

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

Võ Huy Việt

**TÍNH ỔN ĐỊNH LŨY THỪA
CỦA HỌ TIẾN HÓA CÁC TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH BỊ
CHẶN TRÊN KHÔNG GIAN BANACH**

Chuyên ngành : **Toán giải tích**
Mã số : **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS LÊ HOÀN HÓA**

Thành phố Hồ Chí Minh – 2010

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin kính gửi đến Thầy PGS. TS Lê Hoàn Hóa lời cảm ơn sâu sắc và chân thành nhất vì sự tận tình giúp đỡ và chỉ bảo của Thầy dành cho tôi trong suốt thời gian làm luận văn.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Quý Thầy Cô trường Đại học Sư Phạm Thành phố Hồ Chí Minh, trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên Thành phố Hồ Chí Minh và trường Đại học Tôn Đức Thắng đã tận tình giảng dạy và hướng dẫn tôi trong suốt khóa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn Quý Thầy Cô Phòng Khoa học-Công nghệ và Sau Đại học trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Tôi xin kính gửi đến UBND tỉnh Tiền Giang, Sở Nội vụ, Sở Giáo Dục và Đào Tạo Tiền Giang, Ban Giám Hiệu trường THPT Chợ Gạo lời cảm ơn chân thành vì đã giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận tiện để tôi học tập và nghiên cứu.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Quý Thầy Cô trường THPT Chợ Gạo và đặc biệt là các Thầy trong Tổ Toán; các bạn học viên cao học Toán K18 đã luôn động viên, khuyến khích và giúp đỡ tôi trong thời gian học tập và làm luận văn.

Sau cùng tôi xin kính gửi đến gia đình tôi cùng những người thân tất cả tình cảm yêu thương nhất và lòng tri ơn sâu sắc nhất, nơi đã tạo cho tôi niềm tin và nghị lực và là chỗ dựa vững chắc nhất giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Vì kiến thức bản thân còn hạn chế nên luận văn sẽ khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự nhận xét và chỉ bảo của Quý Thầy Cô và sự góp ý chân thành của các bạn đồng nghiệp.

LỜI CAM ĐOAN

Mặc dù trong quá trình làm luận văn này, tôi đã nghiên cứu, tìm hiểu và tham khảo ở sách vở, các bài báo toán học của các tác giả và luận văn của các khóa trước, tôi có sử dụng một số kết quả đã được chứng minh để hoàn thành luận văn của mình nhưng tôi xin cam đoan không sao chép các luận văn đã có và tôi xin hoàn toàn chịu mọi trách nhiệm với lời cam đoan của mình.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Lý thuyết ổn định là một trong những đề tài được rất nhiều tác giả nghiên cứu. Tuy nhiên đề tài này rất rộng nên trong bài viết của mình tôi chỉ muốn tìm hiểu và nghiên cứu về tính ổn định lũy thừa của họ tiến hóa q-tuần hoàn các toán tử tuyến tính bị chặn $U = \{U(t, s) : t \geq s \geq 0\}$ và nửa nhóm tiến hóa $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ bởi vì các kết quả của nó có liên quan đến nghiệm của bài toán Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t), t \geq s \geq 0 \\ u(s) = x, x \in X \end{cases}$$

2. Mục đích:

Trong luận văn này, chúng tôi sẽ nghiên cứu về tính ổn định lũy thừa của họ tiến hóa q-tuần hoàn các toán tử tuyến tính bị chặn, tính ổn định lũy thừa của nửa nhóm tiến hóa và đặc trưng tích phân cho tính ổn định lũy thừa của các nửa nhóm và các họ tiến hóa trên không gian Banach.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

Toàn bộ luận văn được trình bày gồm các chương mục sau:

Phần mở đầu giới thiệu về lý do chọn đề tài, mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu cùng với ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài.

Chương 1 trình bày các kiến thức chuẩn bị, bao gồm các ký hiệu được sử dụng trong luận văn, khái niệm về họ tiến hóa các toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Banach và các kết quả thừa nhận.

Chương 2 nhằm nghiên cứu và trình bày về tính ổn định lũy thừa của họ tiến hóa các toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Banach, gồm các mục cụ thể sau:

Mục 2.1: Trích từ bài báo [1], nghiên cứu và trình bày về định lý ánh xạ phổ cho nửa nhóm tiến hóa các hàm tuần hoàn xác định trên nửa đường thẳng.

Cho X là một không gian Banach phức.

Chúng ta cũng sẽ chứng minh nửa nhóm tiến hóa $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ trên $APP_o(\mathbb{R}_+, X)$ là liên tục mạnh. Sau đó chúng ta chứng minh một vài tính chất tổng quát của nửa nhóm tiến hóa và chỉ ra một số ứng dụng trong lý thuyết bất đẳng thức.

Mục 2.2: Trích từ bài báo [2], nghiên cứu và trình bày về tính ổn định lũy thừa của họ tiến hóa q-tuần hoàn các toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Banach. Trong đó, chúng ta chứng minh rằng một họ tiến hóa q-tuần hoàn $U = \{U(t, s) : t \geq s \geq 0\}$ của các toán tử tuyến tính bị chặn là ổn định lũy thừa đều nếu và chỉ nếu

$$\sup_{t>0} \left\| \int_0^t e^{-i\mu\xi} U(t, \xi) f(\xi) d\xi \right\| = M(\mu, f) < \infty, \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in P_q(\mathbb{R}_+, X)$$

(f là hàm liên tục và q-tuần hoàn trên $\mathbb{R}_+$)

Mục 2.3: Trích từ bài báo [3], nghiên cứu và trình bày về các đặc trưng tích phân cho tính ổn định lũy thừa của các nửa nhóm và các họ tiến hóa trên không gian Banach. Cụ thể, cho

$U = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ là một họ tiến hóa bị chặn lũy thừa và liên tục mạnh trên X ; J là hàm không âm xác định trên nón dương tất cả các hàm bị chặn địa phương nhận giá trị thực trên $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$. Khi đó chúng ta chứng minh họ U là ổn định lũy thừa đều nếu với mọi $x \in X$, ta có:

$$\sup_{s \geq 0} J(\|U(s + \cdot, s)x\|) < \infty$$

Phần cuối cùng là kết quả thu được trong luận văn. Sau cùng là phần tài liệu tham khảo.

Trong luận văn, một số kết quả sử dụng sẽ được phát biểu dưới dạng định lí hoặc bổ đề không chứng minh.

4. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài:

Kết quả về tính ổn định lũy thừa đều của họ tiến hóa có liên quan đến tính ổn định tiệm cận đều của nghiệm bài toán Cauchy tuyến tính chỉnh và không tự sinh:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t), t \geq s \geq 0 \\ u(s) = x, x \in X \end{cases}$$

Trong trường hợp tự sinh, chẳng hạn khi $U(t, s) = T(t - s)$ với $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ là nửa nhóm tiến hóa liên tục mạnh thì ta nhận được các định lí của Datko, Littman, Neerven, Pazy và Rolewicz: định lí Datko-Pazy, ...

Chương 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 MỘT SỐ KÝ HIỆU

Cho X là không gian Banach phức và $L(X)$ là đại số Banach của tất cả các toán tử tuyến tính trên X , $A \in L(X)$.

Các ký hiệu:

$\mathbb{R}_+$ là tập hợp các số thực không âm.

$\|\cdot\|$ là chuẩn của vector và toán tử.

$\sigma(A)$ là phổ của toán tử tuyến tính A trên X .

$\rho(A) := C \setminus \sigma(A)$ là tập giải của A .

Bán kính phổ của A là $r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Biên của phổ: $s(A) := \sup\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.

$BUC(I, X)$, $I \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$ là không gian Banach tất cả các hàm liên tục đều, bị chặn trên I và nhận giá trị trong X với chuẩn sup.

$AP(I, X)$ là bao đóng tuyến tính trong $BUC(I, X)$, là tập gồm các hàm: $t \mapsto e^{i\mu t} x : I \rightarrow X, \mu \in \mathbb{R}, x \in X$

$BUC(\mathbb{R}, X)$ là không gian tất cả các hàm liên tục đều trên đường thẳng thực, bị chặn và lấy giá trị trong X cùng với chuẩn sup.

$C_o(\mathbb{R}, X)$ là không gian con của $BUC(\mathbb{R}, X)$ gồm tất cả các hàm f thỏa mãn:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

$AP(\mathbb{R}, X)$ là không gian gồm hầu hết tất cả các hàm tuần hoàn, đó là không gian con đóng bé nhất của $BUC(\mathbb{R}, X)$ bao gồm các hàm có dạng: $t \mapsto e^{i\mu t} .x$, $\mu \in \mathbb{R}, x \in X$.

$AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$ là không gian tất cả các hàm h sao cho: $h(0) = 0$ và tồn tại $f \in C_o(\mathbb{R}_+, X)$, $g \in AP(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho: $h = f + g$.

$C_{oo}(\mathbb{R}_+, X)$ là không gian con của $C_o(\mathbb{R}_+, X)$ bao gồm tất cả các hàm f sao cho $f(0) = 0$.

$P_q(I, X)$ là tập gồm tất cả các hàm liên tục $f : I \rightarrow X$ sao cho:

$f(t+q) = f(t)$ với bất kỳ $t \in I$ và một q nào đó, $q > 0$.

$P_q^o(\mathbb{R}_+, X)$ là không gian tất cả các hàm f trên $\mathbb{R}_+$, nhận giá trị trong X , q -tuần hoàn sao cho: $f(0) = 0$.

1.2 KHÁI NIỆM HỌ TIẾN HÓA

1.2.1 Định nghĩa 1:

Cho $q > 0$ và $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s \geq 0\}$.

Một ánh xạ $U : \Delta \rightarrow L(X)$ được gọi là một họ tiến hóa của các toán tử tuyến tính bị chặn trên X nếu:

$$(i) U(t, s) = U(t, r)U(r, s), \forall t \geq s \geq r \geq 0 .$$

$$(ii) U(t, t) = id \text{ (id là ánh xạ đồng nhất trên } X \text{)}.$$

$$(iii) \forall x \in X, (t, s) \mapsto U(t, s)x : \Delta \rightarrow L(X) \text{ liên tục.}$$

Nếu họ tiến hóa U thỏa mãn thêm điều kiện:

$$(iv) U(t+q, s+q) = U(t, s), \forall t \geq s \geq 0 .$$

thì U được gọi là họ tiến hóa q -tuần hoàn.

1.2.2 Định nghĩa 2:

Một họ tiến hóa U được gọi là bị chặn lũy thừa nếu tồn tại $\omega \in \mathbb{R}$ và $M_\omega > 0$ sao cho:

$$\|U(t, s)\| \leq M_\omega e^{\omega(t-s)}, \forall t \geq s \geq 0 \quad (1)$$

Một họ tiến hóa U được gọi là ổn định lũy thừa nếu (1) thỏa với một số âm ω nào đó.

1.2.3 Các kết quả thừa nhận:

1.2.3.1 Kết quả 1:

Nếu họ tiến hóa U thỏa điều kiện:

$$U(t, s) = U(t - s, 0), \forall t \geq s \geq 0$$

thì họ $T = \{U(t, 0) : t \geq 0\} \subset L(X)$ là nửa nhóm liên tục mạnh trên X .

1.2.3.2 Kết quả 2:

Cho $T = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ là nửa nhóm liên tục mạnh trên không gian Banach X và tồn tại $p \in [1; \infty)$ sao cho với mỗi $x \in X$ có:

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p dt = M(p, x) < \infty \quad (2)$$

thì T ổn định lũy thừa.

1.2.3.3 Kết quả 3:

Cho $T = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ là nửa nhóm liên tục mạnh trên không gian Banach X .

Nếu tồn tại hàm liên tục không giảm $\phi : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ sao cho $\phi(t) > 0$ với mọi $t > 0$ và nếu

$$\int_0^{\infty} \phi(\|T(t)x\|) dt := M_{\phi}(x) < \infty, \forall x \in X \quad (3)$$

thì nửa nhóm T ổn định lũy thừa.

1.2.3.4 Kết quả 4:

Nửa nhóm liên tục mạnh T trên X là ổn định lũy thừa đều nếu tồn tại một không gian Banach E trên $\mathbb{R}_+ = [0; \infty)$ có tính chất $\lim_{t \rightarrow \infty} \|1_{[0; t]}\|_E = \infty$ sao cho $\|T(\cdot)x\| \in E, \forall x \in X$.

1.2.3.5 Kết quả 5:

Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ là một họ tiến hóa bị chặn lũy thừa và liên tục mạnh của các toán tử tuyến tính bị chặn trên X .

Với mỗi $t \geq 0$ và $F \in C_o(\mathbb{R}, X)$, hàm $s \mapsto (T(t)F)(s) := U(s, s-t)F(s-t) : \mathbb{R} \rightarrow X$ thuộc $C_o(\mathbb{R}, X)$ và họ $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm liên tục mạnh trên $C_o(\mathbb{R}, X)$.

1.2.3.6 Kết quả 6:

Nếu $U = \{U(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ là một họ tiến hóa q -tuần hoàn, $t \geq 0$ và $G \in AP(\mathbb{R}, X)$ thì hàm $s \mapsto (S(t)G)(s) := U(s, s-t)G(s-t) : \mathbb{R} \rightarrow X$ thuộc $AP(\mathbb{R}, X)$ và họ một tham số $S = \{S(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm liên tục mạnh trên $AP(\mathbb{R}, X)$.

1.2.3.7 Kết quả 7:

Cho $T = \left\{T\left(t\right)\right\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm liên tục mạnh trên X và A_T là phần tử sinh vô cùng bé của nó.

Nếu $\sup_{t>0}\left\|\int_0^te^{i\mu\xi}T\left(\xi\right)d\xi\right\|<\infty,\forall x\in X,\forall\mu\in\mathbb{R}$ thì

$$\sigma\left(A_T\right)\subset C_-=\left\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\left(z\right)<0\right\}.$$

Chương 2: TÍNH ỔN ĐỊNH LŨY THỪA CỦA HỘ TIẾN HÓA

2.1 ĐỊNH LÝ ÁNH XẠ PHỔ CHO NỬA NHÓM TIẾN HÓA CÁC HÀM TUẦN HOÀN XÁC ĐỊNH TRÊN NỬA ĐƯỜNG THẲNG

2.1.1 Bổ đề 1:

Cho $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm liên tục mạnh và $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ là hàm sinh vô cùng bé của nó. Nếu T là ổn định đều, nghĩa là tồn tại một hằng số dương M sao cho:

$$\sup_{t \geq 0} \|T(t)\| = M < \infty$$

thì:

$$\|A(x)\|^2 \leq 4M^2 \|A^2 x\| \|x\|, \forall x \in D(A^2). \quad (4)$$

Chứng minh:

Xem trong [4].

2.1.2 Bổ đề 2:

Cho nửa nhóm $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ được mô tả như sau:

Với mỗi $h \in APP_o(\mathbb{R}_+, X)$ và mọi $t \geq 0$, ta định nghĩa

$$[T(t)h](s) = \begin{cases} U(s, s-t)h(s-t) & , s \geq t \\ 0 & , 0 \leq s < t \end{cases} \quad (5)$$

Khi đó nửa nhóm $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ xác định trên $AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$ và liên tục mạnh. Nửa nhóm này được gọi là nửa nhóm tiến hóa liên hợp với U trong không gian $AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$.

Chứng minh:

Giả sử $h = f + g$ với $f \in C_o(\mathbb{R}_+, X)$ và $g \in AP(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho: $h(0) = 0$.

Lấy $F \in C_o(\mathbb{R}, X)$ và $G \in AP(\mathbb{R}, X)$ sao cho $F(s) = f(s)$ và $G(s) = g(s)$, $\forall s \geq 0$.

Với mỗi $t \geq 0$ ta có:

$$T(t)h = (1_{[0,\infty)}S(t)G) + (1_{[t,\infty)}T(t)f - 1_{[0,t)}S(t)G).$$

với $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là nửa nhóm tiến hóa trên $AP(\mathbb{R}, X)$ và 1_J là hàm đặc trưng trên khoảng J .

Đặt:

$$\begin{aligned} g_1 &= 1_{[0,\infty)}S(t)G \\ f_1 &= 1_{[t,\infty)}T(t)f - 1_{[0,t)}S(t)G \end{aligned}$$

thì $f_1 \in C_o(\mathbb{R}_+, X)$ và $g_1 \in AP(\mathbb{R}_+, X)$, $(g_1 + f_1)(0) = 0$.

Vì thế $T(t)$ được xác định trên $AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$ với mọi $t \geq 0$.

Hơn nữa, $\forall h \in AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$ ta có:

$$\begin{aligned} \sup_{s \geq 0} \|T(t)h - h\| &\leq \sup_{s \geq t} \|(T(t)h - h)(s)\| + \sup_{s \in [0, t]} \|(T(t)h - h)(s)\| \\ &\leq \sup_{s \geq t} \|(S(t)G - G)(s)\| + \sup_{s \in [0, t]} \|(T(t)F - F)(s)\| \\ &\quad + \sup_{s \in [0, t]} \|h(s)\| \end{aligned}$$

$$\leq \|S(t)G - G\|_{AP(\mathbb{R}, X)} + \|T(t)F - F\|_{C_0(\mathbb{R}, X)} \\ + \sup_{s \in [0, t]} \|h(s)\|$$

Vậy $\|T(t)h - h\|_{AAP_o(\mathbb{R}_+, X)} \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow 0$, tức là nửa nhóm T liên tục mạnh.

2.1.3 Bổ đề 3:

Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s \in \Delta\}$ là một họ tiến hóa q -tuần hoàn của các toán tử tuyến tính bị chặn trên X , $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm tiến hóa liên hợp với U trên không gian $AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$, được cho trong (5) và $(A, D(A))$ là phần tử sinh vô cùng bé của nó. Cho $u, f \in AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$. Hai phát biểu sau là tương đương:

$$1). u \in D(A), Au = -f$$

$$2). u(t) = \int_0^t U(t, s) f(s) ds, \forall t \geq 0$$

Chứng minh:

$$1) \Rightarrow 2) : \text{Giả sử } Au = -f.$$

Với mỗi $t \geq 0$, ta có:

$$T(t)u - u = \int_0^t T(\xi) A u d\xi$$

Do đó:

$$u(t) = (T(t)u)(t) - \left(\int_0^t T(\xi) A u d\xi \right)(t)$$

$$\begin{aligned}
&= (U(t, 0))u(0) - \int_0^t U(t, t-\xi)(Au)(t-\xi)d\xi \\
&= \int_0^t U(t, t-\xi)f(t-\xi)d\xi \\
&= \int_0^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 1) : Giả sử $u, f \in AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$ và u thỏa:

$$u(t) = \int_0^t U(t, s)f(s)ds, \forall t \geq 0.$$

Lấy $t > 0$ cố định.

Nếu $s \geq t$, ta có:

$$\begin{aligned}
(-T(t)u + u)(s) &= -U(s, s-t)u(s-t) + u(s) \\
&= \int_0^s U(s, \tau)f(\tau)d\tau - \int_0^{s-t} U(s, \tau)f(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t U(s, s-r)f(s-r)dr \\
&= \left(\int_0^t T(r)f dr \right)(s).
\end{aligned}$$

Nếu $0 \leq s < t$, ta có:

$$\begin{aligned}
(-T(t)u + u)(s) &= u(s) \\
&= \int_0^s U(s, \tau)f(\tau)d\tau \\
&= \int_0^s U(s, s-r)f(s-r)dr
\end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^s T(r) f dr \right) (s)$$

$$= \left(\int_0^t T(r) f dr \right) (s)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } (-T(t)u + u)(s) = \left(\int_0^t T(r) f dr \right) (s)$$

$$\text{Vậy } u \in D(A), Au = -f.$$

2.1.4 Định lí 1:

Cho U, T và $(A, D(A))$ như trong bổ đề 3. Năm phát biểu sau là tương đương:

(i) U là ổn định lũy thừa đều.

(ii) A là một toán tử khả nghịch.

(iii) Với mọi $f \in AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$, hàm $t \mapsto u_f(t, 0) = \int_0^t U(t, s) f(s) ds$ thuộc $AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$.

(iv) Với mọi $f \in AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$, hàm $u_f(., 0)$ bị chặn trên $\mathbb{R}_+$.

(v) Với mọi $f \in P_q^o(\mathbb{R}_+, X)$ và $\mu \in \mathbb{R}$, hàm $t \mapsto \int_0^t U(t, s) e^{-i\mu s} f(s) ds$ bị chặn trên $\mathbb{R}_+$.

Chứng minh:

$(i) \Rightarrow (ii):$

Đặt: $\mathcal{X} := AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}\|T(t)\|_{L(\mathcal{X})} &= \sup \left\{ \sup_{s \geq t} \|U(s, s-t)h(s-t)\| : \|h\|_{\mathcal{X}} = 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ M_{\omega} e^{\omega t} \sup_{s \geq t} \|h(s-t)\| : \|h\|_{\mathcal{X}} = 1 \right\} \\ &\leq M_{\omega} e^{\omega t}, \forall t \geq 0\end{aligned}$$

$$\text{Vì thế: } \omega_o(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} \leq \omega < 0.$$

Theo lý thuyết nửa nhóm tuyến tính tổng quát ta suy ra $0 \in \rho(A)$ và do đó A là toán tử khả nghịch.

$(ii) \Rightarrow (iii):$

Vì A khả nghịch nên phương trình $Au = -f$ có nghiệm

$$u(t) = \int_0^t U(t, s) f(s) ds, \text{ với } u \in D(A), f \in AAP_o(\mathbb{R}_+, X).$$

Từ đó suy ra $u_f(0, t) = u(t)$ và do đó hàm

$$t \mapsto u_f(t, 0) = \int_0^t U(t, s) f(s) ds \text{ thuộc } AAP_o(\mathbb{R}_+, X).$$

$(iii) \Rightarrow (iv):$

Đặt $u_f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X, u_f(t) = u_f(t, 0)$, ta có:

$u_f \in AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$ nên hàm $u_f(., 0)$ bị chặn trên $\mathbb{R}_+$.

$(iv) \Rightarrow (v):$

Lấy $h = 0 + g$ với $g \in AP(\mathbb{R}_+, X)$, $g(s) = e^{-i\mu s} f(s)$ và $0 \in C_o(\mathbb{R}_+, X)$.

Suy ra: $h \in AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: hàm } t \mapsto \int_0^t U(t, s) e^{-i\mu s} f(s) ds &= \int_0^t U(t, s) g(s) ds \\ &= \int_0^t U(t, s) h(s) ds \end{aligned}$$

bị chặn trên $\mathbb{R}_+$.

$(v) \Rightarrow (i):$

$$\forall t \mapsto \int_0^t U(t, s) e^{-i\mu s} f(s) ds \text{ bị chặn trên } \mathbb{R}_+ \text{ với mọi}$$

$f \in P_q^o(\mathbb{R}_+, X)$ và với mọi $\mu \in \mathbb{R}$ nên

$$\sup_{t>0} \left\| \int_0^t e^{-i\mu s} U(t, s) f(s) ds \right\| < \infty, \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in P_q^o(\mathbb{R}_+, X) \quad (6)$$

Đặt $V = U(q, 0), x \in X, n = 0, 1, \dots$ và $g \in P_q^o(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho:

$$g(s) = s(q-s)U(s, 0)x, \forall s \in [0, q]$$

Từ (6), cho $t = (n+1)q$ ta được:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n \int_{kq}^{(k+1)q} U((n+1)q, s) e^{-i\mu s} g(s) ds \right\| < \infty, \forall \mu \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Theo (iv) của định nghĩa họ tiến hóa q -tuần hoàn ta suy ra:

$$U(pq + q, pq + u) = U(q, u), \forall p \in \mathbb{N}, \forall u \in [0, q] \text{ và}$$

$$U(pq, jq) = U((p-1)q, 0) = V^{p-1}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, p \geq j.$$

Bây giờ, với mọi $k = 0, 1, \dots$ ta có:

$$\begin{aligned}
& \int_{kq}^{(k+1)q} U((n+1)q, s) e^{-i\mu s} g(s) ds \\
&= \int_{kq}^{(k+1)q} U((n+1)q, (k+1)q) U((k+1)q, s) e^{-i\mu s} g(s) ds \\
&= V^{n-k} \int_0^q U((k+1)q, u+kq) e^{-i\mu(u+kq)} g(kq+u) du \\
&= e^{-i\mu kq} V^{n-k} \int_0^q e^{-i\mu u} u(q-u) U(q, u) U(u, 0) x du \\
&= e^{-i\mu kq} \left(\int_0^q e^{-i\mu u} u(q-u) du \right) V^{n-k+1} x \\
&= M(q, \mu) e^{-i\mu(n+1)q} e^{i\mu(n-k+1)q} V^{n-k+1} x
\end{aligned}$$

Trong đó: $M(q, \mu) = \int_0^q e^{-i\mu u} u(q-u) du \neq 0$.

Thay vào (7) ta được:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=0}^{n+1} e^{-i\mu j q} v^j \right\| < \infty,$$

tức là $r(V) < 1$ và U là ổn định lũy thừa.

2.1.5 Định lý 2:

Cho U là một họ tiến hóa, q -tuần hoàn của các toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Banach X . Khi đó nửa nhóm tiến hóa T trên $AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$ thỏa mãn định lý ánh xạ phổ, tức là:

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)) \setminus \{0\}, t \geq 0.$$

Hơn nữa: $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \leq s(A)\}$ và

$$\sigma(T(t)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(T(t))\}, \forall t \geq 0.$$

Chứng minh:

Lấy $\lambda \in \rho(A)$ và $\mu \in \mathbb{C}$ sao cho $\operatorname{Re} \mu \geq \operatorname{Re} \lambda$.

Vì $A - \lambda Id$ là phần tử sinh của nửa nhóm tiến hóa $T_\lambda = (e^{-\lambda t} T(t))_{t \geq 0}$ trên A cảm sinh bởi họ tiến hóa $U_\lambda = (e^{-\lambda(t-s)} U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$.

Theo định lí 1 suy ra rằng U_λ và do đó U_μ ổn định lũy thừa, điều này tương đương $A - \mu Id$ khả nghịch, tức là $\mu \in \rho(A)$.

Do đó $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \leq s(A)\}$ là nửa mặt phẳng bên trái.

Nếu $\operatorname{Re} \lambda > s(A)$ thì theo định lí 1 họ tiến hóa U_λ là ổn định lũy thừa và vì thế nửa nhóm tiến hóa T_λ được cảm sinh cũng ổn định lũy thừa.

Đặc biệt, $r(e^{-\lambda t} T(t)) < 1$, tức là: $r(T(t)) < e^{\operatorname{Re} \lambda \cdot t}$ với $t > 0$.

Vì vậy, $r(T(t)) \leq e^{s(A) \cdot t}, t \geq 0$.

Cùng với định lí bao hàm phổ $e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(t)), t \geq 0$ suy ra rằng $\sigma(T(t)), t > 0$ là một cái đĩa và định lí ánh xạ phổ được thỏa.

2.1.6 Định lí 3:

Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s \geq 0\}$ là một họ tiến hóa, q -tuần hoàn của các toán tử tuyến tính bị chặn trên X , $f \in \mathcal{X} := AAP_o(\mathbb{R}_+, X)$. Giả sử hai điều kiện sau được thỏa:

$$(i) \quad u_f(., 0) = \int_0^{\cdot} U(., s) f(s) ds \text{ thuộc } \mathcal{X}.$$

$$(ii) \quad v_f(.) = \int_0^{\cdot} (.-s) U(., s) f(s) ds \text{ thuộc } \mathcal{X}.$$

$$\text{Nếu } \sup \{\|U(t, s)\| : t \geq s \geq 0\} = M < \infty$$

$$\text{thì } \|u_f(., 0)\|_{\mathcal{X}} \leq 4M^2 \|f\|_{\mathcal{X}} \|v_f(.)\|_{\mathcal{X}} \quad (8)$$

Chứng minh:

Giả sử T là nửa nhóm tiến hóa liên hợp với U trên không gian $\mathcal{X}$ và $(A, D(A))$ là phần tử sinh vô cùng bé.

Theo kết quả của bổ đề 3 thì $u_f(., 0)$ thuộc $D(A)$ và $Au_f(., 0) = -f$.

Theo định lý Fubini, ta có:

$$v_f(t) = \int_0^t U(t, r) u_f(r, 0) dr, \forall t \geq 0.$$

Suy ra: $v_f(.) \in D(A^2)$ và $A^2 v_f(.) = f$ (bổ đề 3).

Theo bổ đề 1 ta có bất đẳng thức (8).

Với $U(t, s) = I$, định lý 3 có thể được tổng quát lên như sau:

2.1.7 Mệnh đề:

Cho f là hàm khả tích Bochner địa phương trên $\mathbb{R}_+$, nhận giá trị trong X ; g, h là các ánh xạ trên $\mathbb{R}_+$ được cho bởi:

$$g(t) := \int_0^t f(s) ds \quad \text{và} \quad h(t) := \int_0^t (t-s) f(s) ds.$$

Nếu $\sup \left\{ \|f(t)\| : t \geq 0 \right\} = M_1 < \infty$ và $\sup \left\{ \|h(t)\| : t \geq 0 \right\} = M_3 < \infty$ thì

$$\|g(r)\|^2 \leq 4M_1M_3, \forall r \geq 0. \quad (9)$$

Chứng minh:

Với mọi $t \geq 0$ và bất kỳ hàm F trên $\mathbb{R}_+$ nhận giá trị trong X , xét hàm F_t được cho bởi:

$$F_t(s) = \begin{cases} F(s-t) & , s \geq t \\ 0 & , 0 \leq s \leq t \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} * \text{ Với } 0 \leq r \leq t \text{ thì } h_t(r) - h(r) + tg(r) &= \int_0^r tf(s) ds - \int_0^r (r-s) f(s) ds \\ &= \int_0^r (t-r+s) f(s) ds \\ &= \int_0^r (t-\tau) f(r-\tau) d\tau \\ &= \int_0^r (t-\tau) f_\tau(r) d\tau \end{aligned}$$

Lấy chuẩn hai vế ta được:

$$\|g(r)\| \leq \frac{2M_3}{t} + \frac{tM_1}{2}, \forall t \geq 0.$$

* Với $r \geq t$ thì

$$\begin{aligned}
h_t(r) - h(r) + tg(r) &= h(r-t) - h(r) + tg(r) \\
&= \int_0^{r-t} (r-t-s) f(s) ds - \int_0^r (r-s) f(s) ds + \int_0^r tf(s) ds \\
&= \int_0^{r-t} (r-t-s) f(s) ds - \int_0^r (r-t-s) f(s) ds \\
&= \int_r^{r-t} (r-t-s) f(s) ds \\
&= \int_0^t (t-\tau) f(r-\tau) d\tau \\
&= \int_0^t (t-\tau) f_\tau(r) d\tau
\end{aligned}$$

Lấy chuẩn hai vế ta được:

$$\|g(r)\| \leq \frac{2M_3}{t} + \frac{tM_1}{2}, \forall t \geq 0.$$

Như vậy cả hai trường hợp ta đều có :

$$\|g(r)\| \leq \frac{2M_3}{t} + \frac{tM_1}{2}, \forall t \geq 0. \quad (10)$$

Nếu $M_1 = 0$ hoặc $M_3 = 0$ thì $g = 0$ và (9) thỏa.

Nếu $M_1 > 0$ và $M_3 > 0$ thì (9) có thể nhận được từ (10) với $t = \sqrt{4M_3/M_1}$.

2.2 TÍNH ỔN ĐỊNH LŨY THỪA CỦA HỌ TIẾN HÓA q -TUẦN HOÀN CÁC TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH BỊ CHẶN TRÊN KHÔNG GIAN BANACH

2.2.1 Bổ đề 4:

Một họ tiến hóa q -tuần hoàn U trên X tăng theo lũy thừa, tức là có $\omega \in \mathbb{R}$ và $M > 1$ sao cho:

$$\|U(t, s)\| \leq M e^{\omega(t-s)}, \forall t \geq s \geq 0 \quad (11)$$

Họ tiến hóa U được gọi là ổn định lũy thừa nếu có $\omega < 0$ và $M > 1$ sao cho (11) thỏa.

Đặt: $V = U(q, 0) \in L(X)$.

2.2.2 Bổ đề 5:

Một họ tiến hóa q -tuần hoàn U là ổn định lũy thừa nếu và chỉ nếu $r(V) < 1$.

Chứng minh của bổ đề 4 và bổ đề 5 có thể xem trong [6, Định lý 6.6].

2.2.3 Bổ đề 6:

Cho $T \in L(X)$. Nếu $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n e^{i\mu k} T^k \right\| = M_\mu < \infty, \forall \mu \in \mathbb{R}$

thì $r(T) < 1$.

Chứng minh:

Chúng ta sử dụng đồng nhất:

$$\sum_{k=0}^n e^{i\mu k} T^k (e^{i\mu} T - Id) = e^{i\mu(n+1)} T^{n+1} - Id \quad (12)$$

Từ (12) suy ra:

$$\begin{aligned}
\left\| e^{i\mu(n+1)} T^{n+1} \right\| &= \left\| Id + \sum_{k=0}^n e^{i\mu k} T^k (e^{i\mu} T - Id) \right\| \\
&\leq 1 + \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n e^{i\mu k} T^k \right\| (\|T\| + 1) \\
&\leq 1 + M_{\mu} (1 + \|T\|), \forall n \in \mathbb{N} \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\|T^{n+1}\|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{1 + M_{\mu} (1 + \|T\|)} = 1.$$

Giả sử $1 \in \sigma(T)$.

Khi đó với $m = 1, 2, \dots$ tồn tại $x_m \in X$ với $\|x_m\| = 1$ và $(Id - T)x_m \rightarrow 0$ khi $m \rightarrow \infty$ (xem [7, Mệnh đề 2.2]).

Từ (13) ta có: $T^k (Id - T)x_m$ hội tụ đều về 0 khi $m \rightarrow \infty$ (với $k \in \mathbb{N}$).

Lấy $N \in \mathbb{N}, N > 2M_o$ và $m \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\|T^k (Id - T)x_m\| \leq \frac{1}{2N}, k = 0, 1, \dots, N$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
M_o &\geq \left\| x_m + \sum_{k=1}^N \left(x_m + \sum_{j=0}^{k-1} T^j (T - Id)x_m \right) \right\| \\
&= \left\| (N+1)x_m + \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{k-1} T^j (T - Id)x_m \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq (N+1) - \frac{N(N+1)}{4N} \\ &> \frac{N}{2} > M_o \end{aligned}$$

Mâu thuẫn này dẫn đến $1 \notin \sigma(T)$.

Từ đó dễ thấy $e^{i\mu} \notin \sigma(T), \forall \mu \in \mathbb{R}$.

Vậy $r(T) < 1$.

2.2.4 Định lí 4:

Cho $U = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ là một họ tiến hóa q -tuần hoàn trên không gian Banach

$$X. \text{ Nếu } \sup_{t>0} \left\| \int_0^t e^{-i\mu\xi} U(t, \xi) f(\xi) d\xi \right\| < \infty, \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in P_q(\mathbb{R}_+, X) \quad (14) \text{ thì } U \text{ là ổn}$$

định lũy thừa.

Chứng minh:

Lấy $V = U(q, 0), x \in X, n = 0, 1, \dots$ và $g \in P_q(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho:

$$g(\xi) = \xi(q - \xi)U(\xi, 0)x, \forall \xi \in [0, q]$$

Từ (14), cho $t = (n+1)q$ ta được:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n \int_{kq}^{(k+1)q} U((n+1)q, \xi) e^{-i\mu\xi} g(\xi) d\xi \right\| < \infty, \forall \mu \in \mathbb{R} \quad (15)$$

Theo (iv) của định nghĩa họ tiến hóa q -tuần hoàn ta suy ra:

$$U(pq + q, pq + u) = U(q, u), \forall p \in \mathbb{N}, \forall u \in [0, q] \text{ và}$$

$$U(pq, jq) = U(jq + (p-j)q, jq + 0)$$

$$= U((p-j)q, 0)$$

$$= V^{p-1}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, p \geq j$$

Bây giờ, với mọi $k = 0, 1, \dots$ ta có:

$$\int_{kq}^{(k+1)q} U((n+1)q, \xi) e^{-i\mu\xi} g(\xi) d\xi$$

$$= \int_{kq}^{(k+1)q} U((n+1)q, (k+1)q) U((k+1)q, \xi) e^{-i\mu\xi} g(\xi) d\xi$$

$$= V^{n-k} \int_0^q U((k+1)q, u+kq) e^{-i\mu(u+kq)} g(kq+u) du$$

$$= e^{-i\mu kq} V^{n-k} \int_0^q e^{-i\mu u} u(q-u) U(q, u) U(u, 0) x du$$

$$= e^{-i\mu kq} V^{n-k} \int_0^q e^{-i\mu u} u(q-u) U(q, 0) x du$$

$$= e^{-i\mu kq} \left(\int_0^q e^{-i\mu u} u(q-u) du \right) V^{n-k+1} x$$

$$= M(q, \mu) e^{-i\mu(n+1)q} e^{i\mu(n-k+1)q} V^{n-k+1} x$$

Trong đó: $M(q, \mu) = \int_0^q e^{-i\mu u} u(q-u) du \neq 0$.

Thay vào (15) ta được:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n M(q, \mu) e^{-i\mu(n+1)q} e^{i\mu(n-k+1)q} V^{n-k+1} x \right\| < \infty, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Suy ra:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n e^{i\mu(n-k+1)q} V^{n-k+1} \right\| < \infty, \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{hay là: } \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=0}^{n+1} e^{-i\mu jq} v^j \right\| < \infty,$$

tức là $r(V) < 1$ và U là ổn định lũy thừa.

2.2.5 Hệ quả 1:

Một họ tiến hóa q -tuần hoàn U trên X là ổn định lũy thừa đều nếu và chỉ nếu:

$$\sup_{t > 0} \left\| \int_0^t U(t, \xi) f(\xi) d\xi \right\| < \infty, \forall f \in AP(\mathbb{R}_+, X)$$

Chứng minh:

Xem trong [8] và [9].

Cuối cùng, ta có kết quả cho các họ tiến hóa trên đường thẳng:

Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s \in \mathbb{R}\}$ là họ tiến hóa q -tuần hoàn trên $\mathbb{R}$.

Sử dụng ký hiệu như phần 2.1 với $\mathbb{R}_+$ thay bởi $\mathbb{R}$, các biến s và t lấy giá trị trong $\mathbb{R}$.

Xét nửa nhóm tiến hóa $T_{\alpha\beta}$ liên hợp với U trên không gian $AP(\mathbb{R}, X)$. Nửa nhóm này là nửa nhóm liên tục mạnh.

2.2.6 Hệ quả 2:

Cho $U = \{U(t, s) : t \geq s\}$ là họ tiến hóa q -tuần hoàn của các toán tử tuyến tính bị chặn trên X và $T_{\alpha\beta}$ là nửa nhóm tiến hóa liên hợp với U trên không gian $AP(\mathbb{R}, X)$. Khi đó U là ổn định lũy thừa đều nếu và chỉ nếu:

$$\sup_{t>0} \left\| \left(\int_0^t e^{i\mu\xi} T_{\alpha\beta}(\xi) f d\xi \right) (t) \right\| < \infty, \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in P_q(\mathbb{R}_+, X) \text{ **Chứng**}$$

minh:

Với $t > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t e^{i\mu\xi} T_{\alpha\beta}(\xi) f d\xi \right) (t) &= \int_0^t e^{i\mu\xi} U(t, t-\xi) f(t-\xi) d\xi \\ &= e^{-i\mu t} \int_0^t e^{i\mu\tau} U(t, \tau) f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Theo định lý 4 ta có hạn chế U_0 của U trên tập $\{(t, s) : t \geq s \geq 0\}$ là ổn định lũy thừa đều.

Lấy $N > 0$ và $\nu > 0$ sao cho: $\|U(t, s)\| \leq Ne^{-\nu(t-s)}, \forall t \geq s \geq 0$.

Khi đó với mọi số thực u và v mà $u > v$ ta có:

$$\|U(u, v)\| = \|U(u + nq, v + nq)\| \leq Ne^{-\nu(u-v)},$$

trong đó $n \in \mathbb{N}$ sao cho $v + nq \geq 0$.

Vậy U là ổn định lũy thừa đều.

2.3 ĐẶC TRƯNG TÍCH PHÂN CHO TÍNH ỔN ĐỊNH LŨY THỪA CỦA CÁC NỬA NHÓM VÀ CÁC HỌ TIẾN HÓA TRÊN KHÔNG GIAN BANACH

2.3.1 Một sự tổng quát hóa của định lý DATKO-PAZY

2.3.1.1 Bổ đề 7:

Cho $T = \{ T(t): t \geq 0 \}$ là nửa nhóm bị chặn địa phương trên một không gian Banach X . Nếu với mỗi $x \in X$ tồn tại $t(x) > 0$ sao cho $T(t(x))x = 0$ thì T là ổn định lũy thừa đều.

Chứng minh:

Dễ thấy T bị chặn đều.

Thật vậy, nếu T không bị chặn đều thì tồn tại dãy các số thực dương (t_n) với $t_n \rightarrow \infty$ sao cho $\|T(t_n)\| \rightarrow \infty$.

Theo định lý bị chặn đều suy ra tồn tại $x \in X$ sao cho $\|T(t_n)x\| \rightarrow \infty$. Điều này trái với giả thiết.

Vậy T bị chặn đều.

Với $v > 0$ ta có nửa nhóm $\{e^{vt}T(t)\}$ thỏa giả thiết bổ đề 7 và bị chặn đều.

Từ đó suy ra: $\|T(t)\| \leq Me^{-vt}, \forall t \geq 0$

Vậy T ổn định lũy thừa đều.

2.3.1.2 Bổ đề 8:

Cho $T = \{ T(t): t \geq 0 \}$ là nửa nhóm bị chặn địa phương sao cho với mỗi $x \in X$ ánh xạ $t \mapsto \|T(t)x\|$ liên tục trên $(0; \infty)$. Nếu tồn tại số dương h và $0 <$

$q < 1$ sao cho với mọi $x \in X$ tồn tại $t(x) \in (0; h]$ với $\|T(t(x))x\| \leq q\|x\|$ thì nửa nhóm T là ổn định lũy thừa.

Chứng minh:

Lấy $x \in X$ cố định và $t_1 \in (0; h]$ sao cho $\|T(t_1)x\| \leq q\|x\|$ Khi đó tồn tại $t_2 \in (0; h]$ sao cho:

$$\begin{aligned}\|T(t_2 + t_1)x\| &\leq q\|T(t_1)x\| \\ &\leq q^2\|x\|.\end{aligned}$$

Suy ra tồn tại dãy (t_n) với $0 < t_n \leq h$ sao cho:

$$\|T(s_n)x\| \leq q^n\|x\|, \text{ trong đó: } s_n := t_1 + \dots + t_n.$$

Nếu $s_n \rightarrow \infty$ thì với mỗi $t \in [s_n; s_{n+1}]$ ta có $t < (n+1)h$ và

$$\|T(t)x\| \leq Mq^n\|x\| \leq Me^{-\ln(q)}e^{\frac{\ln(q)}{h}}\|x\|$$

và do đó T ổn định lũy thừa.

Nếu dãy (s_n) bị chặn, gọi $t(x)$ là giới hạn của dãy (s_n) . Do tính liên tục nên suy ra $T(t(x)) = 0$ và theo bổ đề 7 suy ra T ổn định lũy thừa.

2.3.1.3 Định lí 5:

Gọi $M_{loc}([0; \infty))$ là không gian tất cả các hàm thực bị chặn địa phương trên $\mathbb{R}_+ = [0; \infty)$ với tôpô hội tụ đều trên các tập bị chặn và $M_{loc}^+(\mathbb{R}_+)$ là nón dương.

Giả sử $J : M_{loc}^+(\mathbb{R}_+) \rightarrow [0; \infty]$ là ánh xạ có các tính chất :

1. J không giảm.

2. Với mỗi số thực dương ρ thì $\lim_{t \rightarrow \infty} J(\rho.1_{[0;t]}) = \infty$.

Nếu T là nửa nhóm trên không gian Banach X như trong bổ đề 8 sao cho :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} J(\|T(\cdot)x\|) := K_J < \infty \quad (16)$$

thì T ổn định lũy thừa.

Chứng minh:

Giả sử T không ổn định lũy thừa.

Khi đó với mọi $h > 0$ và mọi $0 < q < 1$ tồn tại $x_o \in X$, $\|x_o\| = 1$ sao cho :

$$\|T(t)x_o\| > q \text{ với mọi } t \in [0; h].$$

Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} K_J &\geq J(\|T(\cdot)x_o\|) \\ &\geq J(q.1_{[0;h]}) \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với (16).

Vậy T ổn định lũy thừa.

2.3.1.4 Hệ quả 3:

Cho $T = \{T(t): t \geq 0\}$ là nửa nhóm trên không gian Banach X như trong bổ đề 8 và $1 \leq p < \infty$.

$$\text{Nếu } \int_0^\infty \|T(t)x\|^p dt := M(p, x) < \infty \quad (17) \text{ với mọi } x \in X \text{ thì nửa}$$

nhóm T ổn định lũy thừa.

Chứng minh:

Với mỗi số dương cố định h xét toán tử tuyến tính bị chặn

$t \mapsto T_h x : X \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, X)$ được xác định bởi :

$$(T_h x)(t) = \begin{cases} T(t)x, & 0 \leq t \leq h \\ 0, & t > h \end{cases}$$

Với mỗi $x \in X$ ta có:

$$\begin{aligned} \|T_h x\|_{L^p(\mathbb{R}_+, X)} &= \left(\int_0^h \|T(t)x\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M(p, x)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Theo định lí bị chặn đều suy ra tồn tại hằng số dương C_p sao cho :

$$\|T_h x\|_{L^p(\mathbb{R}_+, X)} \leq C_p \|x\| \text{ với mọi } x \in X.$$

Bây giờ dễ dàng suy ra bất đẳng thức :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \int_0^\infty \|T(t)x\|^p dt \leq K_p < \infty,$$

trong đó K_p là hằng số dương.

Chọn $J(f) := \int_0^\infty f(t)^p dt$ và áp dụng định lí 5 suy ra điều cần chứng minh.

2.3.1.5 Hệ quả 4:

Cho $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ là nửa nhóm trên không gian Banach X như trong bổ

đề 8. Nếu tồn tại hàm không giảm $\phi : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ sao cho $\phi(t) > 0$ với

$$\text{mọi } t > 0 \text{ và } \int_0^\infty \phi(\|T(t)x\|) dt := M_\phi(x) < \infty, \forall x \in X \quad (18)$$

thì nửa nhóm T ổn định lũy thừa.

Chứng minh:

Giả sử $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ và ϕ tăng ngặt trên $\mathbb{R}_+$, nếu không ta có thể thay ϕ bởi hàm:

$$t \mapsto \bar{\phi}(t) := \begin{cases} \int_0^t \phi(u) du, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{at}{at+1-a}, & t > 1 \end{cases},$$

trong đ ó: $a := \int_0^1 \phi(u) du$.

Lấy $x \in X$ cố định, N là số nguyên dương sao cho $M_\phi(x) < N$ và lấy $t \geq N$.

Với mỗi $\tau \in [t-N; t]$ và mọi $u \geq 0$ ta có:

$$\begin{aligned} e^{-\omega N} 1_{[t-N; t]}(u) \|T(t)x\| &\leq e^{-\omega(t-\tau)} 1_{[t-N; t]}(u) \|T(t-\tau)T(\tau)x\| \\ &\leq M \|T(u)x\| \end{aligned}$$

Và khi đó:

$$\begin{aligned} N\phi\left(\frac{\|T(t)x\|}{Me^{\omega N}}\right) &\leq \int_{t-N}^t \phi\left(\frac{\|T(t)x\|}{Me^{\omega N}}\right) du \\ &\leq M_\phi(x) \end{aligned}.$$

$$\text{Suy ra: } \phi\left(\frac{\|T(t)x\|}{Me^{\omega N}}\right) \leq 1 = \phi(1)$$

Vì thế $\|T(t)x\| \leq Me^{\omega N}$ với mọi $t \geq N$ và do đó T bị chặn đều.

Theo [10, **Bổ đề 3.2.1**] suy ra tồn tại không gian Orlicz E thỏa

$\lim_{t \rightarrow \infty} \|1_{[0,t]}\|_E = \infty$ sao cho với mỗi $x \in X$ thỏa (18), ánh xạ $t \mapsto T(t)x$ thuộc vào E .

Với mỗi hàm thực bị chặn không âm f , ta đặt:

$$J(f) := \sup_{t \geq 0} \|1_{[0,t]} f\|_E, \text{ ta có:}$$

$$J(\|T(\cdot)x\|) = \sup_{t \geq 0} \|1_{[0,t]} \|T(\cdot)x\|\|_E$$

$$\leq \| \|T(\cdot)x\| \|_E < \infty$$

với mọi $x \in X$.

Theo hệ quả 3 suy ra tồn tại hằng số dương K_ϕ độc lập với x sao cho:

$$\sup_{\|x\| \leq 1} J(\|T(\cdot)x\|) := K_\phi < \infty \text{ và theo định lí 5 suy ra điều cần chứng minh.}$$

2.3.2 Trường hợp không tự sinh

2.3.2.1 Bổ đề 9:

Cho $U = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ là họ tiến hóa bị chặn lũy thừa trên không gian Banach X . Nếu với mỗi $x \in X$ tồn tại $t(x) > 0$ sao cho $U(s + t(x), s)x = 0$ với mọi $s \geq 0$ thì họ U ổn định lũy thừa.

Chứng minh:

Trước hết ta chứng minh tồn tại $M > 0$ sao cho :

$$\sup_{s \geq 0} \|U(s + t, s)\| \leq M \text{ với mọi } t \geq 0.$$

Thật vậy, giả sử trái lại thì tồn tại dãy số thực dương (t_n) với $t_n \rightarrow \infty$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U(s + t_n, s)\| = \infty$.

Theo định lý bị chặn đều suy ra tồn tại $x \in X$ sao cho :

$$\|U(s + t_n, s)x\| \rightarrow \infty \text{ khi } n \rightarrow \infty \text{ (mâu thuẫn với giả thiết)}.$$

Từ đó ta nhận được họ $\{e^{v(t-s)}U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ thỏa các giả thiết của bổ đề và khi đó :

$$\|U(t, s)\| \leq Me^{-v(t-s)} \text{ với mọi } t \geq s.$$

Do đó U ổn định lũy thừa.

2.3.2.2 Bổ đề 10:

Cho $U = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ là họ tiến hóa bị chặn lũy thừa trên không gian

Banach X sao cho với mỗi $y \in X$ và mỗi $s \geq 0$ ánh xạ :

$$t \mapsto \|U(s+t, s)y\| : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ liên tục trên } (0; \infty).$$

Nếu tồn tại số thực dương h và $q < 1$ sao cho với mọi $x \in X$ tồn tại $t(x) \in (0; h]$ có tính chất :

$$\sup_{s \geq 0} \|U(s+t(x), s)x\| \leq q \|x\| \text{ thì họ } U \text{ ổn định lũy thừa.}$$

Chứng minh:

Lấy $x \in X$ cố định và $t_1 \in (0; h]$ sao cho

$$\sup_{s \geq 0} \|U(s+t_1(x), s)x\| \leq q \|x\|$$

Khi đó tồn tại $t_2 \in (0; h]$ sao cho:

$$\begin{aligned} \sup_{s \geq 0} \|U(s+(t_2+t_1)(x), s)x\| \\ \leq q \|U(s+t_1(x), s)x\| \\ \leq q \sup_{s \geq 0} \|U(s+t_1(x), s)x\| \\ \leq q^2 \|x\|. \end{aligned}$$

Suy ra tồn tại dãy (t_n) với $0 < t_n \leq h$ sao cho:

$$\sup_{s \geq 0} \|U(s+s_n(x), s)x\| \leq q^n \|x\|, \text{ trong đó: } s_n := t_1 + \dots + t_n.$$

Nếu $s_n \rightarrow \infty$ thì với mỗi $t \in [s_n; s_{n+1}]$ ta có $t < (n+1)h$ và

$$\sup_{s \geq 0} \|T(t)x\| \leq Mq^n \|x\| \leq Me^{-\ln(q)} e^{\frac{\ln(q)}{h}} \|x\|$$

và do đó T ổn định lũy thừa.

Nếu dãy (S_n) bị chặn, gọi $t(x)$ là giới hạn của dãy (S_n) . Do tính liên tục nên suy ra $U(s+t(x), s)x = 0$ và theo bổ đề 9 suy ra T ổn định lũy thừa.

2.3.2.3 Định lí 6:

Cho $U = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ là họ tiến hóa bị chặn lũy thừa trên không gian Banach X như trong bổ đề 10 và gọi J là hàm như trong định lí 5. Nếu tồn tại $r > 0$ sao cho :

$$\sup_{s \geq 0} \sup_{\|x\| \leq r} J(\|U(s + \cdot, s)x\|) := L(J, r) < \infty \quad (19)$$

thì họ tiến hoá U ổn định lũy thừa đều.

Chứng minh:

Giả sử họ U không ổn định lũy thừa đều. Khi đó với mọi số thực dương h và mọi $q \in (0; 1)$ tồn tại $x_o \in X$ và $s_o \geq 0$ sao cho:

$$\|U(s_o + t, s_o)x_o\| > q \text{ với mọi } t \in [0; h].$$

Do đó:

$$L(J, r) \geq J(\|U(s_o + t, s_o)rx_o\|)$$

$$\geq J(rq \cdot 1_{[0; h]})$$

với mọi $h > 0$, mâu thuẫn với (19).

2.3.2.4 Định lí 7:

Cho J như trong định lí 5. Giả sử J nửa liên tục dưới và lồi theo nghĩa Jensen(nghĩa là $J(f + g) \leq J(f) + J(g)$ với mọi f và g thuộc $M_{loc}(\mathbb{R}_+)$). Cho U là họ tiến hóa như trong bổ đề 10. Nếu tập $\mathcal{X}$ tất cả những $x \in X$ mà $\sup_{s \geq 0} J(\|U(s + \cdot, s)x\|) < \infty$ là tập phạm trù thứ hai trên X thì U ổn định lũy thừa đều.

Chứng minh:

Lấy $s \geq 0$ cố định.

Ánh xạ $x \mapsto \|U(s + \cdot, s)x\|: X \rightarrow M_{loc}(\mathbb{R}_+)$ liên tục.

Điều này tương đương với ánh xạ

$x \mapsto \Phi_s(x) := J(\|U(s + \cdot, s)x\|): X \rightarrow [0; \infty]$ nửa liên tục dưới.

Với mỗi số tự nhiên dương k , tập $X_k(s) := \{x \in X : J(\|U(s + \cdot, s)x\|) \leq k\}$

đóng vì nó là ảnh ngược của khoảng đóng $[0; k]$ qua ánh xạ Φ_s .

Rõ ràng tập

$$\begin{aligned} X_k &:= \left\{x \in X : \sup_{s \geq 0} J(\|U(s + \cdot, s)x\|) \leq k\right\} \\ &= \bigcap_{s \geq 0} X_k(s) \end{aligned}$$

cũng là tập đóng và hơn nữa $\mathcal{X}$ là hợp của tất cả các tập X_k . Vì $\mathcal{X}$ là tập phạm trù thứ hai nên tồn tại tập X_{k_o} có phần trong khác rỗng.

Lấy $x_o \in X$ và $r_o > 0$ sao cho $B(x_o, r_o) \subset X_{k_o}$.

Dễ dàng thấy rằng $B\left(0, \frac{1}{2}r_o\right)$ cũng chứa trong X_{k_o} , nghĩa là:

$$\sup_{s \geq 0} \sup_{\|x\| \leq \frac{1}{2}r_o} J(\|U(s + \cdot, s)x\|) \leq k_o.$$

Thật vậy, vì với mọi $x \in X$ mà $\|x\| \leq r_o$ ta có:

$$\begin{aligned}
 J\left(\left\|U(s+.,s)\left(\frac{1}{2}x\right)\right\|\right) &= J\left(\frac{1}{2}\left\|U(s+.,s)\left[(x+x_o)-x_o\right]\right\|\right) \\
 &\leq J\left(\frac{1}{2}\left[\left\|U(s+.,s)(x+x_o)\right\|+\left\|U(s+.,s)x_o\right\|\right]\right) \\
 &\leq \frac{1}{2}J\left(\left\|U(s+.,s)(x+x_o)\right\|\right) \\
 &\quad + \frac{1}{2}J\left(\left\|U(s+.,s)x_o\right\|\right) \\
 &\leq k_o.
 \end{aligned}$$

2.3.2.5 Hệ quả 5:

Cho $U = \{U(t, s)\}_{t \geq s \geq 0}$ là họ tiến hóa bị chặn theo số mũ trên không gian Banach X sao cho với mỗi $x \in X$ ánh xạ $t \mapsto \|U(s+t, s)x\|$ liên tục trên $(0; \infty)$ với mọi $s \geq 0$. Xét 3 bất đẳng thức sau:

1. Tồn tại $p \in [1; \infty)$ sao cho

$$\sup_{s \geq 0} \int_0^\infty \|U(s+t, s)x\|^p dt < \infty, \forall x \in X.$$

2. Tồn tại không gian hàm E (E là không gian Banach) thỏa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|1_{[0, t]}\|_E = \infty \text{ sao cho với mỗi } s \geq 0 \text{ và với mỗi } x \in X \text{ ánh xạ}$$

$U(s+., s)x$ thuộc E và với mọi $x \in X$ ta có:

$$\sup_{s \geq 0} \|U(s+., s)x\|_E < \infty.$$

3. Tồn tại hàm không giảm $\phi : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ với $\phi(t) > 0$ với mỗi $t > 0$ sao cho:

$$\sup_{s \geq 0} \int_0^{\infty} \phi(\|U(s+t, s)x\|) dt < \infty, \forall x \in X.$$

Nếu bất kỳ một trong các phát biểu trên là đúng thì họ U ổn định lũy thừa.

KẾT LUẬN

Qua luận văn này tác giả đã thật sự bắt đầu làm quen với việc nghiên cứu khoa học một cách nghiêm túc và có hệ thống nhất. Tác giả cũng đã học tập được phương pháp nghiên cứu trong việc đọc tài liệu và các buổi họp nhóm trong quá trình học tập. Qua luận văn này tác giả cũng hiểu biết thêm về tính ổn định lũy thừa của họ tiến hóa các toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Banach vốn có liên quan mật thiết đến họ nghiệm của bài toán Cauchy. Tuy nhiên, do kiến thức của tác giả còn hạn chế nên rất mong được sự giúp đỡ và chỉ bảo thêm của Quý Thầy Cô trong và ngoài Hội đồng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] C. Buse (2002), *A spectral mapping theorem for evolution semigroups on asymptotically almost periodic functions defined on half line*, Vol. **2002**(2002), No. 70, pp. 1-11.
- [2] C. Buse (2002), *Exponential stability for periodic evolution families of bounded linear operators*, West University of Timisoara, BD. V. Parvan 4, Timisoara, Romania.
- [3] C. Buse, N.S. Barnett, P. Cerone, and S.S. Dragomir (2004), *Integral characterizations for exponential stability of semigroups and evolution families on Banach spaces*, West University of Timisoara, Timisoara, 1900, BD. V. Parvan. NR. 4, Romania.
- [4] R. R. Kallman and G. C. Rota, On the inequality $\|f'\| \leq 4\|f\|\|f''\|$, *Inequalities II*, O. Shisha, Ed., Academic Press, New-York, 1970, pp. 187-192.
- [5] C. Buse, O. Jitianu, C. Preda, , *Exponential stability for solutions of linear differential equations with periodic coefficients*, International Journal of Differential Equations and Applications, to appear.
- [6] Daners D., Koch Medina P., *Abstract Evolution Equations, Periodic Problems and Applications*, Pitman Research Notes, 1992.
- [7] Nagel R., (ed), *One-parameter semigroups of positive operators*, Springer Lect. Notes in Math. 1184 (1996).
- [8] Buse C., *On the Perron-Bellman theorem for evolutionary processes with exponential growth in Banach spaces*, New-Zealand Journal of Mathematics, 27 (1998), 183-190.

[9] Reghis M., and Buse C., *On the Perron-Bellman theorem for Co-semigroups and periodic evolutionary processes in Banach spaces*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 4 (1998), 155-166.

[10] J. M. A. M. van Neerven, *Lower semicontinuity and the theorem of Datko and Pazy*, Integr. Equ. Oper.. Theory, 42(2002), 482-492.