số chưa biết là số trừ trong phép trừ, lấy số bị trừ trừ đi hiệu.
- Nếu số chưa biết là một thừa số trong phép nhân, lấy tích chia cho thừa số đã biết.
- Nếu số chưa biết là số bị chia trong phép chia, lấy thương nhân với số chia.

Công nghệ θ_4 : Quy tắc tìm thành phần chưa biết:

- Trong một tổng, muốn tìm số hạng chưa biết, lấy tổng trừ đi số hạng đã biết.
- Trong một hiệu, muốn tìm số bị trừ, lấy hiệu cộng với số trừ.
- Trong một hiệu, muốn tìm số trừ, lấy số bị trừ trừ đi hiệu.
- Trong một tích, muốn tìm thừa số chưa biết, lấy tích chia cho thừa số đã biết.
- Trong một thương, muốn tìm số bị chia, lấy thương nhân với số chia.
- Trong một thương, muốn tìm số chia, lấy số bị chia chia cho thương.

Ví dụ: Tìm x, biết $10 - x = 4$

$$10 - x = 4$$

$$x = 10 - 4$$

$$x = 6$$

1.2.2.e. τ_5 : “Biến đổi đồng nhất”

Cùng thực hiện các biến đổi giống nhau trên cả hai vế cho đến khi vế chứa ẩn chỉ chứa ẩn, vế còn lại là một số.

Công nghệ θ_5 : Tính chất của đẳng thức

- Cùng cộng (hoặc trừ) cả hai vế của một đẳng thức với một số thì được một đẳng thức mới.
- Cùng nhân (hoặc chia) cả hai vế của một đẳng thức với một số khác 0 thì được một đẳng thức mới.

Ví dụ: Giải phương trình $2x - 3 = 7$

$$2x - 3 = 7$$

$$2x - 3 + 3 = 7 + 3$$

$$2x = 10$$

$$2x \div 2 = 10 \div 2$$

$$x = 5$$

Hoặc có thể trình bày rút gọn như sau:

$$2x - 3 = 7$$

$$2x = 7 + 3$$

$$2x = 10$$

$$2 = 10 \div 2$$

$$x = 5$$

1.2.2.f. τ_6 : “Thực hiện sơ đồ ngược”

Kỹ thuật này thường được tiến hành trên sơ đồ của phép toán. Xuất phát từ giá trị x ban đầu, vẽ sơ đồ mô tả các phép toán của phương trình (bằng những mũi tên). Sau đó xây dựng sơ đồ ngược lại và sử dụng các phép toán ngược với các phép toán ban đầu để tìm giá trị chưa biết.

Công nghệ θ_6 : Các tính chất của phép toán ngược.

Ví dụ. Giải phương trình $2x - 3 = 7$.

Xây dựng sơ đồ phép toán: $x \xrightarrow{\times 2} \square \xrightarrow{-3} 7$.

Ta có sơ đồ ngược lại: $5 \xleftarrow{:2} \boxed{10} \xleftarrow{+3} 7$

Vậy $x = 5$.

1.2.2.g. τ_7 : “Công thức nghiệm”

Áp dụng công thức nghiệm của phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ ($a \neq 0$), phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

Công nghệ θ_7 : công thức nghiệm của phương trình bậc nhất.

Ví dụ: Giải phương trình $2x - 6 = 0$

Phương trình $2x - 6 = 0$ có nghiệm là $x = \frac{6}{2} = 3$.

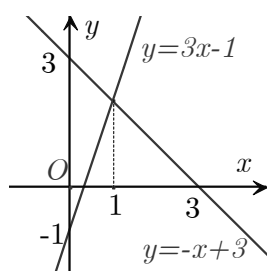
1.2.2.h. τ_8 : “Biểu diễn hình học”

- Giải phương trình $ax + b = 0$: vẽ đường thẳng $y = ax + b$ rồi xác định hoành độ giao điểm với trục hoành Ox , đó là giá trị x cần tìm.
- Giải phương trình $ax + b = ax' + b'$: vẽ hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = ax' + b'$ trên cùng một hệ trục tọa độ rồi xác định hoành độ giao điểm của hai đường thẳng, đó là giá trị x cần tìm.

Công nghệ θ_8 : Sự tương giao giữa đồ thị hàm số bậc nhất và trục hoành và sự tương giao giữa hai đường thẳng trong hệ trục tọa độ.

Ví dụ: Giải phương trình $3x - 1 = -x + 3$

Vẽ hai đường thẳng $y = 3x - 1$ và $y = -x + 3$ trên cùng một hệ trục tọa độ:



Giao điểm của hai đồ thị có hoành độ bằng 1 nên nghiệm của phương trình là $x = 1$.

1.2.2.i. τ_9 : “Máy tính cầm tay”

Dùng Máy tính cầm tay có lập trình cơ bản, nhập phương trình rồi dùng lệnh SOLVE để được nghiệm “gần đúng” (tuy nhiên với phương trình bậc nhất hệ số hữu tỉ thì nghiệm tìm được thường là nghiệm đúng).

Công nghệ θ_9 : Chức năng tìm nghiệm gần đúng của máy tính cầm tay lập trình cơ bản.

Ví dụ: Giải phương trình $\frac{2}{3}x - 3 = 2$.

Sử dụng máy tính cầm tay có lập trình cơ bản (như Casio fx 570MS hoặc Casio fx 570ES), nhập vào màn hình dãy tính

$\boxed{2} \boxed{/} \boxed{3} \boxed{\times} \boxed{\text{Alpha}} \boxed{X} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{\text{Alpha}} \boxed{=} \boxed{2}$.

Màn hình hiện $\boxed{\frac{2}{3} \times X - 3 = 2}$

Ấn $\boxed{\text{Shift}} \boxed{\text{SOLVE}}$

Màn hình hiện $\boxed{X?}$

Ấn $\boxed{\text{Shift}} \boxed{\text{SOLVE}}$ lần nữa.

Màn hình hiện $\boxed{X = \frac{15}{2}}$

Đó là nghiệm của phương trình.

Nhận xét các kỹ thuật giải phương trình

Trên đây là một số kỹ thuật giải phương trình bậc nhất một ẩn, với công nghệ giải thích rất rõ ràng. Mỗi kỹ thuật có những ưu nhược điểm riêng, và phạm vi sử dụng rất khác nhau, được chỉ ra trong bảng 1.2.

Bảng 1.2: Phạm vi sử dụng của các kỹ thuật giải phương trình

KỸ THUẬT	PHẠM VI SỬ DỤNG
τ_1	Phương trình có các phép toán và các số tham gia đơn giản.
τ_2	Phương trình có nguồn gốc là những phép toán có trong bảng phép toán.
τ_3	Phương trình mà các thành phần tham gia thể hiện tính chất của phép toán, như có cộng, trừ với 0, nhân, chia với 1, hay các số hạng ở 2 vế có tính chất giao hoán...
τ_4	Phương trình có phạm vi các số bất kỳ, nhưng ẩn chỉ xuất hiện một lần trong dãy phép tính.
τ_5	Phương trình bất kỳ.
τ_6	Phương trình mà ẩn chỉ xuất hiện 1 lần trong dãy phép tính.
τ_7	Phương trình đã đưa về dạng cơ bản $ax + b = 0$.
τ_8	Phương trình hệ số hữu tỉ và các số hạng tham gia không quá “lẻ” – theo nghĩa giao điểm của hai đồ thị thể hiện được hoành độ có thể “đọc được” một cách chính xác.
τ_9	Nếu các hệ số tham gia trong phương trình là hệ số hữu tỉ thì nghiệm tìm được là nghiệm đúng, nếu các hệ số trong phương trình là số vô tỉ thì nghiệm tìm được thường chỉ là nghiệm gần đúng.

Công nghệ giải thích cho mỗi kỹ thuật cũng rất khác nhau, và thể hiện sự tiến triển khác nhau giữa công nghệ cho kỹ thuật này với công nghệ cho kỹ thuật kia.

1.3. Mỗi quan hệ thể chế với đối tượng phương trình bậc nhất một ẩn

1.3.1 Mục đích và phương pháp phân tích

Trên cơ sở tham chiếu đã được xây dựng, chúng tôi tiến hành phân tích mối quan hệ thể chế với đối tượng phương trình bậc nhất một ẩn. Cụ thể hơn, chúng tôi đi tìm trả lời cho các câu hỏi sau:

- Có những phương pháp tiếp cận phương trình bậc nhất một ẩn nào trong thể chế dạy học toán ở Việt Nam hiện nay?
- Mỗi phương pháp tiếp cận được thực hiện ở giai đoạn, lớp học nào? Đặc trưng của khái niệm phương trình và các khái niệm liên quan được thể hiện ra sao? Cái gì là ngầm ẩn, cái gì xuất hiện tường minh? Tường minh dưới dạng nào?
- Cách nhận dạng và cách giải phương trình bậc nhất một ẩn có nhất quán trong suốt quá trình tiếp cận của HS ở các cấp? Phương pháp giải phương trình nào được ưu tiên?

Để trả lời các câu hỏi trên, chúng tôi sẽ tiến hành phân tích Sách giáo khoa toán từ lớp 1 cấp tiểu học đến lớp 8 cấp trung học cơ sở hiện hành. Hơn nữa, để có cái nhìn khách quan và toàn diện hơn trong quá trình phân tích, chúng tôi cũng sẽ nghiên cứu bộ sách giáo viên toán tương ứng.

1.3.2 Chương trình toán 1

1.3.2.a. Điền số vào ô trống

[SGK, tr.45]

Số?

$1 + 1 = \square$

$2 + 1 = \square$

$3 = \square + 1$

$1 + \square = 2$

$\square + 1 = 3$

$3 = 1 + \square$

$\square + 1 = 2$

$2 + \square = 3$

$1 + 2 = 2 + \square$

[SGK, tr. 49]

Số?

$$4 + 1 = \dots \quad 5 = 4 + \dots \quad 3 + 2 = \dots \quad 5 = 3 + \dots$$

$$1 + 4 = \dots \quad 5 = 1 + \dots \quad 2 + 3 = \dots \quad 5 = 2 + \dots$$

Kiểu nhiệm vụ T_1 : “điền số thích hợp vào chỗ trống” (chỗ trống có thể là ô trống $\square$, hoặc dấu ba chấm $\dots$), với ba tình huống khác nhau:

- TH_1 : chỗ trống ở trong dãy tính mà một bên có phép tính giữa hai số đã biết, bên còn lại chỉ có chỗ trống.
- TH_2 : chỗ trống ở trong dãy tính mà một bên có phép tính giữa số một đã biết và chỗ trống, bên còn lại là một số khác.
- TH_3 : chỗ trống ở trong dãy tính mà cả hai bên đều có phép tính, trong đó một bên có cả chỗ trống, bên còn lại là phép tính giữa hai số đã biết.

Lời dẫn: “Số?”.

Kỹ thuật có thể sử dụng:

- τ_1 : Thử-chọn (dùng chung cho cả ba tình huống TH_1 , TH_2 và TH_3) : thử đặt từng số vào chỗ trống, số nào cho phép toán đúng thì nhận.
- τ_2 : “Dò bảng phép toán”. Kỹ thuật này có 3 trường hợp, tương ứng để giải quyết ba tình huống của kiểu nhiệm vụ T_1 :

$\circ \tau_{2.1}$: (để giải quyết tình huống TH_1) Thực hiện phép toán giữa hai số đã biết, điền kết quả vào chỗ trống.

$\circ \tau_{2.2}$: (để giải quyết tình huống TH_2) Đối chiếu với phép toán đúng đã biết, mà có hai số tương ứng giống với hai số đã biết trong bài toán (về giá trị và vị trí), điền số còn lại ở vị trí còn lại tương ứng với vị trí của chỗ trống để được phép toán đúng giống như phép toán đã biết.

$\circ \tau_{2.3}$: (để giải quyết tình huống TH_3) Thực hiện phép toán đã biết hai số, sau đó thực hiện trường hợp $\tau_{2.2}$.

Công nghệ:

θ_1 : các phép toán đúng đã biết (bảng cộng).

Nhận xét

Xét đến vị trí của các câu được đặt trong bài toán: câu $1 + \square = 2$ và $\square + 1 = 2$ có công nghệ là phép toán ở câu $1 + 1 = \square$ và được đặt thẳng cột với câu này; câu $\square + 1 = 3$ và $2 + \square = 3$ có công nghệ là phép toán ở câu $2 + 1 = \square$ và được đặt thẳng cột với câu này; câu $3 = \square + 1$, $3 = \square + 1$, $1 + 2 = 2 + \square$ lần lượt có công nghệ là phép toán ở câu $2 + 1 = \square$, $\square + 1 = 3$, $2 + \square = 3$ và được đặt cùng hàng bên cạnh các câu này. Hơn nữa, ở SGK tr. 62 (khi nêu mục tiêu của bài học) đã viết: “Củng cố về bảng cộng và làm tính cộng trong phạm vi 3”; và ở SGK, ở tr. 66 (khi hướng dẫn giải bài tập) viết “Có thể giúp HS nhìn vào kết quả bài làm ở hai dòng đầu, cột thứ nhất”.

Từ đó chúng tôi nhận thấy kỹ thuật được mong đợi là ba trường hợp $\tau_{2.1}$, $\tau_{2.2}$, $\tau_{2.3}$ của kỹ thuật τ_2 . Trong đó, trường hợp $\tau_{2.1}$ để giải quyết bài toán $1 + 1 = \square$ và $2 + 1 = \square$, đồng thời hai bài toán này lại cung cấp công nghệ cho trường hợp $\tau_{2.2}$ và $\tau_{2.3}$.

1.3.2.b. Phép toán có số 0

[SGK, tr. 51]

$\square$ Số?

$$\dots + 3 = 3 \quad 2 + \dots = 2 \quad 0 + \dots = 0$$

[SGK, tr. 179]

$\square$ Số?

$$25 + \square = 25 \quad 25 - \square = 25$$

Bài toán “ $0 + \dots = 0$ ” có hình thức giống như bài toán thuộc trường hợp TH₂ của kiểu nhiệm vụ T₁.

Các trường hợp $\tau_{2.1}$, $\tau_{2.2}$, $\tau_{2.3}$ của kỹ thuật τ_2 và kỹ thuật τ_1 không thể áp dụng trong trường hợp này, vì HS chưa được tiếp cận phép tính “ $0 + 0 = 0$ ”.

Bài toán “ $0 + \dots = 0$ ”, được đặt thẳng hàng với hai bài toán “ $\dots + 3 = 3$ ” và “ $2 + \dots = 2$ ” (hai bài này đều sử dụng trường hợp $\tau_{2.2}$), đồng thời có vai trò cung cấp công nghệ và kỹ thuật để giải quyết bài toán “ $0 + \dots = 0$ ”.

Như vậy, để giải quyết kiểu nhiệm vụ này, HS phải sử dụng kỹ thuật τ_3 với nội dung: nếu trong phép toán cộng có số hạng bằng 0 thì số hạng còn lại bằng tổng.

Từ sự tiến triển của kỹ thuật như vậy, ta có thể bổ sung vào kiểu nhiệm vụ T_1 thêm tình huống TH_4 như sau:

- TH_1 , TH_2 và TH_3 : điền số vào chỗ trống trong phép toán có các thành phần tương ứng giống với các thành phần trong bảng cộng, trừ đã biết. Để giải quyết các tình huống này, HS được mong đợi sử dụng kỹ thuật τ_2 .
- TH_4 : điền số vào chỗ trống trong phép toán không có trong bảng cộng, trừ. Để giải quyết tình huống này, HS được mong đợi sử dụng kỹ thuật τ_3 .

Công nghệ θ_3 : tính chất của phép cộng với số 0 (mọi số cộng với 0 bằng chính số đó).

Kết luận về tiếp cận phương trình nguyên thủy ở lớp 1

Về kiểu nhiệm vụ. Ở lớp 1, HS được tiếp cận kiểu nhiệm vụ T_1 , với những đặc điểm sau:

- Đây là một cách tiếp cận phương trình ở dạng nguyên thủy dạng 1 như trong phần tham chiếu; các khái niệm phương trình, ẩn, nghiệm... chưa xuất hiện tường minh. Chỗ trống chỉ mang nghĩa là vị trí cần phải điền số cần tìm vào để được một phép tính đúng.
- Chỗ trống thường xuất hiện trong phép tính cộng và phép tính trừ trong phạm vi 10. Chỉ có một bài tập duy nhất có ô trống xuất hiện trong phép cộng và phép trừ trong phạm vi 100 (bài tập tr.179) (ở lớp 1, HS được học phép cộng và phép trừ trong phạm vi 100).
- Chỗ trống có thể ở bên trái hoặc bên phải dấu “=”.
- Chỗ trống chỉ xuất hiện trong dãy phép tính mà mỗi bên của dấu “=” chỉ có 1 dấu phép toán, không xuất hiện trong dãy tính có 2 phép toán liên tiếp (mặc dù HS đã được học các dãy tính có hai phép toán liên tiếp).

- Luôn điền được duy nhất một số thích hợp vào bài chỗ trống để được phép toán đúng. Các phép toán luôn trong phạm vi bảng cộng hoặc trừ các số mà HS đã được tiếp cận. Khi HS đã điền được một số vào chỗ trống thì không cần phải trả lời câu hỏi: “liệu còn số nào khác có thể điền vào chỗ trống nữa không?”

Về kỹ thuật. Trong từng kiểu nhiệm vụ con mà HS sử dụng các kỹ thuật khác nhau:

- Nếu các số đã biết trong phép toán nhỏ hơn 10 thì HS sử dụng các kỹ thuật τ_2 để giải quyết.
- Nếu phép toán có chứa số lớn hơn 10 thì trong phép toán đó, giữa hai bên của dấu = phải chứa số giống nhau. Khi đó HS sử dụng kỹ thuật τ_3 để giải quyết. Kết quả cần điền vào ô trống trong trường hợp này luôn bằng 0.
- SGK tr.200 viết: “*Tìm một thành phần chưa biết của phép cộng, phép trừ bằng cách ghi nhớ bảng cộng, bảng trừ, mối quan hệ giữa phép cộng, phép trừ*” và SGK tr.201 (khi hướng dẫn giải bài toán $3 + \dots = 7$) viết: “*GV có thể nêu : 3 cộng mấy bằng 7 ? HS dựa vào bảng cộng đã học để trả lời: 3 cộng 4 bằng 7, ta viết 4 vào chỗ chấm ...*”. Qua đó cho thấy kỹ thuật τ_1 không được khuyến khích trong mọi trường hợp.

Về công nghệ. Có 2 công nghệ là θ_2 và θ_3 , trong đó công nghệ θ_3 được cung cấp khi HS giải quyết các tình huống TH₂ của kiểu nhiệm vụ T₁.

Mối liên hệ giữa các thành phần trong tổ chức toán học giải phương trình nguyên thủy dạng 1 ở lớp 1 được tóm tắt trong sơ đồ 1.1.

Tiếp cận ẩn

Hình vẽ 1 thể hiện số lượng ô vuông ở ba phần: phần trái có 6 ô vuông, phần phải có 4 ô vuông và phần chung có 10 ô vuông.

Hình vẽ 2 gần giống hình vẽ 1, cho thấy có 4 ô vuông ở phần phải, 10 ô vuông ở phần chung nhưng phần trái chưa biết rõ số ô vuông, số ô vuông ở phần trái đã được thay bằng chữ x. Như vậy, chữ x thể hiện số ô vuông chưa biết.

Hình vẽ 3 cũng giống hình vẽ 1, trong đó có 6 ô vuông ở phần trái, x ô vuông ở phần phải và 10 ô vuông ở phần chung.

Từ ba hình vẽ cho thấy, chữ x đóng vai trò là một số chưa biết.

Tiếp cận phương trình

Bài toán $6 + 4 = \dots$ là kiểu nhiệm vụ T_1 quen thuộc với HS. Qua đó đưa ra phép tính cộng, có vai trò “cụ thể hoá” hình vẽ 1. Tương tự, phép toán $x + 4 = 10$ và $6 + x = 10$ lần lượt có vai trò “cụ thể hoá” hình vẽ 2 và hình vẽ 3. Từ đó đưa đến tiếp cận phương trình theo cách mới: một phép toán có một thành phần là số chưa biết, được thể hiện bằng một chữ.

Tiếp cận kỹ thuật giải phương trình (tìm x)

Bài toán $6 = 10 - \dots$ và $4 = 10 - \dots$ (ở dưới hình 1) cũng là kiểu nhiệm vụ T_1 quen thuộc. Qua đó đưa ra cách tìm số ô vuông ở phần trái và số ô vuông ở phần phải. Cụ thể: số ô vuông ở phần trái bằng số ô vuông ở phần chung trừ đi số ô vuông ở phần phải, và số ô vuông ở phần phải bằng số ô vuông ở phần chung trừ đi số ô vuông ở phần trái. Quy tắc này vừa đóng vai trò là công nghệ, vừa là kỹ thuật, để HS giải quyết nhiệm vụ ở bài toán $x = 10 - \dots$ dưới hình 2. Đây là kiểu nhiệm vụ T_1 quen thuộc nhưng không thể sử dụng các kỹ thuật đã biết để giải quyết, mà phải sử dụng kỹ thuật và công nghệ được rút ra qua hình vẽ 1 và các bài toán ở dưới hình vẽ 1.

Sau khi giải quyết các bài toán ở dưới hình vẽ 2 và 3, HS được rút ra quy tắc, được phát biểu tường minh ngay dưới các bài toán: “Muốn tìm một số hạng ta lấy tổng trừ đi số hạng kia”.

Quy tắc này đóng vai trò là công nghệ và là kỹ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ mới được đặt ra trong bài toán được cho ngay sau quy tắc đã nêu:

SGK tr.45

Tìm x (theo mẫu)

a)	$x + 3 = 9$	b)	$x + 5 = 10$	c)	$x + 2 = 8$
	$x = 9 - 3$	d)	$x + 8 = 19$	e)	$4 + x = 14$
	$x = 6$			g)	$3 + x = 10$

[SGK, tr.56]

Tìm x

a)	$x - 4 = 8$	b)	$x - 9 = 18$	c)	$x - 10 = 25$
d)	$x - 8 = 24$	e)	$x - 7 = 21$	f)	$x - 12 = 36$

[SGK, tr.72]

Tìm x

a)	$15 - x = 10$	$15 - x = 8$	$42 - x = 5$
b)	$32 - x = 4$	$32 - x = 18$	$x - 14 = 18$

Kiểu nhiệm vụ T_2 : tìm x

- Lời dẫn : Tìm x
- Nội dung là một phép toán, trong đó chứa chữ x với vai trò là một thành phần chưa biết của phép toán. HS phải tìm giá trị của x để được phép toán đúng.

Kỹ thuật. Các kỹ thuật có thể sử dụng để giải bài toán:

Các kỹ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ T_1 : gồm τ_1 , τ_2 và τ_3 đều có thể được sử dụng để giải quyết kiểu nhiệm vụ T_2 .

Ngoài ra, chương trình bổ sung thêm kỹ thuật sau:

τ_4 : Tính thành phần chưa biết

- Xác định chữ x và các thành phần đã biết trong bài toán.
- Nếu bài toán là phép toán cộng, chữ x là một số hạng thì x bằng tổng trừ đi số hạng đã biết.
- Nếu bài toán là phép toán trừ, chữ x là số bị trừ thì x bằng hiệu cộng với số trừ.

- Nếu bài toán là phép toán trừ, chữ x là số trừ thì x bằng số bị trừ trừ đi hiệu.

Công nghệ θ_4 : Các quy tắc tìm số hạng chưa biết, tìm số bị trừ và số trừ.

Nhận xét

Về kiểu nhiệm vụ

Đây chính là cách tiếp cận phương trình nguyên thủy hình thức 2 trong phần tham chiếu, trong đó ẩn là chữ x (ngoài ra, chúng tôi không thấy xuất hiện bất cứ chữ nào khác), vừa thể hiện vị trí của thành phần chưa biết trong phép toán, vừa thể hiện bản thân thành phần chưa biết đó.

Phạm vi các số tham gia trong phép toán không bị hạn chế trong phạm vi 10 như với kiểu nhiệm vụ T_1 , mà mở rộng đến phạm vi 100.

Chữ chỉ xuất hiện 1 lần trong phép toán chỉ chứa 1 phép toán, và luôn ở phía trái của dấu $=$, phía bên phải của dấu $=$ luôn là một số cụ thể. Nói cách khác, chữ x luôn là một thành phần chưa biết (số hạng chưa biết, số bị trừ chưa biết, số trừ chưa biết) trong một phép toán giữa hai số, trong đó dấu của phép toán ở bên trái dấu $=$.

Về kỹ thuật

“Lưu ý, khi tìm x phải viết theo mẫu như trên (trình bày trên 3 hàng, các dấu $=$ thẳng cột)” [SGV tr.93]. Lưu ý này được SGV liên tục nhắc đi nhắc lại, như là một quy tắc bắt buộc phải thực hiện khi tiếp cận kiểu nhiệm vụ tìm x . Với yêu cầu bất biến về cách trình bày bài toán tìm x như vậy, chương trình khoá hoàn toàn các kỹ thuật τ_1 , τ_2 và τ_3 đã được HS thường xuyên sử dụng để giải quyết kiểu nhiệm vụ T_1 .

Như vậy, kỹ thuật mà HS bắt buộc phải sử dụng, được thể chế mong đợi là τ_4 . Đây là một sự tiến triển quan trọng trong kỹ thuật giải phương trình dạng nguyên thủy.

Kỹ thuật τ_4 hiệu quả hơn các kỹ thuật τ_1 , τ_2 và τ_3 , cho phép giải quyết được các bài toán trong phạm vi số lớn bất kỳ.

Về công nghệ

Công nghệ được phát biểu tường minh, giải thích rõ ràng cho kỹ thuật τ_4 . Qua đó, HS được xác nhận về tính duy nhất của giá trị x tìm được (mặc dù chương trình không đề cập một cách tường minh về tính duy nhất của giá trị x).

**Bảng 1.3. Sự tiến triển của tổ chức toán học
từ nguyên thủy dạng 1 đến nguyên thủy dạng 2**

Về kiểu nhiệm vụ	
T₁: Điền số vào chỗ trống	T₂: Tìm x
Cần tìm số điền vào chỗ trống để được phép toán đúng, chỗ trống ở đây chỉ thể hiện vị trí của số chưa biết. Chỗ trống có thể ở bên trái hoặc bên phải của dấu “=”, mỗi bên dấu “=” có thể là một số hoặc một phép toán. Các số tham gia hầu như chỉ trong phạm vi 10. Có nhiều bài tập sử dụng kỹ thuật τ_3, ví dụ: [SGK tr.173] $\begin{array}{ll} 4 + \dots = 4 & \dots \times 4 = 0 \\ 4 - \dots = 4 & \dots : 4 = 0 \end{array}$	Cần tìm giá trị x để được phép toán đúng, chữ x ở đây vừa thể hiện vị trí, vừa thể hiện bản thân số chưa biết. Bên trái dấu “=” luôn là phép toán giữa chữ x và một số, bên phải dấu “=” là một số đã biết. Các số hạng tham gia mở rộng ra phạm vi 100. Không có các bài tập sử dụng kỹ thuật τ_3.
Về kỹ thuật	
τ_1, τ_2 và τ_3	τ_4
Chủ yếu là dò bảng phép toán trong phạm vi 10. Chỉ viết kết quả, không cần chú thích gì thêm. Phạm vi hợp thức tương đối hẹp. Kỹ thuật giải không được phát biểu tường minh, sau khi tìm ra số cần điền thì ngầm ẩn thừa nhận đó là kết quả duy nhất.	Thực hiện các quy tắc tìm thành phần chưa biết trong phép toán. Trình bày chặt chẽ theo đúng quy tắc định sẵn (trình bày trên 3 hàng với 3 dấu = thẳng cột). Phạm vi hợp thức rộng hơn. Kỹ thuật giải được phát biểu tường minh, trong đó giải thích tính duy nhất của giá trị tìm được (mặc dù vẫn chưa được phát biểu tường minh về

tính duy nhất của giá trị x). Luôn tìm được giá trị duy nhất trong phạm vi số đang được học.	
Về công nghệ	
θ_1, θ_2 và θ_3	θ_4
Bảng phép toán, được đưa ra ngầm ẩn.	Quy tắc tìm thành phần chưa biết của phép toán, được phát biểu tường minh.

1.3.3.b. Kiểu nhiệm vụ “sơ đồ phép tính” – một biến thể của “tìm x”

[SGK, tr.56]

Số ?

$$\square \xrightarrow{-2} 5$$

$$\square \xrightarrow{-4} 6$$

$$\square \xrightarrow{-5} 0$$

Dạng bài toán này đã có ở lớp 1 và một số bài toán đầu lớp 2, tuy nhiên ở lớp 1, “số cần tìm” là kết quả của một phép toán cụ thể. Khác với trường hợp này: “số chưa biết” là một thành phần của phép toán.

[SGV, tr.111]

Khi chữa bài nên cho HS giải thích cách làm. HS có thể nêu các cách làm khác nhau nhưng ra kết quả đúng đều nên khuyến khích. Tuy nhiên nên hướng cho HS nhận ra số cần tìm ở ô trống là số bị trừ, muốn tìm số bị trừ ta lấy hiệu cộng với số trừ.

Nhận xét

Các số xuất hiện trong bài toán đều trong phạm vi 10, do đó có thể chế “chấp nhận” cho HS giải bằng nhiều kỹ thuật, như $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots$. Tuy nhiên, thể chế mong đợi giải bằng kỹ thuật “muốn tìm số bị trừ ta lấy hiệu cộng với số trừ”.

Kiểu nhiệm vụ này không yêu cầu HS phải trình bày “thẳng cột” các dấu = và rất ít xuất hiện trong SGK.

1.3.3.c. Một số bài tập điền số vào ô trống

Kiểu nhiệm vụ này HS đã quen thuộc ở lớp 1. Tuy nhiên, xét về phạm vi các số hạng tham gia thì có một bước chuyển quan trọng về kỹ thuật giải ở lớp 2 so với lớp 1:

[SGK, tr.82]

$$72 + \square = 72$$

$$85 - \square = 85$$

[SGV, tr.143]

“Số nào cộng với 0 cũng bằng số đó, hoặc nếu phép cộng có tổng bằng một số hạng thì số hạng còn lại phải bằng 0”.

[SGK, tr.90]

$$75 + 18 = 18 + \square$$

$$37 + 26 = \square + 37$$

$$44 + \square = 36 + 44$$

$$\square + 9 = 9 + 65$$

Để giải quyết kiểu nhiệm vụ này, cần phải bổ sung trường hợp τ_3 như sau:

Sử dụng các tính chất của phép toán để xác định giá trị cần tìm:

- Nếu trong phép toán cộng có số hạng bằng 0 thì số hạng còn lại bằng tổng.
- Trong phép toán cộng, nếu vế chứa số phải tìm có dạng tổng của hai số hạng, trong đó có một số hạng bằng một số hạng ở vế còn lại thì số cần tìm bằng với số hạng còn lại ở vế đó.

Lý do mà chúng tôi mở rộng kỹ thuật τ_3 mà không đưa ra kỹ thuật mới vì nội dung mới của kỹ thuật này hoàn toàn đã có trong tham chiếu.

Với nhiệm vụ này, thể chế không yêu cầu HS phải giải bằng các quy tắc đã học như khi tìm x, hoặc không yêu cầu HS dùng bảng cộng, mà mong đợi HS dùng tính chất của số 0 và tính chất giao hoán của phép cộng (được thể hiện ngầm ẩn) để đưa ra đáp số.

Nhận xét

Các dạng bài tập điền số vào ô trống chủ yếu sử dụng các tính chất của phép toán để trả lời (các phép toán với số 0, tính giao hoán của phép cộng), mà không sử dụng các kỹ thuật tìm thành phần chưa biết của phép toán.

Không có bài tập tìm x nào được giải bằng kỹ thuật τ_3 nêu trên.

Kỹ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ “điền số vào chỗ trống” giữa lớp 1 và lớp 2 có sự khác biệt rõ rệt:

- Lớp 1: thường xuyên sử dụng kỹ thuật τ_2 , hiếm khi sử dụng kỹ thuật τ_3 .
- Lớp 2: thường xuyên sử dụng kỹ thuật τ_3 , hiếm khi sử dụng kỹ thuật τ_2 .

1.3.3.d. Điền số vào chỗ trống trong sơ đồ phép tính

[SGK, tr.98]

Viết số thích hợp vào chỗ chấm (theo mẫu)

$$\square \xrightarrow{\times 4} 12$$

$$\square \xrightarrow{\times \dots} 6$$

$$\square \xrightarrow{\times \dots} 30$$

$$\square \xrightarrow{\times \dots} 3$$

$$\square \xrightarrow{\times \dots} 24$$

$$\square \xrightarrow{\times \dots} 18$$

[SGV, tr.162]

GV hướng dẫn HS dùng bảng nhân 3 để tìm thừa số thứ hai thích hợp trong mỗi phép nhân.

Đây là kiểu nhiệm vụ kết hợp giữa “điền số vào chỗ trống” và “sơ đồ phép tính”. Kỹ thuật được thể chế mong đợi là τ_2 .

1.3.3.e. Tìm y

[SGK, tr.116]

Tìm y

a) $y \times 2 = 8$

b) $y \times 3 = 15$

c) $2 \times y = 30$

Sách giáo khoa và sách giáo viên không có một chú ý nào đặc biệt, chúng tôi hiểu rằng kỹ thuật được mong đợi là kỹ thuật τ_4 , hoàn toàn giống bài toán tìm x .

Nhận xét về tiếp cận nguyên thủy dạng 2 ở lớp 2

Số cần tìm hầu như luôn ký hiệu bằng chữ x, rất hiếm khi là chữ y và ngoài ra không có chữ nào khác.

Bài toán tìm x được thể chế phát biểu là “tìm một thành phần chưa biết của phép tính”.

Các bài toán tìm x rất hiếm có một phép toán hay hoạt động “thử lại” (thay số tìm được vào x để kiểm chứng đẳng thức đúng xảy ra), mặc dù đây chính là hoạt động quan trọng giúp mang lại nghĩa đúng cho giá trị x tìm được. Thế nhưng, việc thử lại là rất mờ nhạt (chỉ được SGK đề cập một lần duy nhất ở 1 bài tập duy nhất), các bài tập hầu như chưa có sự chú ý thỏa đáng về việc thử lại.

1.3.4 Chương trình toán 3

Ở lớp 3 hầu như không có những tiến triển đáng kể về tiếp cận giải phương trình và các kỹ thuật giải. Chỉ có một lưu ý là các phép toán được mở rộng đến phạm vi hàng ngàn.

1.3.5 Chương trình toán 4

[SGK, tr.43]

Viết số hoặc chữ thích hợp vào chỗ chấm:

$$48 + 12 = 12 + \dots \quad m + n = n + \dots$$

$$65 + 297 = \dots + 65 \quad 84 + 0 = \dots + 84$$

$$\dots + 89 = 89 + 177 \quad a + 0 = \dots + a = \dots$$

[SGK, tr.45]

Viết số hoặc chữ thích hợp vào chỗ chấm:

$$a + 0 = \dots + a = \dots$$

$$5 + a = \dots + 5$$

$$(a + 28) + 2 = a + (28 + \dots) = a + \dots$$

[SGK, tr.58]

$$4 \times 6 = 6 \times \square$$

$$207 \times 7 = \square \times 207$$

...

$$a \times \square = \square \times a = a$$

[SGV tr.83-84]

Bước đầu sử dụng tính chất giao hoán của phép cộng trong một số trường hợp đơn giản. Dựa vào tính chất giao hoán của phép cộng để viết số hoặc chữ thích hợp vào chỗ chấm

$$m + n = n + m$$

$$84 + 0 = 0 + 84$$

Chẳng hạn: $a + 0 = 0 + a = a$

Nhận xét

Giá trị của ẩn có thể là một chữ.

Để tìm số điền vào chỗ chấm, HS không phải tuân theo các quy tắc đã thực hiện trước đó (cách tìm thành phần chưa biết trong phép toán, viết thành 3 hàng và đặt dấu = thẳng cột ...) mà chỉ sử dụng tính chất giao hoán, kết hợp của phép toán hoặc tính chất của số 0 (phần tử trung hoà của phép toán) để tìm số chưa biết.

Đây là một bước chuyển lớn trong tiếp cận phương trình nguyên thủy, tuy nhiên kiểu nhiệm vụ này hầu như không được sử dụng nhiều, chỉ xuất hiện như những kiểu nhiệm vụ nhằm giúp HS củng cố các đơn vị tri thức khác như tính chất của số 0, tính giao hoán của phép cộng ...

[SGK, tr.112]

Viết số thích hợp vào ô trống

$$\frac{2}{3} = \frac{\square}{6};$$

$$\frac{18}{6} = \frac{3}{\square}$$

$$\frac{56}{32} = \frac{\square}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$$

$$\frac{50}{75} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{3}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{\square}{10} = \frac{9}{\square} = \frac{\square}{20}$$

[SGV, tr.192]

Chẳng hạn, phần a) có thể viết vào vở như sau:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\cdot 5} & \xrightarrow{\cdot 5} & \\ \frac{50}{75} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \end{array}$$

Nếu HS tự nhầm được thì không cần viết dấu mũi tên như trên.

Nhận xét

HS không thể sử dụng các quy tắc đã biết về tìm số như dùng bảng cộng, trừ, nhân, chia, tìm số hạng chưa biết của phép toán ... mà phải sử dụng tính chất bằng nhau của phân số để thực hiện nhiệm vụ này, bởi vì ẩn số không phải là thành phần chưa biết của phép toán, mà là thành phần chưa biết của một phân số.

Sự giống nhau và khác nhau về kỹ thuật giữa “Tìm x” và “Điền số thích hợp vào chỗ trống”:

Giống nhau: Cần phải tìm cho x và chỗ trống những số thích hợp để được phép toán đúng.

Khác nhau:

- Với kiểu nhiệm vụ “Tìm x”: chỉ xuất hiện trong các bài tập tìm một thành phần chưa biết của phép toán, khi đó HS bắt buộc phải dùng các quy tắc tìm thành phần chưa biết của phép toán với quy định bắt buộc phải trình bày bài giải trên 3 dòng với dấu = thẳng cột.
- Với kiểu nhiệm vụ “điền số thích hợp vào chỗ trống”: HS chỉ sử dụng các tính chất của phép toán (tính chất giao hoán của phép nhân và phép cộng), hoặc các tính chất cộng, nhân với số 0, số 1, mà không dùng các quy tắc tìm thành phần chưa biết của phép toán (mặc dù rõ ràng trong nhiều trường hợp, chỗ trống cần điền số chính là một thành phần chưa biết của phép toán).

Như vậy, có sự “ngắt quãng”, phân biệt về kỹ thuật giải giữa hai dạng bài tập này (mặc dù chúng có cùng mục đích là tìm số để được phép toán đúng):

Với mỗi yêu cầu cụ thể, thể chế đưa ra một dạng bài tập khác nhau. Cụ thể: với yêu cầu tìm số hạng chưa biết, tương ứng là bài tập “tìm x”, còn với yêu cầu củng cố các tính chất của phép toán thì đưa ra bài tập “điền số vào chỗ trống”. Mặc

dù hai dạng bài tập này đều có thể được hoán đổi cho nhau để thực hiện chức năng của bài tập kia.

Hơn nữa, không có dạng nào được yêu cầu thử lại, tức là thay số vào để kiểm chứng đẳng thức đúng. Chỉ có 1 trường hợp duy nhất SGK gợi ý GV “nên” cho HS thử lại kết quả khi tìm x ở 1 bài tập duy nhất, nhưng sau đó không hề nhắc lại việc này ở các bài tập tiếp theo.

Điều này có thể làm cho “nghĩa” của phép giải phương trình bị mất đi. HS chỉ vận dụng các quy tắc đã học để “tìm số chưa biết” một cách máy móc mà có thể không hiểu việc làm đó có ý nghĩa gì.

Với dạng bài tập “tìm x ”, SGK cho ẩn thường luôn là chữ “ x ”, hiếm khi là chữ “ y ”, và không hề xuất hiện chữ khác, mặc dù HS đã được học biểu thức chứa chữ, có thể là chữ bất kỳ: $x, y, m, n, a, b, c \dots$

1.3.6 Chương trình toán 5

[SGK, tr.159]

Không thực hiện phép tính, nêu dự đoán kết quả tìm x :

$$x + 9,68 = 9,68 \qquad \frac{2}{5} + x = \frac{4}{10}.$$

[SGV, tr.210]

$x = 0$ vì $0 + 9,68 = 9,68$ (Dự đoán $x = 0$ vì 0 cộng với số nào cũng bằng số chính số đó). HS khác có thể giải thích $x = 0$ vì $x + 9,68 = 9,68$ thì $x = 9,68 - 9,68 = 0$. Cả hai cách đều đúng nhưng cách dự đoán bằng sử dụng tính chất của phép cộng với 0 nhanh gọn hơn.

Nhận xét

Hoạt động tìm x nhưng không thực hiện phép tính ít nhiều có thể làm cho ý nghĩa của việc tìm x được thể hiện rõ, đó là tìm số x thỏa mãn đẳng thức ban đầu. Tuy nhiên chỉ xuất hiện duy nhất 2 bài tập dạng này trong chương trình toán 5 nói riêng và chương trình toán tiểu học nói chung, qua đó có thể thấy các bài tập tìm x có thể cho phép đưa đến nghĩa của việc giải x để được đẳng thức đúng vẫn chưa được quan tâm thỏa đáng.

Nhận xét về tiếp cận phương trình ở bậc tiểu học

Qua các phân tích mối quan hệ thể chế với tổ chức toán học giải phương trình ở bậc tiểu học, chúng tôi nhận thấy có các đặc trưng trong bảng 1.4. sau:

Bảng 1.4. Đặc trưng của các tổ chức toán học giải phương trình ở bậc tiểu học

Kiểu nhiệm vụ	Kỹ thuật	Công nghệ
T ₁ : điền số vào chỗ trống.	Dò bảng phép toán hoặc xét dấu hiệu hai vế để giải.	Các kiến thức liên quan đến phép tính.
T ₂ : tìm x.	Tìm thành phần chưa biết trong phép toán.	Các quy tắc tìm thành phần chưa biết trong phép tính.

Từ đó có thể nhận thấy, các phương trình dạng nguyên thủy được tiếp cận ở tiểu học có vai trò

- củng cố các kiến thức liên quan đến phép tính (các kỹ thuật thực hiện phép tính, phép cộng, nhân với số 0, tính giao hoán của phép cộng, nhân, tính chất trừ hoặc chia hai số bằng nhau...).
- củng cố các quy tắc tìm thành phần chưa biết của phép toán (quy tắc tìm số hạng chưa biết trong phép toán cộng, tìm số bị trừ, số trừ chưa biết trong phép trừ, tìm thừa số chưa biết trong phép nhân, tìm số bị chia và phép chia chưa biết trong phép chia).
- củng cố các tính chất của phân số (cùng nhân hoặc chia cả tử và mẫu của một phân số với cùng một số khác 0 thì phân số không đổi).

Từ các vai trò trên của phương trình dạng nguyên thủy, đồng thời, các phép toán chứa chỗ trống hoặc chữ x đều khép kín trong tập hợp số mà HS đang được tiếp cận. Có thể nhận thấy: tất cả các bài toán điền số vào ô trống hoặc tìm x đều có thể tìm được duy nhất một số để tạo thành phép tính đúng. Chúng tôi đặt ra câu hỏi: *HS sẽ ứng xử như thế nào khi số cần điền vào chỗ trống hoặc số x phải tìm không thuộc phạm vi tập hợp số mà họ đang nghiên cứu ?* Nói cách khác, *không thể nào tìm được số điền vào chỗ trống hoặc giá trị x thỏa mãn đẳng thức đã*

cho? Ở đây, có thể xuất hiện một ràng buộc ngầm ẩn: luôn tìm được duy nhất một giá trị điền được vào chỗ trống hoặc luôn tìm được giá trị duy nhất của x . Từ đó, chúng tôi dự đoán tồn tại các quy tắc hợp đồng (xung quanh kiểu nhiệm vụ điền số vào chỗ trống và tìm x ở bậc tiểu học)

R1: *Với kiểu nhiệm vụ điền số vào chỗ trống và tìm x , học sinh không có trách nhiệm kiểm tra sự tồn tại và tính duy nhất của số tìm được.*

Đồng thời, hợp đồng cũng phân chia nhiệm vụ cho giáo viên

RP1: *Giáo viên có trách nhiệm cho các bài toán điền số vào chỗ trống và tìm x sao cho giá trị tìm được là tồn tại và duy nhất.*

1.3.7 Chương trình toán 6

SGK tr.17

Tìm số tự nhiên x , biết:

a) $(x - 34).15 = 0$

b) $18.(x - 16) = 18.$

Nhận xét

Về kiểu nhiệm vụ

Khác với các nhiệm vụ HS đã từng gặp là vế trái chỉ xuất hiện duy nhất một phép toán. Ở đây, vế trái xuất hiện hai phép toán lần lượt tác động lên x , làm cho x không còn là “thành phần chưa biết” của phép toán mà trở thành một “số chưa biết”, còn thành phần chưa biết lúc này là một biểu thức chứa x (trong trường hợp ở câu a, thì thừa số chưa biết là biểu thức $(x - 34)$). Đây là một bước chuyển quan trọng về nghĩa của ký tự ẩn trong phương trình, từ vai trò là một “thành phần chưa biết trong một phép toán” thành “số chưa biết” trong một dãy tính.

Về kỹ thuật

Các kỹ thuật có thể sử dụng để giải quyết nhiệm vụ:

- τ_1 : thử chọn.
- τ_3 : xét dấu hiệu hai vế. Cụ thể, sử dụng tính chất nếu $ab = 0$ thì $a = 0$ hoặc $b = 0$.
- τ_4 : tìm thành phần chưa biết của phép toán.

- τ_5 : biến đổi đồng nhất.
- τ_6 : xây dựng sơ đồ ngược.
- τ_9 : máy tính cầm tay.

SGV không có đề cập gì thêm về việc giải hai bài toán này, tuy nhiên, theo chúng tôi thì thể chế mong muốn HS giải bài toán này theo phương pháp tìm thừa số chưa biết như sau:

$$\begin{aligned}(x - 34).15 &= 0 \\ x - 34 &= 0 : 15 \\ x - 34 &= 0 \\ x &= 0 + 34 \\ x &= 34\end{aligned}$$

Kỹ thuật ở đây cũng đã có một bước chuyển quan trọng, HS cần phải thực hiện nhiều lần tìm thành phần chưa biết liên tiếp nhau, và thành phần chưa biết trong bài toán liên tục bị thay đổi. Từ đó làm cho các quy định chặt chẽ về trình bày một bài toán “tìm x” mà HS được tiếp cận ở lớp dưới bị phá vỡ, tạo điều kiện chuẩn bị tốt cho các kỹ thuật tìm x mới được xuất hiện (cụ thể là quy tắc biến đổi đồng nhất, mặc dù đang dần được xuất hiện dưới dạng ngầm ẩn).

Về công nghệ

Công nghệ giải thích cho kỹ thuật không có gì tiên tri, vẫn chỉ là các quy tắc tìm thành phần chưa biết trong phép toán quen thuộc.

[SGK, tr.21]

Với hai số tự nhiên 5 và 2, có số tự nhiên x mà $2 + x = 5$ (vì $2 + 3 = 5$).

Tuy nhiên, với hai số tự nhiên 5 và 6 không có số tự nhiên x nào để $6 + x = 5$.

Cho hai số tự nhiên a và b, nếu có số tự nhiên x sao cho $b + x = a$ thì ta có phép trừ $a - b = x$...

[...]

Với hai số tự nhiên 12 và 3, có số tự nhiên x mà $3.x = 12$ (vì $3.4 = 12$).

Tuy nhiên, với hai số tự nhiên 12 và 5 không có số tự nhiên x nào để $5x = 12$.

Cho hai số tự nhiên a và b, trong đó $b \neq 0$, nếu có số tự nhiên x sao cho $b.x = a$ thì ta nói a chia hết cho b và ta có phép chia hết $a : b = x$.

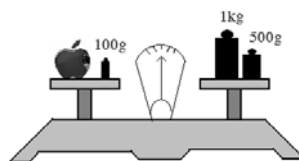
Lần đầu tiên, thể chế đề cập tường minh đến vấn đề “**tồn tại hay không tồn tại**” số x **thỏa mãn phép toán cho trước**. Đây là một bước chuyển quan trọng trong kiểu nhiệm vụ tìm x . Ở tiểu học, thể chế có ràng buộc ngầm ẩn về tính tồn tại và duy nhất của giá trị x tìm được trong tập hợp số đang xét thì bước đầu toán THCS, ràng buộc đó đã được đặt thành vấn đề tường minh. Tuy nhiên, vẫn chưa có bài tập cụ thể nào đề cập đến vấn đề tồn tại hay không giá trị x thỏa mãn một đẳng thức cho trước.

Cũng là lần đầu tiên, kỹ thuật τ_2 (dò bảng phép toán) được sử dụng để giải quyết kiểu nhiệm vụ tìm x . Tuy nhiên, vẫn chưa có bài tập cụ thể nào cho phép HS sử dụng kỹ thuật τ_2 này.

Đồng thời, cách đặt vấn đề của SGK là “tìm một số tự nhiên x chưa biết” thỏa đẳng thức cho trước, phần nào cho thấy nghĩa của việc tìm x .

[SGK, tr.23]

Tính khối lượng của quả bí đỏ ở hình 18 khi cân thăng bằng:



Hình 18

[SGV, tr.43]

Có thể trình bày bài toán dưới dạng:

Tìm số tự nhiên x , biết: $x + 100 = 1000 + 500$.

Mặc dù ở giả thiết, khối lượng quả bí không chắc là số tự nhiên nhưng SGV lại “hiển nhiên” xem khối lượng quả bí là số tự nhiên, từ đó chúng tôi đặt ra câu hỏi: phải chăng vì HS đang ôn tập số tự nhiên nên SGK mặc nhiên xem ẩn chỉ có phạm vi trong số tự nhiên. (Cũng lưu ý rằng chương trình lớp 5, HS đã được học phân số, số thập phân... và đã giải những bài toán tìm x là phân số, số thập phân...).

Ở đây, chúng tôi nhận thấy những hiệu ứng của hợp đồng R1 đang tồn tại.

[SGK, tr.87]

Tìm số nguyên x , biết

a) $7 - x = 8 - (-7)$

b) $x - 8 = (-3) - 8$

[SGV, tr.113]

Áp dụng tính chất của đẳng thức, ta có

a) $7 - x = 8 - (-7)$

$$7 - x = 8 + 7$$

$$-x = 8$$

$$x = -8$$

b) $x - 8 = (-3) - 8$

$$x = -3$$

Nếu HS làm theo cách chuyển vế thông thường cũng được.

Nhận xét

Đây là sự tiếp cận kỹ thuật tìm x mới một cách tường minh:

τ_5 : “Biến đổi đồng nhất”

Sử dụng các tính chất của đẳng thức, cùng cộng, trừ cả hai vế với cùng một số, hoặc cùng nhân, chia hai vế với cùng một số khác 0 để rút gọn vế chứa x cho đến khi chỉ còn lại một giá trị x .

Công nghệ θ_5 : Tính chất của đẳng thức.

Từ đó, có hai kỹ thuật được thể chế mong đợi để giải quyết kiểu nhiệm vụ T_2 “tìm x ” là τ_4 và τ_5 .

[SGK, tr.87]

Tìm số nguyên x , biết rằng tổng của ba số 3; -2 và x bằng 5.

[SGV, tr.114]

Theo điều kiện : $3 + (-2) + x = 5$ hay $3 - 2 + x = 5$ nên $x = 5 - 3 + 2 = 4$.

Đây là dạng phương trình cho dưới dạng công cụ, tuy nhiên, cho đến thời điểm này, tiếp cận này chỉ ở cơ chế ngầm ẩn và còn rất hạn chế.

1.3.8 Chương trình toán 7

[SGK tập 1, tr.45]

Tìm x biết:

$$3,2.x + (-1,2).x + 2,7 = -4,9$$

$$(-5,6).x + 2,9.x - 3,86 = -9,8$$

SGV không hướng dẫn gì cụ thể về phương pháp giải, nhưng theo chúng tôi, phương pháp giải hai bài tập này là:

$$3,2.x + (-1,2).x + 2,7 = -4,9$$

$$(3,2 - 1,2).x = -4,9 - 2,7 = -7,6$$

$$2.x = -7,6$$

$$x = (-7,6) : 2 = -3,8$$

Nhận xét

Giá trị x không xuất hiện một lần duy nhất trong phép toán như trước mà xuất hiện ở nhiều vị trí khác nhau, do đó nó không còn là một thành phần chưa biết của phép toán (số hạng chưa biết, số bị trừ chưa biết, số chia chưa biết...), mà mang “bản chất số” rõ nét hơn. Từ đó, không thể sử dụng kỹ thuật τ_4 để giải quyết nhiệm vụ này, HS bắt buộc phải sử dụng kỹ thuật τ_5 .

Đây là bước chuyển quan trọng về kỹ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ T_2 (tìm x), từ bản chất “thành phần chưa biết của phép toán” sang bản chất “số chưa biết”.

Số lượng các bài tập tìm x mà x xuất hiện nhiều lần trong phép toán đang dần chiếm ưu thế, kỹ thuật τ_5 đang tỏ ra có ưu thế rõ rệt về phạm vi hợp thức và theo chúng tôi, thế chế đang quy định một cách ngầm ẩn việc sử dụng kỹ thuật τ_5 để giải quyết kiểu nhiệm vụ T_2 .

[SGK tập 2, tr.25]

Khái niệm về biểu thức đại số

Trong biểu thức đại số, các chữ có thể đại diện cho những số tùy ý nào đó. Người ta gọi những chữ như vậy là biến số (hay gọi tắt là biến).

Đây là lần đầu tiên, thuật ngữ “biến số”, “biến” được đưa ra tường minh, có tên gọi, để chỉ những chữ đại diện cho các số trong một biểu thức đại số. Như vậy,

“chữ x” từ đây được gọi là “biến x”, và có vai trò là một số nào đó trong một biểu thức đại số. Tuy nhiên, thuật ngữ “ẩn” chưa xuất hiện.

[SGK tập 2, tr.47]

Nghiệm của đa thức một biến

Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x = a$) là một nghiệm của đa thức đó.

[SGV tập 2, tr.55]

Yêu cầu:

- HS hiểu được khái niệm nghiệm của đa thức.
- Biết cách kiểm tra xem số a có phải là nghiệm của đa thức hay không (chỉ cần kiểm tra xem $P(a)$ có bằng 0 hay không?)

Đây là lần đầu tiên, thuật ngữ “nghiệm” được đưa ra, như là tên gọi, để chỉ giá trị của biến x làm cho giá trị của đa thức $P(x)$ bằng 0. Tuy nhiên, HS chưa phải tìm nghiệm, thể chế chỉ yêu cầu HS biết kiểm tra một số có phải là nghiệm của đa thức hay không.

Hơn nữa, ở đây HS biết được khái niệm “không có nghiệm” của một đa thức.

Như vậy, đến cuối chương trình toán 7, thông qua các vấn đề về đa thức, thì các khái niệm “biến”, “nghiệm” được đưa ra tường minh, có định nghĩa và tên gọi, hoạt động ở cơ chế “đối tượng” chứ không chỉ là “công cụ ngầm ẩn” như trước.

1.3.9 Chương trình toán 8

[SGK tập 1, tr.9]

Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 192.

[SGV tập 1, tr.18]

Gọi ba số chẵn liên tiếp là $2a$, $2a + 2$, $2a + 4$ với $a \in \mathbf{N}$. Ta có:

$$(2a + 2)(2a + 4) - 2a(2a + 2) = 192$$

$$a + 1 = 24$$

$$a = 23$$

Vậy ba số đó là 46, 48, 50.

Nhận xét

Đây là cách tiếp cận phương trình bằng công cụ. Lần đầu tiên sử dụng chữ a làm ẩn. Từ trước, SGK cũng đã một số lần đề cập đến chữ a được sử dụng để đại diện cho một số nào đó, nhưng chỉ dùng để biến đổi biểu thức mà không phải để “tìm”.

Khái niệm “phương trình” vẫn đang có cơ chế ngầm ẩn, thuật ngữ “phương trình” vẫn chưa được nêu ra. Các khái niệm liên quan như ẩn, nghiệm, giải phương trình ... vẫn chưa được chỉ rõ. Mặc dù HS, bằng nhiều cách khác nhau, vẫn thường xuyên được tiếp xúc với phương trình và giải chúng, thông qua các bài tập tìm x quen thuộc. Như vậy, kiểu nhiệm vụ “tìm x ” có vai trò gì cho việc tiếp cận phương trình phô bày không? Chúng tôi tiếp tục phân tích sách giáo khoa toán 8 tập 2.

[SGK tập 2, tr.5]

Vẫn là bài toán tìm x quen thuộc

Ở lớp dưới, ta đã gặp bài toán như: Tìm x biết $2x + 5 = 3(x - 1) + 2$.

Trong bài toán đó, ta gọi hệ thức $2x + 5 = 3(x - 1) + 2$ là một phương trình với ẩn số x (hay ẩn x).

Một phương trình với ẩn x có dạng $A(x) = B(x)$, trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x .

[...]

22. Khi $x = 6$, tính giá trị mỗi vế của phương trình $2x + 5 = 3(x - 1) + 2$.

Ta thấy hai vế của phương trình nhận cùng một giá trị khi $x = 6$. Ta nói rằng số 6 thỏa mãn (hay nghiệm đúng) phương trình đã cho và gọi 6 (hay $x = 6$) là một nghiệm của phương trình đó.

Nhận xét

Sách giáo khoa đưa ra lời dẫn mở đầu: “*Vẫn là bài toán tìm x quen thuộc*”. Sau đó thông qua một số ví dụ cụ thể, là một bài toán tìm x bậc nhất đã biết để dẫn tới khái niệm phương trình. Đây là cách tiếp cận phô bày như trong phần tham chiếu đã nêu.

Những khái niệm cũ đã được sử dụng:

- Bài toán tìm x ;
- Biểu thức một biến;
- Biến x ;

- Giá trị của biểu thức;
- Sự bằng nhau về giá trị của hai biểu thức khi x nhận cùng một giá trị.

Từ trích dẫn trên, có thể thấy khái niệm phương trình không được xây dựng một cách hoàn chỉnh mà chỉ được giới thiệu thông qua một ví dụ cụ thể. Từ đó, phương trình được mô tả là một sự thiết lập điều kiện bằng nhau giữa hai biểu thức của cùng một biến, và đã có tên gọi tương minh.

Khái niệm ẩn được mô tả từ biến của biểu thức, có tên gọi tương minh.

Khái niệm nghiệm lần đầu tiên được đưa ra, nhưng chưa có định nghĩa, chỉ được mô tả qua một ví dụ cụ thể.

Khái niệm hai phương trình tương đương đã được định nghĩa, ký hiệu “ $\Leftrightarrow$ ” cũng đã được sử dụng.

Qua đó, HS được tiếp cận kiểu nhiệm vụ mới:

T₃: giải phương trình

- Lời dẫn của nhiệm vụ: “giải phương trình”.
- Nhiệm vụ là giải một phương trình, trong đó ẩn có thể xuất hiện một lần hoặc nhiều lần trong phương trình, có thể ở một vế hoặc ở cả hai vế.

Vấn đề có nghiệm, vô nghiệm, vô số nghiệm được nêu tương minh.

Đây là một tiến triển quan trọng trong tiếp cận khái niệm phương trình: phương trình đã có tên gọi, các khái niệm liên quan như khái niệm ẩn, nghiệm, giải phương trình... đều đã có tên gọi, tuy chỉ dừng lại ở mô tả thông qua các ví dụ cụ thể mà chưa có định nghĩa chính thức.

Tuy thế, có bước tiến triển nào trong kỹ thuật giải phương trình không ? Nếu có thì mối liên hệ giữa các kỹ thuật mới và các kỹ thuật cũ là gì ? Chúng tôi tìm câu trả lời ở phần tiếp theo:

[SGK tập 2, tr.7]

§2. Phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải

Chỉ cần hai quy tắc tương tự như đối với đẳng thức số

Phương trình dạng $ax + b = 0$, với a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

Để giải phương trình này, ta thường dùng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân mà ta nêu sau đây:

Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

Trong một phương trình, ta có thể nhân cả hai vế với cùng một số khác 0.

Trong một phương trình, ta có thể chia cả hai vế cho cùng một số khác 0.

[...]

Cách giải phương trình bậc nhất một ẩn

Ta thừa nhận rằng, từ một phương trình, dùng quy tắc chuyển vế hay quy tắc nhân, ta luôn nhận được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

[...]

Trong thực hành, ta thường trình bày bài giải một phương trình như sau:

Giải phương trình $1 - \frac{7}{3}x = 0$

Giải.

$$1 - \frac{7}{3}x = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{3}x = -1 \Leftrightarrow x = (-1) : \left(-\frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{3}{7}\right\}$.

Tổng quát, phương trình $ax + b = 0$ (với $a \neq 0$) được giải như sau:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Vậy phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ luôn có một nghiệm duy nhất

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Nhận xét

Phân tích bài giải mẫu ở trên, chúng tôi nhận thấy SGK đặc biệt chỉ sử dụng hai quy tắc để giải phương trình là quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân. Ngoài ra, với ví dụ trên có thể sử dụng các quy tắc mà HS đã được học ở lớp trước như quy tắc trừ hai số bằng nhau, quy tắc tìm thành phần chưa biết của phép toán... để giải phương trình. Cụ thể như sau:

$$1 - \frac{7}{3}x = 0 \text{ nên } \frac{7}{3}x = 1 \text{ (hai số có hiệu bằng 0 thì bằng nhau),}$$

$$\text{hoặc } 1 - \frac{7}{3}x = 0 \text{ nên } \frac{7}{3}x = 1 - 0 = 1 \text{ (số trừ bằng số bị trừ trừ đi hiệu) v.v...}$$

Như vậy, thể chế ưu tiên đến kỹ thuật “biến đổi đồng nhất” – kỹ thuật τ_5 để giải quyết kiểu nhiệm vụ T_3 .

Đồng thời, SGK cũng phát biểu tường minh “công thức nghiệm” của phương trình bậc nhất một ẩn. Đây là công nghệ và cũng là kỹ thuật mới để giải quyết kiểu nhiệm vụ T_3 - khi nhiệm vụ là giải một phương trình bậc nhất có dạng $ax + b = 0$. Như vậy, HS tiếp tục được tiếp cận kỹ thuật mới, dùng để giải quyết nhiệm vụ giải phương trình bậc nhất có dạng $ax + b = 0$.

τ_7 : “công thức nghiệm của phương trình bậc nhất”

Nếu phương trình có dạng $ax + b = 0$, với $a \neq 0$ thì luôn có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

Công nghệ θ_7 : công thức nghiệm của phương trình bậc nhất.

Kỹ thuật này tỏ rõ ưu thế vượt trội so với các kỹ thuật trước, về phạm vi hợp thức, về sự đơn giản trong thực hành ...

Qua đó cho thấy, thể chế ưu tiên tuyệt đối kỹ thuật giải phương trình bậc nhất bằng hai quy tắc đã nêu: quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân với một số, hoặc dùng công thức nghiệm của phương trình bậc nhất. Như vậy gần như là đã “bỏ qua” các quy tắc mà HS đã học ở các lớp trước như kỹ thuật dò bảng phép toán, dùng một số tính chất của phép toán hoặc quy tắc tìm thành phần chưa biết trong phép toán.

Từ đó đặt ra câu hỏi: **sau khi học các quy tắc mới, HS có còn sử dụng các kỹ thuật cũ đã học để giải phương trình hay không ? GV sẽ ứng xử như thế nào khi HS vẫn sử dụng các quy tắc cũ để giải phương trình ?** Chúng tôi dự đoán tồn tại ràng buộc ngầm ẩn sau:

R2: Ở lớp 8, HS luôn sử dụng các kỹ thuật đại số (các quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân với một số) để tìm nghiệm của phương trình bậc nhất một ẩn mà không sử dụng các kỹ thuật số học đã được học trước đó.

Về khái niệm phương trình bậc nhất, sách giáo khoa đã viết:

[SGK tập 2, tr.7]

Phương trình dạng $ax + b = 0$, với a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

Chẳng hạn, $2x - 1 = 0$ và $3 - 5y = 0$ là những phương trình bậc nhất một ẩn.

[SGK tập 2, tr.10]

Hãy chỉ ra các phương trình bậc nhất trong các phương trình sau:

a) $1 + x = 0$ b) $x + x^2 = 0$ c) $1 - 2t = 0$

d) $3y = 0$ e) $0x - 3 = 0$

[SGK tập 2, tr.10]

§3. Phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$

Trong bài này, ta chỉ xét các phương trình mà hai vế của chúng là hai biểu thức hữu tỉ của ẩn, không chứa ẩn ở mẫu và có thể đưa được về dạng $ax + b = 0$ hay $ax = -b$.

Chúng tôi nhận thấy SGK có rất ít các hoạt động hay bài tập nhận dạng phương trình bậc nhất một ẩn. Ngoài ra, SGK và cả SGV không hề có một đề cập gì đến việc phương trình đưa được về dạng $ax + b = 0$ có phải là phương trình bậc nhất không. Hoặc các phương trình có dạng $0 = ax + b$, hay $ax + b = c$ ($a \neq 0$)... có phải là phương trình bậc nhất hay không. Khi đó, GV và HS sẽ ứng xử như thế nào khi nhận dạng những phương trình “rất gần”, hoặc có thể biến đổi về dạng $ax + b = 0$?

Chúng tôi nghĩ đến một giả thuyết:

H2: Có nhiều quan niệm khác nhau của GV và HS về khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn.

Ngoài ra, vết của cách tiếp cận phương trình trong phần tham chiếu còn được thể hiện trong thể chế dạy học ở :

[SGK, tr.24]

§6. Giải toán bằng cách lập phương trình

(Bài toán cổ)

Vừa gà vừa chó

Bó lại cho tròn

Ba mươi sáu con

Một trăm chân chẵn.

Hỏi có bao nhiêu gà, bao nhiêu chó?

[...]

Tóm tắt các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình

Bước 1. Lập phương trình:

Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.

Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.

Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Trả lời: kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Nhận xét

Đây là cách tiếp cận phương trình bằng công cụ, phương trình lúc này đóng vai trò là công cụ để giải quyết một bài toán lời, một vấn đề thực tế. Từ một vấn đề thực tế, HS đưa ra phương trình thích hợp, giải phương trình, từ đó đưa ra kết luận cho bài toán ban đầu.

Đây là một tổ chức toán học mới:

Kiểu nhiệm vụ T_4 : giải toán bằng cách lập phương trình.

Nhiệm vụ được nêu trong một bài toán có lời văn, trong đó có một số đại lượng liên kết chặt chẽ với nhau. Nhiệm vụ sẽ là tìm một hoặc nhiều đại lượng chưa biết trong đó.

Kỹ thuật τ_{10} : giải toán bằng cách lập phương trình, gồm ba bước:

Bước 1. Lập phương trình:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Trả lời: kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Công nghệ θ_{10} : quy tắc giải toán bằng cách lập phương trình.

Cách tiếp cận này giúp đưa lại nghĩa đúng cho việc giải phương trình. Tuy nhiên, xét về “thời điểm” xuất hiện thì cách tiếp cận này được thể chế cho xuất hiện sau khi các vấn đề về phương trình gần như đã được giải quyết triệt để: khái niệm phương trình, giải phương trình, nghiệm... Từ đó, theo chúng tôi, chúng sẽ đưa đến một số khó khăn của HS trong việc chuyển từ bài toán lời văn sang bài toán phương trình. HS khó nhận thấy được nghĩa đúng của hoạt động giải phương trình.

Tổng kết mối quan hệ thể chế với đối tượng phương trình bậc nhất một ẩn

Mối quan hệ thể chế với đối tượng phương trình một ẩn được thể hiện thông qua các tổ chức toán học liên quan đến đối tượng này. Như đã phân tích ở trên, HS đã được tiếp cận với các tổ chức toán học tương đối đa dạng và ở các mức độ khác nhau ở các lớp. Chúng tôi sẽ tổng kết những phân tích đạt được thông qua các bảng tổng kết và sơ đồ sau:

Bảng 1.5. Sự tiến triển của tiếp cận các kiểu nhiệm vụ liên quan đến phương trình bậc nhất một ẩn

Kiểu nhiệm vụ	Kỹ thuật được thể chế ưu tiên	Công nghệ
Lớp 1		
T_1 : Điền số vào ô trống. Ô trống có thể ở vế trái hoặc vế phải. Vế chứa ô trống chỉ có một phép toán, vế còn lại là một số cụ thể. Phạm vi các số tham gia là 10. Giá trị có thể điền vào ô trống là tồn tại và duy nhất.	τ_2 : dò bảng phép toán.	Bảng phép toán trong phạm vi 10.
Lớp 2 – Lớp 3		
T_1 : điền số vào ô trống. Các phép toán chứa ô trống đều là các phép	τ_3 : xét dấu hiệu hai vế.	Tính chất của số 0 trong

toán đặc biệt, như cộng, trừ, nhân với số 0. Vế chứa ô trống chỉ có một phép toán, vế còn lại là một số hoặc một phép toán, nhưng có liên hệ về tính chất với phép toán ở vế chứa ô trống. Các số tham gia có phạm vi 100.		phép cộng, trừ, nhân, tính giao hoán của phép cộng, nhân.
T₂: tìm x x luôn ở vế trái của phép toán, mang nghĩa là một thành phần chưa biết của phép toán. Vế trái luôn chỉ có một phép toán duy nhất, vế còn lại luôn là một số. Không xuất hiện bất cứ loại chữ nào khác. Các số trong phạm vi 100.	τ_4: tìm thành phần chưa biết.	Các quy tắc tìm thành phần chưa biết trong phép toán cộng, trừ.
Lớp 4		
T₁ : điền số vào ô trống. Giống như ở lớp 2, các phép toán trong bài toán đều là những phép toán đặc biệt, như các phép toán chứa số 0, hoặc các số tham gia trong hai vế của dấu = có tính chất giao hoán với nhau... Đối tượng điền vào chỗ trống có thể là chữ.	τ_3: xét dấu hiệu hai vế.	Tính chất của số 0 trong phép cộng, trừ, nhân, tính giao hoán của phép cộng, nhân.
T₂: tìm x Cũng giống như các bài tập ở lớp 2, tuy nhiên phạm vi các số tham gia mở rộng ra phạm vi số thập phân.	τ_4: tìm thành phần chưa biết.	Các quy tắc tìm thành phần chưa biết trong phép toán cộng, trừ, nhân, chia.

Lớp 5		
T_2: tìm x x luôn ở vế trái của phép toán, vế trái chỉ có một phép toán duy nhất. Vế phải có thể là số, nhưng cũng có thể là một phép toán khác. Xuất hiện bài toán tìm x mà phép toán có tính chất đặc biệt (có một số hạng bằng tổng).	τ_4: tìm thành phần chưa biết.	Các quy tắc tìm thành phần chưa biết trong phép toán cộng, trừ, nhân, chia.
Lớp 6		
Không còn xuất hiện kiểu nhiệm vụ T_1. T_2: tìm x x luôn xuất hiện một lần duy nhất ở vế trái của bài toán, vế trái có thể có nhiều phép toán lần lượt tác động lên x. Vế còn lại có thể là một số, có thể là một phép toán. Thành phần chưa biết của phép toán có thể là x, có thể là một biểu thức đơn giản chứa x.	τ_4: tìm thành phần chưa biết.	Các quy tắc tìm thành phần chưa biết trong phép toán cộng, trừ, nhân, chia.
Lớp 7		
T_2: tìm x x có thể xuất hiện nhiều lần trong một bài toán. Khi đó nó mang “bản chất số” đậm nét, không còn mang bản chất thành phần chưa biết của phép toán. Thuật ngữ “biến”, “nghiệm” và “không có nghiệm” đã được phát biểu tường minh.	τ_4: tìm thành phần chưa biết. τ_5: biến đổi đồng nhất.	Các quy tắc tìm thành phần chưa biết trong phép toán cộng, trừ, nhân, chia. Tính chất của đẳng thức

Lớp 8		
T_3: giải phương trình Khái niệm phương trình, ẩn, nghiệm được phát biểu tường minh. Các quy tắc biến đổi phương trình cũng được phát biểu tường minh, gồm quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân. Khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn được phát biểu tường minh. T_4: giải toán bằng cách lập phương trình. Các bài toán giải bằng cách lập phương trình đã được nêu ra có hệ thống, có phương pháp giải.	τ_5: biến đổi đồng nhất. τ_7: Áp dụng công thức nghiệm của phương trình bậc nhất. τ_{10}: giải toán bằng cách lập phương trình.	Tính chất của đẳng thức. Công thức nghiệm của phương trình bậc nhất. Các bước giải toán bằng cách lập phương trình.

Bảng 1.6. Vết của các kỹ thuật trong tham chiếu

Kỹ thuật trong tham chiếu	Kỹ thuật trong thể chế	Thời điểm tiếp cận đầu tiên
τ_1	τ_1	Lớp 1
τ_2	τ_2	Lớp 1
τ_3	τ_3	Lớp 1
τ_4	τ_4	Lớp 2
τ_5	τ_5	Lớp 6
τ_6		
τ_7	τ_7	Lớp 8
τ_8		
τ_9		

Một số kết luận

Các tổ chức toán học liên quan đến giải phương trình bậc nhất một ẩn tiến triển qua từng lớp học. Trong đó có ba thời điểm quan trọng:

Lớp 1: gặp gỡ lần đầu tiên với kiểu nhiệm vụ T_1 : điền số vào chỗ trống – có vết trong tham chiếu là phương trình nguyên thủy, dạng 1.

Lớp 2: gặp gỡ lần đầu tiên với kiểu nhiệm vụ T_2 : tìm x – có vết trong tham chiếu là phương trình nguyên thủy, dạng 2.

Lớp 8: tiếp cận lần đầu tiên với hai kiểu nhiệm vụ:

- T_3 : giải phương trình – có vết trong tham chiếu là phương trình phổ bày
- T_4 : giải toán bằng cách lập phương trình – có vết trong tham chiếu là phương trình dưới dạng công cụ.

Kỹ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ giải phương trình bậc nhất một ẩn cũng có những tiến triển hầu như liên tục qua từng giai đoạn dạy-học. Trong đó cũng có 3 thời điểm quan trọng:

Lớp 1: tiếp cận chủ yếu với kỹ thuật τ_2 : dò bảng phép toán.

Lớp 2: tiếp cận chủ yếu với kỹ thuật τ_4 : tìm thành phần chưa biết của phép toán.

Lớp 8: tiếp cận chủ yếu với ba kỹ thuật

- τ_5 : biến đổi đồng nhất (thực ra kỹ thuật này HS đã được tiếp cận lần đầu tiên ở lớp 6, tuy nhiên còn ở dạng ngầm ẩn, công nghệ giải thích chưa tường minh và chịu nhiều ảnh hưởng của kỹ thuật τ_4).
- τ_7 : dùng công thức nghiệm của phương trình bậc nhất.
- τ_{10} : giải toán bằng cách lập phương trình.

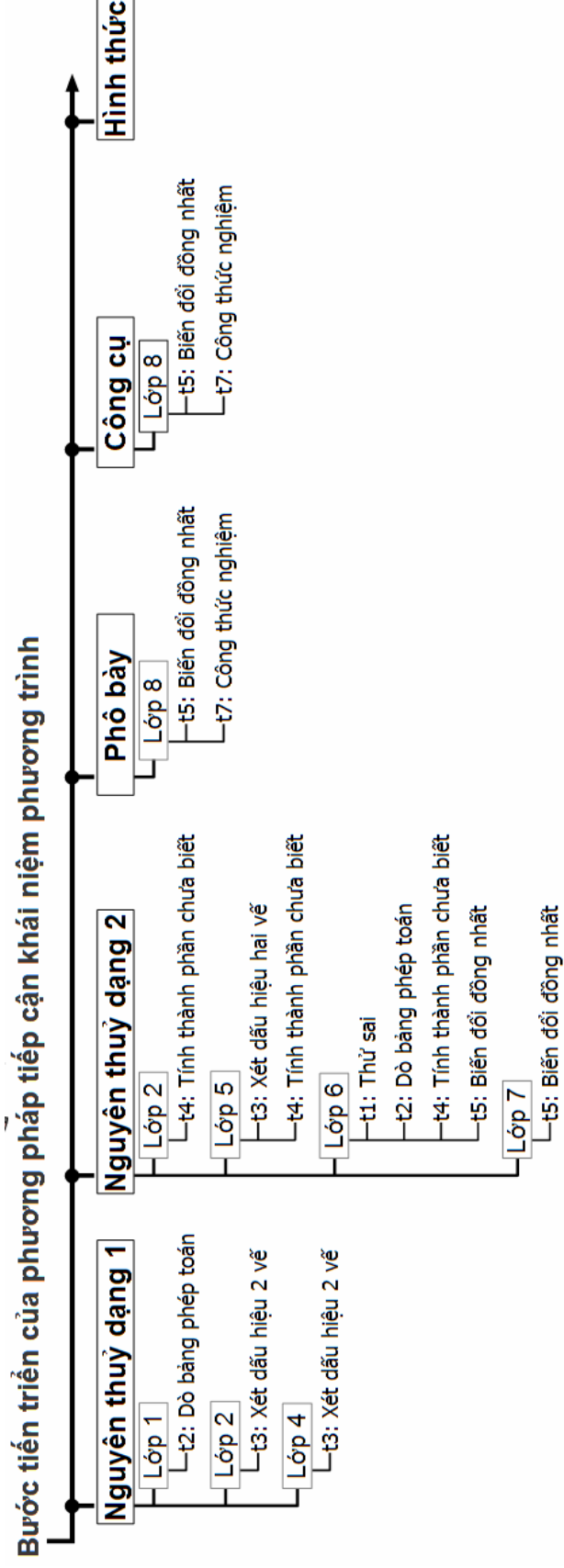
Đáng lưu ý là ba kỹ thuật trong tham chiếu là τ_6 (xây dựng sơ đồ phép toán ngược), τ_8 (kỹ thuật dùng đồ thị) và τ_9 (kỹ thuật máy tính cầm tay) hoàn toàn vắng bóng trong quá trình nghiên cứu của chúng tôi. Hiện tượng này có thể giải thích như sau:

Về sự vắng bóng của kỹ thuật τ_6 : kỹ thuật này có phạm vi hợp thức là các phương trình mà ẩn chỉ xuất hiện một lần trong phương trình. Tuy nhiên trong trường hợp này, HS hoàn toàn có thể sử dụng kỹ thuật τ_4 để giải quyết vấn đề một cách đơn giản. Vì vậy, hiện tượng kỹ thuật τ_6 vắng bóng trong thể chế là có thể giải thích được.

Về sự vắng bóng của kỹ thuật τ_8 : cơ sở vật chất và công nghệ của kỹ thuật này là đồ thị hàm số bậc nhất. Tuy nhiên, giai đoạn chọn nghiên cứu của chúng tôi là giai đoạn từ lớp 1 đến lớp 8. Trong suốt giai đoạn này, HS chưa được tiếp cận khái niệm đồ thị của hàm số bậc nhất, do đó không thể xây dựng kỹ thuật τ_8 để giải phương trình được.

Về sự vắng bóng của kỹ thuật τ_9 : kỹ thuật này đòi hỏi phải thực hiện trên máy tính cầm tay có lập trình cơ bản. Tuy nhiên, loại máy tính này chưa được đưa vào chương trình dạy học ở Việt Nam hiện nay. Vì vậy, HS không thể được tiếp cận kỹ thuật này để giải phương trình.

Sơ đồ 1.2. Sự tiến triển của các loại phương trình trong thể chế



1.4. Kết luận chương I

Nghiên cứu mối quan hệ thể chế các cách tiếp cận phương trình và kỹ thuật giải phương trình bậc nhất một ẩn cho phép chúng tôi đưa ra giả thuyết sau:

H1: Tồn tại các quy tắc hợp đồng R1, RP1 (xung quanh kiểu nhiệm vụ điền số vào chỗ trống và tìm x ở bậc tiểu học) và R2 (khi giải phương trình bậc nhất một ẩn ở lớp 8):

R1: Với kiểu nhiệm vụ điền số vào chỗ trống và tìm x, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra sự tồn tại và tính duy nhất của số tìm được.

RP1: Giáo viên có trách nhiệm cho các bài toán điền số vào chỗ trống và tìm x sao cho giá trị tìm được là tồn tại và duy nhất.

R2: Ở lớp 8, khi giải phương trình, HS luôn sử dụng các kỹ thuật đại số (các quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân với một số) để tìm nghiệm của phương trình bậc nhất một ẩn mà không sử dụng các kỹ thuật số học đã được học trước đó.

Đồng thời, cách trình bày của sách giáo khoa dẫn chúng tôi đến giả thuyết:

H1: Có nhiều quan niệm khác nhau của GV và HS về khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn.

Ngoài ra, với sự vắng bóng của kỹ thuật τ_9 : “sử dụng máy tính cầm tay” đã được chúng tôi giải thích là vì máy tính cầm tay có lập trình đơn giản chưa được đưa vào chương trình giáo dục Việt Nam. Tuy nhiên hiện nay, HS cũng đã dần được tiếp cận rộng rãi và khá quen thuộc với một số loại máy tính cầm tay có chức năng lập trình đơn giản, cụ thể là máy CASIO 570MS, 570ES, 570ES PLUS... Khi đó, có một câu hỏi được đặt ra là “***Phương trình bậc nhất một ẩn có thể đóng vai trò giúp HS tiếp cận máy tính cầm tay có lập trình cơ bản như là một kỹ thuật giải ?***”

Liệu trong thực tế dạy học, những giả thuyết mà chúng tôi nêu ra ở trên có thoả đáng không ? Việc nghiên cứu thực nghiệm để kiểm chứng tính thoả đáng của các giả thuyết nghiên cứu là công việc cần thiết mà chúng tôi phải thực hiện ở chương II.

Chương 2. THỰC NGHIỆM

2.1. Mục đích và giả thuyết thực nghiệm

Chương này có mục đích triển khai một thực nghiệm cho phép kiểm chứng tính thoả đáng của hai giả thuyết H1 và H2 đã nêu:

H1: Tồn tại các quy tắc hợp đồng R1, RP1 (xung quanh kiểu nhiệm vụ điền số vào chỗ trống và tìm x ở bậc tiểu học) và R2 (khi giải phương trình bậc nhất một ẩn ở lớp 8):

R1: Với kiểu nhiệm vụ điền số vào chỗ trống và tìm x, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra sự tồn tại và tính duy nhất của số tìm được.

RP1: Giáo viên có trách nhiệm cho các bài toán điền số vào chỗ trống và tìm x sao cho giá trị tìm được là tồn tại và duy nhất.

R2: Ở lớp 8, khi giải phương trình, HS luôn sử dụng các kỹ thuật đại số (các quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân với một số) để tìm nghiệm của phương trình bậc nhất một ẩn mà không sử dụng các kỹ thuật số học đã được học trước đó.

H2: Có nhiều quan niệm khác nhau của GV và HS về khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn.

2.2. Hình thức và tổ chức thực nghiệm

Để kiểm chứng các giả thuyết trên, chúng tôi tiến hành thực nghiệm trên hai đối tượng: giáo viên và học sinh.

Về phía giáo viên: Chúng tôi sẽ phát phiếu điều tra để tìm hiểu ý kiến của giáo viên ở lớp 4 và lớp 8, 9

Về phía học sinh: Học sinh sẽ làm việc cá nhân. Việc phân tích bài làm của học sinh cùng với những cách sử dụng tri thức của học sinh sẽ giúp chúng tôi thấy được hiệu ứng của hợp đồng nói trên.

2.3. Thực nghiệm với giáo viên lớp 4

2.3.1 Mục đích thực nghiệm

Mục đích của thực nghiệm đối với giáo viên lớp 4 là tìm hiểu quan điểm của giáo viên toán về việc đưa vào phương trình dạng nguyên thủy có vai trò gì? Cũng cố kiến thức liên quan đến phép tính, các quy tắc, tính chất phân số... qua đó kiểm chứng hiệu ứng của hợp đồng RP1: Giáo viên có trách nhiệm cho các bài toán điền số vào chỗ trống và tìm x sao cho giá trị tìm được là tồn tại và duy nhất.

2.3.2 Giới thiệu bộ câu hỏi thực nghiệm

Bộ câu hỏi điều tra gồm 3 câu như sau:

Câu hỏi 1. Theo thầy cô, mục đích và ý nghĩa của dạy học các bài tập dạng “Điền số vào chỗ trống” và dạng “Tìm x” là gì ?

Thông qua mục đích và ý nghĩa của dạy học 2 dạng bài tập nêu trên, chúng tôi muốn đạt 2 mục đích:

- Giới thiệu, nêu vấn đề thực nghiệm cho giáo viên dạy lớp 4, qua đó giúp các câu hỏi sau phát huy được tác dụng rõ nét hơn.
- Hơn nữa, thông qua câu hỏi, chúng tôi muốn làm rõ phần nào ảnh hưởng của quy tắc hợp đồng RP1. Chúng tôi dự đoán hầu hết GV sẽ trả lời: nhằm kiểm tra tính chất của các phép toán, mối quan hệ giữa các thành phần trong phép toán... và khi đó, tính duy nhất và đặc biệt là sự tồn tại của đáp số là quan trọng.

Câu hỏi 2. Thầy cô hãy đề nghị 2 bài toán dạng “Điền số vào ô trống” và 2 bài toán dạng “Tìm x” và nêu lời giải mà Thầy cô mong đợi từ học sinh của mình.

Với câu hỏi này, chúng tôi muốn quan sát các bài tập mà GV đề nghị để kiểm chứng hiệu ứng của hợp đồng RP1 đã nêu. Chúng tôi dự đoán GV sẽ cho các bài tập “điền số vào ô trống” với nội dung kiểm tra các tính chất của phép toán và cho

các bài tập “tìm x” là tìm một thành phần chưa biết của phép toán. Hơn nữa, chúng tôi dự đoán lời giải mong đợi là lời giải mà đáp số là tồn tại và duy nhất. Sẽ không có bài tập đề nghị nào mà lời giải là “không thể tìm được”, hoặc “có nhiều số thoả mãn yêu cầu” ... Đồng thời, HS sẽ không phải kiểm tra tính duy nhất của lời giải.

Câu hỏi 3. Thầy cô có cho HS những bài tập kiểu như sau không ? Xin Thầy cô vui lòng cho biết lý do.

Kiểu bài toán	Mức độ			Giải thích lý do
	Thường xuyên	Ít khi	Không bao giờ	
Điền số vào ô trống: $\square \times 0 = 0.$				
Điền số vào ô trống: $0 \times \square = 10.$				
Tìm x $5 + x = 3.$				

Câu a) là một bài tập “điền số vào ô trống” mà câu trả lời là có thể điền số bất kỳ.

Câu b) là một bài tập “điền số vào ô trống” mà câu trả lời là không thể điền bất cứ số nào vào được.

Câu c) là một bài tập “tìm x” với hình thức quen thuộc nhưng câu trả lời vẫn là không thể có giá trị x nào thoả mãn phép tính.

Cả ba bài toán đều được đặt trong bối cảnh phá vỡ hợp đồng RP1. Chúng tôi dự đoán là GV sẽ trả lời “rất ít khi” hoặc “không bao giờ” cho các bài tập như trên. Với lý do có thể là “vì chương trình toán tiểu học không có bài tập dạng này”, “các dạng bài tập này là quá phức tạp”, hoặc “không cần thiết cho HS” ...

Qua ba câu hỏi thực nghiệm trên, nếu GV trả lời đúng như dự đoán ban đầu của chúng tôi thì có thể kiểm chứng được hiệu ứng của hợp đồng RP1.

2.3.3 Phân tích kết quả thực nghiệm

Chúng tôi đã phát phiếu thực nghiệm cho 7 giáo viên dạy lớp 4 ở trường tiểu học Tam Hoà (Biên Hoà – Đồng Nai). Kết quả thu được như sau:

Câu hỏi 1

Các GV tham gia thực nghiệm trả lời như sau:

- Giúp HS có khả năng tư duy nhanh, áp dụng được các quy tắc đã học ở các lớp dưới để làm toán được tốt hơn.
- Hiểu sâu kiến thức các dạng toán đã học, phát triển trí thông minh. Nắm vững các tên gọi trong phép tính. Biết tìm thành phần chưa biết trong phép tính.
- Điền số vào ô trống: kiểm tra, củng cố kiến thức đã học ở HS. Tìm x: kiểm tra xem HS có nhận diện đúng thành phần chưa biết đóng vai trò gì trong phép tính chưa, nếu HS nhận diện đúng thì áp dụng các quy tắc làm bài mới có kết quả đúng. Nếu nhận diện sai thì bài làm sẽ sai, GV cần giảng lại, hệ thống lại kiến thức cho HS.
- Điền số là kiểm tra và củng cố kiến thức cho HS. Tìm x mục đích là kiểm tra sự nhận diện thành phần chưa biết của phép tính.
- Đây là dạng tìm thành phần chưa biết trong các phép tính cộng, trừ, nhân, chia. Nó là dạng toán điển hình làm tiền đề cho các lớp trên.
- Điền số là kiểm tra và củng cố kiến thức của HS. Tìm x mục đích là tìm thành phần chưa biết của phép tính.
- Các bài tập dạng điền số vào chỗ trống và tìm x chính là tìm thành phần chưa biết trong phép tính cộng, trừ, nhân, chia.

Đúng như dự đoán ban đầu của chúng tôi, hầu hết các ý kiến đều xoay quanh quan điểm: “Mục đích của hai dạng bài tập này là kiểm tra kiến thức của học sinh về tính chất của phép toán” và “vận dụng tốt các quy tắc tìm thành phần chưa biết trong phép toán” ... Do đó, hiện tượng tồn tại và duy nhất của đáp số cũng ngầm được thừa nhận.

Hơn nữa, không có ý kiến nào đề cập đến vai trò “chuẩn bị” để HS tiếp cận khái niệm phương trình và kỹ thuật giải phương trình sẽ gặp ở các lớp trên. Bởi

chính ở “nghĩa phương trình” của các bài tập điền số vào ô trống và tìm x sẽ là cơ sở cho phép xuất hiện những trường hợp “vô nghiệm” hoặc “vô số nghiệm” ở câu trả lời.

Như vậy, các mục đích và ý nghĩa của hai loại bài tập “điền số vào ô trống” và “tìm x” mà các giáo viên tham gia thực nghiệm đưa ra hầu như không cho phép (hoặc cho phép rất ít) xuất hiện những trường hợp mà kết quả “không phải là duy nhất” hoặc kết quả là “không tồn tại”.

Câu hỏi 2

Các bài tập do GV đề nghị được chúng tôi thống kê trong bảng 2.1.

Bảng 2.1. Các bài tập được giáo viên toán 4 đề nghị

Điền số vào ô trống		
Kiểu nhiệm vụ	Số lượng	Ví dụ
Đổi đơn vị đo	8	2 tấn 16 kg = 016 kg.
Bổ sung vào dãy phép toán	5	+ 46 = 90 .
Điền dấu <, =, > vào ô trống	4	3587 + 8613 12964
Điền một chữ số	1	Tìm chữ số thích hợp để được số chia hết cho 9: 31 ; 35 .
Điền số vào ô trống trong biến đổi phân số bằng nhau.	1	Điền số vào ô trống trong biến đổi phân số bằng nhau: $\frac{6}{15} = \frac{6 : \text{}}{15 : \text{}} = \frac{2}{5}$.
Tìm x		
Tìm thành phần chưa biết của phép toán	12	$x - 25 = 30$.
Tìm x thoả mãn một sự so sánh lớn hơn, nhỏ hơn	2	Tìm x là số tự nhiên và $7 < x < 14$.

Với dạng bài tập điền số vào ô trống: có 4 câu “điền dấu <, =, > vào ô trống”, không đúng như yêu cầu ban đầu của chúng tôi là “điền số vào ô trống”.

Còn lại tất cả các câu đều là điền số (hoặc chữ số) vào ô trống, và đều có đặc điểm chung: số cần điền là tồn tại và duy nhất. Tất cả các câu trả lời mong đợi đều chỉ là điền một số vào ô trống để được các đẳng thức đúng mà không cần giải thích bất cứ điều gì thêm. Đồng thời, giá trị điền vào được luôn là duy nhất.

Có một bài tập điền một chữ số:

“Tìm chữ số thích hợp để được số chia hết cho 9: $31\boxed{}; \boxed{}35$.”

Lời giải cho bài tập này là $31\boxed{5}; \boxed{1}35$. Như vậy, giá trị cần điền vào mỗi ô trống là tồn tại và duy nhất. Chúng tôi đặt ra vấn đề: tại sao GV không đưa ra câu hỏi:

“Tìm chữ số thích hợp để được số chia hết cho 2: $31\boxed{}; \boxed{}35$.” ?

Khi đó, số có thể điền vào ô trống thứ nhất là 0, 2, 4, 6, 8 (5 khả năng) và không có số nào có thể điền vào ô trống thứ hai. Câu trả lời được chúng tôi dự đoán là : ngoài mục đích kiểm tra việc vận dụng kiến thức dấu hiệu chia hết cho 9, các biến trong câu hỏi đã được GV này lựa chọn sao cho đảm bảo được sự tồn tại và duy nhất của giá trị có thể điền vào ô trống.

Với dạng bài tập tìm x: có 12 bài tìm x là một thành phần chưa biết của phép toán đơn giản, có 2 bài tìm x thỏa mãn một sự so sánh lớn hơn nhỏ hơn, tuy nhiên số lượng 2 bài là khá nhỏ.

Cả 12 bài toán tìm x, các số tham gia vào bài toán được chọn sao cho nếu học sinh nhận dạng đúng và vận dụng đúng quy tắc tìm thành phần chưa biết trong phép toán, sẽ cho kết quả là một giá trị x duy nhất.

Như vậy, theo như các bài tập và lời giải đề nghị của GV toán lớp 4, chúng tôi nhận thấy hợp đồng RP1 phát huy rõ hiệu ứng.

Câu hỏi 3

Kết quả thu được được chúng tôi tổng kết trong bảng 2.2.

Bảng 2.2. Mức độ sử dụng các bài tập đề nghị

Kiểu bài toán	Mức độ			Giải thích lý do
	Thường xuyên	Ít khi	Không bao giờ	
Điền số vào ô trống: $\square \times 0 = 0$	5	2		Để kiểm tra tính chất nhân với số 0.
Điền số vào ô trống: $0 \times \square = 10$			7	Trong chương trình toán tiểu học chưa có bài tập dạng này. HS không làm được vì không có trường hợp này. Sai quy tắc đã học nên HS sẽ không làm được.
Tìm x $5 + x = 3$		1	6	Ở tiểu học, HS chưa học đến loạt bài tập có kết quả là số âm. Số hạng bao giờ cũng nhỏ hơn tổng. Các em mới chỉ học số tự nhiên.

Gần giống như dự đoán ban đầu của chúng tôi, các bài tập “điền số vào ô trống” và “tìm x” mà kết quả là “không có số nào” được hầu hết GV không bao giờ sử dụng, chỉ có 1 GV ít khi sử dụng. Giải thích mà các GV đưa ra hầu như xoay quanh 2 ý: trong chương trình toán tiểu học không có các bài tập dạng này, và HS sẽ không biết làm các bài tập dạng này. Như vậy, một phần của hợp đồng RP1 đã được kiểm chứng: GV có trách nhiệm cho các bài tập điền số vào ô trống và tìm x mà giá trị để điền vào luôn luôn tồn tại.

Tuy nhiên, kiểu bài toán điền số vào ô trống mà có nhiều số có thể điền vào ô trống để được đẳng thức đúng được các GV cho thường xuyên. Kết quả này khác

với dự đoán ban đầu của chúng tôi. Tuy nhiên, với giải thích của tất cả các GV thường xuyên cho các bài tập kiểu $\square \times 0 = 0$ là “để kiểm tra tính chất nhân với số 0”, chúng tôi có thể nhận thấy do các GV này luôn sử dụng các bài tập điền số vào ô trống với mục đích để kiểm tra tính chất của các phép toán, mà chưa có sự quan tâm đúng mức đến “nghĩa phương trình” của các bài tập này.

Kết luận

Như vậy, qua ba câu hỏi đã được chúng tôi lựa chọn để khảo sát trên giáo viên, các kết quả thu được hầu như đúng với dự kiến ban đầu được đưa ra. Qua đó kiểm chứng được giả thuyết về hợp đồng RP1: “Giáo viên có trách nhiệm cho các bài toán điền số vào chỗ trống và tìm x sao cho giá trị tìm được là tồn tại”.

2.4. Thực nghiệm với học sinh lớp 4

2.4.1 Mục đích thực nghiệm

Mục đích của thực nghiệm đối với học sinh lớp 4 là kiểm tra ứng xử của HS trước hiệu ứng của hợp đồng R1: “Với kiểu nhiệm vụ điền số vào chỗ trống và tìm x, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra sự tồn tại và tính duy nhất của số tìm được.”

Do đó, bằng một phiếu câu hỏi gồm 2 bài toán, chúng tôi sẽ đặt học sinh trước các tình huống phá vỡ hợp đồng rồi tìm hiểu ứng xử của các em.

2.4.2 Giới thiệu bộ câu hỏi thực nghiệm và phân tích a-priori bộ câu hỏi

Bài toán 1. Tìm x
 $x + 5 = 25$.
 $x + 25 = 5$.

Biến didactic và biến tình huống

Biến tình huống V₁: dạng bài toán. Biến này có thể có các giá trị như : tìm x, tìm y, điền số vào ô trống, điền số vào chỗ chấm ... Ở đây chúng tôi chọn giá trị của biến là bài toán tìm x.

Biến tình huống V_2 : Vai trò của chữ x trong phép toán. Biến này có thể có các giá trị như: x là số hạng chưa biết của một tổng, hoặc x là số bị trừ chưa biết, số trừ chưa biết trong một hiệu, hoặc x là thừa số chưa biết trong một tích, hoặc x là số bị chia, số chia chưa biết trong một thương ... Ở đây chúng tôi chọn giá trị của biến V_2 cho cả hai câu đều là số hạng chưa biết trong một tổng. Mục đích là đơn giản hoá các phép toán trung gian, từ đó giúp cho thực nghiệm của chúng tôi ít bị nhiễu bởi các yếu tố rắc rối không cần thiết. Hơn nữa, với việc tạo cho cả hai câu có cấu trúc hoàn toàn giống nhau, chúng tôi hy vọng sẽ giúp các em sớm phát hiện ra vấn đề, từ đó bộc lộ những ứng xử rõ ràng nhất trước tình huống.

Biến didactic V_3 : các số tham gia vào phép toán. Biến này có thể nhận các giá trị: các số nhỏ, dễ tính toán hoặc các số lớn, phức tạp cho việc tính toán; các số được cho tạo điều kiện thuận lợi cho việc tính nhẩm hoặc khó khăn cho việc tính nhẩm ... Chúng tôi chọn các giá trị: các số đơn giản cho việc tính toán và học sinh dễ tính nhẩm. Mục đích của việc chọn biến như vậy là để tạo thuận lợi cho HS trong quá trình tính toán và thử lại, nhằm tránh những hiện tượng nhiễu không cần thiết. Hơn nữa, chúng tôi muốn tạo cơ hội cho HS có điều kiện thử lại tốt hơn, nhằm mang lại hiệu quả cao cho thực nghiệm.

Biến didactic V_4 : biến nghiệm. Biến này có thể nhận các giá trị là sự tồn tại của x : x tồn tại hay không tồn tại, có mấy giá trị có thể có của x ... Chúng tôi chọn giá trị: “ x tồn tại duy nhất” cho câu a) và “không tồn tại x ” cho câu b). Mục đích của chúng tôi là muốn đặt ra một tình huống theo đúng nguyên tắc của hợp đồng ở câu a) và một tình huống phá vỡ hợp đồng ở câu b) nhằm quan sát những ứng xử của HS trước cả hai tình huống đó.

Bảng 2.3. Các chiến lược có thể có và những cái quan sát được

Chiến lược	Những cái quan sát được
S_1 : Thử - sai HS sẽ thử thay từng số tự nhiên vào giá trị của x cho đến khi được phép toán đúng.	Bài giải chỉ ghi $x = 20$ cho câu a) và không ghi được gì cho câu b) mà không có giải thích gì thêm. Hoặc bài giải có thể là:

Phạm vi hợp thức: với những bài toán số nhỏ và tồn tại x để được phép toán đúng.	a) $x = 20$ vì $20 + 5 = 25$.
S_2: Tìm thành phần chưa biết bằng quy tắc : “muốn tìm số hạng chưa biết, ta lấy hiệu trừ đi số hạng đã biết”. Phạm vi hợp thức: đúng trong mọi trường hợp, mọi số tham gia trong phép toán.	a) $x + 5 = 25$ $x = 25 - 5$ $x = 20$ b) $x + 25 = 5$ $x = 5 - 25$ $x =$ hoặc $x + 25 = 5$ $x = 5 - 25$ (phép toán không thực hiện được) Hoặc $x + 25 = 5$ $x = 5 - 25$ Như vậy không có giá trị nào của x.
S_3: nhận xét và đưa ra kết quả. Trong một tổng có một số hạng chưa biết, nếu số hạng đã biết lớn hơn tổng thì kết luận không thể tìm được x.	b) $x + 25 = 5$ Nhận thấy tổng nhỏ hơn số hạng đã biết là 25 nên không có giá trị nào của x.
S_4: Thay đổi các phép toán Trong trường hợp phép toán ở chiến lược S_2 không thực hiện được, thay đổi phép toán hoặc thay đổi các số tham gia trong phép toán để phép toán thực hiện được. Phạm vi hợp thức: sai trong mọi trường hợp.	b) $x + 25 = 5$ $x = 25 - 5$ $x = 20$ hoặc $x + 25 = 5$ $x = 5 + 25$ $x = 30$

Bảng 2.4. Sự ảnh hưởng của các biến lên các chiến lược

Biến didactic	Giá trị của biến	Chiến lược được ưu tiên	Chiến lược bị khoá
V_3	Các số trong bài toán nhỏ, dễ tạo điều kiện cho tính nhẩm	S_1, S_2, S_3, S_4	
	Các số phức tạp, không tạo điều kiện thuận lợi cho tính nhẩm	S_2, S_3, S_4	S_1
V_4	x tồn tại duy nhất	S_1 và S_2	
	x không tồn tại	S_2 và đặc biệt là S_3, S_4	S_1

Bài toán 2. Điền số vào ô trống

a) $0 \times \square = 3 \times 0$

Bạn An nói : “Chỉ điền được một số vào ô trống”.

Bạn Bình nói : “Có thể điền được nhiều số vào ô trống”.

Theo em, ai nói đúng? Vì sao ?

Nếu không có ai đúng thì em hãy đưa ra một câu mà em cho là đúng nhất.

b) $58 - \square = 72$

Bạn Châu nói: “Chỉ điền được một số vào ô trống”.

Bạn Dũng nói: “Điền được hai số vào ô trống”.

Bạn Ân lại nói: “Không điền được số nào vào ô trống”.

Theo em, ai nói đúng ? Vì sao ?

Nếu không có ai đúng thì em hãy đưa ra một câu mà em cho là đúng nhất.

Biến didactic và biến tình huống

Biến tình huống V_1 : Dạng bài toán là điền số vào ô trống.

Biến tình huống V_5 : Vị trí của ô trống. Biến này có thể nhận các giá trị: bên trái của phép toán, bên phải của phép toán, ở phía trước dấu phép toán, ở phía sau dấu phép toán... Ở đây, chúng tôi chọn giá trị cho biến V_5 là ô trống ở bên trái của phép toán và phía sau các dấu phép toán. Mục đích là tạo ra các tình huống quen thuộc cho HS, để từ đó quan sát các ứng xử của HS tránh tối đa những hiện tượng nhiễu không cần thiết bởi các tình huống lạ.

Biến didactic V_6 : Kết cấu của hai vế trong phép toán.

Các giá trị có thể có của biến V_6 có thể là:

- V_{6a} : “hai vế của phép toán tạo thành một bài toán tìm một thành phần chưa biết khi đã biết tất cả các thành phần còn lại”.
- V_{6b} : “hai vế của phép toán mang lại cảm giác về việc tìm một số để thoả mãn một tính chất nào đó của phép toán”

Với bài toán trong thực nghiệm, chúng tôi đã chọn giá trị của biến V_6 là V_{6a} cho câu a) và V_{6b} cho câu b).

Cơ sở của sự lựa chọn như vậy chính bởi mục đích thực nghiệm của chúng tôi.

Ở câu a: Chúng tôi muốn xây dựng câu a) nhằm đặt HS trước tình huống cần kiểm chứng xem còn có thể tìm được số khác điền vào ô trống sau khi đã điền được một số thoả mãn đề bài không. Tiêu chí của bài toán là phải tạo điều kiện dễ dàng cho HS trong việc tìm được một số thoả mãn phép toán, tuy nhiên, đó chưa phải là số duy nhất. Vì vậy, phép toán được chúng tôi đưa ra ban đầu tạo cảm giác về tính chất giao hoán của phép nhân. Chúng tôi dự đoán HS sẽ dễ dàng tìm được một số điền vào ô trống để tạo thành tính giao hoán của phép nhân. Tuy nhiên, các em sẽ không cố gắng tìm một số khác khác điền vào ô trống mà vẫn được phép toán đúng.

Ở câu b: Mục đích của câu hỏi này là tìm hiểu ứng xử của HS khi không tìm được số điền vào ô trống để được phép toán đúng. Do đó chúng tôi chọn giá trị cho biến V_6 là V_{6a} , nhằm đưa HS vào tình huống quen thuộc, từ đó tạo sự tự tin cho các em trong việc đưa ra các quyết định của mình.

Biến tình huống V_7 : Biến này có thể nhận các giá trị:

- V_{7a} : Đưa ra câu hỏi “Em có thể điền được bao nhiêu số vào ô trống ?”

- V_{7b} : Đặt ra một tình huống trong đó nêu cụ thể các nhận định khác nhau.
- V_{7c} : Chỉ yêu cầu điền số vào ô trống mà không nêu thêm bất cứ câu hỏi hay tình huống lựa chọn nào.

Chúng tôi chọn giá trị cho biến V_7 là V_{7b} : đưa ra một số nhận định khác nhau về số giá trị có thể điền vào ô trống. Các nhận định mang tính chất “nhắc nhở” HS lưu ý hơn về số giá trị có thể điền vào ô trống. Đồng thời, tính được thua trong câu hỏi là phải quyết định xem ai đúng, ai sai. Đồng thời, chúng tôi cũng đưa thêm câu hỏi mở nếu HS có một ý kiến khác với các ý kiến mà chúng tôi đã đưa ra trong tình huống.

Bảng 2.5. Các chiến lược có thể có và những cái quan sát được

Chiến lược	Những cái quan sát được
S_5: thử - chọn Thử từng số vào ô trống cho đến khi đạt được phép toán đúng. Phạm vi hợp thức: những bài toán mà số cần điền tương đối nhỏ và dễ mò mẫm.	a) $0 \times \boxed{0} = 3 \times 0$ hoặc $0 \times \boxed{1} = 3 \times 0 \dots$ Sau đó, HS có 2 khả năng: khẳng định bạn An đúng hoặc khẳng định bạn Bình đúng.
	b) $58 - \boxed{} = 72$ HS sẽ bỏ trống câu này hoặc khẳng định bạn Én đúng (có thể không giải thích hoặc giải thích là “em đã thử các số và nhận thấy không có số nào đúng cả”)
S_6: Tính theo quy tắc tìm thành phần chưa biết.	a) $0 \times \boxed{} = 3 \times 0$ HS tính vế phải $3 \times 0 = 0$, do đó $0 \times \boxed{} = 0$. Tới đây, có thể HS điền $0 \times \boxed{0} = 0$ rồi kết luận bạn An đúng. Hoặc HS có thể trả lời $0 \times \boxed{1} = 0$ rồi kết luận bạn An đúng. Hoặc trả lời “0 nhân với số nào cũng bằng 0 nên ta có thể điền số nào vào ô trống cũng được, do đó bạn Bình đúng”.

	b) $58 - \square = 72$ HS thực hiện $58 - 72 =$ rồi không ghi gì thêm. Hoặc thực hiện phép tính $58 - 72 = 14$ Hoặc thực hiện phép tính $58 - 72 = 130 \dots$ rồi khẳng định bạn Châu đúng. Hoặc có thể khẳng định bạn Dũng đúng.
S ₇ : Quan sát phép toán và đưa ra kết quả.	a) HS quan sát $0 \times \square = 3 \times 0$, nhận thấy phép toán chính là tính chất giao hoán của phép nhân, nên thực hiện điền vào ô trống: $0 \times \boxed{3} = 3 \times 0$. Sau đó trả lời bạn Châu đúng, vì đây là tính chất giao hoán của phép nhân.
	b) HS nhận thấy trong phép toán $58 - \square = 72$, số bị trừ nhỏ hơn hiệu nên kết luận là không thể tìm được số nào thích hợp điền vào ô trống, do đó bạn Ân đúng.
S ₈ : Tính thành phần chưa biết kết hợp với đổi phép toán.	b) Dùng quy tắc tìm số trừ chưa biết, nhưng có đổi các phép tính để đạt được $72 - 58 = 14$; $58 + 72 = 130$. Khi đó, HS sẽ điền số $\boxed{14}$ hoặc $\boxed{130}$ rồi khẳng định bạn Châu hoặc bạn Ân đúng.

2.4.3 Phân tích posterpriori thực nghiệm thu được

Chúng tôi đã tiến hành thực nghiệm trên 34 HS lớp 4 ở trường tiểu học Tam Hoà (Biên Hoà – Đồng Nai) và thu được các kết quả sau:

Bài toán 1. Tìm x

a) $x + 5 = 25$

Tất cả HS tham gia thực nghiệm đều trả lời

$$x + 5 = 25$$

$$x = 25 - 5$$

$$x = 20$$

Từ đó có thể thấy, tất cả HS đều ưu tiên chiến lược S_2 : “tìm thành phần chưa biết bằng quy tắc”. Qua đó, chúng tôi nhận thấy các em nắm vững quy tắc tìm số hạng chưa biết trong một tổng (bằng cách lấy tổng trừ đi số hạng đã biết).

b) $x + 25 = 5$

30 HS đưa ra câu trả lời: $x + 25 = 5$

$$x = 25 - 5$$

$$x = 20$$

1 HS đưa ra câu trả lời: $x + 25 = 5$

$$x = 25 - 5$$

$$x = 30$$

1 HS đưa ra câu trả lời: $x + 25 = 5$

$$x = 25 : 5$$

$$x = 5$$

2 HS đưa ra câu trả lời: $x + 25 = 5$

$$x + 5 = 25$$

$$x = 25 - 5$$

$$x = 20$$

Khác với câu a), ở câu b), tất cả HS đều thực hiện chiến lược S_4 : “thay đổi phép toán”. Các em tìm mọi cách để phép toán $x = \dots$ có thể thực hiện được. Một câu hỏi được đặt ra: có hay không sự nhầm lẫn về kiến thức khi thực hiện quy tắc tìm thành phần chưa biết x mà x là một số hạng chưa biết của phép toán. Như đã thể hiện ở câu a), chúng tôi nhận thấy khả năng này rất khó xảy ra. Hơn nữa, kiểm tra lại các phiếu thực nghiệm, chúng tôi nhận thấy có sự gạch xoá ở một số phiếu như là:

$$x + 25 = 5$$

$$x = \cancel{5 - 25} 25 - 5$$

$$x = 20$$

Lời giải thích cho hiện tượng này sẽ là: ban đầu HS thực hiện đúng quy tắc tìm số hạng chưa biết trong bài toán (bằng cách lấy tổng trừ đi số hạng đã biết). Tuy nhiên, khi phép toán $5 - 25$ được đưa ra, HS không thể thực hiện được phép toán. Tiếp theo có 2 khả năng xảy ra:

- HS cho rằng kiến thức của bản thân có sự nhầm lẫn, nên thay đổi phép toán thành $25 - 5$ để phép toán được thực hiện, nhằm đưa ra giá trị của x .
- HS tự phát sinh quy tắc hành động mới: “khi phép toán không thực hiện được thì đổi chỗ các số tham gia cho nhau để phép toán thực hiện được”. Khi đó sẽ có được giá trị của x .

Cả hai khả năng như vậy đều xuất phát từ một quan niệm: **bài toán tìm x thì luôn phải tìm được x** . Do đó phải thực hiện những phép toán để có được giá trị đó.

Ở các câu trả lời khác, chúng tôi đều nhận thấy mặc dù có sự khác biệt trong sự thay đổi phép toán, nhưng đều có nguồn gốc từ ý muốn làm cho các phép toán có thể thực hiện được, nhằm có được giá trị của x .

Từ đó cho thấy, HS có quan niệm bài toán tìm x luôn luôn phải tìm được giá trị của x , bằng cách thực hiện các phép toán nào đó. Nói cách khác, một phần hiệu ứng của hợp đồng R1: “Với kiểu nhiệm vụ tìm x , học sinh không có trách nhiệm kiểm tra sự tồn tại của số tìm được” đã được kiểm chứng.

Bài toán 2. Điền số vào ô trống

a) $0 \times \square = 3 \times 0$

Tất cả các HS tham gia thực nghiệm đều trả lời $0 \times \boxed{3} = 3 \times 0$ và khẳng định bạn An nói đúng.

Như phân tích a-priori, HS đã thực hiện chiến lược S_7 : “Quan sát phép toán và đưa ra kết quả”. Các HS đều nhận thấy phép toán có dạng giao hoán của phép nhân, là một tình huống quen thuộc nên đã dễ dàng đưa ra kết quả là $\boxed{3}$. Đồng thời khẳng định ngay về tính duy nhất của số cần điền vào ô trống. Như vậy, sau khi tìm được một số để điền vào ô trống, tất cả HS đều khẳng định ngay đó là đáp số duy nhất. Qua đó cho thấy một phần của hợp đồng R1: “Với kiểu nhiệm vụ điền số vào ô

trông, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra tính duy nhất của số tìm được” đã được kiểm chứng.

$$b) 58 - \square = 72$$

- Có 6 HS không điền được số nào vào ô trống. Trong đó:
 - o Có 2 HS khẳng định bạn Ân nói đúng và giải thích thêm: vì số bị trừ nhỏ hơn hiệu (chúng tôi đặt là nhóm A).
 - o Có 3 HS chỉ khẳng định bạn Ân nói đúng mà không giải thích gì thêm (nhóm B).
 - o Có 1 HS không trả lời câu hỏi (nhóm C).
- Có 4 HS điền $58 - \boxed{130} = 72$ và đều khẳng định bạn Châu nói đúng (nhóm D).
- Có 24 HS điền $58 - \boxed{14} = 72$. Trong đó:
 - o 20 HS khẳng định bạn Châu nói đúng (nhóm E).
 - o 4 HS khẳng định bạn Dũng nói đúng (nhóm F).

Quan sát câu trả lời của 2 HS nhóm A, chúng tôi nhận thấy ngay 2 HS này dùng chiến lược S_7 .

Quan sát trả lời của 3 HS nhóm B, chúng tôi nhận thấy có 2 khả năng: đã thực hiện chiến lược S_5 hoặc thực hiện chiến lược S_7 . Tuy nhiên, ở câu a) cả 3 HS này đều đã thực hiện chiến lược S_7 nên nhiều khả năng ở câu b), nhóm này cũng thực hiện chiến lược S_7 .

1 HS nhóm C không ghi gì ở câu b) nên chúng tôi chưa thể đưa ra kết luận.

4 HS nhóm D và 24 HS thuộc nhóm E, F có thể đã thực hiện chiến lược S_6 hoặc S_8 . Tuy nhiên, khi quan sát phần nháp của HS, chúng tôi nghiêng về khả năng thực hiện chiến lược S_8 nhiều hơn. Vì các em đã thực hiện các phép toán trên nháp như sau:

$$\begin{array}{r} 72 \\ - 58 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 72 \\ + 58 \\ \hline 130 \end{array} \quad \begin{array}{r} 58 \\ + 72 \\ \hline 130 \end{array}$$

Chiến lược	Số HS	Tỉ lệ
S7	5	15,2 %
S8	28	84,8 %

Tỉ lệ lớn số HS thực hiện chiến lược S_8 cho phép chúng tôi kết luận: khi được đặt vào tình huống không có số thích hợp điền vào ô trống, HS vẫn cố gắng tìm mọi cách thực hiện các phép toán, bằng cách đổi phép toán để có được giá trị điền vào ô trống. Như vậy, có một quan niệm của HS đã được chúng tôi thực nghiệm: một bài toán có ô trống thì phải có giá trị thích hợp điền vào ô trống. Từ đó có thể kiểm chứng được phần còn lại của R1: “Với kiểu nhiệm vụ điền số vào chỗ trống, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra sự tồn tại của số tìm được.”

Kết luận phần thực nghiệm trên GV và HS lớp 4

Qua hai thực nghiệm trên GV và HS lớp 4, một phần của giả thuyết H1 đã được kiểm chứng. Cụ thể, chúng tôi đã kiểm chứng được hợp đồng R1 và hợp đồng phân chia trách nhiệm trên GV RP1:

H1: Tồn tại các quy tắc hợp đồng R1, RP1 (xung quanh dạng bài tập điền số vào chỗ trống và tìm x ở bậc tiểu học):

R1: Với kiểu nhiệm vụ điền số vào chỗ trống và tìm x, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra sự tồn tại và tính duy nhất của số tìm được.

RP1: Giáo viên có trách nhiệm cho các bài toán điền số vào chỗ trống và tìm x sao cho giá trị tìm được là tồn tại và duy nhất.

Phần còn lại của giả thuyết H1 (cụ thể là hợp đồng R2) và giả thuyết H2, chúng tôi sẽ phải kiểm chứng trên GV toán 8, toán 9 và HS lớp 9.

2.5. Thực nghiệm đối với giáo viên toán 8, toán 9

2.5.1 Mục đích thực nghiệm

Như đã nêu ở trên, mục đích của thực nghiệm trên GV toán 8 và toán 9 là nhằm kiểm chứng phần còn lại của giả thuyết, cụ thể là hợp đồng R2, và giả thuyết H2:

R2: Ở lớp 8, khi giải phương trình, HS luôn sử dụng các kỹ thuật đại số (các quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân với một số) để tìm nghiệm của phương trình bậc nhất một ẩn mà không sử dụng các kỹ thuật số học đã được học trước đó.

H2: Có nhiều quan niệm khác nhau của GV và HS về khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn.

2.5.2 Giới thiệu bộ câu hỏi thực nghiệm

Bộ câu hỏi thực nghiệm của chúng tôi gồm 3 câu hỏi:

Câu hỏi 1. Theo thầy cô, mục đích và ý nghĩa của dạy học các bài tập dạng “Điền số vào chỗ trống” và dạng “Tìm x” ở các lớp dưới và ở học kỳ I lớp 8 là gì ?

Mục đích của câu hỏi này nhằm tìm hiểu quan niệm của GV về mối liên hệ giữa giải phương trình dạng nguyên thủy (điền số vào ô trống và tìm x) và phương trình dạng phô bày (giải phương trình ở lớp 8). Từ đó cố gắng tìm ra “vết” của các phương pháp giải phương trình cũ kiểu số học với phương pháp giải phương trình mới kiểu đại số.

Theo chúng tôi, các câu trả lời sẽ xoay quanh những ý sau:

- củng cố kiến thức về các phép toán và nguyên tắc thực hiện phép toán.
- Là công cụ để mở rộng tập hợp số cho HS, từ tập số tự nhiên thành tập số nguyên.
- Là cách tiếp cận ngầm ẩn khái niệm phương trình, mà HS sẽ được tiếp cận tường minh ở học kỳ II lớp 8. Tất cả các bài toán tìm x đều là những ví dụ về phương trình ẩn x và cách giải chúng.

- Cung cấp một số phương pháp giải phương trình một cách ngầm ẩn.

Các bài toán tìm x đều là những ví dụ ngầm ẩn về phương trình ẩn x , theo sự phát triển của các lớp học, các bài tập này thường phức tạp dần về hình thức thể hiện. Tuy nhiên, khi giải chúng, tất cả đều phải quy về dạng bậc nhất $ax + b = 0$. Như vậy, những phương trình nào được xem là phương trình bậc nhất, phương trình nào không phải là phương trình bậc nhất ? Đó là mục đích để chúng tôi đưa ra câu hỏi 2 như sau:

Câu hỏi 2. Các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn, phương trình nào không phải là phương trình bậc nhất một ẩn ?

Phương trình	Đúng là phương trình bậc nhất một ẩn	Không phải là phương trình bậc nhất một ẩn	Giải thích vì sao ?
$5x - 3 = 0$			
$9 = 3x - 6$			
$2x - 5 = 7 + 2x$			
$x(x - 1) = x(x + 2)$			
$\frac{6x^2 - x}{3x^2 + 1} = 2$			
$\frac{x^2 - 2x}{x} = 5x$			

Như vậy, theo quan điểm của Thầy cô, thế nào là phương trình bậc nhất một ẩn ?

Chúng tôi muốn điều tra kiểm chứng cho giả thuyết H2 - quan niệm của GV về nhận dạng phương trình bậc nhất một ẩn.

Các phương trình được chúng tôi chọn đưa ra:

- Phương trình có dạng $ax + b = 0$.
- Phương trình có dạng $ax + b = c$ và được viết đảo thứ tự hai vế, thành $c = ax + b$.
- Phương trình mà hai vế đều có dạng $ax + b$, với hệ số của x ở hai vế là bằng nhau.
- Phương trình mà mỗi vế đều là bậc hai, nhưng nếu giản lược 2 đại lượng bậc hai ở hai vế thì phương trình đưa về dạng B.

E. Phương trình chứa ẩn ở mẫu, nhưng tập xác định của phương trình vẫn là $\mathbb{Q}$, sau khi quy đồng khử mẫu (không làm thay đổi tập xác định) thì phương trình quy về dạng $ax + b = 0$.

F. Phương trình chứa ẩn ở mẫu nhưng tập xác định là $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, việc khử mẫu sẽ đưa được về phương trình dạng $ax + b = 0$.

Như vậy, các phương trình được chúng tôi chọn đưa ra có độ phức tạp tăng dần. Tuy nhiên đều có đặc điểm chung là đều có thể quy về dạng $ax + b = 0$ sau một số phép biến đổi.

Ở câu hỏi 1, chúng tôi đã dự đoán GV sẽ xem việc tìm x như là những ví dụ để HS tiếp cận với phương pháp giải phương trình sau này. Tuy nhiên, khi khái niệm phương trình và giải phương trình được phát biểu tường minh, đồng thời các quy tắc giải phương trình bằng phương pháp đại số được đưa ra, thì GV ứng xử như thế nào trước những lời giải phương trình mà vẫn sử dụng các phương pháp số học ở các lớp trước? Chúng tôi đề nghị câu hỏi 3 như sau:

Câu hỏi 3. Xét bài toán 8a trang 10 (SGK toán 8, tập 2):

Giải phương trình $20 - 4x = 0$.

Sau đây là lời giải giả định của 4 học sinh. Xin Thầy cô chấm điểm cho từng lời giải (trên thang điểm 10) và giải thích vì sao Thầy cô cho điểm như vậy?

Lời giải	Điểm	Nhận xét
Lời giải của học sinh A : Hai số bằng nhau trừ đi nhau sẽ bằng 0, do đó $4 \times x = 20$. Dùng bảng cửu chương 4, được $x = 5$ vì $4 \times 5 = 20$.		
Lời giải của học sinh B : $20 - 4x = 0$ $4x = 20 - 0$ (số trừ = số bị trừ - hiệu) $4x = 20$ $x = 20 : 4$ (thừa số = tích : thừa số kia) $x = 5$		
Lời giải của học sinh C : Bài toán có thể xây dựng thành sơ đồ như sau: $x \xrightarrow{\times 4} \bigcirc \xrightarrow{-20} 0$ Nên ta xây dựng sơ đồ phép toán ngược: $5 \xleftarrow{:4} \bigcirc \xleftarrow{+20} 0$ Vậy $x = 5$		
Lời giải của học sinh D : $20 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow -4x = -20$ $\Leftrightarrow x = 5$ (Chia cả hai vế cho -4)		

Mục đích của câu hỏi này nhằm tìm hiểu ứng xử của GV trước một bài toán giải phương trình được giải theo phương pháp cũ (phương pháp số học) và phương pháp mới (phương pháp đại số).

Lời giải của HS A được thực hiện bằng chiến lược “xét dấu hiệu hai vế” và “dò bảng phép toán”.

Lời giải của HS B được thực hiện bằng chiến lược “tính thành phần chưa biết”.

Lời giải của HS C được thực hiện bằng chiến lược “thực hiện phép toán ngược”.

Lời giải của HS D được thực hiện bằng chiến lược “biến đổi đồng nhất”.

2.5.3 Phân tích kết quả thực nghiệm

Thực nghiệm được chúng tôi tiến hành trên 9 giáo viên lớp 8 và lớp 9 trường THCS Tam Hoà (Biên Hoà – Đồng Nai). Kết quả phân thu được như sau:

Câu hỏi 1.

Chúng tôi nhận được các câu trả lời:

- củng cố kiến thức đã học trong chương trình đã học trước; chuẩn bị cho HS nắm được các bước để giải phương trình ở chương III – Đại số 8.
- Rèn kỹ năng tính toán cho HS; củng cố các phép tính và thứ tự thực hiện phép tính; nhận biết mối liên hệ giữa các số trong phép tính; chuẩn bị hình thành các bước giải phương trình bậc nhất ở HK II của lớp 8.
- Điền số vào ô trống giúp HS nhớ lại tính chất các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa; tìm x giúp HS nắm vững các quy tắc, tính chất các phép toán $+$, $-$, $\times$, $:$, lũy thừa, từ đó khi HS học phương trình việc giải phương trình không phải là điều “xa lạ”.
- Dạng bài tập “điền số vào chỗ trống” nhằm rèn kỹ năng vận dụng các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia ... và mối liên hệ thuận, ngược giữa các phép tính. Dạng bài toán “tìm x” ở HKI lớp 8 nhằm ôn luyện các quy tắc tính nêu trên, đồng thời “âm thầm” chuẩn bị cho việc giải phương trình bậc nhất ở HKII.

- Rèn trí nhớ, rèn tư duy logic làm toán; rèn kỹ năng quan sát, nhận xét tìm ra sự liên quan giữa các nội dung cho biết, phần cho biết với nội dung cần điền trống; rèn kỹ năng tìm x , kỹ năng trình bày lời giải tìm x ; củng cố kiến thức cũ, hệ thống kiến thức cơ bản của chương trình ...
- Củng cố lại quy tắc thực hiện phép tính trong một biểu thức (cộng, trừ, nhân, chia); rèn luyện kỹ năng tính toán, biến đổi tương đương.
- Củng cố kiến thức đã học trong các phần trước; chuẩn bị cho HS biết cách giải phương trình.
- Điền số vào ô trống: rèn cho HS nhớ lại tính chất các phép tính: cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa; tìm x ở các lớp dưới và ở học kỳ I lớp 8 nhằm giúp HS nắm được các quy tắc, tính chất các phép cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa, do đó HS học về phương trình khá dễ dàng.
- Mục đích: giúp HS làm quen với một vài dạng phương trình đơn giản để chuẩn bị cho việc giải các phương trình bậc nhất, bậc hai, phương trình bậc cao... một cách dễ dàng. Ý nghĩa: rèn cho HS biết cách trình bày bài giải toán một cách logic, biết suy luận, biết tính toán trong môn toán học một cách chính xác.

Như dự đoán của chúng tôi ở phân tích a-priori, tất cả các ý kiến đều xoay quanh 2 nội dung:

- Củng cố kiến thức về các phép toán và nguyên tắc thực hiện phép toán.
- Tạo tiền đề cho phép HS tiếp cận khái niệm phương trình và giải phương trình.

Thế nhưng, tiền đề này được vận dụng và chấp nhận như thế nào khi HS đã được tiếp cận tường minh các khái niệm phương trình và kỹ thuật giải phương trình bậc nhất bằng phương pháp đại số ? Các kiến thức cũ có còn được chấp nhận hay không ? Đó là những vấn đề mà các trả lời của GV trong thực nghiệm chưa đề cập đến.

Câu hỏi 2.

Bảng 2.6. Bảng tổng hợp kết quả thu được từ câu hỏi 2

Phương trình	Đúng là PTBN	Không phải là PTBN	Giải thích vì sao ?
$5x - 3 = 0$	9		Có dạng $ax + b = 0$ ($a \neq 0$).
$9 = 3x - 6$	5	4	Nhóm khẳng định đúng là phương trình bậc nhất một ẩn: đây là một cách viết khác, có thể đưa được về dạng $ax + b = 0$ ($a \neq 0$). Nhóm khẳng định đây không phải là phương trình bậc nhất một ẩn: về phải khác 0, cần phải biến đổi mới đưa được về phương trình bậc nhất.
$2x - 5 = 7 + 2x$	1	8	GV khẳng định phương trình bậc nhất giải thích: đây là một cách viết khác của phương trình bậc nhất. Các GV khẳng định đây không phải là phương trình bậc nhất giải thích: vì phương trình đưa về $0x + b = 0$ nên không phải pt bậc nhất một ẩn.
$x(x - 1) = x(x + 2)$		9	Đây chỉ là pt đưa được về dạng $ax + b = 0$ ($a \neq 0$). Pt biến đổi thành $\begin{cases} x = 0 \\ 0x + 3 = 0 \end{cases}$. Pt vô nghiệm.

			Pt không có dạng $ax + b = 0$ ($a \neq 0$). Đây là pt bậc hai.
$\frac{6x^2 - x}{3x^2 + 1} = 2$		9	Phương trình chứa ẩn ở mẫu.
$\frac{x^2 - 2x}{x} = 5x$		9	

Với câu hỏi: “Theo quan điểm của Thầy cô, thế nào là phương trình bậc nhất một ẩn?”, chúng tôi nhận được các câu trả lời sau:

- Chỉ là pt có dạng $ax + b = 0$ ($a \neq 0$).
- Là phương trình có dạng $ax + b = 0$ ($a \neq 0$), hoặc có dạng $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$ ($a_1 \neq a_2$).
- Dạng tổng quát: $ax + b = 0$ ($a \neq 0$), hoặc về trái là đa thức bậc nhất, về phải bằng 0.
- Là phương trình có dạng $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) hoặc cách viết khác nhưng sau khi biến đổi không xuất hiện biểu thức có bậc khác 1 đối với biến hoặc không xuất hiện nghiệm ngoại lai.

Như vậy, trong các GV chúng tôi tiến hành thực nghiệm **đã có nhiều quan niệm khác nhau về định nghĩa phương trình bậc nhất một ẩn**.

- Tất cả GV đều cho rằng: phương trình chứa ẩn ở mẫu hoặc có ít nhất một vế không phải bậc nhất thì đó không phải là phương trình bậc nhất.
- Hầu hết GV đều cho rằng phương trình quy về dạng $0x + b = 0$ thì không phải là phương trình bậc nhất. Tuy nhiên, có 1 GV thì cho rằng nếu cả hai vế đều có dạng bậc nhất thì phương trình vẫn là phương trình bậc nhất.

Có sự cạnh tranh khá cân bằng về quan niệm trong GV chúng tôi thực nghiệm đối với dạng phương trình $c = ax + b$. Có 5 GV (chiếm 55,5 %) cho rằng đây là phương trình bậc nhất một ẩn, 4 GV còn lại (chiếm 44,5 %) thì khẳng định ngược lại.

Như vậy, một phần của giả thuyết H2 đã được kiểm chứng: “Có nhiều quan niệm khác nhau của GV khi nhận dạng phương trình bậc nhất một ẩn.”

Câu hỏi 3.

Bảng 2.7. Đánh giá của giáo viên cho các lời giải

Lời giải	Điểm được GV đánh giá	Số GV
Lời giải của học sinh A : Hai số bằng nhau trừ đi nhau sẽ bằng 0, do đó $4 \times x = 20$. Dùng bảng cửu chương 4, được $x = 5$ vì $4 \times 5 = 20$.	10 9 8	4 3 2
Lời giải của học sinh B : $20 - 4x = 0$ $4x = 20 - 0$ (số trừ = số bị trừ - hiệu) $4x = 20$ $x = 20 : 4$ (thừa số = tích : thừa số kia) $x = 5$	10 9.5 8	5 1 3
Lời giải của học sinh C : Bài toán có thể xây dựng thành sơ đồ như sau: $x \xrightarrow{\times 4} \square \xrightarrow{-20} 0$ Nên ta xây dựng sơ đồ phép toán ngược: $5 \xleftarrow{:4} \square \xleftarrow{+20} 0$ Vậy $x = 5$	10 9 8	3 3 3
Lời giải của học sinh D : $20 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow -4x = -20$ $\Leftrightarrow x = 5$ (Chia cả hai vế cho -4)	10	9

- Chúng tôi nhận thấy có sự khác biệt của mỗi GV trong việc cho điểm 4 cách giải.

- Có sự khác biệt về điểm giữa cách giải của HS A, B, C và cách giải của HS D. Các nhận xét của GV được tổng hợp như sau:
- 4 GV nhận xét: cách giải của HS A, B, C là “*đúng nhưng còn dài dòng, theo cách của HS cấp 1*”. Cách giải của HS D “*đúng theo cách giải phương trình, ngắn gọn*”.
- 2 GV cho rằng: lời giải của HS A, B, C “*chỉ là một cách tìm x chứ không phải là bài giải phương trình. Học sinh phải thử lại nghiệm*”. Cách giải của HS D “*là cách giải đúng quy tắc*”.
- Cách giải A và C “*chưa sử dụng đúng cụm từ giải phương trình*”. Cách giải của HS B và D “*thực hiện đủ các bước giải và đúng đáp số*”.
- Bài giải của HS A “*mất thời gian, chỉ áp dụng đối với những con số nhỏ*”. Cách làm của HS B “*logic, rõ ràng từng bước*”. HS C “*đưa bài toán từ đơn giản đến phức tạp, không cần thiết phải xây dựng sơ đồ*”. HS D “*có suy luận giải cụ thể từng bước*”.
- Lập luận của HS A, B, C “*chỉ dựa trên mối liên quan giữa các phép tính, chưa là cách giải đúng*”. HS D “*giải đúng theo quy tắc giải phương trình*”.

Nhận xét

Cách giải được đánh giá tốt nhất là cách giải của HS D, vì sử dụng đúng các nguyên tắc “giải phương trình” mới được học ở lớp 8.

Ba cách giải còn lại của HS A, B, C không được đánh giá tốt như của HS D. Vì theo các GV được khảo sát, có sự khác biệt lớn giữa “tìm x ” và “giải phương trình”. Các bài giải theo kiểu “tìm x ”, tức sử dụng các kỹ thuật số học đã học ở các lớp trước không thể gọi là “giải phương trình” được.

Trong các lời giải của HS A, B, C, lời giải của HS B được đánh giá cao nhất. Theo chúng tôi, có lẽ vì hình thức của lời giải gần giống với lời giải của HS D nhất.

Lời giải của HS C bị đánh giá thấp nhất. Theo các GV thì bởi đó là lời giải thuần túy số học, được xây dựng trên sơ đồ trực quan, nên không thể coi là một bài “giải phương trình đại số” được.

Tóm lại, GV đánh giá tốt những bài giải phương trình thực hiện theo đúng nguyên tắc đại số, với các quy tắc mới học, gồm quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân với một số. Những bài giải càng xa rời các quy tắc trên càng bị đánh giá thấp. Một phần của giả thuyết R2 đã được kiểm chứng: “Ở lớp 8, khi giải phương trình, HS luôn sử dụng các kỹ thuật đại số (các quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân với một số) để tìm nghiệm của phương trình bậc nhất một ẩn mà không sử dụng các kỹ thuật số học đã được học trước đó”.

Kết quả từ việc tiến hành khảo sát trên GV

Theo các GV được khảo sát, bài toán tìm x và bài toán điền số vào ô trống được xem như bước chuẩn bị không thể thiếu để HS tiếp cận phương trình và phương pháp giải phương trình. Thế nhưng, cũng theo các GV này, kỹ thuật tìm x và kỹ thuật giải phương trình là hoàn toàn không giống nhau. HS cần phải vận dụng các kỹ thuật mới học để giải phương trình mà không giải phương trình bằng phương pháp cũ.

Đồng thời, còn nhiều quan niệm tương đối khác nhau của GV về nhận dạng phương trình bậc nhất một ẩn. Có hai dòng quan niệm trong GV được khảo sát: một số GV cho rằng phương trình bậc nhất một ẩn phải là phương trình có dạng $ax + b = 0$ ($a \neq 0$). Số GV còn lại cho rằng phương trình bậc nhất một ẩn là những phương trình quy được về dạng $ax + b = 0$ ($a \neq 0$).

Qua đó, một phần của giả thuyết H1 và một phần của giả thuyết H2 đã được kiểm chứng:

H1: Tồn tại các quy tắc hợp đồng R2 (khi giải phương trình bậc nhất một ẩn ở lớp 8):

R2: Ở lớp 8, khi giải phương trình, HS luôn sử dụng các kỹ thuật đại số (các quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân với một số) để tìm nghiệm của phương trình bậc nhất một ẩn mà không sử dụng các kỹ thuật số học đã được học trước đó.

H2: Có nhiều quan niệm khác nhau của GV khi nhận dạng phương trình bậc nhất một ẩn.

2.6. Thực nghiệm đối với học sinh lớp 9

2.6.1 Mục đích thực nghiệm

Mục đích của thực nghiệm đối với học sinh lớp 9 là kiểm tra ứng xử của HS trước hiệu ứng của hợp đồng R2: “Ở lớp 8, khi giải phương trình, HS luôn sử dụng các kỹ thuật đại số (các quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân với một số) để tìm nghiệm của phương trình bậc nhất một ẩn mà không sử dụng các kỹ thuật số học đã được học trước đó”, và giả thuyết H2: “Có nhiều quan niệm khác nhau của HS khi nhận dạng phương trình bậc nhất một ẩn”.

Do đó, bằng một phiếu điều tra gồm 3 câu hỏi, chúng tôi sẽ đặt học sinh trước các tình huống thích hợp rồi tìm hiểu ứng xử của họ.

2.6.2 Giới thiệu bộ câu hỏi thực nghiệm

Câu hỏi 1. Một bạn học sinh lớp dưới không hiểu thế nào là phương trình bậc nhất một ẩn.
Em giải thích cho bạn đó như thế nào ?

Mục đích của câu hỏi nhằm tìm hiểu cách HS hiểu và trình bày về khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn. Từ đó kiểm chứng giả thuyết H2.

Việc đặt tình huống cho HS là giải thích cho một bạn lớp dưới về khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn là có ý nghĩa. Chúng tôi muốn tìm hiểu những hiểu biết, kiến thức của đối tượng thực nghiệm trong một điều kiện mở.

Câu hỏi 2. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn, phương trình nào không phải là phương trình bậc nhất một ẩn ?

Phương trình	Đúng là phương trình bậc nhất một ẩn	Không phải là phương trình bậc nhất một ẩn	Giải thích vì sao ?
$5x - 3 = 0$			
$9 = 3x - 6$			
$2x - 5 = 7 + 2x$			
$x(x - 1) = x(x + 2)$			
$\frac{6x^2 - x}{3x^2 + 1} = 2$			
$\frac{x^2 - 2x}{x} = 5x$			

Câu hỏi 3. Xét bài toán 8a trang 10 (SGK toán 8, tập 2):

Giải phương trình $20 - 4x = 0$.

Sau đây là lời giải giả định của 4 học sinh. Các em hãy chấm điểm cho từng lời giải (trên thang điểm 10) và giải thích vì sao các em cho điểm như vậy ?

Lời giải	Điểm	Nhận xét
Lời giải của học sinh A : Hai số bằng nhau trừ đi nhau sẽ bằng 0, do đó $4 \times x = 20$. Dùng bảng cửu chương 4, được $x = 5$ vì $4 \times 5 = 20$.		
Lời giải của học sinh B : $20 - 4x = 0$ $4x = 20 - 0$ (số trừ = số bị trừ - hiệu) $4x = 20$ $x = 20 : 4$ (thừa số = tích : thừa số kia) $x = 5$		
Lời giải của học sinh C : Bài toán có thể xây dựng thành sơ đồ như sau: $x \xrightarrow{\times 4} \bigcirc \xrightarrow{-20} 0$ Nên ta xây dựng sơ đồ phép toán ngược: $5 \xleftarrow{: 4} \bigcirc \xleftarrow{+20} 0$ Vậy $x = 5$		
Lời giải của học sinh D : $20 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow -4x = -20$ $\Leftrightarrow x = 5$ (Chia cả hai vế cho -4)		

Nếu không có lời giải nào tối ưu, em hãy đề nghị một lời giải khác mà em cho là tối ưu.

Câu hỏi 2 và câu hỏi 3 được chúng tôi thực hiện giống như câu hỏi 2 và câu hỏi 3 trong phần thực nghiệm giáo viên. Mục đích cũng để kiểm chứng hiệu ứng của hợp đồng R2 và một phần của giả thuyết H2 nhưng với đối tượng HS.

2.6.3 Kết quả phân tích thực nghiệm trên học sinh

Thực nghiệm của chúng tôi được thực hiện trên 40 HS lớp 9 trường THCS Tam Hoà (Biên Hoà – Đồng Nai).

Lý do chúng tôi chọn HS lớp 9 vì HS lớp 8 trong giai đoạn chúng tôi tiến hành thực nghiệm chưa học khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn trong khi HS lớp 9 trong giai đoạn này đã được học.

Các kết quả triển khai thực nghiệm trên HS gần giống như kết quả thực nghiệm trên GV. Vì vậy chúng tôi chỉ trình bày một số kết luận sau phân tích:

Ở HS cũng có những quan niệm khác nhau về nhận dạng phương trình bậc nhất một ẩn. Hơn nữa, xuất hiện những sai lầm theo kiểu “phương trình chứa hai chữ x nên không phải là phương trình một ẩn”. Như vậy, giả thuyết H2: “Có nhiều quan niệm khác nhau của HS khi nhận dạng phương trình bậc nhất một ẩn” đã được kiểm chứng.

Đồng thời, tất cả HS đều đánh giá cao cách giải phương trình dựa vào các quy tắc biến đổi đại số được học ở lớp 8, và cho điểm thấp những cách giải phương trình bằng phương pháp số học. Như vậy, hợp đồng R2 được kiểm chứng hoàn toàn.

2.7. Kết luận chương 2

Với kết quả thực nghiệm tiến hành trên GV và HS ở hai khối lớp, chúng tôi đã kiểm chứng được tính thoả đáng của hai giả thuyết đặt ra sau khi nghiên cứu chương I. Cụ thể là:

H1: Tồn tại các quy tắc hợp đồng R1, RP1 (xung quanh kiểu nhiệm vụ điền số vào chỗ trống và tìm x ở bậc tiểu học) và R2 (khi giải phương trình bậc nhất một ẩn ở lớp 8):

R1: Với kiểu nhiệm vụ điền số vào chỗ trống và tìm x , học sinh không có trách nhiệm kiểm tra sự tồn tại và tính duy nhất của số cần tìm.

RP1: Giáo viên có trách nhiệm cho các bài toán điền số vào chỗ trống và tìm x sao cho giá trị tìm được là tồn tại và duy nhất.

R2: Ở lớp 8, khi giải phương trình, HS luôn sử dụng các kỹ thuật đại số (các quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân với một số) để tìm nghiệm của phương trình bậc nhất một ẩn mà không sử dụng các kỹ thuật số học đã được học trước đó.

H2: Có nhiều quan niệm khác nhau của GV và HS về khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn.

Ngoài ra, thực nghiệm còn cho thấy:

- Hầu hết HS đều rất xa lạ với kỹ thuật giải phương trình bằng sơ đồ phép toán ngược. Những hình ảnh trực quan về các phép toán được các HS đánh giá là “phức tạp”, “khó hiểu” và “không cần thiết”.
- Nhiều GV tiểu học không xem bài toán điền số vào ô trống là một dạng phương trình, họ chỉ sử dụng bài toán điền số vào ô trống nhằm củng cố bảng phép toán hoặc để kiểm tra kiến thức của HS về tính chất của phép toán.
- Nhiều GV giảng dạy toán 8 và toán 9 xem lời giải bài toán “tìm x ” và bài toán “giải phương trình” là khác nhau; theo họ, lời giải một bài toán “tìm x ” không thể xem là “giải phương trình”.

KẾT LUẬN

Luận văn của chúng tôi kết thúc với một số kết quả sau:

Nghiên cứu sơ lược các cách tiếp cận phương trình bậc nhất một ẩn, các khái niệm liên quan và các kỹ thuật giải phương trình ở chương I đã cho phép chúng tôi thấy rõ được mức độ tường minh và ý nghĩa của từng cách tiếp cận là rất khác nhau. Nhờ đó mà **giải thích được tại sao cùng là tiếp cận phương trình nhưng lại có thể đưa vào chương trình với nhiều cấp độ, tiến triển liên tục** trong suốt các năm học của học sinh từ khi bắt đầu học toán cho đến những năm cuối của chương trình toán phổ thông.

Những cách tiếp cận phương trình và các kỹ thuật giải được chúng tôi xây dựng khá hoàn chỉnh ở phần đầu chương I, đã đóng vai trò là **một tham chiếu tương đối đầy đủ trong quá trình chúng tôi phân tích các mối quan hệ thể chế** với đối tượng này ở phần sau của chương. Nhờ đó **giúp chúng tôi trả lời được các câu hỏi Q1, Q2, Q3 đặt ra ở phần mở đầu**.

Việc tìm ra những giai đoạn tiến triển khi thì ngầm ẩn, có lúc tường minh trong các cách tiếp cận phương trình và sự tiến triển song song của các kỹ thuật giải qua từng cấp học đã giúp chúng tôi **giải thích được một số lựa chọn của chương trình và SGK trong việc xây dựng quá trình tiếp cận phương trình ở phổ thông**.

Qua phân tích mối quan hệ thể chế, chúng tôi nhận thấy **một số cách tiếp cận tổ chức toán học liên quan đến phương trình là hợp lý, phù hợp với những tiến triển tất yếu của tri thức**. Nhưng cũng có **những sự lựa chọn gây ra những ứng xử thậm chí rất khác nhau ở cả GV và HS**.

Nghiên cứu mối quan hệ thể chế với đối tượng phương trình đã dẫn chúng tôi đến với **hai giả thuyết**, và **đã được chúng tôi kiểm chứng được sự thoả đáng** trong chương 2.

Tuy nhiên, còn **một câu hỏi được chúng tôi đặt ra ở cuối chương I** vẫn chưa được giải quyết. Từ đó, một hướng nghiên cứu mới của luận văn có thể được mở ra là phân tích các đặc trưng của tri thức, các yếu tố của thể chế, và nếu cần thiết thì xây dựng một thực nghiệm phù hợp nhằm **đi tìm câu trả lời cho câu hỏi đã nêu**.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Nguyễn Trường Cháng (2006), *Giải các bài toán thuộc chương trình phổ thông trên máy CASIO fx-570ES*, NXB TP.HCM.
2. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2002), *Toán 6 (Tập 1)*, NXBGD.
3. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2002), *Toán 6 (Tập 2)*, NXBGD.
4. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2002), *SGV Toán 6 (Tập 1)*, NXBGD.
5. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2002), *SGV Toán 6 (Tập 2)*, NXBGD.
6. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2003), *Toán 7 (Tập 1)*, NXBGD.
7. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2003), *Toán 7 (Tập 2)*, NXBGD.
8. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2003), *SGV Toán 7 (Tập 1)*, NXBGD.
9. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2003), *SGV Toán 7 (Tập 2)*, NXBGD.
10. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2004), *Toán 8 (Tập 1)*, NXBGD.
11. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2004), *Toán 8 (Tập 2)*, NXBGD.
12. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2004), *SGV Toán 8 (Tập 1)*, NXBGD.
13. Phan Đức Chính (Tổng chủ biên) (2004), *SGV Toán 8 (Tập 2)*, NXBGD.
14. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên) (2002), *Toán 1*, NXBGD.
15. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên) (2002), *SGV Toán 1*, NXBGD.
16. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên) (2003), *Toán 2*, NXBGD.
17. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên) (2003), *SGV Toán 2*, NXBGD.
18. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên) (2004), *Toán 3*, NXBGD.
19. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên) (2004), *SGV Toán 3*, NXBGD.
20. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên) (2005), *Toán 4*, NXBGD.
21. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên) (2005), *SGV Toán 4*, NXBGD.
22. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên) (2006), *Toán 5*, NXBGD.
23. Đỗ Đình Hoan (Chủ biên) (2006), *SGV Toán 5*, NXBGD.
24. Ngô Thúc Lan (Chủ biên) (2002), *Từ điển toán học thông dụng*, NXBGD.

Tiếng Pháp

25. Abibal CORTÉS & Nelly KAVAFIAN (1999), *Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations*, CNRS, Université Paris 8.
26. Aude SAINFORD, (1999) *Memoire sur une inconnue*.
27. J.Vlassis et I. Demonty (2000), *Apprendre à résoudre des équations*, (Synthèse de la recherche en pédagogie n° 231/98).
28. Sonia Ben Nejma (2004), *Problèmes du premier degré*, Faculté des sciences de Bizerte.

Phụ lục 1. Thực nghiệm trên giáo viên lớp 4

Thầy cô vui lòng đọc và trả lời các câu hỏi sau. Xin cảm ơn Thầy cô.

Câu hỏi 1. Theo thầy cô, mục đích và ý nghĩa của dạy học các bài tập dạng “Điền số vào chỗ trống” và dạng “Tìm x” là gì ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu hỏi 2. Thầy cô hãy đề nghị 2 bài toán dạng “Điền số vào ô trống” và 2 bài toán dạng “Tìm x” và nêu lời giải mà Thầy cô mong đợi từ học sinh của mình.

Bài 1. Điền số vào ô trống

a)	b)
.....	
Lời giải mong đợi	
a)	b)
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài 2. Tìm x

a)	b)
Lời giải mong đợi	
a)	b)

Câu hỏi 3. Thầy cô có cho HS những bài tập kiểu như sau không ? Xin Thầy cô vui lòng cho biết lý do.

Kiểu bài toán	Mức độ			Giải thích lý do
	Thường xuyên	Ít khi	Không bao giờ	
Điền số vào ô trống: $\square \times 0 = 0.$				
Điền số vào ô trống: $0 \times \square = 10.$				
Tìm x $5 + x = 3.$				

Phụ lục 2. Thực nghiệm trên học sinh lớp 4

Các em vui lòng đọc và giải các bài toán sau:

Bài toán 1. Tìm x

a) $x + 5 = 25$	b) $x + 25 = 5$
Bài giải	
a)	b)
.....	
.....	
.....	

Bài toán 2. Điền số vào ô trống

a) $0 \times \square = 3 \times 0$

Bạn An nói : “Chỉ điền được một số vào ô trống”.

Bạn Bình nói : “Có thể điền được nhiều số vào ô trống”.

Theo em, ai nói đúng? Vì sao ?

Nếu không có ai đúng thì em hãy đưa ra một câu mà em cho là đúng nhất.

.....
.....

b) $58 - \square = 72$

Bạn Châu nói: “Chỉ điền được một số vào ô trống”.

Bạn Dũng nói: “Điền được hai số vào ô trống”.

Bạn Én lại nói: “Không điền được số nào vào ô trống”.

Theo em, ai nói đúng ? Vì sao ?

Nếu không có ai đúng thì em hãy đưa ra một câu mà em cho là đúng nhất.

.....

Phụ lục 3. Thực nghiệm trên giáo viên lớp 8, lớp 9

Thầy cô vui lòng đọc và trả lời các câu hỏi sau. Xin cảm ơn Thầy cô.

Câu hỏi 1. Theo thầy cô, mục đích và ý nghĩa của dạy học các bài tập dạng “Điền số vào chỗ trống” và dạng “Tìm x” ở các lớp dưới và ở học kỳ I lớp 8 là gì ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu hỏi 2. Các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn, phương trình nào không phải là phương trình bậc nhất một ẩn ?

Phương trình	Đúng là phương trình bậc nhất một ẩn	Không phải là phương trình bậc nhất một ẩn	Giải thích vì sao ?
$5x - 3 = 0$			
$9 = 3x - 6$			
$2x - 5 = 7 + 2x$			
$x(x - 1) = x(x + 2)$			
$\frac{6x^2 - x}{3x^2 + 1} = 2$			
$\frac{x^2 - 2x}{x} = 5x$			

Như vậy, theo quan điểm của Thầy cô, thế nào là phương trình bậc nhất một ẩn ?

.....

Câu hỏi 3. Xét bài toán 8a trang 10 (SGK toán 8, tập 2):

Giải phương trình $20 - 4x = 0$.

Sau đây là lời giải giả định của 4 học sinh. Xin Thầy cô chấm điểm cho từng lời giải (trên thang điểm 10) và giải thích vì sao Thầy cô cho điểm như vậy.

Lời giải	Điểm	Nhận xét
Lời giải của học sinh A : Hai số bằng nhau trừ đi nhau sẽ bằng 0 , do đó $4 \times x = 20$. Dùng bảng cửu chương 4 , được $x = 5$ vì $4 \times 5 = 20$.		
Lời giải của học sinh B : $20 - 4x = 0$ $4x = 20 - 0$ (số trừ = số bị trừ - hiệu) $4x = 20$ $x = 20 : 4$ (thừa số = tích : thừa số kia) $x = 5$		
Lời giải của học sinh C : Bài toán có thể xây dựng thành sơ đồ như sau: $x \xrightarrow{\times 4} \bigcirc \xrightarrow{-20} 0$ Nên ta xây dựng sơ đồ phép toán ngược: $5 \xleftarrow{:4} \textcircled{20} \xleftarrow{+20} 0$ Vậy $x = 5$		
Lời giải của học sinh D : $20 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow -4x = -20$ $\Leftrightarrow x = 5$ (Chia cả hai vế cho -4)		

Phụ lục 4. Thực nghiệm trên học sinh lớp 9

Các em vui lòng đọc và trả lời các câu hỏi sau. Xin cảm ơn các em.

Câu hỏi 1. Một bạn học sinh lớp dưới không hiểu thế nào là *phương trình bậc nhất một ẩn*.

Em giải thích cho bạn đó như thế nào ?

.....

.....

.....

.....

Câu hỏi 2. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn, phương trình nào không phải là phương trình bậc nhất một ẩn ?

Phương trình	Đúng là phương trình bậc nhất một ẩn	Không phải là phương trình bậc nhất một ẩn	Giải thích
$5x - 3 = 0$			
$9 = 3x - 6$			
$2x - 5 = 7 + 2x$			
$x(x - 1) = x(x + 2)$			
$\frac{6x^2 - x}{3x^2 + 1} = 2$			
$\frac{x^2 - 2x}{x} = 5$			

Câu hỏi 3. Giải phương trình $20 - 4x = 0$.

Sau đây là lời giải của 4 bạn học sinh. Em hãy chấm điểm cho từng lời giải (trên thang điểm 10) và giải thích vì sao em cho điểm như vậy.

Lời giải	Điểm	Nhận xét
Lời giải của học sinh A : Hai số bằng nhau trừ đi nhau sẽ bằng 0 , do đó $4 \times x = 20$. Dùng bảng cửu chương 4 , được $x = 5$ vì $4 \times 5 = 20$.		
Lời giải của học sinh B : $20 - 4x = 0$ $4x = 20 - 0$ (số trừ = số bị trừ – hiệu) $4x = 20$ $x = 20 : 4$ (thừa số = tích : thừa số kia) $x = 5$		
Lời giải của học sinh C : Bài toán có thể xây dựng thành sơ đồ như sau: $x \xrightarrow{\times 4} \bigcirc \xrightarrow{-20} 0$ Nên ta xây dựng sơ đồ phép toán ngược: $5 \xleftarrow{:4} \bigcirc \xleftarrow{+20} 0$ Vậy $x = 5$		
Lời giải của học sinh D : $20 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow -4x = -20$ $\Leftrightarrow x = 5$ (Chia cả hai vế cho -4)		

Nếu không có lời giải nào tối ưu, em hãy đề nghị một lời giải khác mà em cho là tối ưu: