

B GIÁO D C VÀ ĐÀO T O
TR NG Đ I H C S PH M TP.H CHÍ MINH

Tr n Thanh Hi p

TÍNH CH T FREDHOLM C A N A NHÓM TI N HÓA

Chuyên ngành : Toán gi i tích

Mã s : 604601

LU N VĂN TH C SĨ TOÁN H C

NG I H NG D N KHOA H C:

PGS.TS. LÊ HOÀN HÓA

L I C M N

L i đ u tiên trong b n lu n văn này, tôi xin trân tr ng kính g i đ n Th y Lê Hoàn Hóa ng i đã t n tâm h ng d n, ch b o cho tôi trong su t quá trình hoàn thành lu n văn, lòng bi t n chân thành và sâu s c.

Xin bày t lòng bi t n đ i v i Quý Th y, Cô trong và ngoài Khoa Toán – Tin h c, tr ng Đ i H c S Ph m Thành ph H Chí Minh, tr ng Đ i h c Khoa h c T nhiên Thành ph H Chí Minh đã t n tình gi ng d y, truy n đ t ki n th c trong su t th i gian h c t p và làm vi c.

Chân thành c m n Quý Th y, Cô trong Ban Ch nh i m Khoa Toán –Tin h c, Quý Th y, Cô thu c Phòng Qu n lý Khoa h c Công ngh Sau Đ i h c, tr ng Đ i h c S ph m Thành ph H Chí Minh đã nhi t tình giúp đ , đ ng viên, t o m i đi u ki n thu n l i v th t c hành chính cho tôi trong su t quá trình h c t p.

Xin c m n các b n bè đ ng nghi p và các b n cùng l p cao h c gi i tích khóa 18 đã luôn đ ng viên và quan tâm trong th i gian h c tập và làm lu n văn. Vì ki n th c b n thân còn nhi u h n ch , nên lu n văn khó tránh kh i thi u sót, r t mong nh n đ c s ch b o c a Quý Th y, Cô và s góp ý chân thành c a các b n bè đ ng nghi p.

Tr n Thanh Hi p

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng nội dung luận văn này không được sao chép bất kỳ luận văn nào khác trước đây.

Học viên

Trần Thanh Hiệp

Lý thuyết Fredholm (ra đời vào 1903) là lý thuyết về phương trình vi phân. Theo nghĩa hẹp, nó liên quan đến nghiên cứu các phương trình tích phân Fredholm. Theo nghĩa rộng, cấu trúc trừu tượng của lý thuyết Fredholm được thể hiện dưới dạng lý thuyết phổ của toán tử Fredholm và nhân Fredholm trên không gian Hilbert. Và công việc nghiên cứu tính ổn định phổ của phương trình truy ngược là lý thuyết lồi phân.

Một hình thức hóa $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$, $t, \tau \in J$ liên kết với phương trình vi phân tuyến tính chính, không tự sinh $u'(t) = A(t)u(t)$ trên không gian Banach X với các hệ số toán tử sinh ra ba toán tử quan trọng xác định trên không gian các hàm nhận giá trị trong X :

$$(1) \text{ toán tử vi phân } G, G = \frac{-d}{dt} + A(t); \quad (0.1)$$

$$(2) \text{ toán tử hàm số } E^t, (E^t u)(\tau) = U(\tau, \tau - t)u(\tau - t), \tau \in J, t \geq 0; \quad (0.2)$$

$$(3) \text{ toán tử sai phân } D_\tau,$$

$$D_\tau : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow (x_n - U(n + \tau, n + \tau - 1)x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}, \tau \in [0, 1). \quad (0.3)$$

Trong khuôn khổ luận văn này, đầu tiên tác giả trình bày một chứng minh của Định lý lồi phân trong trường hợp vô hạn chiều mà không có bất kỳ ràng buộc đặc biệt nào của toán tử $A(t)$. Tiếp theo, tác giả trình bày tính chất Fredholm, tính chất phổ và tính đóng của miền giá trị của ba toán tử nêu trên.

Luận văn được trình bày theo bố cục như sau:

Phần mở đầu giới thiệu tổng quan về các vấn đề chính được nghiên cứu trong luận văn, đồng thời nêu bố cục của luận văn.

Chương 1 là các kiến thức chuẩn bị về lý thuyết Fredholm, nhóm tuyến tính hóa, lồi phân lũy thừa.

Chương 2 được xây dựng gồm hai phần các Định lý và Bổ đề dùng để chứng minh Định lý lồi phân (Định lý 2.1, Định lý 2.2) trong trường hợp vô hạn chiều mà không có bất kỳ ràng buộc nào của toán tử $A(t)$.

Chương 3 là phần tiếp theo của chương 2, tác giả trình bày tính chất Fredholm, tính chất phổ và tính đóng của miền giá trị của các toán tử E^t, G, D_τ .

Cuối cùng là phần Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Lý thuyết Fredholm

Định nghĩa 1.1

Cho X và Y là các không gian Banach, gọi $T: X \rightarrow Y$ là toán tử tuyến tính bị chặn, T được gọi là Fredholm nếu:

- (i) $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$;
- (ii) $\operatorname{Im} T$ đóng;
- (iii) $\dim \operatorname{CoKer} T < \infty$. ($\dim \operatorname{CoKer} T = \dim(Y / \operatorname{Im} T)$).

Khi T là ánh xạ Fredholm, chỉ số của T kí hiệu $\operatorname{Ind} T$ là số nguyên xác định bởi:

$$\operatorname{Ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \operatorname{codim} \operatorname{Im} T$$

Tính chất 1.2

T thỏa mãn định nghĩa trên và toán tử liên hợp T^* của T là tích phân tuyến tính, thì các phép chiếu liên tục

$$P: X \rightarrow X, Q: Y \rightarrow Y \text{ thỏa: } \operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} T; \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} T.$$

Do đó,

$$X = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Ker} P$$

$$Y = \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Im} Q$$

Bổ đề 1.3 Cho $T: X \rightarrow Y$ là toán tử thì $\operatorname{Im} T$ là một không gian con đầy đủ, đóng thì $\operatorname{Im} T$ đóng.

Bổ đề 1.4 Kí hiệu $\operatorname{Fred}(X, Y)$ là không gian các toán tử Fredholm từ X vào Y và $\operatorname{Fred}(X)$ là tập các toán tử Fredholm xác định trên X . Ta có $\operatorname{Fred}(X, Y)$ là tập mở của $B(X, Y)$ và chỉ số Fredholm là hàm liên tục trên $\operatorname{Fred}(X, Y)$.

Bổ đề 1.5 Cho $T: X \rightarrow X$ là toán tử compact, khi đó $I + T$ là Fredholm.

Bổ đề 1.6 Cho $T: X \rightarrow Y$ và $S: Y \rightarrow Z$ là các toán tử Fredholm. Khi đó, $ST: X \rightarrow Z$ cũng là Fredholm.

Hơn nữa, $\operatorname{Ind}(ST) = \operatorname{Ind}(T) + \operatorname{Ind}(S)$.

Định nghĩa 1.7

Cặp Fredholm: cặp không gian con (W, V) trong X được gọi là cặp Fredholm nếu:

- i) $\alpha(W, V) = \dim(W \cap V) < \infty$
- ii) $W + V$: đóng
- iii) $\beta(W, V) = \operatorname{codim}(W + V) < \infty$

Ch s Fredholm: Ch s Fredholm c a c p không gian con (W, V) là

$$\text{ind}(W, V) = \alpha(W, V) - \beta(W, V).$$

1.2 H ti n hoá và n a nhóm ti n hoá

Đ nh nghĩa 1.2.1 Cho X là không gian Banach, $L(X)$ là không gian các toán t tuyền tính b ch n trên X . H $T = \{T(t)\}_{t \geq 0} \subset L(X)$ đ c g i là n a nhóm trên X n u

$$T(0) = I \text{ và } T(t+s) = T(t)T(s) \text{ v i m i } t, s \geq 0.$$

N a nhóm $T = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ đ c g i là b ch n lũy th a n u t n t i $M \geq 1$ và $\omega > 0$ sao cho

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Đ nh nghĩa 1.2.2 Toán t $P \in L(X)$ đ c g i là phép chi u n u $P^2 = P$. N a nhóm $T = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ đ c g i là l ng phân lũy th a n u t n t i m t phép chi u $P \in L(X)$ và hai h ng s $K \geq 1$ và $\nu > 0$ sao cho

- (i) $T(t)P = PT(t), \forall t \geq 0;$
- (ii) $\|T(t)x\| \leq K e^{-\nu t} \|x\|, \forall x \in \text{Im } P \text{ và } \forall t \geq 0;$
- (iii) $\|T(t)x\| \geq \frac{1}{K} e^{\nu t} \|x\|, x \in \text{Ker } P \text{ và } \forall t \geq 0;$
- (iv) $T(t)|_{\text{Ker } P} : \text{Ker } P \rightarrow \text{Ker } P$ là m t đ ng c u $\forall t \geq 0.$

Ví d : Trên $X = \mathbb{R}^2$ đ c trang b chu n $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$, ta đ nh nghĩa $T(t) : X \rightarrow X$ nh sau

$$T(t)(x_1, x_2) = (e^{-t}x_1, e^t x_2), \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0.$$

Khi đó, n a nhóm $T = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ là l ng phân lũy th a.

Đ nh nghĩa 1.2.3 N u $T = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ là n a nhóm trên X và $U \subset X$ là m t không gian con tuyền tính,

U đ c g i là T -b t bi n n u $T(t)U \subset U, \forall t \geq 0.$

M t h $\{U(t, \tau)_{t \geq \tau}\}, t, \tau \in J$ g m các toán t tuyền tính b ch n trên X đ c g i là h ti n hóa b ch n lũy th a liên t c m nh trên J n u:

- i) V i m i $x \in X$, ánh x $(t, \tau) \mapsto U(t, \tau)x$ liên t c v i m i $t \geq \tau$ thu c J
- ii) $\sup \left\{ \|e^{-\omega(t-\tau)} U(t, \tau)\| : t, \tau \in J, t \geq \tau \right\} < \infty, \text{ v i } \omega \in \mathbb{R} \text{ tùy ý}$

$$\text{iii) } U(t,t)=I, U(t,\tau)=U(t,s)U(s,\tau) \text{ v i m i } t \geq s \geq \tau \text{ thu c } J.$$

N a nhóm t i n hóa:

$\{E^t\}_{t \geq 0}$ là n a nhóm t i n hóa xác đ nh trên không gian $L_p(\mathbb{R}, X)$, $1 \leq p < \infty$ ho c $C_0(\mathbb{R}, X)$ _không gian các hàm liên t c tri t tiêu t i $\pm\infty$, theo qui t c:

$$(E^t u)(\tau) = U(\tau, \tau-t)u(\tau-t), \tau \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Ta đ nh nghĩa toán t G trên L_p liên k t v i n a nhóm t i n hóa trên nh sau:

$$(Gu)(t) = -u'(t) + A(t)u(t) \text{ v i m i n xác đ nh:}$$

$$\text{dom} G = W_p^1 \cap \{u \in L_p : u(t) \in \text{dom} A(t)\}. \quad (1.1)$$

Ta g i G là m r ng đóng c a G.

N a nhóm liên h p:

Cho $\{E^{tA}\}_{t \geq 0}$ là n a nhóm liên t c m nh trên X, khi đó, n a nhóm liên h p $\{(e^{tA})^*\}_{t \geq 0}$ trên không gian

Banach X^* nói chung là không liên t c m nh. Không gian con:

$$X^e = \{x^* \in X^* : \|(e^{tA})^* x^* - x^*\| \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow 0\}$$

là không gian con tuy n tính đóng c a X^* và $(e^{tA})^*(X^e) \subseteq X^e \forall t \geq 0$. Thu h p e^{tA^e} c a $(e^{tA})^*$ xác đ nh m t n a nhóm liên t c m nh trên X^e . H n n a,

$$X^e = \overline{\rho(A)^*(X^*)} \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A).$$

Chú ý 1.2.4

T đ nh nghĩa c a X^e suy ra $\text{Ker}(I - e^{tA})^* \subset X^e$ và $\text{Ker}(I - e^{tA})^* = \text{Ker}(I - e^{tA^e})$ v i m i $t \geq 0$;

$$\text{Ker}(A^* - \mu) \subset X^e \text{ và } \text{Ker}(A^* - \mu) = \text{Ker}(A^e - \mu) \text{ v i } \mu \in \mathbb{C} \text{ b t kỳ.}$$

Lý thuy t l ng phân

Đ nh nghĩa 1.3.1 Cho X là không gian Banach, J là $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$ ho c $\mathbb{R}$, h t i n hóa $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ đ c g i là có l ng phân lũy th a $\{P_t\}_{t \in J}$ trên J v i h s l ng phân $M \geq 1$ và $\alpha > 0$ n u $P_t, t \in J$, là các phép chi u trên X và m i $t \geq \tau \in J$, các kh ng đ nh sau th a:

$$\text{i) } U(t, \tau)P_\tau = P_t U(t, \tau)$$

$$\text{ii) Thu h p: c a toán t } U(t, \tau) \text{ trên } \text{Ker} P_\tau, U(t, \tau)|_{\text{Ker} P_\tau}, \text{ là toán t kh ng h ch t } \text{Ker} P_\tau \text{ đ n } \text{Ker} P_t.$$

iii) Th a các c l ng l ng phân sau:

$$\|U(t, \tau)|_{\text{Im} P_\tau}\| \leq M e^{-\alpha(t-\tau)} \text{ và } \|(U(t, \tau)|_{\text{Ker} P_\tau})^{-1}\| \leq M e^{-\alpha(t-\tau)}. \quad (1.2)$$

Chương 2

TOÁN T VI PHÂN FREDHOLM VÀ H S KHÔNG B CH N

Trong chương này, tác giả trình bày một số định lý lý luận phân trong trường hợp vô hạn chiều mà không có bất kỳ ràng buộc đặc biệt nào của toán tử $A(t)$: Định lý 2.1 và Định lý 2.2

Định lý 2.1 Giả sử $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}, t, \tau \in \mathbb{R}$ là một hệ tiến hóa liên tục mạnh trên không gian Banach phân xạ X , G là toán tử sinh của nhóm tiến hóa tương ứng xác định trên $L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$ hoặc trên $C_0(\mathbb{R}, X)$. Khi đó: toán tử G là Fredholm nếu và chỉ nếu tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ sao cho hai điều kiện sau thỏa:

(i) Hệ tiến hóa $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ có tính phân lũy thừa $\{P_t^-\}_{t \leq a}$ trên $(-\infty, a]$ và $\{P_t^+\}_{t \geq b}$ trên $[b, \infty)$.

ii) Toán tử rút $N(b, a): \text{Ker} P_a^- \rightarrow \text{Ker} P_b^+$, định bởi:

$$N(b, a) = (I - P_b^+)U(b, a) \Big|_{\text{Ker} P_a^-}, \text{ là toán tử Fredholm.}$$

Hơn nữa, nếu toán tử G là Fredholm thì

a) $\dim \text{Ker } G = \dim \text{Ker } N(b, a)$;

b) $\text{codim Im } G = \text{codim Im } N(b, a)$; $\text{ind } G = \text{ind } N(b, a)$.

Định lý 2.2 Với các giả thiết như Định lý 2.1, toán tử G là Fredholm khi và chỉ khi hai điều kiện sau đây thỏa:

i') Hệ tiến hóa $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ có tính phân lũy thừa $\{P_t^-\}_{t \leq a}$ trên $\mathbb{R}_-$ và $\{P_t^+\}_{t \geq b}$ trên $\mathbb{R}_+$.

ii') Cặp không gian con $(\text{Ker} P_0^-, \text{Im } P_0^+)$ trong X là Fredholm.

Hơn nữa, nếu toán tử G là Fredholm thì:

$$a') \dim \text{Ker } G = \alpha(\text{Ker} P_0^-, \text{Im } P_0^+)$$

$$b') \text{codim Im } G = \beta(\text{Ker} P_0^-, \text{Im } P_0^+)$$

$$c') \text{ind } G = \text{ind}(\text{Ker} P_0^-, \text{Im } P_0^+)$$

Ta ký hiệu:

$$i_+ = \{t \in \mathbb{I} : t \geq 0\}, i_- = \{t \in \mathbb{I} : t \leq 0\}, \mathbb{C}_+ = \{n \in \mathbb{C} : n \geq 0\}, \mathbb{C}_- = \{n \in \mathbb{C} : n \leq 0\},$$

$T = \{\lambda \in \mathbb{E} : |\lambda| = 1\}$; X là không gian Banach; X^* là không gian liên hợp; A^* , $\text{dom } A$, $\text{Ker } A$, $\text{Im } A$,

$$\rho(A) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{E}, A - \lambda I \in L(X), A - \lambda I : \text{song ánh}\}, \sigma(A),$$

$$\sigma_{\text{fred}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{E} : \lambda - A \text{ không Fredholm}\}, \text{ và } \text{sprad}(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \text{ là liên hợp,}$$

mi n xác đ nh, nh n, nh, t p giá tr chính quy (t p gi i), ph , ph Fredholm, và bán kính ph c a A; $A|_Y$ là thu h p c a A trên $Y \subset X$; $L(X, Y)$ là không gian Banach các toán t tuy n tính b ch n t X đ n Y ; $L(X)$ là t p các toán t b ch n trên X ; $L_p = L_p(\cdot, X)$, $p \in [1, +\infty)$ là không gian Banach g m các hàm t X vào $\cdot$ sao cho $|f|^p$ kh tích Lebesgue; $C_0(\cdot, X)$ là không gian các hàm liên t c tri t tiêu t i $\pm\infty$; $l_p(\mathbb{C}, X)$ là không gian Banach g m t t c các dãy $x = (x_n)$ các ph n t trong $\mathbb{C}$ sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$; $c_0(\mathbb{C}, X)$ là không gian các dãy tri t tiêu t i $\pm\infty$. Không gian hàm $\mathcal{E}(\cdot)$ là m t trong các không gian $L_p(\cdot, X)$ ho c $C_0(\cdot, X)$, không gian dãy $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ là m t trong các không gian $l_p(\mathbb{C}, X)$ ho c $c_0(\mathbb{C}, X)$, $\mathcal{E}(\cdot_+)$ là m t trong các không gian $L_p(\cdot_+, X)$ ho c $C_0(\cdot_+, X)$, $\mathcal{E}_0(\cdot_+) = C_{00}(\cdot_+, X)$ là không gian các hàm liên t c trên $\cdot_+$ tri t tiêu t i 0 và ∞ , không gian dãy $\mathcal{E}(\mathbb{C}_+)$ là m t trong các không gian $l_p(\mathbb{C}_+, X)$ ho c $c_0(\mathbb{C}_+, X)$, $\mathcal{E}([0, 2\pi])$ là m t trong các không gian $L_p([0, 2\pi], X)$ ho c $C_{\text{per}}([0, 2\pi], X)$ - là không gian các hàm tu n hoàn chu kỳ 2π trên đo n $[0, 2\pi]$. Ta dùng hình th c in đ m đ ký hi u cho dãy, ch ng h n, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{C}}$, $x_n \in X$. V i $n \in \mathbb{C}$, tr c chu n th n trong $l_p(\mathbb{C}, X)$ ho c $c_0(\mathbb{C}, X)$ là $e_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{C}}$, v i δ_{nk} là h s Kronecker. N u $x \in X$ thì ta ký hi u dãy $x \otimes e_n = (x_k)_{k \in \mathbb{C}}$ b i $x \otimes e_n = (x \delta_{nk})_{k \in \mathbb{C}}$ sao cho $x_n = x$ và $x_k = 0$ v i $k \neq n$.

V i $Y \subset X$ và $Y_* \subset X^*$, ta ký hi u $Y^\perp = \{\xi \in X^* : \langle x, \xi \rangle = 0, \forall x \in Y\}$ và $Y_*^\perp = \{x \in X : \langle x, \xi \rangle = 0, \forall \xi \in Y_*\}$. N u $x = x_1 \oplus x_2$ thì $(x_1)^* = x_2^\perp$ và $(x_2)^* = x_1^\perp$.

N u P là m t phép chi u trên X thì P^* cũng là m t phép chi u trên X^* v i

$$\text{Im } P^* = (\text{Ker } P)^\perp = (\text{Im } P)^* \text{ và } \text{Ker } P^* = (\text{Im } P)^\perp = (\text{Ker } P)^*.$$

N u (P, Q) là m t c p phép chi u trên X thì $X = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$ và

$$X = \text{Im } Q \oplus \text{Ker } Q.$$

B t kỳ m t toán t A b ch n trên X có th đ c vi t d i d ng toán t ma tr n nh sau:

$$A = \begin{bmatrix} P \\ I - P \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} Q & I - Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PAQ & PA(I - Q) \\ (I - P)AQ & (I - P)A(I - Q) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

N u $AQ = PA$ ma tr n này là ma tr n chéo v i các ph n t trên đ ng chéo là $A|_{\text{Im } Q}$ và $A|_{\text{Ker } Q}$.

Nếu $A(\text{Im}Q) \subseteq \text{Im}P$ hoặc $AQ = PAQ$ thì ta định nghĩa $A|_{\text{Im}Q} = AQ : \text{Im}Q \rightarrow \text{Im}P$, ta viết:

$$A = \begin{bmatrix} A|_{\text{Im}Q} & PA(I-Q) \\ 0 & (I-P)A|_{\text{Ker}Q} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Cho toán tử sai phân D xác định trên không gian $l_p(Z, X)$, $p \in [1, \infty)$ như sau:

$$D : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow (x_n - U(n, n-1)x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

Toán tử liên hợp của D là:

$$D^* : (\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow (\xi_n - U(n+1, n)^* \xi_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (2.3)$$

Ta có:

$$\text{Ker}D = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n = U(n, m)x_m; \forall m, n \in \mathbb{Z}, n \geq m\}, \quad (2.4)$$

$$\text{Ker}D^* = \{(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}} : \xi_m = U(n, m)^* \xi_n; \forall m, n \in \mathbb{Z}, n \geq m\}. \quad (2.5)$$

Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, ta định nghĩa các không gian con sau:

$$X_n = \{x \in X : \exists (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker}D, x = x_n\}, \quad (2.6)$$

$$X_{n,*} = \{\xi \in X^* : \exists (\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker}D^*, \xi = \xi_n\}. \quad (2.7)$$

X^* là không gian liên hợp của X , cho các không gian con:

$$\begin{aligned} Y &\subset X \\ Y_* &\subset X^*, \end{aligned}$$

Ta ký hiệu:

$$\begin{aligned} Y^\perp &= \{\xi \in X^* : \langle x, \xi \rangle = 0 \forall x \in Y\} \\ Y_*^\perp &= \{x \in X : \langle x, \xi \rangle = 0 \forall \xi \in Y_*\} \end{aligned}$$

Bổ đề 2.3 Với mọi $n \in \mathbb{C}$ và $m \in \mathbb{C}$, $m \leq n$, các khẳng định sau đúng:

- (i) $\dim X_n \leq \dim \text{Ker}D < \infty$ và $\dim X_{n,*} \leq \dim D^* < \infty$;
- (ii) $U(n, m)X_m \subset X_n$, hơn nữa, toán tử $U(n, m)|_{X_m} : X_m \rightarrow X_n$ khả nghịch;
- (iii) $U(n, m)^*X_{n,*} \subset X_{m,*}$, hơn nữa, toán tử $U(n, m)^*|_{X_{n,*}} : X_{n,*} \rightarrow X_{m,*}$ khả nghịch;
- (iv) $U(n, m)X_{m,*}^\perp \subset X_{n,*}^\perp$ và $\text{codim} X_{n,*}^\perp = \dim X_{n,*} < \infty$; $U(n, m)^*X_n^\perp \subset X_m^\perp$ và

$$\text{codim} X_n^\perp = \dim X_n < \infty;$$

- (v) $X_n \subset X_{n,*}^\perp$ và $X_{n,*} \subset X_n^\perp$.

Chứng minh

(i) Theo định nghĩa của X_n và $X_{n,*}$ thì D là toán tử Fredholm.

(ii) Chọn $x \in X_m$ và lấy một dãy $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker}D$ sao cho $x = x_m$.

T (2.4), ta có: $x_n = U(n, m)x_m$.

Vì $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} D$ nên theo đ nh nghĩa c a x_n thì $U(n, m)x_m \in X_n$.

Vì $\dim X_n < \infty$ nên đ ch ng minh toán t $U(n, m)|_{X_m} : X_m \rightarrow X_n$ kh ngh ch, ta ch c n ch ng minh $U(n, m)|_{X_m} : X_m \rightarrow X_n$ là toàn ánh là đ .

Th t v y,

C đ nh $x \in X_m$ và l y m t dãy $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} D$ sao cho $x = x_m$. T (2.4), ta có:

$$x_n = U(n, m)x_m.$$

Theo đ nh nghĩa c a x_m , ta có $x_m \in X_m$. Do đó, $x = U(n, m)x_m$ v i $x_m \in X_m$ và $U(n, m)|_{X_m} : X_m \rightarrow X_n$ là m t đ ng c u.

(iii) T ng t nh (ii) b ng cách s d ng (2.5)

(iv) V i $y \in X_{m,*}^\perp$, ta có $\langle y, \xi \rangle = 0$ v i m i $\xi \in X_{m,*}$. N u $\eta \in X_{n,*}$ thì $U(n, m)^*\eta \in X_{m,*}$ (do (iii)) và $\langle U(n, m)y, \eta \rangle = \langle y, U(n, m)^*\eta \rangle = 0$.

Do đó, $U(n, m)y \in X_{n,*}^\perp$.

T ng t đ i v i $U(n, m)^*$.

(v) C đ nh $x \in X_n$ và $\xi \in X_{n,*}$ l y dãy $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} D$ và $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} D^*$ sao cho $x = x_n$ và $\xi = \xi_n$. Khi đó, theo (2.4) và (2.5), ta có:

$$\begin{aligned} \infty > \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x_k, \xi_k \rangle &= \sum_{k \geq n} \langle x_k, \xi_k \rangle + \sum_{k < n} \langle x_k, \xi_k \rangle \\ &= \sum_{k \geq n} \langle U(k, n)x_n, \xi_k \rangle + \sum_{k \geq n} \langle x_k, U(n, k)^*\xi_n \rangle \\ &= \sum_{k \geq n} \langle x_n, U(k, n)^*\xi_k \rangle + \sum_{k \geq n} \langle U(n, k)x_k, \xi_n \rangle \\ &= \sum_{k \geq n} \langle x_n, \xi_k \rangle + \sum_{k < n} \langle x_n, \xi_k \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Do đó, $\langle x, \xi \rangle = 0$. □

Đ t $X_n' \subset X_{n,*}^\perp$ là ph n bù tr c ti p c a không gian con h u h n chi u x_n trong $X_{n,*}^\perp$, Y_n là ph n bù tr c ti p c a không gian con h u h n chi u $X_{n,*}^\perp$ trong X . Khi đó, ta có:

$$X = X_{n,*}^\perp \oplus Y_n = X_n \oplus X_n' \oplus Y_n, n \in \mathbb{C}. \quad (2.8)$$

Ta đ nh nghĩa không gian con đóng c a $l_p(\mathbb{C}, X)$, $p \in [1, \infty)$ ho c $c_0(\mathbb{C}, X)$:

$$F = \left\{ (y_n)_{n \in \mathbb{C}} : y_n \in X_{n,*}^\perp, n \in \mathbb{C} \right\}. \quad (2.9)$$

B đ 2.4 F là D – b t bi n và $D|_F$ là toàn ánh trên F.

Nếu $y_n \in X_{n,*}^\perp$ và $y_{n-1} \in X_{n-1,*}^\perp$ thì $y_n - U(n, n-1) \in X_{n,*}^\perp$ theo (iv) của Bđ 2.3 và $DF \subset F$. Để chứng minh $D|_F$ là toàn ánh, đầu tiên ta chứng minh $F \subset \text{Im } D$. Vì D là toán tử Fredholm nên mọi giá trị của nó đóng. Do đó, $\text{Im } D$ là tập hợp các dãy y thỏa $\langle y, \xi \rangle = 0$ với mọi dãy $\xi \in \text{Ker } D^*$. Vì thế, ta chỉ cần chứng minh rằng $y \perp \xi$ với mọi dãy $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F$ và $\xi \in \text{Ker } D^*$.

Nếu $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F$ thì $y_n \in X_{n,*}^\perp$ theo định nghĩa của F . Và điều kiện đã đề cập chứng minh.

Tiếp theo, cần tìm $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in F \subset \text{Im } D$ và tìm dãy $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z}, X)$ sao cho $Dx = y$ hay với mọi $n \in \mathbb{Z}$ và mọi $k \in \mathbb{N}$ thì:

$$\begin{aligned} x_n &= U(n, n-1)x_{n-1} + y_n = U(n, n-1)[U(n-1, n-2)x_{n-2} + y_{n-1}] + y_n \\ &= \dots = U(n, n-k)x_{n-k} + \sum_{j=0}^{k-1} U(n, n-j)y_{n-j}. \end{aligned}$$

Để chứng minh $D|_F$ toàn ánh trên F , ta cần chứng minh $x_n \in X_{n,*}^\perp$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Cần tìm $\xi \in X_{n,*}^\perp$ và lấy một dãy $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker } D^*$ sao cho $\xi = \xi_n$.

Theo (2.5), ta có $U(n, n-k)^* \xi_n = \xi_{n-k}$.

Vì $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in F$ nên theo Bđ 2.3 (iv), ta có $U(n, n-j)y_{n-j} \in X_{n,*}^\perp$ và

$$\langle U(n, n-j)y_{n-j}, \xi_n \rangle = 0.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \langle x_n, \xi_n \rangle &= \langle x_{n-k}, U(n, n-k)^* \xi_n \rangle + \left\langle \sum_{j=0}^{k-1} U(n, n-j)y_{n-j}, \xi_n \right\rangle \\ &= \langle x_{n-k}, \xi_{n-k} \rangle \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty \text{ vì } \|x_{n-k}\| \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Do đó, $\langle x_n, \xi \rangle = 0$. □

Ta biết X'_0 là phần bù trực tiếp của X_0 trong $X_{0,*}^\perp$, xác định không gian con đóng F_0 của F như sau:

$$F_0 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F : x_0 \in X'_0 \right\}.$$

Gọi $D_0 = D|_{F_0}$ xác định trên F với $\text{dom } D_0 = F_0$.

Bđ 2.5 Toán tử D_0 khả nghịch trên F , nghĩa là với mọi $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F$, tồn tại duy nhất dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F_0$ sao cho $D(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Chứng minh

Theo Bđ 2.4, với mọi $z = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F$ thì tồn tại một dãy $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F$ sao cho

$$Dy = z$$

Theo đ nh nghĩa c a F , ta có $y_n \in X_{n,*}^\perp$.

S d ng s phân tích $X_{0,*}^\perp = X_0 \oplus X'_0$, bi u di n $y_0 = y + y'$, v i $y \in X_0$ và $y' \in X'_0$.

Theo đ nh nghĩa c a X_0 , t n t i d ãy $(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} D$ sao cho $\omega_0 = y$.

Đ t: $x_n = y_n - \omega_n, n \in \mathbb{Z}$.

V i $y_n \in X_{n,*}^\perp$ và $\omega_n \in X_n \subset X_{n,*}^\perp$ (theo B đ 2.3) nên ta suy ra $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F$.

Nh ng $x_0 = y_0 - \omega_0 = y_0 - y = y' \in X'_0$. Do đó, $x \in F_0$.

V i $(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} D$ nên ta cũng có $Dx = Dy = z$.

Đ ch ng minh tính duy nh t, ta gi s r ng $x \in F_0$ và $x \in \text{Ker} D$.

Theo đ nh nghĩa c a X_n ta có $x_n \in X_n$ v i m i $n \in \mathbb{Z}$ nên $x_0 \in X_0$.

Nh ng $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F_0$ nghĩa là $x_0 \in X'_0$.

V i $x \in \text{Ker} D$ nên theo (2.4) ta suy ra $x_n = U(n, 0)x_0 = 0$ v i $n \geq 0$.

Cũng theo (2.4), ta đ ý r ng $0 = x_0 = U(0, n)x_n$ v i $n < 0$.

Theo B đ 2.3 (ii), $U(0, n)|_{X_n} : X_n \rightarrow X_0, n < 0$, kh ngh ch và do đó $x_n \in X_n$ suy ra $x_n = 0$ v i $n < 0$. $\square$

M nh đ 2.6 T n t i m t h $\{P_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ g m các phép chi u xác đ nh trên $X_{n,*}^\perp$ sao cho $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|P_n\| < \infty, M > 1$

và $\alpha > 0$ th a:

(i) N u $n \geq m > 0$ ho c $0 \geq n \geq m$ thì

$$P_n U(n, m)x = U(n, m)P_m x \forall x \in X_{m,*}^\perp \quad (2.10)$$

V i thu h p $U(n, m)|_{\text{Im } P_m} : \text{Im } P_m \rightarrow \text{Im } P_n$, ta có:

$$\|U(n, m)|_{\text{Im } P_m}\| \leq M e^{-\alpha(n-m)} \quad (2.11)$$

(ii) N u $n > 0 \geq m$ và $x \in X_{m,*}^\perp$ thì $U(n, m)P_m x = P_n U(n, 0)y'_0$ v i $y'_0 \in X'_0$ là ph n h p thành c a

$y = U(0, m)x$ trong bi u di n: $y = y_0 + y'_0, y_0 \in X_0$ ng v i t ng tr c ti p $X_{0,*}^\perp = X_0 \oplus X'_0$.

(iii) N u $n \geq m > 0$ ho c $0 \geq n \geq m$ thì

thu h p $U(n, m)|_{\text{Ker } P_m} : \text{Ker } P_m \rightarrow \text{Ker } P_n$ là toán t kh ngh ch và

$$\left\| \left(U(n, m)|_{\text{Ker } P_m} \right)^{-1} \right\| \leq M e^{-\alpha(n-m)} ;$$

(iv) N u $n > 0 \geq m$ thì toán t nút thu g n $N(n, m)$ đ nh b i

$$N(n, m) = (I - P_n)U(n, m)|_{\text{Ker } P_m} : \text{Ker } P_m \rightarrow \text{Ker } P_n$$

là toàn ánh v i $\text{Ker } N(n, m) = X_m$.

Chứng minh

Gọi T là toán tử tuyến tính đóng trên F có $\text{dom } T = F_0$ định nghĩa:

$$T: (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (U(n, n-1)x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}} \text{ và } D_0 = I - T.$$

Theo định lý phổ, toán tử $(\lambda I - T)^{-1}$ bị chặn trên F , với $\lambda \in \rho(T)$.

Với mọi $\lambda \in \mathbb{T}$, gọi $V(\lambda)$ là phép đổi cơ sở trên F định nghĩa:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (\lambda^n x_n)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Khi đó:

$$V(\lambda^{-1})TV(\lambda) = \lambda^{-1}T, |\lambda| = 1 \quad (2.12)$$

Do đó, $\sigma(T) = T.\sigma(T)$, nghĩa là $\sigma(T)$ bất biến.

Vì $1 \in \rho(T)$ theo Bổ đề 2.5 nên $\sigma(T) \cap T = \emptyset$.

Xét phép chiếu Riesz: $P = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=1} (\lambda - T)^{-1} d\lambda$ với T xác định trên F và với phạm vi $\sigma(T)$ thu được đĩa đơn vị:

$$\sigma(T|_{\text{Im } P}) = \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \quad (2.13)$$

Ta thấy P là toán tử bị chặn trên F và $\text{Im } P \subset F_0$ vì $(\lambda I - T)^{-1}(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{dom } T = F_0$ với mọi $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F$ và $\lambda \in T$.

Hơn nữa, toán tử TP xác định trên F là bị chặn trong khi PT chỉ xác định trên F_0 , tuy nhiên $TP \supset PT$, nghĩa là:

$$TP(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = PT(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ với mọi } (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F_0. \quad (2.14)$$

Cũng theo (2.13), $\text{sprad}(T|_{\text{Im } P}) < 1$.

Thu hẹp $T|_{\text{Ker } P}$ là một toán tử xác định trên $\text{Ker } P$ với $\text{dom } T|_{\text{Ker } P} = \text{Ker } P \cap F_0$ và

$$\sigma(T|_{\text{Ker } P}) = \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}.$$

Đặc biệt, $T|_{\text{Ker } P}$ khả nghịch trên $\text{Ker } P$ và $\text{sprad}((T|_{\text{Ker } P})^{-1}) < 1$.

Lấy α bất kỳ thì:

$$0 < \alpha < -\ln \max \left\{ \text{sprad}(T|_{\text{Im } P}), \text{sprad}((T|_{\text{Ker } P})^{-1}) \right\}$$

Do đó, tồn tại $M \geq 1$ thì:

$$\|(T|_{\text{Im } P})^k\| \leq M e^{-\alpha k} \text{ và } \|(T|_{\text{Ker } P})^{-k}\| \leq M e^{-\alpha k}, k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.15)$$

Tiếp theo ta chứng minh tính liên tục của các phép chiếu $\{P_n\}$ xác định trên $X_{n,*}^\perp$ thì $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|P_n\| < \infty$ và

$P = \text{diag} [P_n]_{n \in \mathbb{Z}}$, nghĩa là với mọi $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F$, ta có:

$$P(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (P_n x_n)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Thật vậy, từ (2.12) và biểu thức tích phân P ta suy ra $V(\lambda^{-1})PV(\lambda) = P$ với mọi $\lambda \in T$.

Vì P giao hoán với mọi λ thuộc $\{\lambda \in T : |\lambda| = 1\}$ nên P là toán tử chéo, nghĩa là $P = \text{diag} [P_n]_{n \in \mathbb{Z}}$.

Các toán tử P_n được xác định như sau:

Các phần tử $x \in X_{n,*}^\perp$ và định nghĩa $P_n x$ như là phần tử thuộc X_n của dãy $P(x \otimes e_n)$.

Chú ý rằng $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|P_n\| = \|P\| < \infty$.

Các phần tử $m \in \mathbb{Z}$, lấy tùy ý $x \in X_{m,*}^\perp$ và đặt $x = x \otimes e_m$.

Chú ý rằng $x \in F_0$ và $x \in X_0'$. Nếu $x \in F_0$ thì từ (2.14) suy ra:

$$TPx = U(m+1, m)P_m x \otimes e_{m+1} = PTx = P_{m+1}U(m+1, m)x \oplus e_{m+1}$$

Do đó, nếu $x \in X_0'$ thì $U(m+1, m)P_m x = P_{m+1}U(m+1, m)x$.

Nếu $n > m$ thì $U(n, m) = U(n, m+1)U(m+1, m)$.

Điều này suy ra (2.10)

Với $x = x \otimes e_m$, ta thấy rằng $T^j x = U(m+j, m)x \otimes e_{m+j} \in F_0$, $j = 0, 1, \dots, n-m$ với $n \geq m > 0$ hoặc

$0 > n \geq m$ hoặc $n = 0 \geq m$ và $U(0, m)x \in X_0'$.

Khi đó, (2.15) suy ra (2.11) và (i) trong Mệnh đề 2.6 được chứng minh.

Bổ đề 2.7 Các khẳng định sau đây:

$$X_n \subset \text{Ker} P_n \text{ với } n \leq 0 \text{ và } X_n \subset \text{Im } P_n \text{ với } n > 0. \quad (2.16)$$

Chứng minh

Theo (2.6) và (2.4), nếu $x \in X_n$ thì tính liên tục của dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l_p(Z, X)$ thì $x = x_n$ và

$$x_n = U(n, m)x_m \text{ với mọi } n \geq m \in \mathbb{Z}.$$

Ta thấy: $P(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Im } P \subset F_0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Nếu $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} = T^k(P(x_n)_{n \in \mathbb{Z}})$, với $y_n = y_n(k)$ thì $y_n = U(n, n-k)P_{n-k}x_{n-k}$.

Từ (2.10), ta có: nếu $n-k > 0$ hoặc $0 \geq n$ thì

$$y_n = U(n, n-k)P_{n-k}x_{n-k} = P_n U(n, n-k)x_{n-k}.$$

Nhưng $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker } D$ và do đó $U(n, n-k)x_{n-k} = x_n$. Vì vậy,

$$y_n = P_n x_n \quad \forall n > k \text{ hoặc } 0 \leq n. \quad (2.17)$$

Theo (2.15), ta thấy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| T^k (P_n x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p} = 0.$$

Từ (2.17), ta có:

$$\left\| (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p}^p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|^p \geq \sum_{n \leq 0} \|y_n\|^p = \sum_{n \leq 0} \|P_n x_n\|^p.$$

Vì thế, $P_n x_n = 0$, nghĩa là $x_n \in \text{Ker } P_n \quad \forall n \leq 0$.

Để chứng minh ý thứ hai của (2.16), ta chú ý rằng $((I - P_n)x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker } P$.

Vì $T|_{\text{Ker } P}$ khả nghịch trên $\text{Ker } P$ và bất đẳng thức thứ hai của (2.15) thì nên với mọi $k \in \mathbb{N}$, tồn tại một dãy $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in F_0 \cap \text{Ker } P$, với $y_n = y_n(k)$ sao cho

$$T^k (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} = ((I - P_n)x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{và}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| (\lim y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| (T|_{\text{Ker } P})^{-k} ((I - P_n)x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p} = 0 \quad (2.18)$$

Sử dụng đẳng thức $x_n = U(n, m)x_m$ và (2.10), ta thấy với $n - k > 0$ hoặc $n \leq 0$ nên phần thứ n của dãy $T^k (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} = ((I - P_n)x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bằng

$$\begin{aligned} U(n, n-k)y_{n-k} &= (I - P_n)U(n, n-k)x_{n-k} \\ &= U(n, n-k)(I - P_{n-k})x_{n-k} \end{aligned}$$

Mặt khác, $y_{n-k} - (I - P_{n-k})x_{n-k} \in \text{Ker } U(n, n-k)$.

Suy ra:

$$y_{n-k} - (I - P_{n-k})x_{n-k} = 0 \quad \forall n > k. \quad (2.19)$$

Ta vì thế:

$$\left\| (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p}^p = \left\| (y_{n-k})_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p}^p \geq \sum_{n > k} \|y_{n-k}\|^p = \sum_{n > k} \|(I - P_{n-k})x_{n-k}\|^p = \sum_{n > 0} \|(I - P_n)x_n\|^p$$

Từ (2.18) suy ra: $(I - P_n)x_n = 0$, nghĩa là, $x_n \in \text{Ker } P_n, n > 0$.

Ta biết $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker } P$ và do đó $y_{n-k} - (I - P_{n-k})x_{n-k} \in \text{Ker } P_{n-k}, n > k$.

Vì thế, ta chỉ cần kiểm tra $\text{Ker } U(n+k, n) \cap \text{Ker } P_n = \{0\}, \forall n > k, \forall k > 0$ là đủ.

Nếu $n > 0$ và $x \in \text{Ker } U(n+k, n) \cap \text{Ker } P_n$ thì dãy $x = x \otimes e_n \in \text{Ker } P \cap F_0$.

Với $j \in \mathbb{N}$, ta có $T^j x = U(n+j, n)x \otimes e_{n+j}$. Do đó, $T^k x = 0$ vì $U(n+k, n)x = 0$.

Từ bất đẳng thức trong (2.15), ta suy ra:

$$0 = \|T^k x\|_{l_p} \geq M^{-1} e^{-\alpha k} \|x\|_{l_p} = M^{-1} e^{\alpha k} \|x\|$$

Do đó, (2.19) đã được chứng minh và ta đã chứng minh xong kết luận của (2.16) và Bổ đề 2.7.

Để chứng minh (ii) trong Mệnh đề 2.6, ta xét $n=1$ và $m=0$. Chúng ta có thể áp dụng (2.14) đối với dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = x \otimes e_0$ khi $x \in X_0'$ và nhận được:

$U(1,0)P_0x = P_1U(1,0)x$ với $x \in X_0'$. Điều này suy ra: nếu $n > m = 0$ thì

$$U(n,0)P_0x = P_nU(n,0)x \text{ với } x \in X_0'. \quad (2.20)$$

Tiếp theo, ta xét trường hợp $n > 0 \geq m$:

Chọn $x \in X_{m,*}^\perp$ và đặt $y = y_0 + y_0'$, với $y_0 \in X_0$ và $y_0' \in X_0'$.

Ta biết: $P_0y_0 = 0$ theo (2.16)

Khi đó, từ (2.20), ta kết luận:

$$U(n,m)P_mx = U(n,0)P_0(y_0 + y_0') = U(n,0)P_0y_0' = P_nU(n,0)y_0'.$$

Để chứng minh (iii) của Mệnh đề (2.10), ta định nghĩa theo bất đẳng thức thứ hai trong (2.15) ta có:

$$\|(T|_{\text{Ker}P})^{-k}(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_F \leq M e^{-\alpha k} \|(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_F.$$

Vì $T^j(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker}P \cap F_0$ với $j = 0, 1, \dots, k-1$, nên ta có:

$$\|T^k(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_F \geq M^{-1} e^{\alpha k} \|(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_F.$$

Đặc biệt:

$$T^j(x \otimes e_m) = U(n+j, m)x \otimes e_{m+j} \in F_0 \text{ nếu và chỉ nếu } m > 0 \text{ hoặc } m+j < 0 \text{ hoặc } m = -j \text{ và } U(0, -j)x \in X_0'.$$

Điều này suy ra:

$$\|U(m+k, m)x\| \geq M^{-1} e^{\alpha k} \|x\| \text{ nếu } m \text{ thỏa mãn ba điều kiện sau đây:}$$

- a) $m > 0, k \in \mathbb{Z}_+, x \in \text{Ker}P_m$;
- b) $m < 0, k = 0, 1, \dots, -m, x \in \text{Ker}P_m$;
- c) $m=0, k \in \mathbb{Z}_+, x \in X_0' \cap \text{Ker}P_0$.

Tiếp theo ta chứng minh (iv) của Mệnh đề 2.6

Ta xét toán tử nút:

$$N(1,0) = (I - P_1)U(1,0)|_{\text{Ker}P_0} : \text{Ker}P_0 \rightarrow \text{Ker}P_1.$$

$$\text{Ta biết: } \text{Ker}N(1,0) = \{x \in \text{Ker}P_0 : U(1,0)x \in \text{Im}P_1\}$$

Ta chứng minh: $X_0 = \text{Ker}N(1,0)$. Thật vậy:

$U(1,0)(X_0) = X_1 \subset \text{Im} P_1$ theo Bđ 2.3 (ii) và (2.16), điều này suy ra $X_0 \in \text{Ker} N(1,0)$

Để chứng minh chỉ ngược lại, ta giả sử $x \in \text{Ker} P_0$ và $U(1,0)x \in \text{Im} P_1$.

Sử dụng $X_0^\perp = X_0 \oplus X_0'$, phân tích $x = x_0 + x_0'$. Khi đó:

$U(1,0)x_0' = U(1,0)x - U(1,0)x_0 \in \text{Im} P_1$ vì $U(1,0)x \in \text{Im} P_1$ (theo giả thuyết) và

$U(1,0)x_0 \in X_1 \subset \text{Im} P_1$ theo Bđ 2.3 (ii) và (2.16).

Ngoài ra, $x_0' \in \text{Ker} P_0 \cap X_0'$ vì $x_0' = x - x_0$ và $x \in \text{Ker} P_0$ (theo giả thuyết) và

$x_0' \in X_0 \subset \text{Ker} P_0$ theo (2.16).

Do đó, $x_0' \otimes e_0 \in \text{Ker} P \cap F_0$ và từ (2.15), với $k \in \mathbb{N}$, ta có:

Như theo (2.11), với $U(1,0)x_0' \in \text{Im} P_1$ suy ra $\|x_0'\| = 0$ và do đó $x = x_0$, chứng tỏ

$$\text{Ker} N(1,0) \subset X_0.$$

Tiếp theo ta chứng tỏ rằng với mọi $y \in \text{Ker} P_1, \exists x \in \text{Ker} P_0 : (I - P_1)U(1,0)x = y$.

Lấy $y \otimes e_1 \in \text{Ker} P$ và tìm $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} P \cap F_0$ sao cho $T(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = y \otimes e_1$.

Đặc biệt, $U(1,0)x_0 = y$ với $x_0 \in \text{Ker} P_0 \cap X_0'$.

Khi đó, $y = (I - P_1)y = (I - P_1)U(1,0)x_0$ và $N(1,0)$ là toàn ánh từ $\text{Ker} P_0$ đến $\text{Ker} P_1$ với

$$\text{Ker} N(1,0) = X_0.$$

Để hoàn thành chứng minh (iv) trong Mệnh đề 2.6 với $n > 0 \geq m$, ta đề nghị:

$U(n,m) = U(n,1)U(1,0)U(0,m)$ và (2.10) suy ra:

$$(I - P_n)U(n,m)(I - P_m) = [(I - P_n)U(n,1)(I - P_1)]N(1,0)[(I - P_0)U(0,m)(I - P_m)]$$

Theo (iii), các toán tử trong ngoặc vuông, và trong tổng hợp quát $n > 0 \geq m$ trong (iv) suy ra trường hợp $n = 1$ và $m = 0$ đã được chứng minh trên. $\square$

Với $k \geq 1, k, l \in \mathbb{C}$, ta định nghĩa một họ tiến hóa bất biến lũy thừa $\{U_*(k,l)\}_{k \geq 1}$ trên $X^* \otimes b$ vì

$U_*(k,l) = U(-l, -k)^* U$, gọi $D_* : (\xi_k)_{k \in \mathbb{C}} \rightarrow (\xi_k - U_*(k, k-1)\xi_{k-1})_{k \in \mathbb{C}}$ là toán tử sai phân tổng quát.

Ta cũng định nghĩa toán tử $D_\#$ theo quy tắc:

$$D_\# : (\xi_n)_{n \in \mathbb{C}} \rightarrow (\xi_n - U(n+1, n)^*\xi_{n+1})_{n \in \mathbb{C}}$$

$D_\#$ xác định trên không gian $l_{q,*} = l_q(\mathbb{C}, X^*)$, $q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nếu D xác định trên l_p , $p \in (1, \infty)$ và

khi đó, $D_\# = D^*$.

$D_\#$ xác định trên không gian $c_{0,*} = c_0(\mathbb{C}, X^*)$ nếu D xác định trên không gian l_1 và khi đó, $(D_\#)^* = D$.

$D_{\#}$ xác đ nh trên không gian $l_{1,*}$ n u D xác đ nh trên c_0 và khi đó, $D_{\#} = D^*$.

N u $j: (\xi_k)_{k \in \mathbb{C}} \rightarrow (\xi_{-k})_{k \in \mathbb{C}}$ và toán t D_* đ c xác đ nh trên cùng m t không gian d y nh $D_{\#}$ thì $D_* = jD_{\#}j^{-1}$.

Vì D là Fredholm n u và ch n u D^* là Fredholm nên ta suy ra $D_{\#}$ là Fredholm và do đó, D_* là Fredholm. H n n a, $\text{ind } D_* = \text{ind } D$.

Áp d ng (2.4) – (2.5) cho D_* và $\{U_*(k, l)\}_{k \geq l}$ và chú ý r ng $U_*(k, l)^* = U(-l, -k)$ xác đ nh trên không gian ph n x X . Khi đó, v i d y $(\xi_k)_{k \in \mathbb{C}}$ và $(z_k)_{k \in \mathbb{C}}$ t nh ng không gian d y t ng ng, ta có:

$$\begin{aligned} \text{Ker } D_* &= \{(\xi_k)_{k \in \mathbb{C}} : \xi_k = U_*(k, l)\xi_l, k \geq l\}, \\ \text{Ker } (D_*)^* &= \{(z_k)_{k \in \mathbb{C}} : z_l = U_*(k, l)z_k, k \geq l\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

V i $k \in \mathbb{C}$, ta g i i thi u các không gian con $Z_{k,*} \subset X^*, Z_k \subset X$ nh sau:

$$\begin{aligned} Z_{k,*} &= \{\xi \in X^* : \exists (\xi_l)_{l \in \mathbb{C}} \in \text{Ker } D_*, \xi = \xi_k\}, \\ Z_k &= \{z \in X : \exists (z_l)_{l \in \mathbb{C}} \in \text{Ker } (D_*)^*, z = z_k\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

B đ 2.8

V i m i $k \in \mathbb{C}$, ta có $\Phi_k = X_{-k}$ và $\Phi_{k,*} = X_{-k,*}$.

Ch ng minh

Theo các bi u th c (2.21) và (2.22), $z \in Z_k$ n u và ch n u $z = z_k$ v i d y $(z_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ th a

$$z_l = U_*(k, l)^* z_k = (U(-l, -k))^* z_k = U(-l, -k) z_k \quad \forall k \geq l.$$

Theo các bi u th c (2.4) và (2.6), $x \in X_m$ n u và ch n u $x = x_m$ v i d y $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ th a

$$x_n = U(n, m) x_m \quad \forall n \geq m.$$

Đ t $z_{-n} = x_n, n \in \mathbb{Z}$, do đó: $Z_k = X_{-k}$.

V i c ch ng minh $Z_{k,*} = X_{-k,*}$ là t ng t . □

Áp d ng M nh đ 2.6 cho h t i n hóa $\{U_*(k, l)\}_{k \geq l}$: m t l ng phân c a h thu h p $\{U_*(k, l)|_{Z_l^\perp}\}_{k \geq l}$,

v i $k \geq l > 0$ và $0 \geq k \geq l$ g i ng nh B đ 2.5 và tính ch t toàn ánh c a toán t nút thu g n t ng ng v i h thu h p này. S d ng B đ 2.8 và đ t $n = -l$ và $m = -l$ v i $n \geq m$ trong $\mathbb{C}$, ta có các

k t lu n sau đ i v i h $\{U(n, m)^*|_{X_n^\perp}\}_{n \geq m}$ nh sau:

M nh đ 2.9 T n t i m t h $\{P_{n,*}\}_{n \in \mathbb{C}}$ g m các phép chi u đ nh nghĩa trên $X_n^\perp$ sao cho $\sup_{n \in \mathbb{C}} \|P_{n,*}\| < \infty$

và các h ng s $M \geq 1, \alpha > 0$ th a:

(i) Nếu $n \geq m \geq 0$ hoặc $0 > n \geq m$ thì

$$P_{m,*}U(n,m)^*\xi = U(n,m)^*P_{n,*}\xi \text{ với } \xi \in X_n^\perp.$$

Với thu hẹp $U(n,m)^*|_{\text{Im } P_n}: \text{Im } P_n \rightarrow \text{Im } P_{m,*}$, ta có:

$$\|U(n,m)^*|_{\text{Im } P_n}\| \leq Me^{-\alpha(n-m)};$$

(ii) Nếu $n \geq 0 > m$ và $\xi \in X_n^\perp$ thì

$$U(n,m)^*P_{n,*}\xi = P_{m,*}U(0,m)^*\xi', \quad (2.23)$$

với $\xi' \in X_{0,*}'$ là phần bù của $\xi = U(n,0)^*\xi$ trong số biểu diễn $\xi = \xi_0 \oplus \xi_0', \xi_0 \in X_{0,*}$, trong đó với
tổng trực tiếp $X_0^\perp = X_{0,*} \oplus X_{0,*}'$.

(iii) Nếu $n \geq m \geq 0$ hoặc $0 > n \geq m$ thì thu hẹp $U(n,m)^*|_{\text{Ker } P_n}: \text{Ker } P_n \rightarrow \text{Ker } P_{m,*}$ là toán tử khả nghịch và

$$\|(U(n,m)^*|_{\text{Ker } P_n})^{-1}\| \leq Me^{-\alpha(n-m)}, \quad (2.24)$$

(iv) Nếu $n \geq 0 > m$ thì toán tử rút thu gọn $N_*(n,m)$ được định nghĩa như sau:

$$N_*(n,m) = (I - P_{m,*})U(n,m)^*|_{\text{Ker } P_n}: \text{Ker } P_n \rightarrow \text{Ker } P_{m,*} \quad (2.25)$$

là toàn ánh với $\text{Ker } N_*(n,m) = X_{n,*}$.

(v) Các khả năng như sau xảy ra:

$$X_{n,*} \subset \text{Ker } P_{n,*} \text{ với } n \geq 0 \text{ và } X_{n,*} \subset \text{Im } P_{n,*} \text{ với } n < 0. \quad (2.26)$$

Tính bất biến của phần bù trực tiếp:

Tổng trực tiếp: $X = X_{n,*}^\perp \oplus Y_n$, ta suy ra:

$$(Y_n)^* = (X_{n,*}^\perp)^\perp = X_{n,*}, n \in \mathbb{Z} \quad (2.27)$$

Theo Bổ đề 2.3 (i), $\dim X_{n,*} < \infty$ và do đó $X_{n,*}$ có phần bù trực tiếp trong X^* .

Giả sử $Q_{n,*}$ là một phép chiếu bất biến trên X^* thì $\text{Im } Q_{n,*} = X_{n,*}$.

Theo Bổ đề 2.3 (iii), ta có: $U(n,m)^*(X_{n,*}) \subseteq X_{m,*}, n \geq m$ hoặc

$$U(n,m)^*Q_{n,*} = Q_{m,*}U(n,m)^*Q_{n,*}. \quad (2.28)$$

Chú ý rằng Y_n là phần bù trực tiếp tùy ý của các không gian con $X_{n,*}^\perp$ có định nghĩa duy nhất trong X và nói chung $U(n,m)(Y_m) \not\subset Y_n$. Áp dụng công thức (2.2) với $P = Q_{m,*}$ và $Q = Q_{n,*}$ với $A = U(n,m)^*$

trong s phân tích $X^* = \text{Im}Q_{m,*} \oplus \text{Ker}Q_{m,*}$ và $X^* = \text{Im}Q_{n,*} \oplus \text{Ker}Q_{n,*}$, ta s đ ng nh t thu h p

$U(n,m)^*|_{X_{n,*}}$ và toán t $U(n,m)^*Q_{n,*}: X_{n,*} \rightarrow X_{m,*}$. Đây là toán t kh ngh ch, h u h n chi u.

Theo (2.27) và (2.28), $(U(n,m)^*Q_{n,*})^* = Q_{m,*}^*U(n,m)Q_{m,*}^*: Y_m \rightarrow Y_n$.

N u $n \geq 0$ thì $X_{n,*} \subset \text{Ker}P_{n,*}$ theo (2.26) và do đó (2.24) suy ra:

$$\|U(n,m)^*\xi\| \geq M^{-1}e^{\alpha(n-m)}\|\xi\| \quad \forall \xi \in X_{n,*}. \quad (2.29)$$

Do đó, $\|(U(n,m)^*Q_{n,*})^{-1}\|_{L(X_{m,*}, X_{n,*})} \leq Me^{-\alpha(n-m)}$.

L y liên h p (2.28) và s đ ng (2.27), ta k t lu n r ng toán t :

$$Q_{n,*}^*U(n,m) = Q_{m,*}^*U(n,m)Q_{m,*}^*: Y_m \rightarrow Y_n \quad (2.30)$$

kh ngh ch, và

$$\|(Q_{n,*}^*U(n,m)Q_{m,*}^*)^{-1}\|_{L(Y_n, Y_m)} \leq Me^{-\alpha(n-m)}, n \geq m \geq 0, \quad (2.31)$$

v i Y_n là ph n bù tr c ti p c a $X_{n,*}^\perp$ trong X .

Ti p theo, ta đ ng nh t ph n bù tr c ti p c a $X_{n,*}^\perp$ trong X , $n \geq 0$, mà $U(n,m)$ – b t bi n. C đ nh Y_0

b t kỳ sao cho $X_{0,*}^\perp \oplus Y_0 = X$. V i m i $n \geq 0$, ta đ nh nghĩa

$$W_n = \{U(n,0)y_0 : y_0 \in Y_0\}.$$

B đ 2.10 V i m i $n \geq m \geq 0$ trong $\mathbb{C}_+$, các kh ng đ nh sau th a:

(i) Không gian con W_n đóng;

(ii) $X_{n,*}^\perp \oplus W_n = X$;

(iii) $U(n,m)W_m \subseteq W_n, n \geq m \geq 0$;

(iv) Thu h p $U(n,m)|_{W_m}: W_m \rightarrow W_n$ kh ngh ch và

$$\|(U(n,m)|_{W_m})^{-1}\| \leq Me^{-\alpha(n-m)}. \quad (2.32)$$

Ch ng minh

(i) Các đ ng th c (2.30) và (2.31) v i $n \geq m = 0$ suy ra :

$$\forall y_0 \in Y_0 : M^{-1}e^{\alpha n}\|y_0\| \leq \|Q_{n,*}^*U(n,0)Q_{0,*}^*y_0\| = \|Q_{n,*}^*\| \|U(n,0)y_0\| \quad (2.33)$$

Do đó, $\|U(n,0)y_0\| \geq c\|y_0\|$ v i $c > 0$, và (i) th a.

(ii) Đ ch ng minh $X_{n,*}^\perp \cap W_n = \{0\}$, ta gi s $x = U(n,0)y_0 \in X_{n,*}^\perp$ v i $y_0 \in Y_0$.

V i $U(n,0)^*: X_{n,*} \rightarrow X_{0,*}$ là đ ng c u theo B đ 2.3 (iii), n u $\xi_0 \in X_{0,*}$ thì

$$\xi_0 = U(n, 0) * \xi_n \text{ v i } \xi_n \in X_{n,*}.$$

Vì $x \in X_{n,*}^\perp$, v i m i $\xi_0 \in X_0$ ta có:

$$\langle y_0, \xi_0 \rangle = \langle y_0, U(n, 0) * \xi_n \rangle = \langle U(n, 0) y_0, \xi_n \rangle \langle x, \xi_n \rangle = 0.$$

Do đó, $y_0 \in X_{0,*}^\perp \cap Y_0$ và $y_0 = 0 = x$.

Đ ch ng minh $(W_n + X_{n,*}^\perp)^\perp = W_n^\perp \cap X_{n,*} = \{0\}$, ta gi s r ng $\xi_n \in W_n^\perp \cap X_{n,*}$.

Khi đó, v i m i $y_0 \in Y_0$ và $x = U(n, 0) y_0 \in W_n$, ta có:

$$0 = \langle \xi_n, x \rangle = \langle \xi_n, U(n, 0) y_0 \rangle = \langle U(n, 0) * \xi_n, y_0 \rangle.$$

Do đó, $U(n, 0) * \xi_n \in (Y_0)^\perp$.

M t khác, $\xi_n \in X_{n,*}$ và theo B đ 2.3 (iii) suy ra $U(n, 0) * \xi_n \in X_{0,*}$.

Do đó, $U(n, 0) * \xi_n = 0$ và $\xi_n = 0$ theo B đ 2.3 (iii)

V y, ta ch ng minh xong (ii).

(iii) N u $x = U(m, 0) y_0 \in W_m$ thì $U(n, m) x = U(n, 0) y_0 \in W_n$.

(iv) Theo (ii), ta có: $(W_n)^* = (X_{n,*}^\perp)^\perp = X_{n,*}$.

Theo (iii), ta đang trong tr ng h p khi mà $U(n, m)^*|_{X_{n,*}}: X_{n,*} \rightarrow X_{m,*}$ là toán t liên h p c a toán t

$$U(n, m)|_{W_m}: W_m \rightarrow W_n.$$

Theo (2.29) suy ra (2.32) vì các toán t kh ngh ch thì chu n c a các ngh ch đ o là b ng nhau. $\square$

Ta xét t ng tr c ti p $X^* = X_n^\perp \oplus Y_{n,*}$, $n \leq 0$, v i $Y_{n,*}$ là m t ph n bù tr c ti p b t kỳ $U(n, m)^* - b t$

bi n c a $X_n^\perp$ (có đ i chi u h u h n) trong X^* . Ta có th đ ng nh t $(Y_{n,*})^* = (X_n^\perp)^\perp = X_n$ và đ nh

nghĩa $W_{n,*} = \{U(0, n) * \xi_0 \in Y_{0,*}\}$, $n \leq 0$.

B đ 2.11 V i m i $m \leq n \leq 0$ trong $\mathbb{C}_-$, các kh ng đ nh sau th a:

(i) Không gian con $W_{n,*}$ đóng;

(ii) $X_n^\perp \oplus W_{n,*} = X^*$;

(iii) $U(n, m)^* W_{n,*} \subseteq W_{m,*}$;

(iv) thu h p $U(n, m)^*|_{W_{n,*}}: W_{n,*} \rightarrow W_{m,*}$ kh ngh ch và

$$\left\| \left(U(n, m)^*|_{W_{n,*}} \right)^{-1} \right\| \leq M e^{-\alpha(n-m)}.$$

Ch ng minh

Ta có:

$X_n \subset \text{Ker} P_n, n \leq 0$ trong (2.16) và Mệnh đề 2.6 (iii) suy ra :

$$U(0, n)|_{X_n} : X_n \rightarrow X_0 \text{ kh\ ng h ch v\ i } \left\| \left(U(0, n)|_{X_n} \right)^{-1} \right\| \leq M e^{\alpha n}, n \leq 0.$$

V\ i m\ i phép chi\ u b\ ch\ n Q_n trên X v\ i $\text{Im } Q_n = X_n$, ta có:

$$U(0, n)|_{X_n} = U(0, n)Q_n = Q_0 U(0, n)Q_n. \text{ Qua toán t\ liên h\ p, (2.33), ta k\ t lu\ n:}$$

$$\|U(0, n)^* \xi\| \geq c \|\xi\| \forall \xi \in Y_{0,*} = (X_0)^*.$$

Đi\ u này suy ra (i).

Các ch\ ng minh (ii) – (iv) t\ ng t\ nh B\ đ\ 2.10 □

Đ\ nh lý 2.12 Cho X là không gian Banach ph\ n x, toán t\ D là Fredholm trên $l_p(Z, X), p \in [1, \infty)$ ho\ c trên $c_0(Z, X)$, khi đó, h\ ti\ n hóa r\ i r\ c $\{U(n, m)\}_{n \geq m}, n, m \in \mathbb{Z}$ có l\ ng phân lũy th\ a $\{P_n^+\}_{n \geq 0}$ trên Z_+ và $\{P_n^-\}_{n \leq 0}$ trên Z_- .

Ch\ ng minh

V\ i $n > 0$:

Theo Mệnh đề 2.6 và B\ đ\ 2.10 (ii) ta có:

$$X = X_{n,*}^\perp \oplus W_n = \text{Im } P_n \oplus \text{Ker } P_n \oplus W_n, n > 0.$$

G\ i P_n^+ là phép chi\ u trên X v\ i

$$\text{Im } P_n^+ = \text{Im } P_n \text{ và } \text{Ker } P_n^+ = \text{Ker } P_n \oplus W_n, n > 0 \quad (2.34)$$

V\ i $n \geq m > 0$: n\ u $x \in \text{Im } P_m^+$ thì $U(n, m)x \in \text{Im } P_n^+$ theo (2.10).

N\ u $x = y + z \in \text{Ker } P_m^+$ v\ i $y \in \text{Ker } P_m, z \in W_m$, thì

$U(n, m)x = U(n, m)y + U(n, m)z \in \text{Ker } P_n^+$ theo (2.10) và B\ đ\ 2.10 (iii). Đi\ u này suy ra:

$$U(n, m)P_m^+ = P_n^+ U(n, m) \text{ v\ i } n \geq m > 0.$$

T\ (2.11) ta có:

$$\left\| U(n, m)|_{\text{Im } P_m^+} \right\| = \left\| U(n, m)|_{\text{Im } P_m} \right\| \leq M e^{-\alpha(n-m)}, n \geq m > 0.$$

Ma\ tr\ n bi\ u di\ n (2.2) c\ a toán t\ $A = U(n, m)|_{\text{Ker } P_m^+}$ trong $\text{Ker } P_m^+ = \text{Ker } P_m \oplus W_m$ và $\text{Ker } P_n^+ = \text{Ker } P_n \oplus W_n$ có đ\ ng chéo (theo (2.10) và B\ đ\ 2.10 (iii)) v\ i các ma\ tr\ n con chéo hóa kh\ ng h ch $U(n, m)|_{\text{Ker } P_m}$ và $U(n, m)|_{W_m}$.

Khi đó, toán t\ $U(n, m)|_{\text{Ker } P_m}$ kh\ ng h ch và kh\ ng h ch đ\ o c\ a nó th\ a Mệnh đề 2.6 (iii)

Toán t\ $U(n, m)|_{W_m}$ th\ a (2.27)

Do đó, ta có: $\left\| \left(U(n, m)|_{\text{Ker} P_m^+} \right)^{-1} \right\| \leq M e^{-\alpha(n-m)} \quad \forall n \geq m > 0.$

Tiếp theo, ta xét $n = 0$:

Ta biết X_0' là phần bù trực tiếp của X_0 trong $X_{0,*}^\perp$, và $X_0 \subset \text{Ker} P_0$ theo (2.16) và $\text{Ker} P_0 \subset X_{0,*}^\perp$ theo Mệnh đề 2.6

Ta ký hiệu:

$$\tilde{X}_0 = X_0' \cap \text{Ker} P_0.$$

Với mọi $x \in \text{Ker} P_0$, sẽ dễ dàng biểu diễn tổng trực tiếp $X_{0,*}^\perp = X_0 \oplus X_0'$, ta viết: $x = x_0 + x_0'$ với duy nhất $x_0 \in X_0, x_0' \in X_0'$.

Khi đó, $x_0' = x - x_0 \in \text{Ker} P_0$ và do đó $x_0' \in \tilde{X}_0$.

Do đó, $\tilde{X}_0$ là phần bù trực tiếp của X_0 trong $\text{Ker} P_0$, nghĩa là $X_0 \oplus \tilde{X}_0 = \text{Ker} P_0$.

Ta chứng minh:

$$U(1, 0): \tilde{X}_0 \rightarrow \text{Ker} P_1 \text{ là một đẳng cấu.} \quad (2.35)$$

Thật vậy, nếu $x \in \text{Ker} P_1$ thì theo tính toàn ánh của toán tử nút $N(1, 0)$, từ Mệnh đề 2.6 (iv), tồn tại $y \in \text{Ker} P_0$ thà $N(1, 0)y = (I - P_1)U(1, 0)y = x$.

Dùng tổng trực tiếp $\text{Ker} P_0 = X_0 \oplus \tilde{X}_0$ để viết $y = y_0 + \tilde{y}_0$ với $y_0 \in X_0, \tilde{y}_0 \in \tilde{X}_0$.

Vì $\text{Ker} N(1, 0) = X_0$ nên ta có:

$$x = N(1, 0)y = N(1, 0)\tilde{y}_0 = (I - P_1)U(1, 0)\tilde{y}_0.$$

Vì $\tilde{y}_0 \in \tilde{X}_0 \subset \text{Ker} P_0$ nên ta có: $P_0\tilde{y}_0 = 0$

Nhưng $\tilde{y}_0 \in \tilde{X}_0 \subset X_0'$ và (2.20) nên suy ra:

$$0 = U(1, 0)P_0\tilde{y}_0 = P_1U(1, 0)\tilde{y}_0.$$

Do đó, $U(1, 0)\tilde{y}_0 \in \text{Ker} P_1$ và $U(1, 0)\tilde{y}_0 = (I - P_1)U(1, 0)\tilde{y}_0 = x$.

Do đó, $U(1, 0): \tilde{X}_0 \rightarrow \text{Ker} P_1$ là toàn ánh.

Tiếp theo, nếu $U(1, 0)\tilde{y}_0 = 0$ với $\tilde{y}_0 \in \tilde{X}_0 \subset \text{Ker} P_0$, thì $N(1, 0)\tilde{y}_0 = 0$.

Vì $\text{Ker} N(1, 0) = X_0$ nên theo Mệnh đề 2.6, ta có $\tilde{y}_0 \in X_0$ và do đó, $\tilde{y}_0 = 0$ vì

$$X_0 \cap \tilde{X}_0 = \{0\}.$$

Ta chứng minh xong (2.35)

Định nghĩa một phép chiếu P_0^+ trên X như sau:

$$\text{Im} P_0^+ = \text{Im} P_0 \oplus X_0 \text{ và } \text{Ker} P_0^+ = Y_0 \oplus \overset{\circ}{X}_0 \quad (2.36)$$

Sao cho $X = \text{Im} P_0^+ \oplus \text{Ker} P_0^+$ theo (2.8) và $X_{0,*}^\perp = \text{Ker} P_0 \oplus \text{Im} P_0$ theo M nh đ 2.6

Theo (2.34), ta bi t:

$$\text{Im} P_1^+ = \text{Im} P_1 \text{ và } \text{Ker} P_1^+ = W_1 \oplus \text{Ker} P_1.$$

Chú ý r ng, theo B đ 2.3 (ii) và (2.16), ta có: $U(1,0)(X_0) = X_1 \subset \text{Im} P_1$.

Cũng nh :

$$U(1,0)(\text{Im} P_0) \subset \text{Im} P_1. \quad (2.37)$$

Th t vậy, theo M nh đ 2.6 (ii), ta có:

$$\text{N u } x = P_0 x \text{ thì } U(1,0)x = U(1,0)P_0 x = P_1 U(1,0)y_0' \in \text{Im} P_1.$$

$$\text{Do đó, } U(1,0)\text{Im} P_0^+ \subset \text{Im} P_1^+.$$

Ta cũng có: $U(1,0)(Y_0) = W_1 \subset \text{Ker} P_1^+$ theo B đ 2.10 (iii) và

$$U(1,0)(\overset{\circ}{X}_0) = \text{Ker} P_1 \subset \text{Ker} P_1^+ \text{ theo (2.35).}$$

$$\text{Đi u này ch ng t } U(1,0)(\text{Ker} P_0^+) \subset \text{Ker} P_1^+ \text{ và } U(1,0)P_0^+ = P_1^+ U(1,0).$$

V i $n \geq 2$ và $x \in \text{Im} P_0^+$, ta có:

$$\|U(n,0)x\| = \|U(n,1)U(1,0)x\| \leq M e^{-\alpha(n-1)} \|U(1,0)x\| \leq M' e^{-\alpha n} \|x\| \text{ vì } U(1,0)x \in \text{Im} P_1^+.$$

Thu h p $U(n,0)|_{\text{Ker} P_0^+} = U(n,1)|_{\text{Ker} P_1^+} + U(1,0)|_{\text{Ker} P_0^+}$ là kh ngh ch t $\text{Ker} P_0^+ \rightarrow \text{Ker} P_n^+$. Th t v y,

$U(n,1)|_{\text{Ker} P_1^+}: \text{Ker} P_1^+ \rightarrow \text{Ker} P_n^+$ kh ngh ch theo ch ng minh v tính l ng phân v i $n \geq 1$.

$U(1,0)|_{\text{Ker} P_0^+}: \text{Ker} P_0^+ \rightarrow \text{Ker} P_1^+$ là t ng tr c ti p c a hai toán t :

$$U(1,0)|_{Y_0}: Y_0 \rightarrow W_1 \text{ và } U(1,0)|_{\overset{\circ}{X}_0}: \overset{\circ}{X}_0 \rightarrow \text{Ker} P_1.$$

Toán t đ u tiên kh ngh ch theo B đ 2.10 (iv) và toán t th hai kh ngh ch theo (2.35).

$$\text{c l ng lũy th a cho } \left\| \left(U(n,0)|_{\text{Ker} P_0^+} \right)^{-1} \right\| \text{ suy ra t c l ng cho } \left\| \left(U(n,1)|_{\text{Ker} P_1^+} \right)^{-1} \right\|.$$

V i $n \leq 0$:

Đ u tiên ta xet $n < 0$:

Theo M nh đ 2.9 và B đ 2.11 (ii), ta có t ng tr c ti p

$$X^* = X_n^\perp \oplus W_{n,*} = \text{Im} P_{n,*} \oplus W_{n,*}, n < 0.$$

G i $R_{n,*}$ là phép chi u trên X^* th a

$$\text{Im} R_{n,*} = \text{Im} P_{n,*} \text{ và } \text{Ker} R_{n,*} = \text{Ker} P_{n,*} \oplus W_{n,*}, n < 0. \quad (2.38)$$

Nh trong ch ng minh Đ nh lý 2.12 v i tr ng h p $n > 0$, : v i $0 > n \geq m$, ng i ta ch ng minh đ c:

$$U(n, m)^* R_{n,*} = R_{m,*} U(n, m)^*; \quad (2.39)$$

$$\|U(n, m)^*|_{\text{Im } R_{n,*}}\| \leq M e^{-\alpha(n-m)}; \quad (2.40)$$

Thu h p $U(n, m)^*|_{\text{Ker } R_{n,*}} : \text{Ker } R_{n,*} \rightarrow \text{Ker } R_{m,*}$ là kh ngh ch và

$$\left\| \left(U(n, m)^*|_{\text{Ker } R_{n,*}} \right)^{-1} \right\| \leq M e^{-\alpha(n-m)}. \quad (2.41)$$

Ti p theo ta xét $n = 0$:

G i $X_{0,*}'$ là ph n bù tr c ti p c a $X_{0,*}$ trong $X_0^\perp$ và theo (2.26), $X_{0,*} \subset \text{Ker } P_{0,*}$.

Đ t: $\tilde{X}_{0,*} = X_{0,*}' \cap \text{Ker } P_{0,*}$ sao cho

$$\text{Ker } P_{0,*} = X_{0,*} \oplus \tilde{X}_{0,*}.$$

Đ nh nghĩa phép chi u $R_{0,*}$ trên X^* nh sau:

$$\text{Im } R_{0,*} = \text{Im } P_{0,*} \oplus X_{0,*}, \quad \text{Ker } R_{0,*} = Y_{0,*} \oplus \tilde{X}_{0,*}. \quad (2.42)$$

Bây gi ta ch ng minh (2.39) – (2.41) th a v i $0 \geq n \geq m$:

T (2.38), ta có:

$$\text{Im } R_{-1,*} = \text{Im } P_{-1,*}, \quad \text{Ker } R_{-1,*} = \text{Ker } P_{-1,*} \oplus W_{-1,*}. \quad (2.43)$$

Theo B đ 2.3(iii) và (2.26), ta có:

$$U(0, -1)^*(X_{0,*}) \subset X_{-1,*}$$

Nh trong (2.37), ta có: $U(0, -1)^*(\text{Im } P_{0,*}) \subset \text{Im } P_{-1,*}$.

Th t v y,

Theo (2.23), n u $\xi = P_{0,*}\xi$ thì $U(0, -1)^*\xi \in \text{Im } P_{-1,*}$.

Do đó, ta có: $U(0, -1)^*(\text{Im } R_{0,*}) \subset \text{Im } R_{-1,*}$.

Đ ch ng t $U(0, -1)^*(\text{Ker } R_{0,*}) \subset \text{Ker } R_{-1,*}$, tr c h t, ta th y r ng:

$$U(0, -1)^*: \tilde{X}_{0,*} \rightarrow \text{Ker } P_{-1,*} \text{ là đ ng c u.} \quad (2.44)$$

Ch ng minh (2.44) t ng t nh (2.35) và dùng toán t nút thu g n (2.25).

B đ 2.11 (iii), (iv) suy ra:

$U(0, -1)^*: Y_{0,*} \rightarrow W_{-1,*}$ là đ ng c u.

Do đó, theo (2.42), (2.43) và (2.44) ta k t lu n r ng $U(0, -1)^*: \text{Ker } R_{0,*} \rightarrow \text{Ker } R_{-1,*}$ là đ ng c u.

Vì v y, $U(0, -1)^* R_{0,*} = R_{-1,*} U(0, -1)^*$.

Các đánh giá (2.40) – (2.41) với $0 \geq n \geq m$ suy ra tất cả các cl với $0 > n \geq m$ đã được chứng minh trong Mệnh đề 2.9 và Bổ đề 2.10.

Để hoàn tất chứng minh Định lý 2.12 với $n \leq 0$, ta ký hiệu:

$$P_n^- = (R_{n,*})^*, n \leq 0 \text{ và th y r ng:}$$

$$\text{Im } P_n^- = \text{Im } (R_{n,*})^\perp = (\text{Ker } R_{n,*})^\perp = (\text{Im } R_{n,*})^* \text{ và}$$

$$\text{Ker } P_n^- = \text{Ker } (R_{n,*})^* = (\text{Im } R_{n,*})^\perp = (\text{Ker } R_{n,*})^*. \quad (2.45)$$

Qua các toán tử chi u trong (2.40) – (2.41), với $0 \geq n \geq m$, ta có:

$$\left\| U(n, m)|_{\text{Im } P_m^-} \right\| \leq M e^{-\alpha(n-m)}; \left\| \left(U(n, m)|_{\text{Ker } P_m^-} \right)^{-1} \right\| \leq M e^{-\alpha(n-m)},$$

Và Định lý 2.12 với $n \leq 0$ đã được chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.13 Nếu D là Fredholm thì với mọi $n \in \mathbb{Z}$, ta có: $\dim X_n = \dim \text{Ker } D$ và

$$\dim X_{n,*} = \dim \text{Ker } D^*.$$

Chứng minh

Có thể nh $x \in X_n$ và đặt $x_k = U(k, n)x$ với $k \geq n$.

Theo Bổ đề 2.3 (ii), $x_k \in X_k$.

Dùng (2.34) và Bổ đề 2.7, với $k > \max\{n, 0\}$, ta có $x_k \in \text{Im } P_k^+$.

Do đó, $\|x_k\| \leq c e^{-\alpha k}$ với $k \geq 0$. Nếu $k < n$ thì theo Bổ đề 2.3 (ii), tồn tại duy nhất $y_{x_k} \in X_k$ sao cho $x = U(n, k)y_{x_k}$.

Sử dụng (2.38) và (2.45) với $k < \min\{0, n\}$, ta có:

$$\text{Ker } P_k^- = (\text{Im } R_{k,*})^\perp = (\text{Im } P_{k,*})^\perp \supset X_k \text{ vì } \text{Im } P_{k,*} \subset X_k^\perp \text{ trong Mệnh đề 2.9.}$$

Do đó, $\|x\| = \|U(n, k)y_{x_k}\| \geq c e^{-\alpha k} \|y_{x_k}\|$ hoặc $\|x_k\| \leq c e^{\alpha k}$ với $k < 0$.

Do đó, bất đẳng thức với mọi $x \in X_n$, ta nhận được dãy $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ thỏa $x_k = U(k, m)x_m$ với mọi $k \geq m \in \mathbb{Z}$.

Do đó, $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker } D$ và ta có thể định nghĩa toán tử toàn ánh tuyến tính

$$j_n : X_n \rightarrow \text{Ker } D : x \mapsto (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Đây là toàn ánh theo định nghĩa của X_n . Do đó, X_n và $\text{Ker } D$ đẳng cấu nhau.

Tương tự, $X_{n,*}$ đẳng cấu với $\text{Ker } D^*$. $\square$

Bổ đề 2.14 Một hàm $u \in \text{dom } G$ - liên tục xác định của toán tử G xác định trên L_p (hoặc trên $C_0(\cdot, X)$) nếu và chỉ nếu $u \in L_p \cap C_0(\cdot, X)$ (hoặc $u \in C_0(\cdot, X)$) và tồn tại $f \in L_p$ (hoặc $f \in C_0(\cdot, X)$) sao cho

$$u(t) = U(t, \tau)u(\tau) - \int_{\tau}^t U(t, s) f(s) ds, \quad \forall t \geq \tau \in J. \quad (2.46)$$

Nếu (2.46) thì $Gu = f$.

Mệnh đề 2.15 Nếu D Fredholm trên $l_p(\mathbb{C}, X)$, $p \in [1, \infty)$ hoặc trên $c_0(\mathbb{C}, X)$ thì toán tử n rút ra từ $N(n, m)$, $n \geq 0 \geq m$, là Fredholm. Hơn nữa, $\dim \text{Ker} D = \dim \text{Ker} N(n, m)$, $\text{codim Im} D = \text{codim Im} N(n, m)$ và $\text{ind} D = \text{ind} N(n, m)$.

Chứng minh

Ta xét các không gian $\{P_n^+\}_{n \geq 0}$ và $\{P_n^-\}_{n \leq 0}$ và $\{U(n, m)\}_{n \geq m}$ như đã cho trong Định lý 2.12.

Đầu tiên:

$N(n, m) = N(n, 0)N(0, 0)N(0, m)$, $n \geq 0 \geq m$ và các toán tử $N(n, 0)$, $n > 0$ và $N(0, m)$, $0 > m$ đều khả nghịch.

Do đó, ta chỉ cần chứng minh $N(0, 0)$ là Fredholm và $\text{ind} D = (\dim X_0 - \dim X_{0,*})$, (xem Hình 2.13)

Ta biết rằng $\text{Im} D$ đóng và ta muốn chứng tỏ $\text{Im} N(0, 0)$ cũng đóng.

Trước hết, ta chứng minh nếu $y = (I - P_0^+)x$, $x \in \text{Ker} P_0^-$ thì $y \otimes e_0 \in \text{Im} D$.

Thật vậy: định nghĩa $x_n = \left(U(0, n)|_{\text{Ker} P_n^-} \right)^{-1} x = 0$ với $n < 0$ và $x_n = U(n, 0)P_0^+ x$ với $n \geq 0$. Khi đó, với $n < 0$, ta có:

$$x_n - U(n, n-1)x_{n-1} = \left(U(0, n)|_{\text{Ker} P_n^-} \right)^{-1} x = 0.$$

Trong trường hợp $n > 0$, ta có:

$$x_n - U(n, n-1)x_{n-1} = U(n, 0)P_0^+ x - U(n, 0)P_0^+ x = 0.$$

Với $n = 0$, ta có:

$$\begin{aligned} x_0 - U(0, -1)x_{-1} &= P_0^{+*} - U(0, -1) \left(U(0, -1)|_{\text{Ker} P_n^-} \right)^{-1} x \\ &= P_0^+ x - (I - P_0^-)x = P_0^+ x - x = -y \end{aligned}$$

với $x \in \text{Ker} P_0^-$.

Do đó, $y \otimes e_0 \in \text{Im} D$.

Tiếp theo, ta chứng minh: nếu $y \otimes e_0 \in \text{Im} D$ và $y \in \text{Ker} P_0^+$ thì $y \in \text{Im} N(0, 0)$.

Thật vậy, với $x \in l_p(Z, X)$, ta có: $Dx = y \otimes e_0$. Do đó, $0 = x_n - U(n, 0)x_0$ với $n > 0$.

Điều này suy ra:

$$x_0 \in \text{Im} P_0^+.$$

Ta cũng có: $0 = x_{-1} - U(-1, n)x_n$ v i $n \leq -1$.

Do đó, $x_{-1} \in \text{Ker} P_{-1}^-$ và $U(0, -1)x_{-1} \in \text{Ker} P_0^-$.

Cu i cùng, $y = x_0 - U(0, -1)x_{-1}$ suy ra r ng:

$$y = (I - P_0^+)y = (I - P_0^+)x_0 - (I - P_0^+)U(0, -1)x_{-1} = -(I - P_0^+)U(0, -1)x_{-1} \in \text{Im} N(0, 0) \quad \text{vì} \quad x_0 \in \text{Im} P_0^+ \quad \text{và} \\ U(0, -1)x_{-1} \in \text{Ker} P_0^-.$$

Bây gi , ta gi s $y = \lim_{j \rightarrow \infty} y^{(j)}$, v i $y^{(j)} \in \text{Im} N(0, 0)$.

Theo kh ng đ nh th nh t, $y^{(j)} \otimes e_0 \in \text{Im} D, j \in \mathbb{N}$.

Vì $\text{Im} D$ đóng nên $y \otimes e_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} y^{(j)} \otimes e_0 \in \text{Im} D$.

Vì $\text{Im} N(0, 0) \subset \text{Ker} P_0^+$ nên ta có:

$$y \in \text{Ker} P_0^+.$$

Theo kh ng đ nh hai, $y \in \text{Im} N(0, 0)$ và do đó $\text{Im} N(0, 0)$ đóng.

Ti p theo ta ch ng minh các bi u th c v i các s khuy t. Ta có:

$$\text{Ker} N(0, 0) = \text{Ker} P_0^- \cap \text{Im} P_0^+.$$

Do đó, n u $x \in \text{Ker} N(0, 0)$ thì $\|x_n\| \leq ce^{-\alpha n}$, v i $x_n = U(n, 0)x, n \geq 0$ v i $x \in \text{Im} P_0^+$.

Ngoài ra, $\|x_n\| \leq ce^{\alpha n}, n < 0$ v i dãy $(x_n)_{n < 0}$ th a $x = U(0, n)x_m$ v i m i $n \geq m$ và

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} D.$$

Do đó, $x \in X_0$.

M t khác, $\text{Ker} P_0^- = (\text{Im} R_{0,*})^\perp = (\text{Im} P_{0,*} \oplus X_{0,*})^\perp = (\text{Im} P_{0,*})^\perp \cap (X_{0,*})^\perp$ theo (2.45) và (2.42).

Vì $X_0 \subset \text{Im} P_0^+ \subset X_{0,*}^\perp$ theo (2.36) và $\text{Im} P_{0,*} \subset X_0^\perp$ theo M nh đ 2.9 nên ta có:

$$\text{Ker} N(0, 0) = \text{Im} P_0^+ \cap \left[X_{0,*}^\perp \cap (\text{Im} P_{0,*})^\perp \right] = \text{Im} P_0^+ \cap (\text{Im} P_{0,*})^\perp \supset X_0.$$

Vì th , $\text{Ker} N(0, 0) = X_0$ và $\dim \text{Ker} N(0, 0) = \dim X_0$.

H n n a, $N(0, 0)^* = (I - P_0^-)^*(I - P_0^+)^*$ là toán t xác đ nh t $(\text{Ker} P_0^+)^* = \text{Ker}(P_0^+)^*$ đ n

$$\text{Ker}(P_0^-)^* = (\text{Ker} P_0^-)^* \quad \text{và} \quad \text{Ker} N(0, 0)^* = \text{Im}(P_0^-)^* \cap \text{Ker}(P_0^+)^*.$$

L p lu n t ng t , ta ch ng minh đ c $\dim N(0, 0)^* = X_{0,*}$. □

C đ nh m t hàm liên t c tu n hoàn chu kỳ b ng 1 nh sau:

$$\alpha: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I} \text{ thì } \alpha(0) = \alpha(1) = 0 \text{ và } \int_0^1 \alpha(s) ds = 0.$$

Ta định nghĩa các toán tử tuyến tính bất biến

$R: L_p(\mathbb{I}, X) \rightarrow L_p(\mathbb{C}, X)$ và $S: L_p(\mathbb{C}, X) \rightarrow L_p(\mathbb{I}, X)$ như sau:

$$Rf = \left(- \int_{n-1}^n U(n, s) f(s) ds \right)_{n \in \mathbb{C}}, \quad (Sx)(t) = \alpha(t) U(t, n) x_n, t \in [n, n+1].$$

Bổ đề 2.16

- (i) Nếu $u_y = D_x$ thì $G_u = S_y$ với $u \in \text{dom} G$;
- (ii) Nếu $S_y = G_u$ với $u \in \text{dom} G$ thì $y = D_x$ với $x \in l_p$;
- (iii) Nếu $f = G_u$ với $u \in \text{dom} G$ thì $Rf = D_x$ với $x = (u(n))_{n \in \mathbb{C}}$;
- (iv) Nếu $Rf = D_x$ với $x \in l_p$ thì $f = G_u$ với $u \in \text{dom} G$.

Chứng minh

(i) Định nghĩa $u(t) = U(t, n)(y_n - x_n) - \int_n^t U(t, s) S_y(s) ds$ với $t \in [n, n+1]$.

Ngay khi ta đã chứng minh được:

$$u \in L_p(\mathbb{R}, X) \cap C_0(\mathbb{R}, X) \text{ và thỏa (2.46) với } f = S_y.$$

Do đó, $G_u = S_y$.

(ii) Với $u \in L_p(\mathbb{R}, X) \cap C_0(\mathbb{R}, X)$ thỏa (2.46) với $f = S_y$, $t = n+1$ và $\tau = n$, ta có:

$$\begin{aligned} u(n+1) &= U(n+1, n)u(n) - \int_n^{n+1} U(n+1, s) \alpha(s) U(s, n) y_n ds \\ &= U(n+1, n)u(n) - U(n+1, n) y_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Do đó, $y = D(y_n - u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$.

(iii) Với u và f thỏa (2.46), đặt $t = n$ và $\tau = n-1$, ta có:

$$- \int_{n-1}^n U(n, s) f(s) ds = u(n) - U(n, n-1)u(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(iv) Với $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sao cho $Rf = D_x$, ta định nghĩa:

$$u(t) = U(t, n) x_n - \int_n^t U(t, s) f(s) ds, \quad t \in [n, n+1], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ta cũng có: $u \in L_p(\mathbb{R}, X) \cap C_0(\mathbb{R}, X)$ và u và f thỏa (2.46). Do đó, $G_u = f$.

Bây giờ ta chứng minh $\text{Im} G$ đóng tuyến tính và $\text{ch} u \in \text{Im} D$ đóng.

Giả sử $\text{Im} D$ đóng, ta xét bất kỳ dãy $f^{(k)} = Gu^{(k)} \in \text{Im} G$ sao cho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)} = f \in L_p(R, X).$$

Theo B ấ 2.16 (iii), ta có:

$$Rf^{(k)} = D\left(u^{(k)}(n)\right)_{n \in Z} \rightarrow Rf, \quad f \rightarrow \infty.$$

Vì $\text{Im} D$ đóng nên $Rf \in \text{Im} D$ và do đó $f \in \text{Im} G$ theo B ấ 2.16 (iv).

Ng ắ l i, gi ắ $\text{Im} G$ đóng và ta xét b ắ kỳ dắ $y^{(k)} = Dx^{(k)} \in \text{Im} D$ sao cho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = y \in l_p.$$

Theo B ấ 2.16 (i), ta có: $Sy^{(k)} = Gu^{(k)} \rightarrow Sy$ v ắ $u^{(k)} \in \text{dom} G$.

Vì $\text{Im} G$ đóng nên $Sy \in \text{Im} G$ và do đó, $y \in \text{Im} D$ theo B ấ 2.16 (ii).

M ắ ánh x ắ tuy ắ tính B ấ nh b ắ:

$$(Bx)(t) = U(t, n)x_n, t \in [n, n+1], n \in Z \text{ v ắ } x = (x_n)_{n \in Z}.$$

Theo (2.46), $u \in \text{Ker} G$ n ắ u và ch ắ $u \in L_p(R, X) \cap C_0(R, X)$ và

$$u(t) = U(t, \tau)u(\tau) \forall t \geq \tau \in R.$$

Theo (2.4), B là m ắ toàn ánh t ắ $\text{Ker} D$ đ ắ $\text{Ker} G$.

N ắ $u \in \text{Ker} G$ thì $B(u(n))_{n \in Z} = u$ ch ắ ng t ắ r ắ B là toàn ánh.

Do đó, $\text{Ker} D$ và $\text{Ker} G$ đ ắ ng c ắ u và $\dim \text{Ker} G = \dim \text{Ker} D$.

Cu ắ i cùng, ta ch ắ ng minh r ắ ng n ắ $\text{Im} G$ đóng thì $\dim \hat{L}_p = \dim \hat{l}_p$ v ắ i các không gian th ắ ng

$\hat{L}_p = \{[f] = \{f + g : g \in \text{Im} G\} : f \in L_p\}$ và

$$\hat{l}_p = \{[y] = \{y + z : z \in \text{Im} D\} : y \in l_p\}$$

Th ắ t v ắ y, ta đ ắ nh nghĩa toán t ắ $\hat{R} : \hat{L}_p \rightarrow \hat{l}_p$ theo quy t ắ c:

$$\hat{R}[f] = [Rf].$$

Vì $g \in \text{Im} G$ nên $Rg \in \text{Im} D$. Theo B ấ 2.16 (iii), n ắ $h = f + g \in [f]$, $g \in \text{Im} G$ thì

$Rh = Rf + Rg \in [Rf]$ và $\hat{R}$ đ ắ c xác đ ắ nh t ắ.

N ắ $\hat{R}[f] = 0$ thì $Rf \in \text{Im} D$ và theo B ấ 2.16(iv), ta có: $f \in \text{Im} G$.

Do đó, $[f] = 0$.

Vì th ắ, $\hat{R}$ là phép n ắ x ắ.

C ắ đ ắ nh $y = (y_n)_{n \in Z} \in l_p$ và đ ắ t $f = -Sy$. Khi đó,

$$(Rf)_n = \int_{n-1}^n U(n, s)\alpha(s)U(s, n-1)y_{n-1}ds = y_n - (Dy)_n.$$

Vì $\forall y, y = Rf + Dy$.

Khi đó, $[y] = [Rf] = \hat{R}[f]$ và $\hat{R}$ là toàn ánh.

$\forall y, \hat{L}_p$ và $\hat{L}_p$ đồng cấu.

Bổ đề 2.17 Giả sử $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau, t, \tau \in \mathbb{I}}$, là họ tiến hóa lũy thừa bất biến liên tục mạnh trên không gian Banach X . Họ tiến hóa rời rạc $\{U(n, m)\}_{n \geq m, n, m \in \mathbb{Z}}$, có tính phân lũy thừa $\{P_n^+\}_{n \geq 0}$ trên $\mathbb{C}_+$ và có tính phân lũy thừa $\{P_n^-\}_{n \leq 0}$ trên $\mathbb{C}_-$ nếu và chỉ nếu họ $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau, t, \tau \in \mathbb{I}}$, có tính phân lũy thừa $\{P_t^+\}_{t \geq 0}$ trên $\mathbb{I}_+$ và có tính phân lũy thừa $\{P_t^-\}_{t \leq 0}$ trên $\mathbb{I}_-$ tương ứng.

Chứng minh

Ta chứng minh trên $\mathbb{R}_+$, phần $\mathbb{R}_-$, ta lập luận tương tự.

Dựa vào các tính chất phân giải $\{U(n, m)\}_{n \geq m \geq 0}$, ta chứng minh xây dựng $\{P_t^+\}_{t \geq 0}$ thỏa $U(t, \tau)P_\tau^+ = P_t^+U(t, \tau)$ và $U(t, \tau)|_{\text{Ker}P_\tau^+} : \text{Ker}P_\tau^+ \rightarrow \text{Ker}P_t^+$ là đồng cấu với mọi $t \geq \tau \geq 0$.

Thật vậy, giả sử điều này đã được chứng minh, khi đó, các tính chất phân giải lũy thừa cho $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau \geq 0}$ được suy ra trực tiếp từ các tính chất phân giải lũy thừa cho $\{U(n, m)\}_{n \geq m \geq 0}$ vì $\sup_{0 \leq t - \tau \leq 1} \|U(t, \tau)\| < \infty$.

Định lý các tính chất phân giải không đồng nhất cho $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau \geq 0}$, chú ý rằng nếu $n+1 \geq t \geq n \geq m \geq \tau \geq m-1 \geq 0$ thì

$$\left(U(t, \tau)|_{\text{Ker}P_\tau^+}\right)^{-1} = \left(U(m, \tau)|_{\text{Ker}P_\tau^+}\right)^{-1} \left(U(n, m)|_{\text{Ker}P_m^+}\right)^{-1} \left(U(t, n)|_{\text{Ker}P_n^+}\right)^{-1}. \quad (2.47)$$

$$\text{Nhưng } \left(U(t, n)|_{\text{Ker}P_n^+}\right)^{-1} = \left(U(n+1, n)|_{\text{Ker}P_n^+}\right)^{-1} \left(U(n+1, t)|_{\text{Ker}P_t^+}\right)^{-1}.$$

Suy ra các tính chất phân giải không đồng nhất cho $\{U(n, m)\}_{n \geq m \geq 0}$ và

$$\sup \left\{ \|U(n+1, t)\| : n \in \mathbb{Z}_+, t \in [n, n+1] \right\} < \infty,$$

Ta có:

$$\sup \left\{ \left\| \left(U(t, n)|_{\text{Ker}P_n^+} \right)^{-1} \right\| : n \in \mathbb{Z}_+, t \in [n, n+1] \right\} < \infty.$$

$$\text{Tương tự, } \sup \left\{ \left\| \left(U(m, \tau)|_{\text{Ker}P_\tau^+} \right)^{-1} \right\| : m \in \mathbb{Z}_+, m \geq 1, \tau \in [m-1, m] \right\} < \infty.$$

Từ (2.47) suy ra các tính chất phân giải không đồng nhất cho $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau \geq 0}$.

Th t v y, l y $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $t_0 \in [n, n+1)$ v i $n \in \mathbb{Z}_+$ và đ nh nghĩa các không gian con

$$X_s(t_0) = \{x \in X : U(n+1, t_0)x \in \text{Im } P_{n+1}^+\} \text{ và } X_u(t_0) = U(t_0, n)(\text{Ker } P_n^+).$$

S d ng c l ng l ng phân không n đ nh cho $\{U(n, m)\}_{n \geq m \geq 0}$ v i m i $x \in \text{Ker } P_n^+$, ta có:

$$\|U(n+1, t_0)\| \|U(t_0, n)x\| \geq \|U(n+1, n)x\| \geq M^{-1}e^\alpha \|x\|.$$

Do đó, $U(t_0, n): \text{Ker } P_n^+ \rightarrow X_u(t_0)$ là m t đ ng c u và $X_u(t_0)$ đóng.

$U(t_1, t_0): X_u(t_0) \rightarrow X_u(t_1)$ cũng là m t đ ng c u v i m i $t_1 \geq t_0 \in \mathbb{R}_+$.

N u $x \in X_s(t_0) \cap X_u(t_0)$ thì $U(n+1, t_0)x \in \text{Im } P_{n+1}^+$ và t n t i $y \in \text{Ker } P_n^+$ sao cho

$$x = U(t_0, n)y.$$

Khi đó, $U(n+1, n)y = U(n+1, t_0)x \in \text{Im } P_{n+1}^+$.

Do đó, $U(n+1, n)y = 0$ và $y = 0$ vì $U(n+1, n): \text{Ker } P_n^+ \rightarrow \text{Ker } P_{n+1}^+$ là đ ng c u.

Do đó, $X_s(t_0) \cap X_u(t_0) = \{0\}$.

Đ ch ng minh $X = X_s(t_0) \oplus X_u(t_0)$, ta l y $x \in X$ và phân tích

$$U(n+1, t_0)x = y_s + y_u, \quad y_s \in \text{Im } P_{n+1}^+, \quad y_u \in \text{Ker } P_{n+1}^+ = X_u(n+1).$$

G i x_u là vect duy nh t thu c $X_u(t_0)$ th a $U(n+1, t_0)x_s = y_s \in \text{Im } P_{n+1}^+$.

Các phép chi u $P_t^+, t \geq 0$ v i $\text{Im } P_t^+ = X_s(t), \text{Ker } P_t^+ = X_u(t)$ cho ta l ng phân c n tìm. $\square$

Đ nh lý 2.18 Gi s $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}, t, \tau \in \mathbb{R}$ là m t h t i n hóa b ch n lũy th a liên t c m nh trên không gian Banach X , G là toán t sinh c a n a nhóm t i n hóa t ng ng xác đ nh trên $L_p(\mathbb{R}, X), p \in [1, \infty)$ ho c trên $C_0(\mathbb{R}, X)$, D là toán t sai phân trên $l_p(\mathbb{Z}, X), p \in [1, \infty)$ ho c trên $c_0(\mathbb{Z}, X)$. Khi đó: $\text{Im } G$ đóng n u và ch n u

(i) $\text{Im } D$: đóng

(ii) $\dim \text{Ker } G = \dim \text{Ker } D$

(iii) $\text{Codim Im } G = \text{codim Im } D$

Đ c bi t, toán t G là Fredholm n u và ch n u D Fredholm và $\text{ind } G = \text{ind } D$.

B đ 2.19

N u (P_0^+, P_0^-) là c p phép chi u trên X thì toán t nút $N(0, 0) = (I - P_0^+)|_{\text{Ker } P_0^-}$ là toán t Fredholm t

$\text{Ker } P_0^-$ đ n $\text{Ker } P_0^+$ n u và ch n u c p không gian con (P_0^+, P_0^-) là Fredholm trong X . H n n a,

$\text{ind } N(0, 0) = \text{ind}(\text{Ker } P_0^-, \text{Ker } P_0^+)$ và

$$\dim \operatorname{Ker} N(0,0) = \alpha(\operatorname{Ker} P_0^-, \operatorname{Im} P_0^+), \operatorname{codim} \operatorname{Im} N(0,0) = \beta(\operatorname{Ker} P_0^-, \operatorname{Im} P_0^+).$$

Chứng minh

Theo định nghĩa của $N(0,0)$, ta có: $\operatorname{Ker} N(0,0) = \operatorname{Ker} P_0^- \cap \operatorname{Im} P_0^+$.

Ta chứng minh $\operatorname{Im} N(0,0) \oplus \operatorname{Im} P_0^+ = \operatorname{Ker} P_0^- + \operatorname{Im} P_0^+$. Thử với:

Nếu $x \in \operatorname{Ker} P_0^-$ thì $y = N(0,0)x = x - P_0^+x \in \operatorname{Ker} P_0^- + \operatorname{Im} P_0^+$ và chỉ có " $\subset$ " thôi.

Để chứng minh chỉ có " $\supset$ ", ta lấy $z = x + y$ với $x \in \operatorname{Ker} P_0^-$ và $y \in \operatorname{Im} P_0^+$. Khi đó, $(I - P_0^+)z = (I - P_0^+)x \in \operatorname{Im} N(0,0)$ và $z = (I - P_0^+)z + P_0^+z \in \operatorname{Im} N(0,0) \oplus \operatorname{Im} P_0^+$.

Ta biết:

$\operatorname{Im} N(0,0)$ là không gian con đóng trong $\operatorname{Ker} P_0^+$ khi và chỉ khi $\operatorname{Ker} P_0^- + \operatorname{Im} P_0^+$ là không gian con đóng trong X và

$\dim(\operatorname{Ker} P_0^+ / \operatorname{Im} N(0,0)) = \dim(X / (\operatorname{Im} N(0,0) \oplus \operatorname{Im} P_0^+)) = \beta(\operatorname{Ker} P_0^-, \operatorname{Im} P_0^+)$ để với các không gian thì.

Chứng minh Định lý 2.1 và Định lý 2.2

Giả sử G là Fredholm, khi đó, D là Fredholm theo Định lý 2.18.

Theo Định lý 2.12, tồn tại các dãy phân rã trên Z_+ và Z_- .

Theo Bổ đề 2.17, tồn tại các dãy phân $\{P_t^+\}_{t \geq 0}$ và $\{P_t^-\}_{t \leq 0}$.

Điều này suy ra (i') trong Định lý 2.2 và do đó, (i) trong Định lý 2.1 với $a = 0 = b$.

Theo Mệnh đề 2.12, ta có $N(0,0)$ là Fredholm và sử dụng các biểu thức trong Định lý 2.18, ta suy ra (ii') trong Định lý 2.2, theo Bổ đề 5.1, (ii) trong Định lý 2.1 với $a = 0 = b$.

Vì chứng minh (i) và (ii) trong Định lý 2.1 suy ra toán tử G là Fredholm thông qua 2 Bổ đề sau:

Bổ đề 2.20 Giả sử A là toán tử tuyến tính bị chặn xác định trên tổng trực tiếp $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ gồm hai không gian Banach có ma trận biểu diễn như sau:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \text{ với } A_{11} \in L(\mathcal{X}_1), A_{21} \in L(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2), A_{22} \in L(\mathcal{X}_2). \quad (2.48)$$

Khi đó, A là Fredholm nếu và chỉ nếu các khẳng định sau thành:

- (i) $\operatorname{Im} A_{11}$ đóng và $\operatorname{codim} \operatorname{Im} A_{11} < \infty$;
- (ii) $\operatorname{Im} A_{22}$ đóng và $\dim \operatorname{Ker} A_{22} < \infty$;
- (iii) Nếu $L_1 = \{x \in \mathcal{X}_1 : x \in \operatorname{Ker} A_{11}, A_{21}x \in \operatorname{Im} A_{22}\}$ thì $\dim L_1 < \infty$;
- (iv) Nếu $L_2 = \operatorname{Im} A_{22} + A_{21}(\operatorname{Ker} A_{11})$ thì $\operatorname{codim} L_2 < \infty, L_2 \subset \mathcal{X}_2$.

N u (i) – (iv) thì $\dim \text{Ker} A = \dim \text{Ker} A_{22} + \dim L_1$

$$\text{và } \text{codim Im } A = \text{codim Im } A_{11} + \text{codim } L_2.$$

Theo Đ nh lý 2.18, ch c n ch ng minh D Fredholm n u (i) và (ii) trong Đ nh lý 2.1 thì a. Ta s ch ng minh trong không gian l_p . Ta có th gi thi t r ng:

(1) $a, b \in \mathbb{C}$ trong Đ nh lý 2.1;

(2) H t i n hó r i r c $\{U(n, m)\}_{n \geq m}, n, m \in \mathbb{C}$, có l ng phân $\{P_n^-\}_{n \leq a}$ và $\{P_n^+\}_{n \geq b}$;

(3) Toán t nút r i r c $N(b, a) = (I - P_b^+)U(b, a)|_{\text{Ker} P_a^-}$ là toán t Fredholm t $\text{Ker} P_a^-$ đ n $\text{Ker} P_b^+$.

V i $A = D$, xét s bi u di n (2.48) v i $l_p(\mathbb{C}, X) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_1 = l_p(\mathbb{C} I(-\infty, b]; X)$ và $\mathcal{X}_2 = l_p(\mathbb{C} I[b+1, \infty); X)$. Khi đó,

$$A_{11} = D_b^-, D_b^- = D|_{l_p(\mathbb{C} I(-\infty, b]; X)}; A_{22} = D_b^+, D_b^+ : (x_n)_{n \geq b+1} \text{ a } (x_{b+1}, x_{b+2} - U(b+2, b+1)x_{b+1}, \dots)$$

và $A_{21} = D_b^\pm, D_b^\pm : (x_n)_{n \leq b} \text{ a } (-U(b+1, b)x_b, 0, \dots)$. Do đó:

$$L_1 = \{(x_n)_{n \leq b} : (x_n)_{n \leq b} \in \text{Ker} D_b^-, (-U(b+1, b)x_b, 0, \dots) \in \text{Im } D_b^+\}, \quad (2.49)$$

$$L_2 = \{(x_n)_{n \geq b+1} + (-U(b+1, b)x_b, 0, \dots) : (x_n)_{n \geq b+1} \in \text{Im } D_b^+, (x_n)_{n \leq b} \in \text{Ker} D_b^-\}. \quad (2.50)$$

Ta ký hi u:

$$x'_{b+1} = -\sum \left(U(b+1+k, b+1)|_{\text{Ker} P_{b+1}^+} \right)^{-1} (I - P_{b+1+k}^+) x_{b+1+k}. \quad (2.51)$$

B đ 2.21 Toán t D_b^+ kh ngh ch trái trên $l_p(\mathbb{C} I[b+1, \infty); X)$ và

$$\text{Im } D_b^+ = \{(x_n)_{n \geq b+1} : (I - P_{b+1}^+)x_{b+1} = x'_{b+1}\}. \quad (2.52)$$

Ch ng minh

Đ xây d ng $(D_b^+)^{-1}$, kh ngh ch trái đ i v i D_b^+ , chú ý r ng:

$$D_b^+ = I - T_b^+, \text{ v i } T_b^+ : (x_n)_{n \geq b+1} \text{ a } (0, U(b+2)x_{b+1}, \dots).$$

Phân tích: $T_b^+ = T_{b,s}^+ \oplus T_{b,u}^+$, v i:

$T_{b,s}^+$ là thu h p c a T_b^+ trên không gian con g m các dãy $(x_n)_{n \geq b+1} \in l_p(\mathbb{C} I[b+1, \infty); X)$ thì $x_n \in \text{Im } P_n^+$.

$T_{b,u}^+$ là thu h p c a T_b^+ trên không gian con g m các dãy $(x_n)_{n \geq b+1} \in l_p(\mathbb{C} I[b+1, \infty); X)$ thì $x_n \in \text{Ker } P_n^+, n \geq b+1$.

Khi đó, $T_{b,u}^+$ kh ngh ch trái và ngh ch đ o trái c a nó là:

$$\left(T_{b,u}^+\right)^{-1}:(x_n)_{n \geq b+1} \rightarrow \left(\left(U(n+1,n)|_{\text{Ker} D_n^+}\right)^{-1} x_{n+1}\right)_{n \geq b+1}.$$

Theo giả thiết phân tích, $\text{sprad}(T_{b,s}^+) < 1$ và $\text{sprad}\left(\left(T_{b,u}^+\right)^{-1}\right) < 1$, do đó:

$$\left(D_b^+\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(T_{b,s}^+\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \left(T_{b,u}^+\right)^{-k}.$$

Kiểm tra tính toán cho thấy rằng $D_b^+ \left(D_b^+\right)^{-1}$ ánh xạ mỗi dãy $(x_n)_{n \geq b+1}$ về dãy $(P_{b+1}^+ x_{b+1} + x'_{b+1}, x_{b+2}, \dots)$, xem (2.51).

Vì $\text{Im } D_b^+ = \text{Im}\left(D_b^+ \left(D_b^+\right)^{-1}\right)$, ta nhận được (2.52).

Sử dụng phân tích:

$$l_p(Z \cap (-\infty, b]; X) = \chi_1 \oplus \chi_2, \text{ với:}$$

$$\chi_1 = l_p(Z \cap (-\infty, a-1]; X) \text{ và } \chi_2 = l_p(Z \cap [a, b]; X), \text{ xét số biểu diễn (2.48) với } A = D_b^-.$$

Ta biết:

$$A_{11} = D_{a-1}^- = D|_{l_p(Z \cap (-\infty, a-1]; X)}$$

$$\text{và } A_{22} = D_{a,b}, \text{ với } D_{a,b}:(x_n)_{a \leq n \leq b} \rightarrow (x_a, x_{a+1} - U(a+1, a)x_a, \dots, x_b - U(b, b-1)x_{b-1}).$$

Trong số biểu diễn:

$$l_p(Z \cap [a, b]; X) = X \oplus \dots \oplus X, (b-a) \text{ lần, toán tử } D_{a,b} \text{ là tam giác dưới với các đường chéo trên đường chéo, do đó nó khả nghịch.}$$

Sử dụng phân tích $\{P_n^-\}_{n \leq a-1}$, chứng minh rằng từ Bổ đề 2.29, ta có D_{a-1}^- khả nghịch phải.

Vì D_b^- là tam giác dưới với đường chéo chính D_{a-1}^- và $D_{a,b}$, nên điều này suy ra rằng D_b^- khả nghịch phải.

Điều này và Bổ đề 2.29 suy ra: với số biểu diễn tam giác (2.48) của D thì các khẳng định (i) và (ii) đều đúng. Do đó, D là Fredholm.

Phần còn lại, ta chứng minh $\dim L_1 < \infty$ và $\text{codim } L_2 < \infty$, với L_1 và L_2 trong (2.49) – (2.50).

Khi điều này được chứng minh thì $\dim \text{Ker } D = \dim L_1$ và $\text{codim } D = \text{codim } L_2$.

Với L_1 , ta thấy: $(-U(b+1, b)x_b, 0, \dots) \in \text{Im } D_b^+$ nếu và chỉ nếu tồn tại dãy $(y_n)_{n \geq b+1} \in l_p(Z \cap [b+1, \infty); X)$ sao cho $y_n = -U(n, b)x_b, n \geq b+1$.

Sử dụng phân tích $\{P_n^+\}_{n \geq b}$, điều này tương đương với $x_b \in \text{Im } P_b^+$.

Mặt khác, $(x_n)_{n \leq b} \in \text{Ker } D_b^-$, nghĩa là $x_n = U(n, m)x_m$ với mọi $m \leq n \leq b$.

Đ c bi t, $x_b = U(b, a)x_a$ và $x_a = U(a, n)x_n$ v i m i $n \leq a$.

S d ng l ng phân $\{P_n^-\}_{n \leq a}$, ta suy ra $x_a \in \text{Ker} P_a^-$. Do đó:

$$\dim L_1 = \dim \{x \in \text{Ker} P_a^- : U(b, a)x \in \text{Im} P_b^+\} = \dim \text{Ker} N(b, a) < \infty.$$

V i L_2 , g i Z là ph n bù tr c ti p b t kỳ c a $\text{Im} N(b, a)$, sao cho:

$\text{Ker} P_b^+ = \text{Im} N(b, a) \oplus Z$ và g i $[(x_n)_{n \geq b+1}]_{L_2}$, v i $(x_n)_{n \geq b+1} \in l_p(Z \cap [b+1, \infty); X)$, là l p t ng đ ng trong không gian th ng $l_p(Z \cap [b+1, \infty); X) / L_2$.

Theo B đ 2.29, ta có:

$$(P_n^+ x_n)_{n \geq b+1} \in \text{Im} D_b^+ \subset L_2.$$

$$\text{Do đó, } [(x_n)_{n \geq b+1}]_{L_2} = \left[\left((I - P_n^+) x_n \right)_{n \geq b+1} \right]_{L_2}.$$

S d ng (2.49), theo B đ 2.29, ta suy ra:

$$(x'_{b+1}, (I - P_{b+2}^+) x_{b+2}, \dots) \in \text{Im} D_b^+ \subset L_2.$$

$$\text{V i v y, } [(x_n)_{n \geq b+1}]_{L_2} = [(y_{b+1}, 0, \dots)]_{L_2}, \text{ v i } y_{b+1} = (I - P_{b+1}^+) x_{b+1} - x'_{b+1}.$$

Chú ý r ng $y_{b+1} \in \text{Ker} P_{b+1}^+$, và tìm $y_b \in \text{Ker} P_b^+$ th a $y_{b+1} = U(b+1, b)|_{\text{Ker} P_b^+ + y_b}$.

S d ng s bi u di n:

$\text{Ker} P_b^+ = \text{Im} N(b, a) \oplus Z$, tìm s bi u di n duy nh t: $y_b = y + z$, v i $y \in \text{Im} N(b, a)$ và $z \in Z$.

V i $y \in \text{Im} N(b, a)$ nên t n t i $x_\alpha \in \text{Ker} P_a^-$ sao cho $y = U(b, a)x_\alpha$.

S d ng l ng phân $\{P_n^-\}_{n \leq a}$, đ t $x_n = \left(U(a, n)|_{\text{Ker} P_n^-} \right)^{-1} x_\alpha$ v i $n \leq a$.

Đ nh nghĩa $x_n = U(n, a)x_\alpha$ v i $n \in [a, b]$.

Khi đó, $(x_n)_{n \leq b} \in l_p(Z \cap (-\infty, b]; X)$ và $x_n = U(n, m)x_m$ v i m i $m \leq n \leq b$.

Do đó, $(x_n)_{n \leq b} \in \text{Ker} D_b^-$ và $y = x_b$.

$$\text{Theo (2.50), } [(-U(b+1, b)y, 0, \dots)]_{L_2} = [(U(b+1, b)z, 0, \dots)]_{L_2}.$$

Ta có m t ánh x đ c đ nh nghĩa t t:

$j : x = [(x_n)_{n \geq b+1}]_{L_2} \mapsto l_p(Z \cap [b+1, \infty)) / L_2$ đ n $Z \cong \text{Ker} P_b^+ / \text{Im} N(b, a)$ th a:

$$[(x_n)_{n \geq b+1}]_{L_2} = [(U(b+1, b)z, 0, \dots)]_{L_2}, \text{ v i } jx = z.$$

Đi u này suy ra r ng j là phép chi u. j cũng là toàn ánh vì n u $z \in Z$ thì

$$x = [(U(b+1, b)z, 0, \dots)]_{L_2} \text{ th a } jx = z.$$

Ch 3

TÍNH CH T FREDHOLM C A N A NH M TI N H A

Trong ch ng này, tác gi trình bày tính ch t Fredholm, tính ch t ph và tính đ ng c a m n giá tr c a các toán t E^t, G, D_τ . C th là hai đ nh lý 3.1 và 3.2 sau:

Đ nh lý 3.1 Cho $\{E^t\}_{t \geq 0}$ là n a nh m ti n hóa (0.2) trên $\mathcal{E}(\mathfrak{I})$, ta có:

$$\sigma_{\text{fred}}(E^t) \setminus \{0\} = \sigma(E^t) \setminus \{0\}, \quad t \geq 0.$$

Đ nh lý 3.2 V i các toán t E^1 và G trên $L_p(\mathfrak{I}, X)$ và D_τ trên $l_p(\mathfrak{C}, X)$, các kh ng đ nh sau t ng đ ng:

$$\text{i) } \gamma(E^1 - I) > 0;$$

$$\text{ii) } \gamma(G) > 0;$$

$$\text{iii) } \inf_{\tau \in [0,1]} \gamma(D_\tau) > 0.$$

v i $\gamma(T)$ là biên d i Kato c a toán t đ ng T đ nh b i:

$$\gamma(T) = \inf_{\substack{x \in \text{dom} T \\ Tx \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\text{dist}(x, \text{Ker} T)}.$$

Đ u tiên, ta xét n a nh m ti n hóa $\{E^t\}_{t \geq 0}$ xác đ nh trên $\mathcal{E}(\mathfrak{I})$ trong (0.2). Toán t sinh G c a n a nh m ti n hóa này đ c mô t nh sau:

M nh đ 3.3 G i $u, f \in \mathcal{E}(\mathfrak{I})$, khi đó $u \in \text{dom} G$ và $G u = f$ n u và ch n $u \in \mathcal{E}(\mathfrak{I}) \cap C_0(\mathfrak{I}, X)$ và v i m i $t \geq \tau \in \mathfrak{I}$,

$$u(t) = U(t, \tau)u(\tau) - \int_{\tau}^t U(t, s) f(s) ds. \quad (3.1)$$

Ti p theo, ta xét n a nh m ti n hóa $\{E_+^t\}_{t \geq 0}$ trên $\mathcal{E}_0(\mathfrak{I}_+)$ đ nh b i:

$$(E_+^t u)(\tau) = \begin{cases} U(\tau, \tau-t)u(\tau-t), & \tau \geq t, \\ 0, & 0 \leq \tau \leq t, \end{cases} \quad (3.2)$$

và g i G_0^+ là toán t sinh c a nó. T ng t nh M nh đ 3.3, G_0^+ đ c mô t nh sau.

M nh đ 3.4 G i $u, f \in \mathcal{E}_0(\mathfrak{I}_+)$, khi đó $u \in \text{dom} G_0^+$ và $G_0^+ u = f$ n u và ch n $u \in \mathcal{E}_0(\mathfrak{I}_+) \cap C_{00}(\mathfrak{I}_+, X)$ và v i m i $t \geq \tau \in \mathfrak{I}_+$,

$$u(t) = - \int_0^t U(t, s) f(s) ds. \quad (3.3)$$

Chú ý: (3.3) suy ra (3.1).

Ta xét toán tử G^+ xác định trên $\mathcal{E}(\mathbb{I}_+)$ như sau.

Định nghĩa 3.5 $G u, f \in \mathcal{E}(\mathbb{I}_+)$, khi đó $u \in \text{dom} G^+$ và $G^+ u = f$ nếu và chỉ nếu $u \in \mathcal{E}(\mathbb{I}_+) \cap C_0(\mathbb{I}_+, X)$ và (3.8) thỏa với $\forall t \geq \tau \in \mathbb{I}_+$.

Toán tử G^+ đã xác định trên $\mathcal{E}(\mathbb{I}_+)$, $\text{dom} G_0^+ = \{u \in \text{dom} G^+ : u(0) = 0\}$ và $G_0^+ u = G^+ u$ với $u \in \text{dom} G_0^+$. Hơn nữa, G^+ trên $\mathcal{E}(\mathbb{I}_+) = C_0(\mathbb{I}_+, X)$ đã liên hệ với toán tử sinh của nhóm tiến hóa sau:

$$(\mathbb{E}_+^t u)(\tau) = \begin{cases} U(\tau, \tau-t)u(\tau-t), & \tau \geq t, \\ U(\tau, 0)u(0), & 0 \leq \tau \leq t. \end{cases}$$

Cuối cùng, ta chú ý rằng:

$$\text{Ker} G^+ = \{u \in \mathcal{E}(\mathbb{I}_+) : u(t) = U(t, \tau)u(\tau) \forall t \geq \tau \geq 0\}, \quad (3.4)$$

$$\text{Ker} G_0^+ = \{0\}, \quad (3.5)$$

và xác định không gian con $X_0 \subseteq X$ như sau

$$X_0 = \{x = u(0) : u \in \text{Ker} G^+\}. \quad (3.6)$$

Đặt $W_\tau(t, s) = U(t + \tau, s + \tau), t \geq s, \tau \in [0, 1]$ và định nghĩa nhóm đôi $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{I}}$ trên $\mathcal{E}(\mathbb{I})$ như sau:

$$(S(t)u)(s) = u(s-t), s, t \in \mathbb{I}. \quad (3.7)$$

Nếu $E_{W_\tau}^t$ và E_U^t là các nhóm tiến hóa trên $\mathcal{E}(\mathbb{I})$ các hệ tiến hóa $\{W_\tau(t, s)\}$ và $\{U(t, s)\}$ thì $S(\tau)E_{W_\tau}^t S(-\tau) = E_U^t$ và $S(\tau)G_{W_\tau} S(-\tau) = G_U$. Do đó, Định lý 2.18 thỏa mãn toán tử D đã thay bởi toán tử D_τ bất kỳ, $\tau \in (0, 1)$.

Định lý 3.6 Hệ tiến hóa $\{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ có tính phân lũy thừa $\{P_t\}_{t \geq 0}$ trên $\mathbb{I}_+$ nếu và chỉ nếu toán tử G^+ là toàn ánh trên $\mathcal{E}(\mathbb{I}_+)$ và không gian con X_0 là đầy trong X .

Sau đây, ta sẽ chứng minh Định lý 3.1

Chức năng chứng minh toán tử $E^1 - I$ khả nghịch.

Trước tiên ta chứng minh $\text{Ker} G \neq \{0\} \Rightarrow \dim \text{Ker}(E^1 - I) = \infty$.

Thật vậy, với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta định nghĩa toán tử bị chặn $M = M_k$ trên $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ theo qui tắc:

$$(Mu)(\tau) = e^{2\pi i k \tau} u(\tau), \tau \in \mathbb{R}.$$

Khi đó, $M E^t = e^{2\pi i k t} E^t M \quad \forall t \geq 0$ và $M(G - 2\pi i k) = GM$.

Do đó,

$$\text{Ker}(G - 2\pi i k) = M^{-1} \text{Ker} G. \quad (3.8)$$

Có thể chọn $0 \neq u \in \text{Ker} G$ và đặt $u_k = M_k^{-1} u, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó, $u_k \in \text{Ker}(G - 2\pi i k)$ là một hàm riêng khác không của G ứng với trị riêng $2\pi i k$.

Hãy các hàm số $\{u_k : k \in \mathbb{Z}\}$ đã cho là p-tuyến tính vì các hàm riêng khác không ứng với các trị riêng khác nhau của một toán tử tuyến tính là độc lập tuyến tính. Vì

$$\text{Ker}(E^1 - I) = \overline{\text{lin}\{\text{Ker}(G - 2\pi i k) : k \in \mathbb{Z}\}} \quad (3.9)$$

nên ta có: $u_k \in \text{Ker}(E^1 - I)$ và do đó, $\dim \text{Ker}(E^1 - I) = \infty$.

Tiếp theo, theo (3.8) và (3.9), ta thấy, nếu $\text{Ker}(E^1 - I) \neq \{0\}$ thì $\text{Ker} G \neq \{0\}$.

Do đó, theo chứng minh trên, $\text{Ker}(E^1 - I) \neq \{0\} \Rightarrow \dim \text{Ker}(E^1 - I) = \infty$.

Cuối cùng, ta đặt $\{(E^t)^e\}_{t \geq 0}$ là một nhóm đồng biến của $\{E^t\}_{t \geq 0}$.

Vì $(M^{-1})^*(E^1)^* M^* = e^{-2\pi i k} (E^1)^*$ nên $M^* \left((\mathcal{E}(R))^e \right) \subset (\mathcal{E}(R))^e$ và

$$M^* (G^e - 2\pi i k) (M^{-1})^* = G^e.$$

Áp dụng Chú ý 1.2.4 với $A = G$ và lập luận như trên ta suy ra:

$$\text{Ker}(E^1 - I) \neq \{0\} \Rightarrow \dim \text{Ker}(E^1 - I)^* = \infty. \quad \square$$

Giả sử A là toán tử tuyến tính đóng trên X có miền xác định trù mật, ta xét toán tử $Du = -u'$ trên $\mathcal{E}(j)$ và miền xác định của nó là $D = \text{dom } D \cap \text{dom } M_A$, ta xét toán tử $D + M_A$ và vì $\text{dom}(D + M_A) = D$ và xét một toán tử ζ_A là mở rộng đóng của $D + M_A$ sao cho D là nhân của ζ_A .

Bổ đề 3.7

Toán tử ζ_A là Fredholm trên $\mathcal{E}(j)$ nếu và chỉ nếu ζ_A khả nghịch trên $\mathcal{E}(j)$.

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh miền xác định và miền giá trị của ζ_A là bị chặn.

Thật vậy, giả sử $u \in \text{dom } \zeta_A$, vì D là một nhân của ζ_A nên tồn tại $\{u_n : n \geq 0\} \subset D$ sao cho $\|u_n - u\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0$

$$\text{và } \|\zeta_A u_n - \zeta_A u\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Vì nhân D bị chặn nên với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\|S(t)u_n - S(t)u\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0 \text{ và } \|\zeta_A S(t)u_n - \zeta_A S(t)u\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Vì ζ_A là toán tử đóng nên $S(t)u_n \in \text{dom } \zeta_A$ và $S(t)\zeta_A u = \zeta_A S(t)u$.

Vậy, miền xác định và miền giá trị của ζ_A là bị chặn.

Hơn nữa, ta có:

$$S(t)(\text{Im } \zeta_A) = \text{Im } \zeta_A, t \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Tiếp theo, ta giả sử rằng ζ_A là toán tử Fredholm và $\dim \text{Ker } \zeta_A > 0$.

Vì vậy tùy ý, $u \in \text{Ker } \zeta_A$, ta có:

$$S(t)u \in \text{Ker } \zeta_A, t \in \mathbb{R}.$$

Do đó, nhóm các toán tử $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ cho bởi (3.7) đã xác định trên không gian Banach $\mathcal{X} = (\text{Ker } \zeta_A, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ và đồng tục.

Vì $\text{Ker } \zeta_A$ hữu hạn chiều nên $S(t) = e^{tB}$, $t \in \mathbb{R}$ với $B \in L(X)$.

Vì $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ đồng tục nên $\sigma(B) \in i\mathbb{R}$ và chỉ các giá trị riêng của B .

Do đó, tồn tại $\xi \in \mathbb{R}$ và $0 \neq u_0 \in \text{Ker } \zeta_A$ thì $S(t)u_0 = e^{it\xi}u_0$.

Vì vậy, với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có:

$$u_0(s+t) = e^{it\xi}u_0(s), s \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Đặc biệt, } u_0\left(s + \frac{2\pi}{\xi}\right) = u_0(s), s \in \mathbb{R}.$$

Nhưng khi đó $u_0 \notin \mathcal{E}(\mathbb{R})$, điều này mâu thuẫn.

Do đó, $\text{Ker } \zeta_A = \{0\}$.

Cuối cùng, xét không gian con $Y = \mathcal{E}(\mathbb{R}) / \text{Im } \zeta_A$ và giả sử $\dim Y > 0$.

Vì $\text{Im } \zeta_A$ là $S(t)$ -bất biến nên nhóm toán tử $\{\hat{S}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ xác định trên Y và nếu $f \in \hat{f}$ (lớp tương đương trong Y), thì

$$\|\hat{S}(t)\hat{f}\|_Y = \inf_{g \in \text{Im } \zeta_A} \|S(t)f + g\|_{\mathcal{E}} = \inf_{g \in \text{Im } \zeta_A} \|f + g\|_{\mathcal{E}} = \|\hat{f}\|_Y,$$

Kiểm tra là $\{\hat{S}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ đồng tục trên không gian hữu hạn chiều Y .

Vì $\dim Y < \infty$ nên tồn tại không gian con hữu hạn chiều N của $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ đồng tục với Y thì:

$$\text{Im } \zeta_A \oplus N = \mathcal{E}(\mathbb{R}).$$

Sử dụng tính đồng tục của $\{\hat{S}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ trên N , ta suy ra rằng tồn tại $0 \neq f \in N$ sao cho

$$f\left(s + \frac{2\pi}{\xi}\right) = f(s), \xi \in \mathbb{R}. \text{ Điều này cũng mâu thuẫn.}$$

Do đó, $Y = \{0\}$ và ζ_A khả nghịch.

□

B ấ 3.8 V i toán t $D_\tau, \tau \in [0,1]$ đã đ ể c đ nh nghĩa trong (0.3),

(i) N u $(z_n)_{n \in \mathbb{C}} \in \text{Ker} D_\tau$ thì $(U(n, n+\tau-1)z_{n-1})_{n \in \mathbb{C}} \in \text{Ker} D_0$.

(ii) N u $(z_n)_{n \in \mathbb{C}} \in \text{Ker} D_0$ thì $(U(\tau+n, n)z_n)_{n \in \mathbb{C}} \in \text{Ker} D_\tau$.

Ch ng minh

(i) V i b t kỳ $\tau \in [0,1]$, ta có:

$$\text{Ker} D_\tau = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n = U(n+\tau, m+\tau)x_m \forall n \geq m \in \mathbb{Z} \right\} \quad (3.11)$$

N u $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} D_\tau$ thì $z_n = U(n+\tau, n+\tau-1)z_{n-1} = U(n+\tau, n)U(n, n+\tau-1)z_{n-1}$.

N u $x_n = U(n, n+\tau-1)z_{n-1}$ thì

$$\begin{aligned} U(n, n-1)x_{n-1} &= U(n, n-1)U(n-1, n+\tau-1)z_{n-2} \\ &= U(n, n+\tau-2)z_{n-2} = U(n, n+\tau-1)U(n+\tau-1, n+\tau-2)z_{n-2} \\ &= U(n, n+\tau-1)z_{n-1} = x_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(ii) N u $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} D_0$ thì $z_n = U(n, n-1)z_{n-1}$ và

$$\begin{aligned} D_\tau(U(\tau+n, n)z_n)_{n \in \mathbb{Z}} &= (U(\tau+n, n)z_n - U(\tau+n, n-1)z_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}} \\ &= (U(\tau+n, n)z_n - U(\tau+n, n)U(n, n-1)z_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}} = 0 \end{aligned} \quad \square$$

L y m t hàm tr n $\alpha: [0,1] \rightarrow [0,1]$ th a $\alpha(\tau)=0$ v i $\tau \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ và $\alpha(\tau)=1$ v i $\tau \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. V i đây

$x = (x_n)_{n \in \mathbb{C}}$ xác đ nh hàm Bx th a n u $t \in [n, n+1], n \in \mathbb{C}$ thì

$$(Bx)(t) = U(t, n) \left[\alpha(t-n)x_n + (1-\alpha(t-n))U(n, n-1)x_{n-1} \right]. \quad (3.12)$$

V i h ti n hóa $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ b ch n lũy th a nên $C = \sup\{\|U(t, \tau)\| : 0 \leq t - \tau \leq 1\} < \infty$.

V i $t \in [n, n+1], n \in \mathbb{C}$ và $x \in X$, ta có:

$$\|U(n+1, n)x\| = \|U(n+1, t)U(t, n)x\| \leq C\|U(t, n)x\|, \|U(t, n)x\| \leq C\|x\|. \quad (3.13)$$

B ấ 3.9

(i) $B: \mathcal{E}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{I})$ là toán t tuy n tính b ch n;

(ii) $B: \text{Ker} D_0 \rightarrow \text{Ker} G$ là m t đ ng c u;

(iii) $(E^1 - I)B = -BD_0$.

Ch ng minh

V i $(Bx)(n) = U(n, n-1)x_{n-1}, n \in \mathbb{Z}$ nên Bx là hàm liên t c.

(i) đ ể c suy ra t (3.13)

(iii) để suy ra tính toán trực tiếp

(ii) Ta nhận lại Mệnh đề 3.3 rằng:

$u \in \text{Ker} G$ nếu và chỉ nếu $u \in L_p(\mathbb{R}, X) \cap C_0(\mathbb{R}, X)$ và $u(t) = U(t, \tau)u(\tau) \forall t \geq \tau \in \mathbb{R}$

và $x \in \text{Ker} D_0$ nếu và chỉ nếu $x_n = U(n, n-1)x_{n-1}, n \in \mathbb{Z}$.

Nếu $x \in \text{Ker} D_0$ thì $(Bx)(t) = U(t, n)x_n, t \in [n, n+1], n \in \mathbb{Z}$

Và do đó, $Bx \in \text{Ker} G$.

Nếu $x \in \text{Ker} D_0$ và $Bx = 0$ thì $x = 0$.

Do đó, $B : \text{Ker} D_0 \rightarrow \text{Ker} G$ là một phép đẳng ánh.

Để chứng tỏ B là toàn ánh, ta lấy $u \in \text{Ker} G$ và đặt $x = (u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$.

Khi đó, $(Bx)(t) = U(t, n)u(n) = u(t)$.

Ta kiểm tra $x \in L_p(\mathbb{Z}, X)$.

Điều này suy ra từ (3.13):

$$\begin{aligned} \|x\|_{l_p}^p &= \left\| (u(n))_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p}^p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \|U(n+1, t)U(t, n)u(n)\|^p dt \\ &\leq C^p \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \|U(t, n)u(n)\|^p dt = C^p \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \|u(t)\|^p dt = C^p \|u\|_{L_p}^p \end{aligned}$$

Chứng minh Định lý 3.2

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Dùng Bổ đề 3.9 (iii) và đặt $\gamma = \gamma(E^1 - I)$, ta có:

$$\begin{aligned} \|D_0 x\|_{l_p} &\geq \|B\|^{-1} \|BD_0 x\|_{L_p} = \|B\|^{-1} \|(E^1 - I)Bx\|_{L_p} \\ &\geq \gamma \|B\|^{-1} \text{dist}(Bx, \text{Ker}(E^1 - I)) \geq \frac{\gamma}{2\|B\|} \|Bx - u\|_{L_p}, u \in \text{Ker}(E^1 - I). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Theo (3.9), ta có thể giải phương trình $u = \sum_{|k| \leq K} u_k, u_k \in \text{Ker}(G - 2\pi i k)$.

Sử dụng (3.8) và Bổ đề 3.9 (ii), ta tìm $z^{(k)} \in \text{Ker} D_0$ thì

$$u_k(t) = e^{-2\pi i k t} (Bz^{(k)})(t), t \in \mathbb{R}, |k| \leq K.$$

Chú ý rằng: $z^{(k)} = (z_n^{(k)})_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} D_0 \Rightarrow z_{n+1}^{(k)} = U(n+1, n)z_n^{(k)}$

và $(Bz^{(k)})(t) = U(t, n)z_n^{(k)}, t \in [n, n+1], n \in \mathbb{Z}$.

Do đó, với C từ (3.13) và dùng (2.35), ta có từ (3.14) như sau:

$$C^p \|D_0 x\|_{l_p}^p \geq \left(\frac{\gamma C}{2\|B\|} \right)^p \|Bx - u\|_{L_p}^p$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\gamma C}{2 \|B\|} \right)^p \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \left\| U(t, n) \left[\alpha(t-n) x_n + (1-\alpha(t-n)) U(n, n-1) x_{n-1} - \sum_{|k| \leq K} e^{-2\pi i k t} z_n^{(k)} \right] \right\|^p dt \\
&\geq \left(\frac{\gamma C}{2 \|B\|} \right)^p \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \left\| U(n+1, n) \left[\alpha(t-n) x_n + (1-\alpha(t-n)) U(n, n-1) x_{n-1} - \sum_{|k| \leq K} e^{-2\pi i k t} z_n^{(k)} \right] \right\|^p dt
\end{aligned}$$

Vì $\alpha(t) = 1$ và $U(n+1, n) z_n^{(k)} = z_{n+1}^{(k)}$, ta suy ra:

$$\begin{aligned}
C \|D_0 x\|_{l_p} &\geq \frac{\gamma}{2 \|B\|} \left(\int_{2/3}^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\| U(n+1, n) x_n - \sum_{|k| \leq K} e^{-2\pi i k t} z_{n+1}^{(k)} \right\|^p dt \right)^{1/p} \\
&= \frac{\gamma}{2 \|B\|} \left(\int_{2/3}^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\| x_{n+1} - (x_{n+1} - U(n+1, n) x_n) - \sum_{|k| \leq K} e^{-2\pi i k t} z_{n+1}^{(k)} \right\|^p dt \right)^{1/p} \\
&= \frac{\gamma}{2 \|B\|} \left(\int_{2/3}^1 \left\| x - D_0 x - \sum_{|k| \leq K} e^{-2\pi i k t} z^{(k)} \right\|_{l_p}^p dt \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Vì $\sum_k e^{-2\pi i k t} z^{(k)} \in \text{Ker } D_0$ và $t \in \left[\frac{2}{3}, 1 \right]$ nên:

$$\begin{aligned}
C \|D_0 x\|_{l_p} &\geq \frac{\gamma}{2 \|B\|} \left(\int_{2/3}^1 \text{dist}(x - D_0 x, \text{Ker } D_0)^p dt \right)^{1/p} \\
&= \frac{\gamma}{2(3)^{1/p} \|B\|} \inf_{y \in \text{Ker } D_0} \|x - D_0 x - y\|_{l_p} \\
&\geq \frac{\gamma}{2(3)^{1/p} \|B\|} \text{dist}(x, \text{Ker } D_0) - \frac{\gamma}{2(3)^{1/p} \|B\|} \|D_0 x\|_{l_p}
\end{aligned}$$

Do đó, $\gamma(D_0) > 0$.

Theo Định lý 2.18, khẳng định (ii) trong Định lý 3.2 đã được chứng minh xong.

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Theo Định lý 2.18, $\gamma(G) > 0$ suy ra $\gamma(D_0) > 0$.

Với mọi $\tau \in [0, 1]$, từ (3.13), ta có:

$$\begin{aligned}
C \|D_\tau x\|_{l_p} &= C \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n - U(n+\tau, n+\tau-1) x_{n-1}\|^p \right)^{1/p} \\
&\geq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|U(n+1, n+\tau) x_n - U(n+1, n+\tau) U(n+\tau, n+\tau-1) x_{n-1}\|^p \right)^{1/p} \\
&= \|D_0 (U(n, n+\tau-1) x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}\|_{l_p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \gamma(D_0) \operatorname{dist} \left(\left(U(n, n+\tau-1) x_{n-1} \right)_{n \in \mathbb{Z}}, \operatorname{Ker} D_0 \right) \\
&\geq (\gamma(D_0)/2) \left\| \left(U(n, n+\tau-1) x_{n-1} \right)_{n \in \mathbb{Z}} - z \right\|_{l_p}
\end{aligned}$$

vì $z = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \operatorname{Ker} D_0$.

Sử dụng (3.13) mặt khác, ta được:

$$\begin{aligned}
&\left\| U(n+\tau, n+\tau-1) x_{n-1} - U(n+\tau, n) z_n \right\| \\
&= \left\| U(n+\tau, n) [U(n, n+\tau-1) x_{n-1} - z_n] \right\| \\
&\leq C \left\| U(n, n+\tau-1) x_{n-1} - z_n \right\|.
\end{aligned}$$

Mặt khác $(U(n+\tau, n) z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \operatorname{Ker} D_\tau$, $z \in \operatorname{Ker} D_0$ nên theo Bổ đề 3.8 (ii), ta có:

$$\begin{aligned}
C \|D_\tau x\|_{l_p} &\geq \frac{\gamma(D_0)}{2C} \left(\sum \left\| U(n+\tau, n+\tau-1) x_{n-1} - U(n+\tau, n) z_n \right\|^p \right)^{1/p} \\
&= \frac{\gamma(D_0)}{2C} \left\| x - D_\tau x - (U(n+\tau, n) z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p} \\
&\geq \frac{\gamma(D_0)}{2C} \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} D_\tau) - \frac{\gamma(D_0)}{2C} \|D_\tau x\|_{l_p}.
\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát trong Định lý 3.2 để chứng minh.

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Đặt $\gamma = \inf_{\tau \in [0,1)} \gamma(D_\tau) > 0$, ta xét hàm liên tục compact liên tục $u: \mathbb{R} \rightarrow X$ và chú ý rằng

các hàm số này đều nằm trong $L_p(\mathbb{R}, X)$. Ta có:

$$\begin{aligned}
\left\| (E^1 - I)u \right\|_{L_p}^p &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \|u(t) - U(t, t-1)u(t-1)\|^p dt \\
&= \int \left\| D_\tau \left((u(\tau+n))_{n \in \mathbb{Z}} \right) \right\|_{l_p}^p d\tau.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Từ Bổ đề 3.8 (i) và (3.13), với bất kỳ $y \in l_p$ và $\tau \in [0,1)$, ta có:

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(y, \operatorname{Ker} D_\tau) &= \inf_{x \in \operatorname{Ker} D_\tau} \|y - x\|_{l_p} \\
&\geq C^{-1} \inf_{x \in \operatorname{Ker} D_\tau} \left\| \left(U(n, n+\tau-1) y_{n-1} \right)_{n \in \mathbb{Z}} - \left(U(n, n+\tau-1) x_{n-1} \right)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p} \\
&\geq C^{-1} \operatorname{dist} \left(\left(U(n, n+\tau-1) y_{n-1} \right)_{n \in \mathbb{Z}}, \operatorname{Ker} D_0 \right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Sử dụng (3.16) với $y = (u(\tau+n))_{n \in \mathbb{Z}}$, ta có:

$$\begin{aligned}
\left\| D_\tau \left((u(\tau+n))_{n \in \mathbb{Z}} \right) \right\|_{l_p} &\geq \gamma \operatorname{dist} \left((u(\tau+n))_{n \in \mathbb{Z}}, \operatorname{Ker} D_\tau \right) \\
&\geq \gamma C^{-1} \operatorname{dist} \left(\left(U(n, n+\tau-1) u(\tau+n-1) \right)_{n \in \mathbb{Z}}, \operatorname{Ker} D_0 \right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Tiếp theo, ta chọn $\tau \in [0,1]$, ta có thể chọn $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \text{Ker} D_0$, $x = x(\tau)$ sao cho hàm $x: [0,1] \rightarrow l_p$ liên tục và thỏa mãn điều kiện sau:

$$\begin{aligned} & \text{dist} \left(\left(U(n, n+\tau-1)u(\tau+n-1) \right)_{n \in \mathbb{Z}}, \text{Ker} D_0 \right) \\ & \geq \frac{1}{2} \left\| \left(U(n, n+\tau-1)u(\tau+n-1) \right)_{n \in \mathbb{Z}} - x \right\|_{l_p}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Để chứng minh điều này, ta xét hàm liên tục $u: [0,1] \rightarrow l_p$ định nghĩa:

$$u(\tau) = \left(U(n, n+\tau-1)u(\tau+n-1) \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Theo cách chọn u , các giá trị $u(\tau)$, $\tau \in [0,1]$ là các dãy tổng hữu hạn và do đó không thuộc $\text{Ker} D_0$.

Đặt: $\varepsilon = \inf_{\tau \in [0,1]} \text{dist}(u(\tau), \text{Ker} D_0) > 0$ và lấy $\eta > 0$ thì:

$$\begin{aligned} & \|u(t) - u(t')\|_{l_p} < \frac{\varepsilon}{10} \\ & \Rightarrow |t - t'| < \eta. \end{aligned}$$

Gọi $\{\tau_0 = 0, \dots, \tau_n = 1\}$ là một phân hoạch của đoạn $[0,1]$ có η .

Lấy $y_i \in \text{Ker} D_0$ thì $\|u(\tau_i) - y_i\| < \frac{11}{10} \text{dist}(u(\tau_i), \text{Ker} D_0)$.

Định nghĩa một hàm liên tục khúc x_0 định nghĩa:

$$x_0(\tau) = y_i, \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Khi đó, với $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, \dots, n-1$, ta có:

$$\begin{aligned} \|u(\tau) - x_0(\tau)\| & \leq \|u(\tau) - u(\tau_i)\| + \frac{11}{10} \text{dist}(u(\tau_i), \text{Ker} D_0) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{10} + \frac{11}{10} \left(\frac{\varepsilon}{10} + \text{dist}(u(\tau), \text{Ker} D_0) \right) \\ & \leq \frac{3}{2} \text{dist}(u(\tau), \text{Ker} D_0). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Mặt khác và x_0 trên $[1,2)$, với $\delta \in (0,1)$, ta xét hàm x liên tục trên $[0,1]$, định nghĩa:

$$x(\tau) = \frac{1}{\delta} \int_{\tau}^{\tau+\delta} x_0(s) ds.$$

Sử dụng (3.19), với $\tau \in [0,1]$, ta có:

$$\begin{aligned} \|u(\tau) - x(\tau)\| & \leq \frac{1}{\delta} \int_{\tau}^{\tau+\delta} \|u(\tau) - x_0(s)\| ds \\ & \leq \frac{1}{\delta} \int_{\tau}^{\tau+\delta} \|u(s) - x_0(s)\| ds + \frac{1}{\delta} \int_{\tau}^{\tau+\delta} \|u(\tau) - u(s)\| ds \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \int_{\tau}^{\tau+\delta} \frac{3}{2} \text{dist}(u(s), \text{Ker} D_0) ds + \sup_{s \in [\tau, \tau+\delta]} \|u(\tau) - u(s)\|$$

$$\text{Chọn } \delta \text{ sao cho: } \frac{1}{\delta} \int_{\tau}^{\tau+\delta} \frac{3}{2} \text{dist}(u(s), \text{Ker} D_0) ds < \frac{3}{2} \text{dist}(u(\tau), \text{Ker} D_0) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\text{và } \sup_{s \in [\tau, \tau+\delta]} \|u(\tau) - u(s)\| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ ta được:}$$

$$\|u(\tau) - x(\tau)\| \leq 2 \text{dist}(u(\tau), \text{Ker} D_0), \tau \in [0, 1], \text{ ta có:}$$

$$\begin{aligned} C \|D_{\tau}(u(\tau+n))\|_{n \in \mathbb{Z}} \|_{l_p} &\geq \frac{\gamma}{2} \left\| \left(U(n, n+\tau-1) u(n+\tau-1) - x_n \right)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p} \\ &\geq \frac{\gamma}{2C} \left\| \left(U(\tau+n, n) [U(n, n+\tau-1) u(n+\tau-1) - x_n] \right)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p} \\ &= \frac{\gamma}{2C} \left\| \left(U(\tau+n, n+\tau-1) u(\tau+n-1) - U(\tau+n, n) x_n \right)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p} \\ &= \frac{\gamma}{2C} \left\| \left((E^1 u)(\tau+n) - \omega(\tau+n) \right)_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{l_p}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Vì $\omega \in \text{Ker}(E^1 - I)$ nên khẳng định (i) trong Định lý 3.2 đã được chứng minh. $\square$

KẾT LUẬN

Qua việc hoàn thành luận văn, tác giả đã bắt đầu làm quen với việc nghiên cứu một cách có hệ thống, có phương pháp và định hướng rõ ràng. Luận văn đã xây dựng được các kiến thức chuyên sâu, hệ thống các bài tập, định lý để đi đến chứng minh các định lý lý thuyết phân, tính chất Fredholm của nhóm tuyến tính hóa $\{U(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$, $t, \tau \in \mathbb{R}$ liên kết với phương trình tuyến tính không thuần nhất $u'(t) = A(t).u(t)$ trên không gian Banach X . Nội dung chính của luận văn là chương 2 và chương 3. Định lý lý thuyết phân được chứng minh trong Chương 2. Tính chất Fredholm được trình bày trong Chương 3. Các kết quả trong luận văn này hoàn toàn mới đối với tác giả, tuy nhiên vì sự khiêm tốn của tác giả, tác giả rất mong được học hỏi từ các đồng nghiệp và các bạn đồng nghiệp Quý Thầy Cô trong và ngoài trường.

TÀI LI U THAM KH O

- [1] Basu, On exponential dichotomy of semigroups, *Acta Math. Univ. Comenianae* Vol. LXXV, 1(2006), pp. 55 – 61.
- [2] K. J. Engel and R. Nagel, *One – parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer – Verlag, Heidelberg, Berlin, New – York, 1999.
- [3]. C. Chicone and Y. Lastushkin, *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 70, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [4] Yuri Latushkin and Yuri Tomilov, *Fredholm Differential Operators with Unbounded Coefficients*, Preprint submitted to Elsevier Science, 2003.
- [5] Yuri Latushkin and Yuri Tomilov, *Fredholm properties of evolution semigroups*, *Illinois Journal of Math*, 2004.