



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

NGUYỄN MINH CHÂU

**TƯƠNG ĐƯƠNG BẢO GIÁC GIỮA CÁC MIỀN
 n -LIÊN TRONG MẶT PHẪNG PHỨC**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC



THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2011

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

NGUYỄN MINH CHÂU

**TƯƠNG ĐƯƠNG BẢO GIÁC GIỮA CÁC MIỀN
n-LIÊN TRONG MẶT PHẪNG PHỨC**

Ngành : **Toán**

Chuyên ngành : **Toán giải tích**

Mã số : **60 46 01**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGUYỄN VĂN ĐÔNG

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2011

LỜI MỞ ĐẦU

Trong toán học, hai hình hình học được gọi là tương đương bảo giác nếu có một ánh xạ bảo giác (ánh xạ bảo toàn góc) biến hình này thành hình kia.

Một lớp quan trọng các ví dụ về ánh xạ bảo giác đến từ giải tích phức.

Một miền G_1 trong $\mathbb{C}$ được gọi là tương đương bảo giác với miền G_2 trong $\mathbb{C}$ nếu có một ánh xạ chỉnh hình 1 – 1 từ G_1 vào $\mathbb{C}$ sao cho $f(G_1) = G_2$.

Định lý ánh xạ Riemann, một kết quả sâu sắc, nền tảng của giải tích phức chỉ ra rằng mọi miền đơn liên con thực sự của $\mathbb{C}$ đều tương đương bảo giác với đĩa mở đơn vị và do đó chúng tương đương bảo giác với nhau.

Định lý ánh xạ Riemann được phát biểu và chứng minh dựa vào nguyên lý Dirichlet bởi Bernhard Riemann vào năm 1851. Lĩnh vực này sau đó được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học trên thế giới như Karl Weierstrass, David Hilbert, Os Good, Constantin Carathéodory, Paul Koebe, Frigyes Riesz,...

Trong luận văn này chúng tôi trình bày một số kết quả về tương đương bảo giác đối với các miền liên thông hữu hạn, tức là một miền n -liên với n là một số nguyên không âm nào đó. Ở đây ta hiểu miền G trong $\mathbb{C}$ được gọi là miền n -liên nếu $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ có $n + 1$ thành phần liên thông. Miền 0-liên chính là miền đơn liên.

Nội dung chính luận văn thuộc về chương 2. Chương này chỉ ra rằng mỗi miền liên thông hữu hạn tương đương bảo giác với một miền chính tắc. Đồng thời với một số điều kiện nhất định các tương đương bảo giác này được chứng minh là duy nhất.

Chương 1 được dành để chỉ ra một số lớp tương đương bảo giác trên các miền đơn liên như lớp ánh xạ từ đĩa mở đơn vị lên phần trong của một đường cong Jordan, lớp các tương đương bảo giác của các tứ giác vuông có cạnh là cung tròn.

Chương 0 nêu lên các kết quả cần thiết cho chương 1 và chương 2.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của TS. Nguyễn Văn Đông. Thầy đã giúp tôi các tài liệu tham khảo và chỉnh sửa chi tiết luận

văn. Tôi rất biết ơn và nhân dịp này xin gửi lời cảm ơn chân thành đến thầy và gia đình.

Tôi xin được cảm ơn khoa Toán, phòng Sau đại học trường Đại học Sư Phạm thành phố Hồ Chí Minh vì đã tạo điều kiện để tôi hoàn thành khóa học và thuận lợi trong quá trình thực hiện luận văn.

Tôi xin cảm ơn gia đình, người thân đã ủng hộ và giúp đỡ trong suốt thời gian qua.

Nguyễn Minh Châu

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU	1
MỤC LỤC	5
Chương 0: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ.....	7
0.1. Miền và đường cong.....	7
0.2. Công thức Green.....	9
0.3. Mối liên hệ giữa hàm chỉnh hình và diện tích	9
0.4. Hàm điều hòa và nguyên hàm.	10
0.5. Nguyên lý đối xứng – Miền Jordan.	11
0.6. Giá trị biên của hàm chỉnh hình bị chặn.....	12
0.7. Giá trị biên của ánh xạ Riemann	14
0.8. Đạo hàm Schwarz, công thức Schwarz-Christoffel	16
Chương 1: VÀI LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG BẢO GIÁC CỦA CÁC MIỀN ĐƠN LIÊN	17
1.1. Ánh xạ đĩa: Lớp $\mathcal{S}$	17
1.1.1. Định lý diện tích.....	18
1.1.2. Hệ quả.	20
1.1.3. Mệnh đề.	20
1.1.4. Mệnh đề.	21
1.1.5. Định nghĩa.....	21
1.1.6. Mệnh đề.	22
1.1.7. Mệnh đề.	23
1.1.8. Định lý.	25
1.1.9. Định nghĩa.....	25
1.1.10. Định lý.	26
1.1.11. Định lý.	27
1.1.12. Định lý.	27
1.1.13. Bổ đề. (Định lý Hurwitz)	31
1.1.14. Hệ quả.	31
1.1.15. Mệnh đề.	32
1.1.16. Định lý.	33
1.2. Ánh xạ bảo giác của tứ giác vuông có cạnh là các cung tròn.....	34

1.2.1	PHƯƠNG TRÌNH STURM-LIOUVILLE.....	35
1.2.2	BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN.....	37
1.2.3	CÁC S.C.Q SUY BIẾN.....	38
1.2.4	PHÉP GIẢI BẰNG CÁC TÍCH PHÂN LẬP	41
1.2.5	BIẾN PHÂN CỦA ĐỘ CONG	42
1.2.6	THUẬT TOÁN CHO BÀI TOÁN MỘT THAM SỐ	44
Chương 2: TƯƠNG ĐƯƠNG BẢO GIÁC CỦA CÁC MIỀN LIÊN THÔNG HỮU HẠN.....		46
2.1.	Giải tích trên miền liên thông hữu hạn	46
2.2.	Tương đương bảo giác với một miền Jordan chỉnh hình	52
2.3.	Giá trị biên của tương đương bảo giác giữa các miền Jordan liên thông hữu hạn ..	57
2.4.	Sự hội tụ của các hàm đơn diệp.....	63
2.5.	Tương đương bảo giác với hình vành khăn với vết rạch là cung tròn.....	71
2.6.	Tương đương bảo giác với đĩa bị rạch bởi cung tròn	77
2.7.	Tương đương bảo giác với miền có biên tròn	80
KẾT LUẬN		92
TÀI LIỆU THAM KHẢO		93

Chương 0: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Có thể xem phần chứng minh các kết quả này trong [Co'].

0.1. Miền và đường cong

0.1.1. Bổ đề

Cho G là một miền trong $\mathbb{C}_\infty$. Các mệnh đề sau tương đương

- G đơn liên.
- $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ liên thông.
- $\partial_\infty G$ liên thông.

0.1.2. Hệ quả

Nếu G là một miền trong $\mathbb{C}$ thì ánh xạ $F \rightarrow F \cap \partial_\infty G$ xác định một song ánh giữa các thành phần liên thông của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ và các thành phần liên thông của $\partial_\infty G$.

0.1.3 Định lý đường cong Jordan.

Một đường cong đơn, đóng trong $\mathbb{C}$ là một đường $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sao cho $\gamma(t) = \gamma(s)$ khi và chỉ khi $t = s$ hoặc $|s - t| = b - a$. Một đường cong đóng, đơn còn gọi là đường cong Jordan.

Nếu γ là một đường cong đơn, đóng trong $\mathbb{C}$ thì $\mathbb{C} \setminus \gamma$ có hai thành phần liên thông. Mỗi thành phần liên thông có cùng biên là γ .

Ta gọi thành phần bị chặn của $\mathbb{C} \setminus \gamma$ là $ins\gamma$ và thành phần không bị chặn của $\mathbb{C} \setminus \gamma$ là $out\gamma$. Nếu γ là một đường cong Jordan khả trường, thì hàm chỉ số

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a} \text{ xác định với mọi } a \text{ trong } \mathbb{C} \setminus \gamma, \text{ đồng thời } n(\gamma, a) \equiv \pm 1 \text{ với } a$$

trong $ins\gamma$ và $n(\gamma, a) \equiv 0$ với a trong $out\gamma$.

Ta nói rằng một đường cong γ được *định hướng dương* nếu $n(\gamma, a) = 1$ với mọi a trong $\text{ins } \gamma$. Đường cong γ gọi là *trơn* nếu γ là hàm có đạo hàm liên tục và $\gamma'(t) \neq 0$ với mọi t . Ta gọi một đường cong Jordan trơn, định hướng dương là một *chu tuyến*.

0.1.4 Hệ quả.

Nếu γ là một đường cong Jordan thì $\text{ins } \gamma$ và $\text{out } \gamma \cup \{\infty\}$ là các miền đơn liên.

0.1.5 Định lý tách.

Cho A, B là hai tập khác rỗng trong mặt phẳng phức. Ta nói tập X tách A khỏi B nếu A và B nằm trong các thành phần liên thông rời nhau của phần bù của X .

Nếu K là một tập con compact của tập mở U , $a \in K$ và $b \in \mathbb{C}_\infty \setminus U$ thì tồn tại đường cong Jordan γ trong U sao cho γ và K rời nhau và γ tách a khỏi b .

0.1.6. Nhận xét.

Có thể chọn đường cong γ trong định lý tách là đường cong trơn.

0.1.7. Mệnh đề.

Nếu K là một tập con compact liên thông của tập mở U và b là điểm trong phần bù của U thì tồn tại một chu tuyến γ trong U tách K và b .

0.1.8 Mệnh đề.

Nếu E là tập con compact của tập mở G thì tồn tại một hệ Jordan trơn, định hướng dương Γ nằm trong G sao cho $E \subseteq \text{ins } \Gamma \subseteq G$.

0.1.9 Hệ quả.

Giả sử G là miền bị chặn và $K_0, \dots, K_n$ là các thành phần liên thông của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ với ∞ nằm trong K_0 thì tồn tại hệ Jordan trơn $\Gamma = \{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$ trong G sao cho:

- a. $K_j \subseteq \text{ins} \gamma_j$
- b. $K_0 \subseteq \text{out} \gamma_0$
- c. $\gamma_j \subseteq \left\{ z : \text{dist}(z; K_j) < \varepsilon \right\}$

0.1.10. Mệnh đề.

Một tập mở G trong $\mathbb{C}$ đơn liên khi và chỉ khi mỗi đường cong Jordan γ nằm trong G thì $\text{ins} \gamma \subseteq G$.

0.1.11. Hệ quả.

Nếu γ và σ là hai đường cong Jordan với $\sigma \subseteq \text{cl}(\text{ins} \gamma)$ thì $\text{ins} \sigma \subseteq \text{ins} \gamma$.

0.2. Công thức Green

0.2.1 Định lý Green.

Nếu Γ là một hệ Jordan tron, định hướng dương với $G = \text{ins} \Gamma, u \in C(\text{cl}(G)), u \in C^1(G)$ và $\bar{\partial}u$ khả tích trên G thì $\int_{\Gamma} u = 2i \iint_G \bar{\partial}u$.

0.2.2 Công thức Cauchy-Green.

Nếu Γ là một hệ Jordan tron, định hướng dương với $G = \text{ins} \Gamma, u \in C(\text{cl}(G)), u \in C^1(G)$ và $\bar{\partial}u$ khả tích trên G thì với mọi z trong G ta có

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_G \frac{1}{\zeta - z} \bar{\partial}u dA(\zeta)$$

Trong công thức trên nếu u là hàm chỉnh hình thì $\bar{\partial}u = 0$ suy ra nó là công thức tích phân Cauchy.

0.2.3. Hệ quả.

$$\text{Nếu } u \in C_c^1(\mathbb{C}) \text{ và } w \in \mathbb{C} \text{ thì } u(w) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{1}{z - w} \bar{\partial}u dA(z)$$

0.3. Mối liên hệ giữa hàm chỉnh hình và diện tích

0.3.1. Định lý.

Nếu f là một tương đương bảo giác giữa các tập mở G và Ω thì $Area(\Omega) = \iint_G |f'|^2$.

0.3.2. Hệ quả.

Nếu Ω là miền đơn liên, $\tau : D \rightarrow \Omega$ là ánh xạ Riemann và $\tau(z) = \sum_n a_n z^n$

trong D thì $Area(\Omega) = \iint_D |\tau'|^2 = \pi \sum_n n |a_n|^2$.

0.3.3. Định lý.

Nếu $f : G \rightarrow \Omega$ là một hàm chỉnh hình toàn ánh và với mỗi ζ trong Ω , $n(\zeta)$ là số các điểm trong $f^{-1}(\zeta)$ thì $\int_G |f'|^2 dA = \int_\Omega n(\zeta) dA(\zeta)$.

0.4. Hàm điều hòa và nguyên hàm.

0.4.1. Mệnh đề.

Nếu $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ là một hàm chỉnh hình thì f có nguyên hàm khi và chỉ khi với mọi đường cong γ khả trường trong G thì $\int_\gamma f = 0$.

0.4.2. Định lý.

Nếu G là một miền trong $\mathbb{C}$ và $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm điều hòa thì các mệnh đề sau tương đương

- u có liên hợp điều hòa
- Hàm $f = \partial u$ có nguyên hàm trong G .
- Với mọi đường cong đóng, khả trường trong G thì

$$\int_\gamma *du = \int_\gamma (u_x dy - u_y dx) = 0$$

0.4.3. Mệnh đề.

Nếu u là một hàm khả vi liên tục trên miền G và γ là một đường cong đóng,

$$\text{khả trường trong } G \text{ thì } \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \partial u = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} *du = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} |dz|$$

0.5. Nguyên lý đối xứng – Miền Jordan.

0.5.1. Mệnh đề.

Nếu G là một miền trong $\mathbb{C}$, $a \notin G$ và $G = G^{\#}$. Đặt

$G_+ \equiv G \cap B(a; r)$, $G_0 \equiv G \cap \partial B(a; r)$ và $G_- \equiv G \cap [\mathbb{C} \setminus B(a; r)]$. Nếu $f: G_+ \cup G_0 \rightarrow \mathbb{C}$

là hàm liên tục và chỉnh hình trên G_+ và tồn tại một điểm α không nằm trong $f(G_+)$

và $\rho > 0$ sao cho $f(G_0) \subseteq \partial B(\alpha; \rho)$ bỏ đi một điểm và nếu

$$f^{\#}: G \rightarrow \mathbb{C} \text{ với } \begin{cases} f^{\#}(z) = f(z), & z \in G_+ \cup G_0 \\ f^{\#}(z) = \alpha + \frac{\rho^2}{f\left(a + \frac{r^2}{z-a}\right) - \alpha}, & z \in G_- \end{cases} \text{ thì } f^{\#} \text{ là hàm chỉnh hình.}$$

Nếu f đơn ánh và $f(G_+)$ nằm trọn trong $\text{ins } B(\alpha; \rho)$ hoặc $\text{out } B(\alpha; \rho)$ thì $f^{\#}$ là một tương đương bảo giác.

0.5.2. Định nghĩa.

Một miền G gọi là *miền Jordan* nếu nó bị chặn và có biên gồm hữu hạn các đường cong Jordan đóng đôi một rời nhau. Nếu tồn tại $n+1$ đường cong $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ tạo thành biên của G thì G được gọi là *miền n -Jordan*.

0.5.3. Định nghĩa.

Đường cong Jordan γ gọi là *đường cong chỉnh hình* nếu tồn tại một hàm chỉnh hình f trong lân cận của ∂D sao cho $\gamma = f(\partial D)$. Một miền Jordan được gọi là *miền Jordan chỉnh hình* nếu mỗi đường cong tạo nên biên của G là đường cong chỉnh hình.

0.5.4. Hệ quả.

Cho G là miền Jordan chỉnh hình với các đường cong tạo nên biên là $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$. Nếu u là một hàm liên tục nhận giá trị thực trên $G \cup \gamma_j$, điều hòa trên G và u là hàm hằng trên γ_j thì tồn tại miền Jordan chỉnh hình G_1 chứa $G \cup \gamma_j$ và hàm điều hòa u_1 trên G_1 sao cho $u_1 = u$ trên G .

0.5.5. Hệ quả.

Nếu G là miền Jordan chỉnh hình và $u : cl G \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục điều hòa trên G và hằng trên biên của các thành phần liên thông của G thì u có một mở rộng điều hòa đến một miền Jordan chỉnh hình chứa $cl G$.

0.6. Giá trị biên của hàm chỉnh hình bị chặn

Cho U là một tập con mở của đĩa đơn vị ∂D . Vì vậy U là hợp đếm được của các cung mở đôi một rời nhau $\{J_k\}$.

Giả sử $J_k = \{e^{i\theta} : a_k < \theta < b_k\}$, $0 < b_k - a_k < 2\pi$. Độ dài của U được định nghĩa là

$$\ell(U) = \sum_k \ell(J_k).$$

0.6.1. Định nghĩa giới hạn tia

Tập con E của ∂D có độ đo không nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại tập mở U nằm trong E với $\ell(U) < \varepsilon$.

Nếu $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm tùy ý và $e^{i\theta} \in \partial D$ thì f có giới hạn tia tại $e^{i\theta}$ nếu khi $r \rightarrow 1^-$ thì giới hạn của $f(re^{i\theta})$ tồn tại và hữu hạn.

0.6.2. Định lý.

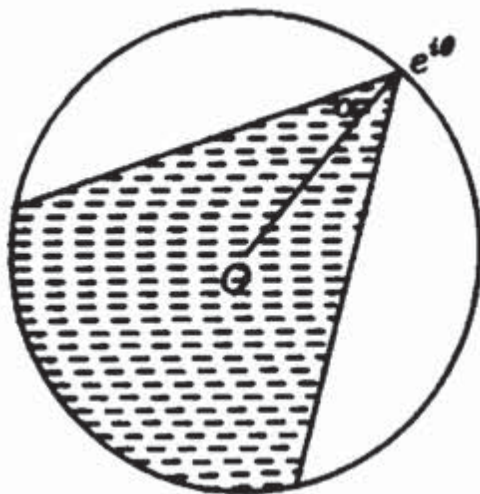
Nếu $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm chỉnh hình bị chặn thì f có giới hạn tia hầu khắp nơi trên ∂D .

Như vậy, f trở thành hàm được định nghĩa hầu khắp nơi trên ∂D .

0.6.3. Định lý.

Nếu $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm chỉnh hình bị chặn và các giới hạn tia của f tồn tại, bằng 0 trên một tập có độ đo dương thì $f \equiv 0$.

Cổ định $\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ và xét phần của đĩa đơn vị D nằm trong góc có đỉnh là $e^{i\theta} = a$ đồng thời đối xứng qua bán kính $z = ra, 0 \leq r \leq 1$ và có góc mở là 2α với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Ta gọi miền như thế là góc Stolz với đỉnh a và góc mở α . Biến số z được gọi là tiến đến a không theo phương tiếp tuyến nếu $z \rightarrow a$ thông qua góc Stolz nào đó. Ta viết tắt $z \rightarrow a$ (n.t). Ta gọi hàm f có giới hạn không theo phương tiếp tuyến tại a nếu tồn tại một số phức ζ sao cho $f(z) \rightarrow \zeta$ khi $z \rightarrow a$ thông qua góc Stolz với đỉnh a bất kỳ.



Hình 0.1

0.6.4. Định lý.

Cho $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ là một cung thỏa $\gamma([0,1]) \subseteq D$ và giả sử cung γ kết thúc tại điểm $\gamma(1) = a$ trong ∂D . Nếu $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm chỉnh hình bị chặn sao cho $f(\gamma(t)) \rightarrow \alpha$ khi $t \rightarrow 1^-$ thì f có giới hạn không theo phương tiếp tuyến tại a .

0.6.5. Hệ quả.

Nếu hàm chỉnh hình bị chặn f có giới hạn tia ζ tại $a \in \partial D$ thì f có giới hạn không theo phương tiếp tuyến ζ tại a .

0.6.6. Định lý.

Cho G là miền với J là tập con liên thông của G thỏa $w \in J$ thì tồn tại một lân cận Δ của w và một tương đương bảo giác $h : D \rightarrow \Delta$ sao cho

i $h(0) = w$

ii $h(-1, 1) = J \cap \Delta$

iii $h(D_+) = G \cap \Delta$ với $D^+ = \{z \in D : \text{Im } z > 0\}$

và $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ là một hàm chỉnh hình bị chặn. Khi đó

a. Hàm f có giới hạn không theo phương tiếp tuyến tại hầu khắp nơi các điểm của J .

b. Nếu giới hạn không theo phương tiếp tuyến của f là 0 hầu khắp nơi trên một cung con của J thì $f \equiv 0$ trên G .

0.6.7. Hệ quả.

Nếu G là miền Jordan chỉnh hình và $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm chỉnh hình bị chặn thì f có giới hạn không theo phương tiếp tuyến hầu khắp nơi trên ∂G .

0.7. Giá trị biên của ánh xạ Riemann

0.7.1 Định lý.

Cho Ω là một miền đơn liên bị chặn và $\tau : D \rightarrow \Omega$ là ánh xạ Riemann với $\tau(0) = 0$ và $\tau'(0) > 0$. Các mệnh đề sau tương đương:

- a. τ có một mở rộng liên tục đến bao đóng của D
- b. $\partial\Omega$ là một đường liên tục.
- c. $\partial\Omega$ liên thông địa phương
- d. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ liên thông địa phương

Bây giờ ta mô tả đặc điểm của các ánh xạ Riemann được mở rộng thành phép đồng phôi trên $\text{cl}D$

0.7.2 Định lý.

Nếu Ω là một miền đơn liên bị chặn và $\tau : D \rightarrow \Omega$ là ánh xạ Riemann với

$\tau(0) = 0$ và $\tau'(0) > 0$ thì τ mở rộng thành một phép đồng phôi của clD vào $cl\Omega$ khi và chỉ khi $\partial\Omega$ là một đường cong Jordan.

0.7.3 Hệ quả.

Nếu G và Ω là hai miền Jordan và $f : G \rightarrow \Omega$ là một tương đương bảo giác thì f có một mở rộng thành phép đồng phôi của clG vào $cl\Omega$.

0.7.4 Định lý.

Giả sử Ω là miền Jordan và $\tau : D \rightarrow \Omega$ là ánh xạ Riemann với $\tau(0) = 0$ và $\tau'(0) > 0$. Các mệnh đề sau tương đương:

- $\partial\Omega$ là đường cong khả trường
- $\tau' \in H^1$
- Hàm $\theta \rightarrow \tau(e^{i\theta})$ là một hàm của biến phân bị chặn
- Hàm $\theta \rightarrow \tau(e^{it})$ liên tục tuyệt đối

0.7.5 Định nghĩa

Với miền Ω tùy ý, điểm biên w gọi là *điểm biên đơn* nếu khi dãy $\{w_n\} \subset \Omega$ hội tụ về w sẽ có một đường $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ có các tính chất sau:

- $\alpha(t) \in \Omega$ với $0 \leq t < 1$
- $\alpha(1) = w$
- Tồn tại một dãy $\{t_n\} \subset [0, 1)$ sao cho $t_n \rightarrow 1$ và $\alpha(t_n) = w_n, \forall n \geq 1$.

0.7.6 Mệnh đề.

Nếu Ω là một miền đơn liên, $g : \Omega \rightarrow D$ là một tương đương bảo giác và $w \in \partial\Omega$ sao cho g có một mở rộng thành ánh xạ liên tục từ $\Omega \cup \{w\}$ vào $D \cup \{a\}$ với $a \in \partial D$ thì w là điểm biên đơn của Ω .

0.7.7 Hệ quả.

Nếu Ω là một miền Jordan thì mỗi điểm của $\partial\Omega$ là một điểm biên đơn.

0.7.8 Định lý.

- a. Cho Ω là một miền đơn liên bị chặn và $g : \Omega \rightarrow D$ là một tương đương bảo giác. Nếu w_0 là một điểm biên đơn của Ω thì g có một mở rộng liên tục lên $\Omega \cup \{w_0\}$.
- b. Nếu R là họ các điểm biên đơn của Ω thì g có một mở rộng liên tục đơn ánh lên $\Omega \cup R$.

0.8. Đạo hàm Schwarz, công thức Schwarz-Christoffel

0.8.1 Định lý.

Cho W là miền đơn liên, $z_0 \in W$, $p(z)$ là hàm chỉnh hình trên W và w là nghiệm chỉnh hình trong lân cận của z_0 của phương trình vi phân phi tuyến

$$\{w, z\} = 2p(z) \quad (1)$$

trong đó $\{w, z\} = \left(\frac{w''}{w'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = \frac{w'''}{(w'')^2} - \frac{3}{2}\frac{(w'')^2}{(w')^3}$ là đạo hàm Schwarz của w .

Khi đó tồn tại hai nghiệm độc lập tuyến tính $u_1(z), u_2(z)$ của phương trình vi tuyến tính cấp hai $u'' + p(z)u = 0$ sao cho $w(z) = \frac{u_1(z)}{u_2(z)}$ với mọi $z \in D$. Sự biểu diễn này duy nhất nếu ta chọn $u_2(z_0) = 1$. Ngược lại mọi hàm có dạng biểu diễn này đều là nghiệm của (1).

Có thể tham khảo chứng minh trong [Hi, trang 376].

0.8.2 Định lý. (Công thức Schwarz-Christoffel)

Cho Γ là đa giác với các đỉnh (theo chiều ngược chiều kim đồng hồ) là $w_1, w_2, \dots, w_n$ và $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ là các góc tương ứng của các đỉnh $w_1, w_2, \dots, w_n$.

Nếu $f : D \rightarrow \Omega$ là ánh xạ bảo giác biến đĩa mở đơn vị D thành $\Omega := \text{int } \Gamma$ thì

$$f(z) = A \int_0^z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\zeta}{z_k}\right)^{\alpha_k - 1} d\zeta + B$$

trong đó $f(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ và A, B là các hằng số phức.

Có thể tham khảo chứng minh trong [DT, trang 16].

Chương 1: VÀI LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG BẢO GIÁC CỦA CÁC MIỀN ĐƠN LIÊN

Trong chương này ở mục 1.1 chúng tôi tập trung nghiên cứu lớp các hàm đơn diệp trên đĩa mở đơn vị D . Vì mỗi miền đơn liên khác $\mathbb{C}$ là ảnh của D qua một tương đương bảo giác nên việc nghiên cứu các hàm đơn diệp trên D tương đương với việc nghiên cứu các hàm đơn diệp trên các miền đơn liên tùy ý. Lớp $\mathcal{S}$ các hàm đơn diệp trên đĩa đơn vị lại có tương đương 1-1 với một lớp con của lớp $\mathcal{U}$ các hàm đơn diệp trên $D^* \equiv \{z : |z| > 1\}$ có dạng $f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$. Do vậy trong mục 1.1 trước khi trình bày lớp $\mathcal{S}$ ta trình bày lớp $\mathcal{U}$. Kết quả chính của mục 1.1 là định lý 1.1.16 (định lý biến dạng Koebe), 1.1.24 (định lý biến dạng mở rộng).

Ở mục 1.2 chúng tôi trình bày một phần của bài báo “ánh xạ bảo giác của tứ giác vuông có cạnh là các cung tròn” năm 2009 của V. Kravchenko và R.M.Porter. Nội dung chính của mục 1.2 là đưa bài toán tìm ánh xạ bảo giác $f : D \rightarrow W$ từ quả cầu đơn vị mở D vào miền W với biên là tứ giác vuông có cạnh là các cung tròn P về bài toán giá trị biên Sturm – Liouville mà nghiệm của nó liên hệ tham số phụ λ với độ cong κ của cạnh phải của P trong đó λ là một tham số phổ trong bài toán Sturm – Liouville. Sau đó ứng dụng phương pháp tham số phổ chuỗi lũy thừa để tìm nghiệm bài toán Sturm – Liouville đồng thời giới thiệu thuật toán cho bài toán một tham số tìm λ từ độ cong κ .

1.1. Ánh xạ đĩa: Lớp $\mathcal{S}$

Nếu f là hàm chỉnh hình gần vô cùng thì nó chỉnh hình trên một tập dạng $G = \{z : |z| > R\} = \text{ann}(0; R, \infty)$ nên f có khai triển Laurent trong G

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Chuỗi này hội tụ tuyệt đối và hội tụ đều trên tập con compact của G . Với khái niệm này, f có cực điểm bậc p tại ∞ nếu $a_n = 0, \forall n > p$. Thặng dư của f tại ∞ là hệ số a_1 . Nếu khai triển có dạng

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

thì f được gọi là có *điểm kì dị bỏ được* tại ∞ .

Ở đây $a_0 = f(\infty), a_1 = f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - a_0), \dots$

Xét họ $\mathcal{U}$ những hàm f đơn điệu trong $D^* \equiv \{z : |z| > 1\}$ và có dạng

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots \quad (1.1.1)$$

Như vậy, $\mathcal{U}$ bao gồm tất cả các hàm đơn điệu trên D^* với cực điểm đơn tại ∞ có thặng dư là 1. Họ các hàm này có thể được mô tả mà không cần thông qua khai triển Laurent.

Từ định nghĩa lớp $\mathcal{U}$ ta có nhận xét sau:

Một hàm f thuộc về lớp $\mathcal{U}$ khi và chỉ khi f là hàm đơn điệu trên D^ sao cho $f(\infty) = \infty$ và $f - z$ có một điểm kì dị bỏ được tại ∞ .*

1.1.1. Định lý diện tích.

Nếu $f \in \mathcal{U}$ và f có khai triển (1.1.1) thì $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leq 1$.

Chứng minh.

Với $r > 1$, đặt Γ_r là đường cong ảnh của đường tròn $|z| = r$ qua ánh xạ f . Vì f đơn điệu nên Γ_r là đường cong Jordan trơn. Gọi Ω_r là phần bên trong của Γ_r . Áp dụng định lý Green cho hàm $u = \bar{z}$ ta thu được

$$Area(\Omega_r) = \iint_{\Omega_r} \bar{\partial}(\bar{z}) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_r} \bar{z} = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{\Gamma_r(t)} \Gamma_r'(t) dt$$

$$\text{Vì } \Gamma_r(t) = f(re^{it}) \text{ nên } Area(\Omega_r) = \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{it})} f'(re^{it}) e^{it} dt.$$

Sử dụng (1.1.1), ta được

$$\overline{f(re^{it})} = re^{-it} + \bar{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n}{r^n} e^{int}$$

$$f'(re^{it}) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a_m}{r^{m+1}} e^{-i(m+1)t}$$

Vì $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 0$ với $n \neq 0$ và $\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$ nên từ sự hội tụ đều của hai chuỗi trên suy ra

$$0 \leq Area(\Omega_r) = \frac{r}{2} \left[2\pi r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|a_n|^2}{r^{2n+1}} (2\pi) \right] = \pi r^2 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|a_n|^2}{r^{2n}} \quad (1.1.3)$$

Vì vậy $1 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|a_n|^2}{r^{2n+2}}$ với mọi $r > 1$. Nếu bất đẳng thức không đúng cho $r = 1$ thì tồn tại số

nguyên N sao cho $1 < \sum_{n=1}^N n|a_n|^2$. Nhưng do $r > 1$ nên suy ra $1 < \sum_{n=1}^N \frac{n|a_n|^2}{r^{2n+2}}$ (Mâu thuẫn). $\square$

Điều gì sẽ xảy ra khi $r \rightarrow 1$ trong (1.1.3)? Ta cần phải sử dụng lý thuyết độ đo để giải thích nhưng bằng trực giác ta thấy rõ kết quả:

Nếu $X_r = f\left(\{z : |z| \geq r\}\right)$ với $r > 1$ thì $\Omega_r = \mathbb{C} \setminus X_r$. Do đó

$\bigcap_r \Omega_r = \mathbb{C} \setminus \bigcup_r X_r = \mathbb{C} \setminus f\left(\{z : |z| > 1\}\right) = E$ là tập đóng. Khi $r \rightarrow 1$ thì

$Area(\Omega_r) \rightarrow Area(E)$. Từ đây ta có hệ quả:

1.1.2. Hệ quả.

Nếu $f \in \mathcal{U}$, f có khai triển Laurent (1.1.1) và $E = \mathbb{C} \setminus f(D^*)$ thì

$$Area(E) = \pi - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2.$$

Do đó, $Area(E) = 0$ khi và chỉ khi đẳng thức xảy ra trong định lý diện tích.

Mệnh đề tiếp theo chỉ ra tính duy nhất của các ánh xạ trong lớp $\mathcal{U}$. Lưu ý nếu $f \in \mathcal{U}$ và f được xem là ánh xạ trên mặt phẳng phức mở rộng $\mathbb{C}_{\infty}$ thì $f(\infty) = \infty$.

1.1.3. Mệnh đề.

Nếu $f \in \mathcal{U}$ và $f(D^*) = D^*$ thì $f(z) = z$ với mọi z .

Chứng minh.

Do $f \in \mathcal{U}$ và $f(D^*) = D^*$ nên theo hệ quả 1.1.4 suy ra $\pi = \pi - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$ vì

vậy $a_n = 0$ với mọi $n \geq 1$. Do đó $f(z) = z + a_0$

Mặt khác do giả thiết về tính chất ánh xạ f suy ra $|f(z)| \rightarrow 1$ khi $|z| \rightarrow 1$.

Do vậy, cho $z \rightarrow 1$ suy ra

$$|f(z)|^2 = |z + a_0|^2 = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(a_0 \bar{z}) + |a_0|^2 \rightarrow 1 + 2 \operatorname{Re}(a_0) + |a_0|^2 = 1.$$

$$\text{Do đó} \quad 2 \operatorname{Re}(a_0) + |a_0|^2 = 0.$$

Tương tự cho $z \rightarrow -1$ suy ra $-2 \operatorname{Re}(a_0) + |a_0|^2 = 0$. Ta suy ra $a_0 = 0$ nên $f(z) = z$. $\square$

1.1.4. Mệnh đề.

Nếu $f \in \mathbf{U}$, f có khai triển Laurent (1.1.1) thì $|a_1| \leq 1$. Hơn nữa $|a_1| = 1$ khi và chỉ khi tập $E = \mathbb{C} \setminus f(D^*)$ là đoạn thẳng có độ dài 4. Trong trường hợp này

$$f(z) = z + a_0 + a_1 \frac{1}{z} \text{ và } E = [-2\lambda + a_0, 2\lambda + a_0] \text{ trong đó } \lambda^2 = a_1.$$

Chứng minh.

Vì $|a_1|$ là một trong các số hạng của tổng trong định lý diện tích nên suy ra $|a_1| \leq 1$.

Nếu $|a_1| = 1$ thì $a_n = 0$ với $n \geq 2$. Do đó $f(z) = z + a_0 + a_1 \frac{1}{z}$. Nhận thấy rằng

$$f(\lambda e^{it}) = a_0 + \lambda e^{it} + \frac{\lambda^2}{\lambda e^{it}} = a_0 + 2\lambda \cos t \in [a_0 - 2\lambda, a_0 + 2\lambda] \text{ với } t \in [0, 2\pi] \text{ đồng thời}$$

$$f = f_2 \circ f_1 \text{ với } f_1(z) = \frac{z}{(\lambda - z)^2}; f_2(z) = \frac{1 + 2\lambda z}{z} + a_0 \text{ như vậy } f \text{ là tương đương bảo}$$

giác của cả $\{z : |z| < |\lambda|\}$ và $\{z : |z| > |\lambda|\}$ vào $\mathbb{C} \setminus [-2\lambda + a_0, 2\lambda + a_0]$ suy ra

$E = [-2\lambda + a_0, 2\lambda + a_0]$ trong đó $\lambda^2 = a_1$. Vậy E là đoạn thẳng có độ dài 4.

Ngược lại, giả sử E là đoạn thẳng có độ dài 4. Khi đó E có dạng

$$E = [-2\mu + \beta_0, 2\mu + \beta_0] \text{ trong đó } \beta_0, \mu \text{ là hai số phức và } |\mu| = 1. \text{ Nếu}$$

$$g(z) = z + \beta_0 + \mu^2 \frac{1}{z} \text{ thì } g \in \mathbf{U} \text{ và } g(D^*) = \mathbb{C} \setminus E = f(D^*). \text{ Vì vậy } f \circ g^{-1} \in \mathbf{U} \text{ và}$$

$f \circ g^{-1}$ biến D^* vào chính nó. Theo bổ đề 1.1.5 thì $f = g$ và $a_1 = \mu^2$. Vì vậy

$$|a_1| = 1. \square$$

1.1.5. Định nghĩa.

Lớp $\mathcal{S}$ là lớp bao gồm tất cả các hàm đơn điệu f trên D sao cho $f(0) = 0$ và $f'(0) = 1$.

Lý do sử dụng chữ $\mathfrak{S}$ để kí hiệu lớp các hàm này là vì chúng được gọi là các hàm *Schlitch*.

Nếu h là hàm đơn điệu tùy ý trên D thì $f = \frac{h - h(0)}{h'(0)} \in \mathfrak{S}$ vì vậy những kiến

thức về các hàm trong $\mathfrak{S}$ cho ta kiến thức về tất cả các hàm đơn điệu trên D . Nếu $f \in \mathfrak{S}$ thì khai triển chuỗi lũy thừa của f xung quanh lân cận của 0 có dạng

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (1.1.8)$$

Mối quan hệ giữa lớp $\mathfrak{S}$ và lớp $\mathfrak{U}$ được trình bày trong mệnh đề sau:

1.1.6. Mệnh đề.

a. Nếu $g \in \mathfrak{U}$ và g không bao giờ bị triệt tiêu thì $f(z) = \left[g(z^{-1}) \right]^{-1} \in \mathfrak{S}$.

Ngược lại nếu $f \in \mathfrak{S}$ thì $g(z) = \left[f(z^{-1}) \right]^{-1} \in \mathfrak{U}$ và g không bao giờ bị triệt tiêu.

b. Nếu $f \in \mathfrak{S}$ với chuỗi lũy thừa cho bởi (1.1.8) và

$$\left[f(w^{-1}) \right]^{-1} = g(w) = w + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{w^n} \text{ với } w \in D^* \text{ thì } b_0 = -a_2.$$

Chứng minh.

a. Giả sử $g \in \mathfrak{U}$ và $f(z) = \left[g(z^{-1}) \right]^{-1}$ với mọi $z \in D$. Vì $g(\infty) = \infty$ nên rõ ràng f

đơn điệu trên D và $f(0) = 0$. Hơn nữa $\frac{g(z)}{z} \rightarrow 1$ khi $z \rightarrow \infty$ vì vậy suy ra

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = 1 \text{ và } f \in \mathfrak{S}. \text{ Chiều ngược lại được chứng minh tương tự.}$$

b. Do $g(z^{-1})f(z) = 1$ với $|z| < 1$ nên thực hiện phép nhân các chuỗi tương ứng và

so sánh số hạng tương ứng ta được $b_0 = -a_2$. $\square$

1.1.7. Mệnh đề.

- a. Nếu $f \in \mathfrak{S}$ và n là số nguyên dương tùy ý thì tồn tại duy nhất hàm $g \in \mathfrak{S}$ sao cho $g^n(z) = f(z^n)$. Với hàm g như thế thì $g(w_0 z) = w_0 g(z)$ với w_0 là căn bậc n tùy ý của đơn vị và $z \in D$ tùy ý. Ngược lại, nếu $g \in \mathfrak{S}$ và $g(w_0 z) = w_0 g(z)$ với w_0 là căn bậc n tùy ý của đơn vị và $z \in D$ tùy ý thì tồn tại hàm $f \in \mathfrak{S}$ sao cho $g^n(z) = f(z^n)$.
- b. Tương tự nếu $f \in \mathfrak{U}$ thì tồn tại duy nhất hàm $g \in \mathfrak{U}$ sao cho $g^n(z) = f(z^n)$. Với hàm g như thế thì $g(w_0 z) = w_0 g(z)$ với w_0 là căn bậc n tùy ý của đơn vị và $z \in D$ tùy ý. Ngược lại, nếu $g \in \mathfrak{U}$ và $g(w_0 z) = w_0 g(z)$ với w là căn bậc n tùy ý của đơn vị và $z \in D$ tùy ý thì tồn tại hàm $f \in \mathfrak{U}$ sao cho $g^n(z) = f(z^n)$.

Chứng minh.

- a. Giả sử $f \in \mathfrak{S}$ và đặt $h(z) = f(z^n)$ với $|z| < 1$. Không điểm duy nhất của h trong D là $z = 0$ và có bậc n . Do đó $h(z) = z^n h_1(z)$ và h_1 chỉnh hình trên D và không triệt tiêu. Hơn nữa do $f'(0) = 1$ suy ra $h_1(0) = 1$. Do đó tồn tại duy nhất hàm chỉnh hình g_1 trên D sao cho $g_1^n = h_1$ và $g_1(0) = 1$. Đặt $g(z) = z g_1(z)$ thì $g^n(z) = f(z^n)$, $g(0) = 0$ và $g'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{z} = g_1(0) = 1$. Lưu ý các tính chất này xác định duy nhất hàm g . Thật vậy nếu k là hàm chỉnh hình tùy ý trên D sao cho

$$k^n(z) = f(z^n) \text{ và } k'(0) = 1 \text{ thì } \left(\frac{g}{k}\right)^n = 1 \text{ và } \frac{g}{k} \text{ là hàm chỉnh hình vì vậy } k = g.$$

Nếu chuỗi lũy thừa của f cho bởi (1.1.8) thì ta tính được

$$h_1(z) = 1 + a_2 z^n + a_3 z^{2n} + \dots \text{ vì vậy } h(wz) = h(z) \text{ khi } w^n = 1. \text{ Do đó với } w_0 \text{ là căn bậc } n \text{ tùy ý của đơn vị thì } k(z) = z g_1(w_0 z) \text{ có tính chất } k^n(z) = f(z^n) \text{ và } k'(0) = 1. \text{ Vì tính duy nhất nên } k = g. \text{ Do đó } g_1(w_0 z) = g_1(z). \text{ Từ đây suy ra } g(w_0 z) = w_0 g(z) \text{ khi } w_0^n = 1.$$

Để hoàn chỉnh chứng minh $g \in \mathfrak{S}$, ta cần phải chỉ ra g là hàm đơn điệp. Nếu $g(z) = g(w)$ thì $f(z^n) = f(w^n)$ vì vậy $z^n = w^n$. Do đó tồn tại một căn bậc n của đơn vị của w_0 sao cho $w = w_0 z$. Vì vậy $g(z) = g(w_0 z) = w_0 g(z)$. Rõ ràng ta có thể giả sử $z \neq 0$ để $g(z) \neq 0$ vì vậy $w_0 = 1$ và $w = z$.

Ngược lại nếu $g \in \mathfrak{S}$ và $g(w_0 z) = w_0 g(z)$ với mọi $z \in D$ và w_0 là căn bậc n tùy ý của 1 thì g có biểu diễn chuỗi lũy thừa dạng

$$g(z) = z + b_{n+1} z^{n+1} + b_{2n+1} z^{2n+1} + \dots$$

Do đó
$$g^n(z) = z^n + c_{2n} z^{2n} + \dots$$

Đặt
$$f(z) = z + c_{2n} z^{2n} + \dots$$

Chuỗi lũy thừa này có bán kính hội tụ bé nhất là 1, $f(0) = 0$ và $f'(0) = 1$. Nếu

$\lambda_\infty = \frac{1}{4} \cot 2t$ và $f(z) = f(w)$ thì đặt z_1, w_1 là những điểm trong D thỏa $z_1^n = z$,

$w_1^n = w$. Vì vậy $g^n(z_1) = g^n(w_1)$. Từ đây suy ra tồn tại w_0 là căn bậc n của 1 sao

cho $z_1 = w_0 w_1$. Vì vậy $z = w$ nên f đơn điệp. Vậy $f \in \mathfrak{S}$. Chứng minh tương tự ta thu được (b). $\square$

Giả thiết nổi tiếng của Bieberbach có liên quan đến lớp $\mathfrak{S}$. Đó là nếu $f \in \mathfrak{S}$ và chuỗi lũy thừa của nó cho bởi (1.1.8) thì

$$|a_n| \leq n, \forall n \geq 2. \quad (1.1.11)$$

Hơn nữa đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi f là hàm Koebe hoặc là phép quay của hàm Koebe.

Bây giờ ta sẽ chứng minh giả thiết Bieberbach cho trường hợp $n = 2$. Chứng minh cho trường hợp tổng quát được trình bày bởi deBranges năm 1985. Bạn đọc có thể tham khảo chứng minh trong [Co']. Ta bắt đầu với bất đẳng thức đối với lớp $\mathcal{U}$.

1.1.8. Định lý.

Nếu $g \in \mathcal{U}$ và có khai triển Laurent $g(z) = z + a_0 + a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \dots$ thì

$|a_0| \leq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $g(z) = z + 2\lambda + \lambda^2 \frac{1}{z} = \frac{(z + \lambda)^2}{z}$ trong đó

$|\lambda| = 1$. Trong trường hợp này g biến D^* vào $\mathbb{C} \setminus [0, 4\lambda]$.

Chứng minh.

Lấy $h \in \mathcal{U}$ sao cho $h^2(z) = g(z^2)$ với $z \in D^*$ và giả sử khai triển của h có

dạng $h(z) = z + \beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \dots$ thì

$$\begin{aligned} h^2(z) &= z^2 + 2\beta_0 z + (\beta_0^2 + 2\beta_1) + \dots \\ &= g(z^2) \\ &= z^2 + a_0 + a_1 \frac{1}{z^2} + \dots \end{aligned}$$

Vì vậy $\beta_0 = 0$ và $a_0 = 2\beta_1$. Nhưng theo bổ đề 1.1.6 thì $|\beta_1| \leq 1$ nên $|a_0| \leq 2$. Đẳng

thức $|a_0| = 2$ đúng khi và chỉ khi $|\beta_1| = 1$ trong trường hợp $h(z) = z + \frac{\lambda}{z}$ trong đó

$\lambda^2 = \beta_1$ (nên $|\lambda| = 1$). Nhưng trong trường hợp này

$g(z^2) = h^2(z) = \left(z + \frac{\lambda}{z}\right)^2 = z^2 + 2\lambda + \frac{\lambda^2}{z^2}$ nên $g(z) = z + 2\lambda + \frac{\lambda^2}{z}$. Ta kiểm tra được g

biến D^* vào $\mathbb{C} \setminus [0, 4\lambda]$. $\square$

1.1.9. Định nghĩa.

Với $|\alpha| = 1$ ta định nghĩa $f_\alpha(z) = \frac{z}{(1 - \alpha z)^2}$ với $z \in D$.

Khi $\alpha = 1$ thì hàm $f_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ được gọi là hàm Koebe biến D vào

$$\mathbb{C} \setminus \left[\infty; -\frac{1}{4} \right).$$

Với α tùy ý, f_α là hợp thành của phép quay đĩa D bởi α ; f_1 và phép quay $\mathbb{C}$ bởi $\bar{\alpha}$ tức $f_\alpha(z) = \bar{\alpha} f_1(\alpha z)$ nên f_α được gọi là phép quay của hàm Koebe. Đồng thời

$$f_\alpha(D) = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{t\bar{\alpha}}{4} : 0 \leq t < \infty \right\}$$

Biểu diễn dạng chuỗi của f_α cho bởi:

$$\frac{z}{(1-\alpha z)^2} = z + 2\alpha z^2 + 3\alpha^2 z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} z^n$$

1.1.10. Định lý.

Nếu $f \in \mathcal{S}$, f có khai triển Laurent (1.1.8) thì $|a_2| \leq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi f là một phép quay của hàm Koebe.

Chứng minh.

Gọi g là hàm tương ứng trong lớp $\mathcal{U}$ của $f : g(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}, \forall z \in D^*$. Suy ra g có

$$\text{khai triển Laurent } g(z) = z - a_2 + \frac{a_2^2 - a_3}{z} + \dots$$

Áp dụng định lý 1.1.12 suy ra $|a_2| \leq 2$. Hơn nữa, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại

$$\lambda, |\lambda| = 1 \text{ sao cho } g(z) = \frac{(z + \lambda)^2}{z}. \text{ Điều này tương đương với } f \text{ là một phép quay của}$$

hàm Koebe. $\square$

Định lý này được ứng dụng để biểu diễn “định lý Koebe $\frac{1}{4}$ ”

1.1.11. Định lý.

$$\text{Nếu } f \in \mathcal{S} \text{ thì } f(D) \supseteq \left\{ \zeta : |\zeta| < \frac{1}{4} \right\}$$

Chứng minh.

Cố định $f \in \mathcal{S}$ và lấy ζ_0 là số phức không nằm trong $f(D)$. Ta đi chứng minh

$$|\zeta_0| \geq \frac{1}{4}. \text{ Vì } 0 \in f(D), \zeta_0 \neq 0 \text{ nên } g(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\zeta_0}} \text{ là hàm chỉnh hình trên } D \text{ và } g \in \mathcal{S}.$$

Thật vậy, $g(0) = 0$ và $g'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{z} = f'(0) = 1$. Do g là hợp thành của f và một phép biến đổi Möbius nên g là hàm đơn điệu.

Vì $f(0) = 0$ nên tồn tại r (đủ nhỏ) sao cho $|f(z)| < |\zeta_0|$ với $|z| < r$. Trong lân cận này của 0 ta có:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\zeta_0} f(z)} = 1 + \frac{1}{\zeta_0} f(z) + \frac{1}{\zeta_0^2} f^2(z) + \dots$$

Thay khai triển chuỗi Laurent (1.1.8) của f vào khai triển trên ta thu được

$$g(z) = z + \left(\frac{1}{\zeta_0} + a_2 \right) z^2 + \dots \text{ với } |z| < r$$

Theo định lý 1.1.14 suy ra $\left| \frac{1}{\zeta_0} + a_2 \right| \leq 2$. Do $|a_2| \leq 2$ vì vậy $\left| \frac{1}{\zeta_0} \right| \leq 4$ tức $|\zeta_0| \geq \frac{1}{4}$. $\square$

Nghiên cứu về hàm Koebe chỉ ra hằng số $\frac{1}{4}$ là tốt.

Kết quả tiếp theo thường được gọi là định lý biến dạng Koebe.

1.1.12. Định lý.

$$\text{Nếu } f \in \mathcal{S} \text{ và } |z| < 1 \text{ thì}$$

$$\text{a. } \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

$$\text{b. } \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

Đẳng thức đúng đối với một trong bốn bất đẳng thức tại điểm $z \neq 0$ khi và chỉ khi f là phép quay của hàm Koebe.

Chứng minh.

$$\text{Với mọi số phức } a \in D, \text{ đặt } f_a(z) = \frac{f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a)}{\left(1-|a|^2\right)f'(a)}$$

Dễ thấy rằng f_a đơn điệu trên D vì là hợp thành của các hàm đơn điệu. Đồng thời

$$f_a(0) = 0 \text{ và } f'_a(0) = 1. \text{ Vì vậy } f_a \in \mathcal{S}.$$

$$\text{Với mọi } z \in D, \text{ đặt } f_a(z) = z + b_2 z^2 + \dots$$

$$\text{Ta tính được } f''_a(0) = \left[\left(1-|a|^2\right) \frac{f''(a)}{f'(a)} - 2\bar{a} \right]$$

$$\text{Theo định lý 1.1.14 thì } b_2 = \frac{f''_a(0)}{2} \text{ và } |b_2| \leq 2 \text{ nên } \left| \left(1-|a|^2\right) \frac{f''(a)}{f'(a)} - 2\bar{a} \right| \leq 4.$$

$$\text{Do đó } \left| \frac{f''(a)}{f'(a)} - \frac{2\bar{a}}{1-|a|^2} \right| \leq \frac{4}{1-|a|^2}.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này với $|a|$ và thay $z = a$ thu được

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2} \quad (1.1.17)$$

Do f' không triệt tiêu trên D vì vậy tồn tại một nhánh chính hình của $\log f'(z)$ với $\log f'(0) = 0$. Sử dụng đạo hàm của hàm hợp ta được

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\log f'(re^{i\theta}) \right] = \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} e^{i\theta}.$$

Do với mọi hàm g tùy ý thì $\operatorname{Re} \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial \operatorname{Re}[g]}{\partial r}$ nên

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left[\log \left| f'(re^{i\theta}) \right| \right] = \operatorname{Re} \left[z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] \quad (1.1.18)$$

Do đó từ 1.1.17 suy ra

$$\left| r \frac{\partial}{\partial r} \left[\log \left| f'(re^{i\theta}) \right| \right] - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

Từ đây thu được

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \left[\log \left| f'(re^{i\theta}) \right| \right] \leq \frac{2r+4}{1-r^2} \text{ với mọi } re^{i\theta} \in D$$

Do đó với $\rho < 1$ thì

$$\int_0^\rho \frac{2r-4}{1-r^2} dr \leq \int_0^\rho \frac{\partial}{\partial r} \left[\log \left| f'(re^{i\theta}) \right| \right] dr \leq \int_0^\rho \frac{2r+4}{1-r^2} dr \quad (1.1.20)$$

$$\text{Hay } \log \left[\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \right] \leq \log \left| f'(\rho e^{i\theta}) \right| \leq \log \left[\frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} \right]$$

Bằng cách nâng mũ hai vế của bất đẳng thức trên và với $z = \rho e^{i\theta}$, ta thu được (a).

Giả sử với $z = \rho e^{i\theta}$ thì một trong các bất đẳng thức trong (a) trở thành đẳng thức,

chẳng hạn như $\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} = |f'(z)|$. Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Khi đó $\int_0^\rho \frac{2r-4}{1-r^2} dr = \int_0^\rho \frac{\partial}{\partial r} \left[\log \left| f'(re^{i\theta}) \right| \right] dr$ với mọi $\rho < 1$ nên

$$\frac{2r-4}{1-r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\log \left| f'(re^{i\theta}) \right| \right] \text{ với } 0 \leq r \leq \rho.$$

Từ điều này và từ $r \frac{\partial}{\partial r} \left[\log \left| f'(re^{i\theta}) \right| \right] = \operatorname{Re} \left[z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right]$ với $0 \leq r \leq \rho$, cho $r \rightarrow 0$ ta thu

được $-4 = \operatorname{Re} [e^{i\theta} f''(0)]$ do đó $|f''(0)| \geq 4$. Theo định lý 1.1.14 thì $|f''(0)| = 4$ và f là một phép quay của hàm Koebe.

$$\text{Để chứng minh (b) lưu ý rằng } |f(z)| = \left| \int_{[0,z]} f'(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{[0,z]} |f'(\zeta)| |d\zeta|.$$

Tham số đoạn $[0, z]$ bằng $\zeta = tz$, $0 \leq t \leq 1$ và sử dụng (a) ta thu được

$$|f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \text{ Từ đây ta tính được } |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)|.$$

Trước hết ta chú ý rằng $\frac{t}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{4}$ với $0 \leq t \leq 1$. Do vậy ta chỉ cần chứng minh bất

đẳng thức với giả thuyết $|f(z)| < \frac{1}{4}$. Nhưng theo “định lý Koebe $\frac{1}{4}$ ” thì

$\left\{ \zeta : |\zeta| < \frac{1}{4} \right\} \subseteq f(D)$. Do đó cố định $z \in D$ với $|f(z)| < \frac{1}{4}$ và lấy γ là một đường trong

D từ 0 đến z sao cho $f \circ \gamma$ là đoạn thẳng $[0, f(z)]$. Khi đó $f(\gamma(t)) = tf(z)$ với

$$0 \leq t \leq 1. \text{ Do đó } |f(z)| = \left| \int_{\gamma} f'(w) dw \right| = \left| \int_0^1 f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \text{ đồng thời}$$

$$f'(\gamma(t)) \gamma'(t) = [tf(z)]' = f(z), \forall t. \text{ Vì vậy } |f(z)| = \int_{\gamma} |f'(w)| |dw|. \text{ Sử dụng (a), ta thu}$$

được $|f'(w)| \geq \frac{1-|w|}{(1+|w|)^3}$. Mặt khác với $0 \leq s < t \leq 1$ thì $|\gamma(t) - \gamma(s)| \geq \left| |\gamma(t)| - |\gamma(s)| \right|$

và vì vậy $|dw| \leq d|w|$. Kết hợp các bất đẳng thức trên, ta được

$$|f(z)| \geq \int_0^{|z|} \frac{1-r}{(1+r)^3} dr = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

Có thể kiểm tra được f là phép quay của hàm Koebe nếu một trong hai bất đẳng thức trong (b) trở thành đẳng thức. $\square$

Tiếp theo là bổ đề cần thiết để chứng minh một hệ quả quan trọng của định lý này.

1.1.13. Bổ đề. (Định lý Hurwitz)

Nếu $\{f_n\}$ là một dãy các hàm đơn điệu trên miền G và $f_n \rightarrow f$ trong $H(G)$ thì f đơn điệu hoặc f là hàm hằng.

Có thể tham khảo chứng minh trong [Re, trang 262].

1.1.14. Hệ quả.

Tập các hàm đơn điệu $\mathcal{S}$ là tập compact trong $H(D)$.

Chứng minh.

Theo định lý Montel [Co, định lý 7.2.9] và định lý 1.1.16 thì $\mathcal{S}$ là họ chuẩn tắc. Ta chỉ cần chứng minh $\mathcal{S}$ là tập đóng. Nhưng nếu $\{f_n\} \subseteq \mathcal{S}$ và $f_n \rightarrow f$ trong $H(D)$ thì từ bổ đề Hurwitz suy ra f đơn điệu hoặc là hàm hằng. Nhưng do $f'_n(0) = 1$ với mọi n nên $f'(0) = 1$ và f không là hàm hằng. Do $f(0) = 0$ nên $f \in \mathcal{S}$. $\square$

Kết quả tiếp theo gần như là một hệ quả của hệ quả 1.1.22 nhưng chứng minh đòi hỏi kết quả sau:

1.1.1.5. Mệnh đề.

Cho miền G , $a \in G$ và b là một số phức thì

$\mathcal{S}(G, a, b) \equiv \{f \in H(G) : f \text{ đơn điệu}, f(a) = b, f'(a) = 1\}$ là tập compact trong $H(G)$

Chứng minh.

Ta có thể giả sử $a = b = 0$. Đặt $\mathcal{S}(G) = \mathcal{S}(G, 0, 0)$.

Lấy $R > 0$ sao cho $\bar{B}(0; R) \subseteq G$. Nếu $f \in \mathcal{S}(G)$ và $f_R(z) = R^{-1}f(Rz)$ với $z \in D$ thì

$f_R \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(D)$. Theo định lý 1.1.15 thì $f_R(D) \supseteq \left\{ \zeta : |\zeta| < \frac{1}{4} \right\}$. Vì vậy $|f_R(e^{i\theta})| \geq \frac{1}{4}$ với

mọi θ . Vì vậy $|f(Re^{i\theta})| \geq \frac{R}{4}$ với mọi θ và $\bar{B}\left(0; \frac{R}{4}\right) \subseteq f\left(\bar{B}(0; R)\right)$. Do đó f biến

$G \setminus \bar{B}(0; R)$ vào $f(G) \setminus \bar{B}\left(0; \frac{R}{4}\right)$ nên $|f| \geq \frac{R}{4}$ với f . Vì vậy $\phi_f(z) = \frac{z}{f(z)}$ là hàm chỉnh

hình trên G thì $|\phi_f(z)| \leq 4$ với $|z| \leq R$ và $|\phi_f(z)| \leq \frac{4|z|}{R}$ với $z \in G \setminus \bar{B}(0; R)$. Do vậy

$\Phi \equiv \{\phi_f : f \in \mathcal{S}(G)\}$ là họ các hàm chỉnh hình bị chặn địa phương trên G vì vậy nó là chuẩn tắc.

Với lý luận tương tự như trong chứng minh hệ quả 1.1.22, $\mathcal{S}(G)$ là tập đóng. Vì vậy để chứng minh mệnh đề ta cần chỉ ra $\mathcal{S}(G)$ là họ chuẩn tắc. Lấy $\{f_n\}$ là một dãy trong $\mathcal{S}(G)$ và lấy $\{\phi_n\}$ là dãy tương ứng trong Φ . Ta có thể giả sử rằng $\phi_n \rightarrow \phi$ với ϕ là một hàm chỉnh hình trên G (nếu cần thiết có thể thông qua dãy con). Rõ ràng các hàm ϕ_n không có không điểm trong G vì vậy hoặc $\phi \equiv 0$ hoặc ϕ không triệt tiêu trong G .

Đặt $f(z) = \frac{z}{\phi(z)}$. Do $f'(0) = 1$ nên f không là hàm hằng. Rõ ràng $f_n(z) \rightarrow f(z)$,

$\forall z \in G$. Nếu K là tập con compact của G thì lấy $\varepsilon > 0$ sao cho $|\phi| \geq 2\varepsilon$ trên K . Ta

suy ra $|\phi_n| \geq \varepsilon$ trên K với mọi n đủ lớn. Từ đây suy ra $\{f_n\}$ bị chặn địa phương trên

G nên là họ chuẩn tắc. $\square$

Phần kết thúc mục trình bày mở rộng của định lý về biến dạng gọi là *định lý biến dạng tổng quát*.

1.1.16. Định lý.

Nếu K là một tập con compact của miền G thì có một hằng số M (phụ thuộc vào K) sao cho với mỗi hàm đơn điệu f trên G và mỗi cặp điểm z và w trong K ta có

$$\frac{1}{M} \leq \frac{|f'(z)|}{|f'(w)|} \leq M.$$

Chứng minh.

Bằng cách đổi vai trò của z và w , ta chỉ cần chứng minh $\frac{|f'(z)|}{|f'(w)|} \leq M$. Lấy

$0 < 2d < \text{dist}(K, \partial G)$ và phủ K bởi họ hữu hạn $\mathcal{B}$ các đĩa mở bán kính $\frac{d}{8}$. Giả sử B_1 và B_2 là hai đĩa trong $\mathcal{B}$ sao cho $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Lấy $z_i \in B_i, i = 1, 2$. Vì vậy

$|z_1 - z_2| < \frac{d}{2}$ và $\bar{B}(z_i; d) \subseteq G$. Xét hàm $g(z) = \frac{f(z_1 + dz) - f(z_1)}{df'(z_1)}$ thì $g \in \mathcal{S}$. Theo định

lý 1.1.16 thì $|g'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$ với $|z| < 1$. Suy ra $\left| \frac{f'(z_1 + dz)}{f'(z_1)} \right| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$. Lấy

$z = \frac{z_1 - z_2}{d}$ ta có $|z| < \frac{1}{2}$ và thu được

$$\left| \frac{f'(z_2)}{f'(z_1)} \right| \leq \frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = M_0.$$

Nếu z và w là các điểm tùy ý trong K thì có các điểm $z_1 = z, z_2, \dots, z_n = w$ sao cho mỗi cặp điểm liên tiếp nằm trong một đĩa thuộc $\mathcal{B}$, $n \leq N$ thì tổng số đĩa trong $\mathcal{B}$ và

những đĩa cắt nhau đôi một. Vì vậy

$$\left| \frac{f'(z)}{f'(w)} \right| = \left| \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \right| \left| \frac{f'(z_2)}{f'(z_3)} \right| \dots \left| \frac{f'(z_{n-1})}{f'(z_n)} \right| \leq M_0^{n-1} \leq M_0^{N-1} \equiv M. \square$$

1.2. Ánh xạ bảo giác của tứ giác vuông có cạnh là các cung tròn

V.Kravchenko và R.M. Porter

April, 23, 2009

Ta gọi một tứ giác cong đối xứng (s.c.q) là một đường cong Jordan P trong $\mathbb{C}$ được tạo bởi 4 cung tròn (hoặc đoạn thẳng) với cả 4 góc trong là 90° . Giả sử rằng các đỉnh của P nằm ở 4 vị trí có dạng $A, -\bar{A}, -A, \bar{A}$, trong đó $\operatorname{Re} A > 0, \operatorname{Im} A > 0$.

Cho W là một miền chứa gốc tọa độ và có biên là một s.c.q P . Ta xét các ánh xạ bảo giác $f: D \rightarrow W$ với D là đĩa mở đơn vị. Theo định lý 0.7.8, f mở rộng liên tục đến biên P nên có duy nhất giá trị $t \in [0; 2\pi]$ sao cho $f(e^{it}) = A$. Một cách tổng quát, ta sẽ giả sử rằng $f(0) = 0$ và $f'(0) > 0$.

Dựa vào đạo hàm Schwarz S_f chúng ta bắt đầu ở phần 1.2.1 bằng việc thiết lập phương trình vi phân cổ điển cấp 2 (phương trình Sturm – Liouville) trong một khoảng thực, với điều kiện biên phi tuyến, trong đó các hàm hệ số chứa các tham số phụ t, λ .

Trong phần 1.2.2 qua việc chuẩn hóa hàm f , bài toán tìm hàm f dẫn đến bài toán giá trị biên Sturm – Liouville mà nghiệm của nó liên hệ tham số phụ λ với độ cong κ của cạnh phải của P . Ta thấy rằng λ là một tham số phổ trong bài toán giá trị biên.

Trong phần 1.2.3 chúng tôi mô tả ánh xạ chính tắc f_∞ biến D vào một hình chữ nhật và xác định tham số λ_∞ của nó và hàm riêng tương ứng y_∞ của bài toán Sturm – Liouville.

Kết quả của phần 1.2.3 được dùng trong phần 1.2.4 để ứng dụng phương pháp tham số phổ chuỗi lũy thừa để tìm nghiệm bài toán Sturm – Liouville. Nội dung chính của phần này là mệnh đề 1 thể hiện mối quan hệ giữa các tích phân lặp và phương trình Sturm – Liouville

Kết quả của phần 1.2.3 cũng được áp dụng vào phần 1.2.5 để biểu diễn độ cong κ dưới dạng chuỗi lũy thừa của λ với t cố định.

Một thuật toán cho bài toán một tham số tìm λ từ κ với t cố định, được giới thiệu trong phần 1.2.6

1.2.1 PHƯƠNG TRÌNH STURM-LIOUVILLE

Trước tiên chúng ta bắt đầu với việc thiết lập phương trình vi phân cổ điển cấp 2 liên quan mật thiết đến ánh xạ bảo giác với s.c.q.

Đạo hàm Schwarz của một hàm chỉnh hình f có dạng: $S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$. Đây lại là hàm chỉnh hình khi f' không triệt tiêu. Đạo hàm Schwarz có tính chất

$$S_F(z) = S_f(z)$$

nếu

$$F(z) = \frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta}$$

với $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ là các hằng số phức.

Với ánh xạ bảo giác của D vào một s.c.q theo công thức $[B, (3)]$, mà ta kí hiệu là $(B3)$, ta có

$$S_f(z) = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{(z - e^{it})^2} + \frac{1}{(z + e^{it})^2} + \frac{1}{(z - e^{-it})^2} + \frac{1}{(z + e^{-it})^2} \right) + \frac{c}{z - e^{it}} - \frac{c}{z + e^{it}} + \frac{\bar{c}}{z - e^{-it}} - \frac{\bar{c}}{z + e^{-it}} \quad (1.2.1)$$

trong đó tham số $c \in \mathbb{C}$ ứng với ràng buộc được trình bày tiếp sau đây

Đặt $c = \rho e^{is}$. Theo (B8) thì

$$\rho = \frac{-3}{8 \cos(s + t)} \quad (1.2.2)$$

trong đó ta giả sử thêm (B9) $\frac{\pi}{2} - t < s < \frac{3\pi}{2} - t$.

Bây giờ chúng ta đưa vào một tham số mới tương đương với s . Theo (1.2.2), $\rho > 0$ thỏa $\rho \geq \frac{3}{8}$. Vì $s = \arccos\left(-\frac{3}{8\rho}\right) - t$, trong đó $\frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{3}{8\rho}\right) < \frac{3\pi}{2}$ nên tham số c trong (1.2.1) có thể được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} c &= \rho e^{is} = \rho \left(\cos\left(\left(\arccos\frac{-3}{8\rho}\right) - t\right) + i \sin\left(\left(\arccos\frac{-3}{8\rho}\right) - t\right) \right) \\ &= -\frac{3}{8}(\cos t - i \sin t) + \varepsilon \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} (\sin t + i \cos t) = -\frac{3}{8}e^{-it} + \lambda i e^{-it} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

trong đó, ta viết

$$\lambda = \varepsilon \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2}$$

với

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{khi } s < \pi - t \\ 0 & \text{khi } s = \pi - t \\ -1 & \text{khi } \pi - t < s \end{cases}$$

Tại giá trị đặc biệt $s = \frac{\pi}{2} - t$ ta có $\rho = \infty$ và $\rho \rightarrow \infty$ khi s tiến đến các giá trị $\frac{\pi}{2} - t$

hoặc $\frac{3\pi}{2} - t$. Hơn nữa, dễ thấy rằng

$$\lambda = -\frac{3}{8} \tan(s + t) \quad (1.2.4)$$

Từ (1.2.3), suy ra tham số $c, S_f(z)$ là các đa thức theo λ . Thật vậy, viết $a = e^{it}$, ta thấy:

$$S_f(z) = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{(z+a)^2} + \frac{1}{(z-\bar{a})^2} + \frac{1}{(z+\bar{a})^2} \right) - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{z^2 - a^2} + \frac{1}{z^2 - \bar{a}^2} \right)$$

$$+2\lambda i \left(\frac{1}{z^2 - a^2} - \frac{1}{z^2 - \bar{a}^2} \right) = 2\psi_0(z) - 2\lambda\psi_1(z), \text{ trong đó}$$

$$\psi_0(z) = \frac{3}{2} \left(\frac{a^2}{(z^2 - a^2)^2} + \frac{\bar{a}^2}{(z^2 - \bar{a}^2)^2} \right)$$

$$\psi_1(z) = -i \left(\frac{1}{z^2 - a^2} - \frac{1}{z^2 - \bar{a}^2} \right) \quad (1.2.5)$$

Từ bây giờ ta sẽ xem S_f được tham số hóa theo t, λ thay vì t, s . Các hàm ψ_0, ψ_1 cũng phụ thuộc vào t nên khi cần làm rõ, ta viết $S_f(z) = R_{t,\lambda}(z)$ trong đó

$$R_{t,\lambda}(z) = 2\psi_0 - 2\lambda\psi_1 \quad (1.2.6)$$

Theo (0.8.1) thì hàm chỉnh hình f , có đạo hàm Schwarz là $R_{t,\lambda}(z)$, sẽ được biểu diễn dưới dạng $\frac{y_2}{y_1}$, trong đó y_2, y_1 là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình vi phân thường $2y'' + R_{t,\lambda}(z)y = 0$ trong D , tức chúng là nghiệm của phương trình

$$y'' + \psi_0 y = \lambda \psi_1 y \quad (1.2.7)$$

Sự thuận tiện của dạng đặc biệt (1.2.7) là mối quan hệ của nó với lý thuyết phổ.

1.2.2 BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN.

Trong [B], Brown mô tả chi tiết các mối liên hệ có thể có giữa các cạnh của s.c.q. Đặc biệt, đối với một s.c.q tổng quát, hai đường tròn chứa một cặp cạnh đối sẽ cắt nhau, trong lúc hai đường tròn chứa hai cạnh còn lại rời nhau. Ta lấy các cạnh phải và cạnh trái nằm trong hai đường tròn rời nhau có cùng bán kính $|r|$; trong đó r được xác định theo (B14):

$$r = \frac{f'(1)^2}{f'(1) + f''(1)} \quad (1.2.8)$$

Ta sẽ chuẩn hóa f bởi:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0 \quad (1.2.9)$$

Giả sử y là một nghiệm của (1.2.7) trong D được chuẩn hóa bởi $y(0) = 1; y'(0) = 0$. Khi đó, ánh xạ chuẩn hóa f được xác định như sau:

$$f(z) = \int_0^z \frac{1}{y^2(z)} dz \quad (1.2.10)$$

Thật vậy, từ (1.2.10) suy ra $f' = y^{-2}$ và $f'' = -2y^{-3}y'$. Do đó, f thỏa mãn chuẩn hóa (1.2.9). Từ (1.2.8), ta có:

$$0 = r(f'(1) + f''(1)) - f'(1)^2 = r \left(\frac{1}{y^2(1)} - \frac{2y'(1)}{y^3(1)} \right) - \frac{1}{y^4(1)}$$

Vì vậy, độ cong của cạnh bên phải của ảnh cho bởi

$$\kappa = \frac{1}{r} = y^2(1) - 2y(1)y'(1) \quad (1.2.11)$$

Do đó bài toán giá trị biên cần phải giải là tìm $y(z)$ với $z \in [0;1]$, thỏa

$$\begin{cases} y'' + \psi_0 y = \lambda \psi_1 y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y^2(1) - 2y(1)y'(1) = \kappa \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Dữ kiện cho bài toán này là t và κ và ta phải tìm λ sao cho hệ (1.2.12) tồn tại nghiệm, trong đó ψ_0 và ψ_1 phụ thuộc vào t . Trong số các λ như thế, ta muốn chọn ra một giá trị sao cho ánh xạ f tương ứng là đơn ánh. Trong [B] có nhiều kết quả ứng với các giá trị của t, s nên khi những kết quả này đúng ta có thể áp dụng những kết quả này cho λ .

1.2.3 CÁC S.C.Q SUY BIẾN

Có hai trường hợp suy biến của s.c.q P : khi một cặp cạnh đối nằm trên cùng một đường tròn hay khi cả bốn cạnh là các đoạn thẳng (tức là khi P là hình chữ nhật).

Theo [B], kí hiệu $0(s) \in \mathbb{R}$ là tâm đường tròn chứa cạnh bên phải của $f(D)$ thì với mỗi t cố định, $0(s)$ là một hàm đơn điệu. Có hai giá trị đặc biệt s_0, s_∞ ứng với hai trường hợp suy biến của s.c.q.

Với $0(s_0) = 0$ (ánh xạ gốc) thì $f(D)$ có một cặp cạnh đối nằm trên cùng một đường tròn.

Với $0(s_\infty) = \infty$ (ánh xạ chính tắc) thì cả bốn cạnh là các đoạn thẳng (tức là khi P là hình chữ nhật).

Ánh xạ gốc và tham số s_0 của nó đã được nghiên cứu chi tiết trong [B, trang 44]. Trong phần này chúng ta sẽ sử dụng s_∞ vì nó đơn giản hơn.

Do ánh xạ chính tắc f_∞ biến bốn điểm $e^{it}, -e^{-it}, -e^{it}, e^{-it}$ thành 4 đỉnh của hình chữ nhật nên theo công thức Schwarz-Christoffel (0.8.2) ta có

$$\begin{aligned} f_\infty(z) &= \int_0^z \left((\zeta - e^{it})(\zeta + e^{it})(\zeta + e^{-it})(\zeta - e^{-it}) \right)^{-\frac{1}{2}} d\zeta \\ &= \int_0^z \left((\zeta^2 - e^{2it})(\zeta - e^{-2it}) \right)^{-\frac{1}{2}} d\zeta \end{aligned}$$

Suy ra
$$f_\infty(z) = \int_0^z (1 - 2(\cos 2t)\zeta^2 + \zeta^4)^{-1/2} d\zeta \quad (1.2.13)$$

Lưu ý rằng f'_∞ không bao giờ triệt tiêu và $f'_\infty(0) = 1$.

Từ (1.2.13) suy ra $\frac{f''_\infty}{f'_\infty} = \frac{2z \cos 2t - 2z^3}{1 - 2 \cos 2t z^2 + z^4}$. Do đó:

$$S_{f_\infty} = \left(\frac{f''_\infty}{f'_\infty} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''_\infty}{f'_\infty} \right)^2 = \frac{2 \left(\cos 2t + (\cos^2 2t - 3)z^2 + (\cos 2t)z^4 \right)}{(1 - 2(\cos 2t)z^2 + z^4)}$$

Tuy nhiên, theo (B23) thì

$$S_{f_\infty} = \frac{2\left(\cos 2t + (\cos^2 2t - 3)z^2 + (\cos 2t)z^4\right)}{\left(1 - 2(\cos 2t)z^2 + z^4\right)} + \frac{3\frac{\cos(s-t)}{\cos(s+t)} - \cos 2t}{2\left(1 - 2(\cos 2t)z^2 + z^4\right)} \quad (1.2.14)$$

So sánh S_{f_∞} từ hai biểu thức trên suy ra

$$3\frac{\cos(s-t)}{\cos(s+t)} = \cos 2t$$

Biểu thức này có thể được viết lại dưới dạng:

$$\tan s = \cot t \frac{\cos 2t - 3}{\cos 2t + 3} = -\frac{(\sin^2 t + 1)\cos t}{(\cos^2 t + 1)\sin t} \quad (1.2.15)$$

Cho trước t , từ (1.2.15) suy ra $s = s_\infty$ đối với ánh xạ chính tắc. Từ đây, ta thu được các tham số:

$$\rho_\infty = \frac{-3}{8\cos(s_\infty + t)}$$

$$\lambda_\infty = \varepsilon_\infty \sqrt{\rho_\infty^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{3}{8}\tan(s_\infty + t)$$

Dựa vào (1.2.15) ta có thể đơn giản hóa λ_∞

$$\lambda_\infty = \frac{1}{4}\cot 2t \quad (1.2.16)$$

Hệ Sturm-Liouville (1.2.12) tương ứng ánh xạ chính tắc với đạo hàm Schwarz

R_{t,λ_∞} có nghiệm riêng $y_\infty = (f_\infty')^{-\frac{1}{2}}$, đặc biệt:

$$y_\infty(z) = \left(1 - 2(\cos 2t)z^2 + z^4\right)^{1/4} \quad (1.2.17)$$

Rõ ràng (1.2.17) thỏa các chuẩn hóa $y_\infty(0) = 1$ và $y'_\infty(0) = 0$ và

$$y_\infty(1) = \sqrt{2\sin t}, \quad y'_\infty(1) = \sqrt{\frac{\sin t}{2}}. \quad (1.2.18)$$

Vì $f_{\infty}(D)$ là hình chữ nhật, độ cong của cạnh bên phải của nó là $\kappa_{\infty} = 0$. Hơn nữa vì f'_{∞} không bao giờ triệt tiêu, ta suy ra hàm y_{∞} cũng không bao giờ triệt tiêu trong D . Điều này cũng có thể suy ra từ (1.2.17).

1.2.4 PHÉP GIẢI BẰNG CÁC TÍCH PHÂN LẶP

Bây giờ chúng ta áp dụng phương pháp tham số phổ chuỗi lũy thừa (SPPS) tìm nghiệm của các bài toán Sturm-Liouville (được phát triển trong [KP']). Phương pháp này sẽ cho ta chuỗi lũy thừa theo λ biểu diễn các tham số hình học của bài toán ánh xạ s.c.q.

Giả sử hai hàm q_0, q_1 xác định trên $[0;1]$. Dãy các tích phân lặp I_n xác định bởi cặp sinh $(q_0; q_1)$ được định nghĩa như sau:

Cho $I_1 = 1$ (ánh xạ đồng nhất trên $[0;1]$) và với $n \geq 2$, I_n được xác định theo công thức truy hồi:

$$I_n(z) = \int_0^z I_{n-1}(\zeta) q_{n-1}(\zeta) d\zeta \quad (1.2.19)$$

trong đó $q_{n+2j} = q_n$ với $j = 1, 2, \dots$

Kết quả sau thể hiện mối quan hệ giữa các tích phân lặp và phương trình cơ bản (1.2.7):

Mệnh đề 1 [KP', định lý 1, trang 2]

Cho trước ψ_0 và ψ_1 , giả sử y_{∞} là một hàm không bị triệt tiêu thỏa phương trình vi phân thường

$$y''_{\infty} + \psi_0 y_{\infty} = \lambda_{\infty} \psi_1 y_{\infty} \text{ trên } [0, 1].$$

Chọn $q_0 = \frac{1}{y_{\infty}^2}$, $q_1 = \psi_1 y_{\infty}^2$ và định nghĩa $X^{(n)}, \widetilde{X}^{(n)}$ là các tích phân lặp được xác

định tương ứng bởi $(q_0; q_1)$ và $(q_1; q_0)$. Khi đó, với mỗi $\lambda \in \mathbb{C}$ các hàm

$$y_1 = y_{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_{\infty})^k \widetilde{X}^{(2k)}$$

$$y_2 = y_\infty \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_\infty)^k X^{(2k+1)}$$

là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình

$$y'' + \psi_0 y = \lambda \psi_1 y$$

trên $[0,1]$. Hơn nữa, chuỗi của y_1 và y_2 hội tụ đều trên $[0,1]$ với mọi λ .

1.2.5 BIẾN PHÂN CỦA ĐỘ CONG

Để áp dụng mệnh đề 1 cho bài toán giá trị biên (1.2.12), ta lấy $\psi_0; \psi_1$ như trong (1.2.5) và y_∞ như trong (1.2.17). Chú ý:

$$y_1' = y_\infty' \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_\infty)^k \widetilde{X}^{(2k)} + \frac{1}{y_\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_\infty)^k \widetilde{X}^{(2k-1)}$$

và tương tự

$$y_2' = y_\infty' \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_\infty)^k X^{(2k+1)} + \frac{1}{y_\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_\infty)^k X^{(2k)}.$$

Vì vậy các giá trị đầu của các nghiệm riêng y_1, y_2 được cho bởi:

$$y_1(0) = y_\infty(0) = 1, y_1'(0) = y_\infty'(0) = 0$$

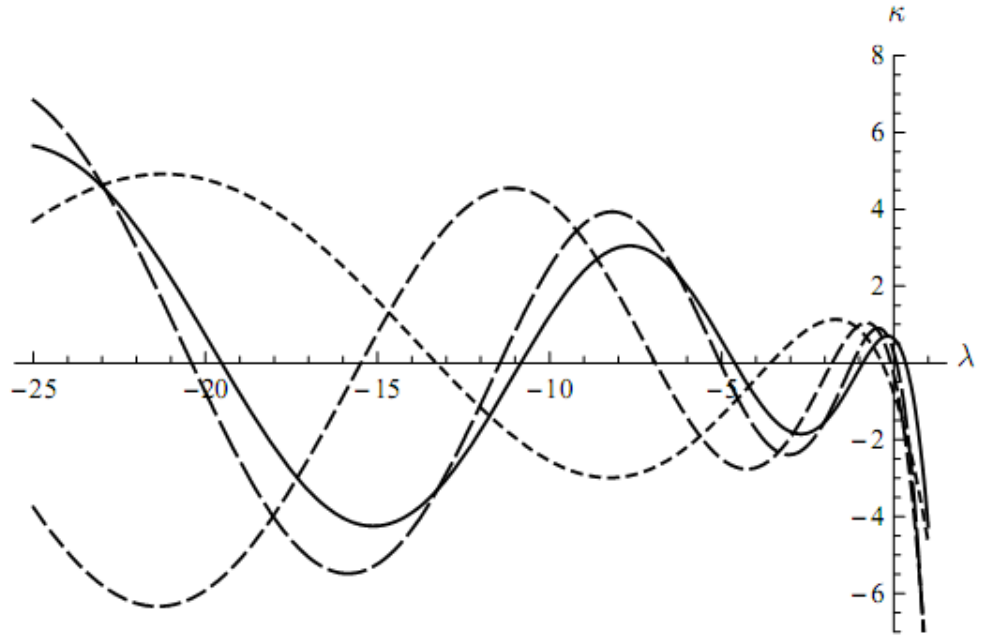
$$y_2(0) = 0, y_2'(0) = \frac{1}{y_\infty(0)} = 1$$

Từ đây ta thấy rằng y_1 , cho bởi mệnh đề 1, chính là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thỏa mãn hai điều kiện đầu của (1.2.12) tại điểm $z = 0$. Do đó bài toán (1.2.12) quy về thỏa mãn điều kiện biên cuối cùng là:

$$y_1(1)(y_1(1) - 2y_1'(1)) = \kappa \quad (1.2.20)$$

Vế trái của (1.2.20) dễ ước lượng xấp xỉ vì nó là chuỗi lũy thừa $\sum a_n (\lambda - \lambda_\infty)^n$ theo λ mà các hệ số a_n được biểu diễn trong các hạng tử của chuỗi

$y_1(1) = \sum b_n (\lambda - \lambda_\infty)^n$ được cho bởi mệnh đề 1.



Hình 1. Đồ thị của hàm κ (theo λ) với $t = 0.1\pi, 0.2\pi, 0.3\pi, 0.4\pi$.

Ở hình 1, ta biểu diễn đồ thị của các chuỗi lũy thừa (1.2.20) theo một số giá trị của t . Ở đây, với giá trị t cho trước một khi đã tính được các hệ số a_n ta không cần giải phương trình vi phân để tính κ .

Việc tính toán của (1.2.20) có thể đơn giản hơn. Lưu ý rằng hệ số thứ k trong khai triển Taylor của $y_1(1) - 2y'_1(1)$ là:

$$\begin{aligned} b_k - 2b'_k &= y_\infty(1) \widetilde{X}^{(2k)}(1) - 2 \left(y'_\infty(1) \widetilde{X}^{(2k)}(1) + \frac{1}{y_\infty(1)} \widetilde{X}^{(2k-1)}(1) \right) \\ &= \widetilde{X}^{(2k)}(1) (y_\infty(1) - 2y'_\infty(1)) - \frac{2}{y_\infty(1)} \widetilde{X}^{(2k-1)}(1) \end{aligned}$$

Từ (1.2.18) ta được $y_\infty(1) - 2y'_\infty(1) = 0$, do đó:

$$b_k - 2b'_k = -\frac{2}{y_\infty(1)} \widetilde{X}^{(2k-1)}(1)$$

Vì vậy

$$a_n = -2 \sum_{k=0}^n \widetilde{X}^{(2k)}(1) \widetilde{X}^{(2(n-k)-1)}(1) \quad (1.2.21)$$

Từ (1.2.5), (1.2.17) rõ ràng $y_\infty(z) \geq 0$. Đồng thời

$$\psi_1(z) = \frac{2 \sin 2t}{1 - 2 \cos 2t z^2 + z^4} > 0, \forall z \in [0, 1]. \text{ Suy ra, } \widetilde{X}^{(k)}(z) \geq 0. \text{ Do đó, ta thấy rằng tất}$$

cả các hệ số a_n trong khai triển Taylor của κ là một hàm theo λ nhận giá trị âm, ngoại trừ $a_0 = 0$.

Lưu ý rằng $\kappa \neq 0, \forall \lambda > \lambda_\infty$. Thật ra, $\frac{d\kappa}{d\lambda} < 0$ và $\kappa \rightarrow -\infty$ khi $\lambda \rightarrow \infty$. Vì vậy,

bán kính cạnh bên phải của $f(D)$ tiến đến 0.

1.2.6 THUẬT TOÁN CHO BÀI TOÁN MỘT THAM SỐ

Ở phần này, chúng ta trình bày thuật toán giải bài toán phi tuyến (1.2.12) được đề cập cuối phần 1.2.2.

Cố định $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Cho trước κ , chúng ta tìm một tham số λ sao cho ánh xạ f với đạo hàm Schwarz $S_f = R_{t,\lambda}$, được chuẩn hóa bởi $f(0) = 0, f'(0) = 1$ sẽ biến ∂D thành một s.c.q mà cạnh bên phải có độ cong κ . (Nếu $\kappa < 0$, chúng ta muốn tâm của cung tròn chứa cạnh này nằm trên tia $(-\infty; 1)$). Ta nhấn mạnh lại rằng với t cố định, một khi xác định được các tham số nào đó thì mối quan hệ $\kappa \mapsto \lambda$ thì được tính toán rất nhanh.

Thuật toán dưới đây tổng kết các kết quả ở những phần trước đặc biệt từ các công thức (1.2.5), (1.2.17) và (1.2.21). Trong thuật toán này, từ “tính” nghĩa là thực hiện phép tính ở $M + 1$ điểm chia đều nhau theo biến z từ 0 đến 1. Ta sẽ sử dụng $N + 1$ số hạng trong chuỗi lũy thừa theo λ . Ta thấy rằng không cần dùng đến ψ_0 và $X^{(n)}$.

Thuật toán một tham số

$$1. \text{ Tính } y_\infty(z) = \left(1 - 2(\cos 2t)z^2 + z^4\right)^{1/4}$$

2. Tính $\psi_1(z) = \frac{2 \sin 2t}{z^4 - 2(\cos 2t)z^2 + 1}$

3. Tính các tích phân lặp $\widetilde{X}^{(n)}$ được xác định bởi $\left(\psi_1 y_\infty^2; \frac{1}{y_\infty^2} \right)$ ứng với

$$n = 0, 1, \dots, 2N$$

4. Tính các số hạng:

$$a_n = -2 \sum_{k=0}^n \widetilde{X}^{(2k)}(1) \widetilde{X}^{(2(1-k)-1)}(1)$$

ứng với $n = 0, 1, \dots, N$ và tính $\lambda_\infty = \frac{1}{4} \cot 2t$.

5. Để tìm κ mong muốn, giải phương trình đa thức $\sum_{n=0}^N a_n (\lambda - \lambda_\infty)^n = \kappa$ tìm được

$\lambda - \lambda_\infty$ và sau đó cộng λ_∞ vào kết quả để thu được λ .

Khi đó ánh xạ f (phụ thuộc t, λ) tìm được sẽ cho ảnh có độ cong các cạnh bên phải và trái xấp xỉ với độ cong κ mong muốn.

Chương 2: TƯƠNG ĐƯƠNG BẢO GIÁC CỦA CÁC MIỀN LIÊN THÔNG HỮU HẠN

Mở đầu trong mục 2.1 chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về giải tích phức trên miền liên thông hữu hạn.

Mục 2.2 trình bày kết quả chính là mọi miền n -liên không suy biến tương đương với miền n -Jordan chỉnh hình (định lý 2.2.1) và một công thức nghiệm cho bài toán Dirichlet trên một miền Jordan chỉnh hình (định lý 2.2.5).

Mục 2.3 chỉ ra một tương đương bảo giác trên hai miền Jordan liên thông hữu hạn có thể xác định một tương ứng giữa các thành phần biên của chúng. Nội dung chính của mục này là định lý 2.3.4.

Mục 2.4 trình bày sự hội tụ của lớp hàm đơn điệp. Các kết quả chính của mục này là định lý 2.4.8, định lý 2.4.11 phục vụ cho chứng minh ở mục 2.7.

Mục 2.5 trình bày tương đương bảo giác của một hình vành khăn với vết rạch là cung tròn. Kết quả chính của mục này là định lý 2.5.1. Định lý chỉ ra một miền n -liên không suy biến trong $\mathbb{C}$ với hai thành phần liên thông trên biên A, B tương đương bảo giác với một hình vành khăn với vết rạch là cung tròn mà có đường tròn ngoài và đường tròn trong tương ứng với hai thành phần A và B .

Mục 2.6 trình bày một tương đương bảo giác của một miền n -liên không suy biến với một đĩa có vết rạch là cung tròn. Kết quả chính của mục này là định lý 2.6.2.

Mục 2.7 chỉ ra một miền liên thông hữu hạn không suy biến với A là thành phần liên thông trên biên thì tương đương bảo giác với một miền có biên là hữu hạn cung tròn trong đó A được biến thành đường tròn đơn vị. Nội dung chính của mục này là bổ đề 2.7.8 và định lý 2.7.9.

2.1. Giải tích trên miền liên thông hữu hạn

Một miền G trong $\mathbb{C}$ gọi là n -liên nếu $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ có $n+1$ thành phần liên thông. Do đó miền 0-liên là miền đơn liên.

Một miền G gọi là miền n -liên không suy biến nếu nó là miền n -liên và không có thành phần liên thông nào của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ là tập gồm một điểm.

Lưu ý rằng nếu G là miền tùy ý trong $\mathbb{C}_\infty$ và K là thành phần liên thông bất kỳ trong $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ không chứa ∞ thì K phải là tập con compact của $\mathbb{C}$. Thật ra những thành phần liên thông này của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ là các thành phần liên thông bị chặn của $\mathbb{C} \setminus G$.

Cho G là một miền n -liên trong $\mathbb{C}$ và $K_1, \dots, K_n$ là các thành phần liên thông bị chặn của $\mathbb{C} \setminus G$, K_0 là thành phần của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ chứa ∞ . Lưu ý rằng với $1 \leq j \leq n$ thì $G \cup K_j$ là miền $(n-1)$ -liên.

Nếu E là tập con compact của G thì theo mệnh đề 0.1.5 tồn tại hệ Jordan định hướng dương $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ trong G có các tính chất sau:

$$\begin{aligned} (i) \quad & E \subseteq \text{ins} \Gamma \subseteq G \\ (ii) \quad & K_j \subseteq \text{ins} \gamma_j, \text{ với } 1 \leq j \leq n. \\ (iii) \quad & \text{cl}(\text{ins} \gamma_j) \cap \text{cl}(\text{ins} \gamma_k) = \emptyset, \text{ với } j \neq k. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Với $1 \leq j \leq n$ và $a \in K_j$ thì $n(\gamma_j; a) = -1$ và $n(\gamma_0; a) = 1$.

Hệ Jordan định hướng dương Γ thỏa (2.1.1) với $E = \emptyset$ được gọi là hệ đường cong sinh đôi với G .

Trong trường hợp một miền đơn liên hữu hạn điều kiện một hàm điều hòa có liên hợp có thể được đơn giản hóa rất nhiều. Thật ra, số lượng vô hạn các điều kiện trong phần (c) của định lý 0.4.2 có thể được thay thế bởi một số hữu hạn các điều kiện.

2.1.2 Định lý.

Nếu G là một miền n -liên và $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ là một họ sinh các đường cong đối với G thì một hàm điều hòa $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ có liên hợp điều hòa khi và chỉ khi

$$\int_{\gamma_j} (u_x dy - u_y dx) = 0 \text{ với } 1 \leq j \leq n.$$

Chứng minh.

Từ định lý 0.4.2, ta chỉ cần giả sử $\int_{\gamma_j} f = 0$ với $1 \leq j \leq n$ trong đó $f = \partial u$ và chứng minh f có một nguyên hàm. Cố định điểm $a_j \in K_j$ với $1 \leq j \leq n$. Nếu γ là đường cong đóng khả trường trong G , đặt $m_j = n(\gamma; a_j)$. Suy ra hệ các đường cong $\{\gamma, -m_1\gamma_1, \dots, -m_n\gamma_n\}$ đồng luân với 0 trong G . Theo định lý Cauchy:

$$0 = \int_{\gamma} f - \sum m_j \int_{\gamma_j} f.$$

Từ giả thiết suy ra $\int_{\gamma} f = 0$. Vì vậy f có một nguyên hàm. $\square$

Cho G là một miền n -liên và $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ là một họ sinh các đường cong trong G . Với hàm điều hòa $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ với liên hợp vi phân $*du = u_x dy - u_y dx$, các số $c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j} *du$ với $1 \leq j \leq n$ được gọi là các chu kỳ của u . Lưu ý rằng các chu kỳ của u là các số thực vì u nhận giá trị thực. Vì vậy, ta có thể phát biểu lại định lý 2.1.2 như sau:

Một hàm điều hoà u nhận giá trị thực trên G có liên hợp điều hoà khi và chỉ khi tất cả các chu kỳ của nó bằng 0.

2.1.3 Định lý

Cho G là một miền n -liên với $K_1, \dots, K_n$ là các thành phần liên thông bị chặn của $\mathbb{C} \setminus G$. Với $1 \leq j \leq n$ lấy $a_j \in K_j$. Nếu u là một hàm điều hoà nhận giá trị thực trên G và $c_1, \dots, c_n$ là các chu kỳ của nó thì tồn tại một hàm chỉnh hình h trên G sao cho

$$u = \operatorname{Re} h + \sum_{j=1}^n c_j \log |z - a_j|.$$

Chứng minh.

Xét hàm điều hoà $U = u - \sum_j c_j \log |z - a_j|$.

Ta có $l(z) = \log|z|$ là hàm điều hòa trên $\mathbb{C}_0 \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$ và $l_x - il_y = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$. Do đó với

mọi đường cong khả trường γ không qua 0 thì

$$\int_{\gamma} (l_x dy - l_y dx) = -i \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi n(\gamma; 0).$$

Vì vậy nếu $L_k(z) = \log|z - a_k|$ thì $\int_{\gamma_j} (L_{kx} dy - L_{ky} dx) = \begin{cases} 2\pi & \text{nếu } k = j \\ 0 & \text{nếu } k \neq j \end{cases}$. Từ cách chọn

c_j suy ra $\int_{\gamma_j} (U_x dy - U_y dx) = 0$ với $1 \leq j \leq n$. Theo định lý 2.1.2 tồn tại một hàm chỉnh

hình h trên G sao cho $U = \operatorname{Re} h$.

Dưới đây là một số hệ quả thú vị của định lý trên.

2.1.4 Hệ quả

Nếu u là một hàm điều hòa nhận giá trị thực trong đĩa thủng $B_0(a; R) \equiv B(a; R) \setminus \{a\}$ thì tồn tại một hằng số thực b và c sao cho

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta = 2\pi b \log r + c$$

Chứng minh.

Theo định lý 2.1.3, tồn tại số thực b và hàm chỉnh hình h trên $B_0(a; R)$ sao cho

$u = \operatorname{Re} h + b \log|z - a|$. Do đó

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta = b \int_{-\pi}^{\pi} \log|re^{i\theta}| d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} h(a + re^{i\theta}) d\theta = 2\pi b \log r + \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} h(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Nhận thấy rằng $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} h(a + re^{i\theta}) d\theta$ là phần ảo của tích phân $\int_{\gamma} h(z) \frac{dz}{z - a}$ trong đó

$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$. Vì vậy $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} h(a + re^{i\theta}) d\theta$ là hằng số. $\square$

2.1.5 Hệ quả.

Nếu u là hàm điều hòa bị chặn trong đĩa thủng $B_0(a; R)$ thì u có mở rộng điều hòa đến $B(a; R)$.

Chứng minh.

Ta có thể giả sử u nhận giá trị thực. Giả sử $|u| \leq M$ trên $B_0(a; R)$. Theo định lý 2.1.3 tồn tại hằng số thực b và hàm chỉnh hình h trên $B_0(a; R)$ sao cho

$u = b \log |z - a| + \operatorname{Re} h(z)$. Đồng thời theo hệ quả 2.1.4, tồn tại hằng số thực c sao cho với $r < R$ thì

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta = 2\pi b \log r + c.$$

Do $|u| \leq M$ nên $|2\pi b \log r + c| \leq 2\pi M$ với $r < R$. Điều này là không thể xảy ra khi $b \neq 0$. Vậy $b = 0$.

Vì vậy $u = \operatorname{Re} h$ trong $B_0(a; R)$. Điều này suy ra h là hàm chỉnh hình trên $B_0(a; R)$ và phần thực của h bị chặn. Xét $g = e^h$ thì g bị chặn trong $B_0(a; R)$ vì $|g| = e^{\operatorname{Re} h}$. Vì vậy a là điểm kì dị bỏ được đối với g . Suy ra a là điểm kì dị bỏ được đối với $g' = hg$ nên cũng là điểm kì dị bỏ được đối với $h = \frac{g'}{g}$. Từ đây ta được hàm điều hòa mở rộng của u . $\square$

2.1.6 Định nghĩa

Nếu không có thành phần liên thông nào trong số $K_0, K_1, \dots, K_n$ của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ là một điểm thì cơ sở điều hòa đối với G là họ các hàm liên tục $w_1, w_2, \dots, w_n$ trên $cl_\infty G$, điều hòa trên G và thỏa $w_j|_{\partial K_j} \equiv 1$ và $w_j|_{\partial K_i} \equiv 0$ với $i \neq j$.

Lưu ý rằng những hàm $w_1, w_2, \dots, w_n$ tồn tại vì với giả thiết trên ta có thể giải bài toán Dirichlet đối với G . Hàm w_0 bằng 1 trên ∂K_0 và bằng 0 trên biên của các thành phần liên thông bị chặn không đề cập ở trên vì hàm này có thể được định nghĩa thông qua các hàm $w_1, w_2, \dots, w_n$ theo công thức $w_0 = 1 - \sum_{j=1}^n w_j$.

Tiếp theo là bổ đề sẽ được sử dụng trong chứng minh một số kết quả của ánh xạ bảo giác đối với miền liên thông hữu hạn.

2.1.7 Mệnh đề

Nếu G là một miền n -liên không suy biến, $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ là một họ đường cong sinh đối với G và với $1 \leq j, k \leq n$ đặt $c_{jk} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j} *dw_k$ trong đó $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ là cơ sở điều hòa đối với G thì ma trận $[c_{jk}]$ là ma trận khả nghịch.

Chứng minh.

Ta chỉ cần chỉ ra ma trận này là một phép biến đổi tuyến tính đơn ánh từ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Giả sử tồn tại các số thực $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sao cho

$$\begin{cases} c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + \dots + c_{1n}\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ c_{n1}\lambda_1 + c_{n2}\lambda_2 + \dots + c_{nn}\lambda_n = 0 \end{cases}$$

Ta sẽ chỉ ra $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Đặt $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k$ thì u liên tục trên $cl_\infty G$, điều hòa trên G và $u \equiv \lambda_k$ trên ∂K_k với

$1 \leq k \leq n$ và $u \equiv 0$ trên ∂K_0 . Hơn nữa với $1 \leq j \leq n$ thì

$$\int_{\gamma_j} *du = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{\gamma_j} *dw_k = \sum_{k=1}^n c_{jk} \lambda_k = 0$$

Vì vậy theo định lý 2.1.2 suy ra tồn tại hàm chỉnh hình f trên G sao cho $u = \operatorname{Re} f$.

Đặt $\lambda_0 = 0$ và lấy $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ sao cho $\operatorname{Re} \zeta_0 \neq \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$. Với $0 \leq k \leq n$ lấy hằng số

$\varepsilon_k > 0$ sao cho nếu $\Omega_k = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \zeta - \lambda_k| < \varepsilon_k\}$ thì $\zeta_0 \notin \cup_{k=0}^n cl \Omega_k$. Do $u = \operatorname{Re} f$ liên tục

trên $cl_\infty G$ vì vậy $\{z \in cl_\infty G : |u(z) - \lambda_k| < \varepsilon_k\}$ là tập con mở của $cl_\infty G$ và chứa ∂K_k . Vì

vậy nếu U_k là hợp của các K_k và thành phần liên thông của $\{z \in cl_\infty G : |u(z) - \lambda_k| < \varepsilon_k\}$

chứa ∂K_k thì U_k là tập mở trong $\mathbb{C}$ và chứa K_k . Theo mệnh đề 0.1.5 với $1 \leq k \leq n$ tồn

tại một đường cong Jordan σ_k chứa trong U_k sao cho $K_k \subseteq \text{ins } \sigma_k$ và $n(\sigma_k; z) = -1$ với mọi $z \in K_k$. Tương tự tồn tại một đường cong Jordan σ_0 trong U_0 sao cho $K_0 \subseteq \text{out } \sigma_0$ và $n(\sigma_0; z) = 1$ với mọi $z \in K_1 \cup \dots \cup K_n \cup \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_n$. Vì vậy $\sum = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ là một hệ Jordan trong G . Khi đó $\sum$ là một hệ sinh đường cong đối với G .

Ta có
$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_k} \frac{f'}{f - \zeta_0} = \sum_{k=0}^n n(f \circ \sigma_k; \zeta_0).$$

Nhưng $f \circ \sigma_k$ là một đường cong đóng khả trường nằm trong dải dọc Ω_k và ζ_0 nằm ngoài dải này. Do đó $n(f \circ \sigma_k; \zeta_0) = 0$ với $0 \leq k \leq n$. Theo nguyên lí Argument suy ra phương trình $f(z) = \zeta_0$ vô nghiệm trong $\text{ins } \sum$. Nhưng $f(U_k) \subseteq \Omega_k$ vì vậy $f(z) = \zeta_0$ vô nghiệm trong $\cup_{k=0}^n \Omega_k$. Vì vậy $\zeta_0 \notin f(G)$. Vì ζ_0 là điểm tùy ý với $\text{Re } \zeta_0 \neq \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ nên ta thu được $f(G)$ nằm trong hợp của các đường thẳng $\{\zeta : \text{Re } \zeta = \lambda_k\}$ với $k = 0, \dots, n$. Theo định lý ánh xạ mở thì f và u phải là hàm hằng. Nhưng $u = 0$ trên ∂K_0 vì vậy $u \equiv 0$. Vậy $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. $\square$

2.2. Tương đương bảo giác với một miền Jordan chỉnh hình

Định nghĩa miền Jordan chỉnh hình được trình bày trong 0.5.3. Sau đây là các kết quả chính của phần này.

2.2.1 Định lý.

Nếu G là miền n -liên không suy biến thì G tương đương bảo giác với miền n -Jordan chỉnh hình Ω . Hơn nữa Ω có thể được chọn để có biên là ∂D và $0 \notin \Omega$.

Chứng minh.

Chúng minh cần sử dụng định lý ánh xạ Riemann nhiều lần. Gọi $K_0, K_1, \dots, K_n$ là các thành phần liên thông của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ với K_0 chứa ∞ . Xét $G_0 = \mathbb{C}_\infty \setminus K_0$ thì G_0 đơn liên vì phần bù của nó trong $\mathbb{C}_\infty$, K_0 , là liên thông. Lấy $\phi_0 : G_0 \rightarrow D$ là ánh xạ Riemann và đặt $\Omega_0 = \phi_0(G)$. Vì vậy Ω_0 liên thông hữu hạn và

$$\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega_0 = (\mathbb{C}_\infty \setminus D) \cup \phi_0(K_1) \cup \dots \cup \phi_0(K_n) = K_{00} \cup K_{01} \cup \dots \cup K_{0n}. \text{ Đặt}$$

$G_1 = \mathbb{C}_\infty \setminus K_{01}$ thì G_1 cũng là miền đơn liên trong $\mathbb{C}_\infty$ chứa ∞ và miền Ω_0 . Lấy

$\phi_1 : G_1 \rightarrow D$ là ánh xạ Riemann với $\phi_1(\infty) = 0$ và đặt $\Omega_1 = \phi_1(\Omega_0)$ thì Ω_1 là miền n-liên.

Phần bù của Ω_1 có các thành phần liên thông trong $\mathbb{C}_\infty$ là

$K_{11} \equiv \mathbb{C}_\infty \setminus D, K_{10} \equiv \phi_1(K_{00}), K_{12} \equiv \phi_1(K_{02}), \dots, K_{1n} \equiv \phi_1(K_{0n})$. Lưu ý biên của Ω_1 có các thành phần liên thông là $\partial D, \phi_1(\partial D) = \phi_1(\partial K_{00}), \partial K_{12}, \dots, \partial K_{1n}$.

Vì vậy G tương đương bảo giác với miền Ω_1 nằm trong D , hai trong các thành phần liên thông trên biên của Ω_1 là các đường cong Jordan chỉnh hình, một trong chúng là đường tròn đơn vị. Tiếp tục quá trình trên ta được G tương đương bảo giác với miền n-Jordan Ω_{n-1} nằm trong D và ∂D là biên ngoài. Bây giờ lấy $a \in D \setminus cl\Omega_{n-1}$,

ánh xạ Schwarz $\phi_a = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ và đặt $\Omega = \phi_a(\Omega_{n-1}) \square$

Tiếp theo là một kết quả tương tự với công thức Green cổ điển sử dụng vi phân liên hợp và ∂ -đạo hàm. Trong phần còn lại của mục, ta giả sử G là một miền Jordan chỉnh hình với biên được định hướng $\Gamma = \{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$ trong đó γ_0 là biên ngoài của Γ .

2.2.2 Mệnh đề. Cho G là miền Jordan chỉnh hình với biên được định hướng Γ .

(a) Nếu u và v là các hàm thuộc lớp C^1 trên clG thì

$$\int_{\Gamma} (vdu - u dv) = 4i \iint_G (\bar{\partial}v \partial u - \partial u \bar{\partial}v) = 2 \iint_G (u_y v_x - u_x v_y).$$

(b) Nếu u và v là các hàm thuộc lớp C^1 trên clG và C^2 trên G thì

$$\int_{\Gamma} (v^* du - u^* dv) = 4 \iint_G (v \bar{\partial} \partial u - u \bar{\partial} \partial v).$$

Chứng minh.

(a) Sử dụng định nghĩa của du và dv , áp dụng định lý Green, ta được

$$\int_{\Gamma} (vdu - u dv) = \int_{\Gamma} [(vu_x - uv_x)dx + (vu_y - uv_y)dy] = 2 \iint_G (u_y v_x - u_x v_y).$$

Với $\partial u = \frac{1}{2}(u_x - iu_y)$, $\bar{\partial}u = \frac{1}{2}(u_x + iu_y)$, $\partial v = \frac{1}{2}(v_x - iv_y)$, $\bar{\partial}v = \frac{1}{2}(v_x + iv_y)$ nên

ta có

$$\iint_G (\bar{\partial}v \partial u - \bar{\partial}u \partial v) = -\frac{i}{2} \iint_G (u_y v_x - u_x v_y)$$

(b) Theo định nghĩa vi phân liên hợp $*du$ và $*dv$, ta có

$$\int_{\Gamma} v^* du = -2i \int_{\Gamma} v \partial u + i \int_{\Gamma} v du \quad \text{và} \quad \int_{\Gamma} u^* dv = -2i \int_{\Gamma} u \partial v + i \int_{\Gamma} u dv$$

nên

$$\int_{\Gamma} (v^* du - u^* dv) = -2i \int_{\Gamma} (v \partial u - u \partial v) + i \int_{\Gamma} (v du - u dv).$$

Áp dụng định lý Green cho tích phân đầu và phần (a) cho tích phân thứ hai ta được

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (v^* du - u^* dv) &= -2i \left[2i \iint_G [\bar{\partial}(v \partial u - u \partial v)] \right] + i(4i) \iint_G (\bar{\partial}v \partial u - \bar{\partial}u \partial v) \\ &= 4 \iint_G [\bar{\partial}v \partial u + v \bar{\partial} \partial u - \bar{\partial}u \partial v - u \bar{\partial} \partial v] - 4 \iint_G [\bar{\partial}(v \partial u - u \partial v)] = 4 \iint_G (v \bar{\partial} \partial u - u \bar{\partial} \partial v) \end{aligned}$$

2.2.3 Hệ quả.

Nếu u và v là các hàm thuộc lớp C^1 trên clG và điều hòa trên G thì

$$\int_{\Gamma} v^* du = \int_{\Gamma} u^* dv.$$

Nhắc lại rằng đối với mỗi G , luôn tồn tại một hàm Green $g(z, a)$. Nếu a được cố định thì $g_a(z) = -\log|z - a| + R_a(z)$ trong đó R_a là hàm điều hòa trên G . Bây giờ g_a là hàm điều hòa trên $G \setminus \{a\}$ và đồng nhất với 0 trên Γ . Theo hệ quả 0.5.4, g_a có thể được mở rộng đến một hàm điều hòa trong một lân cận của Γ . Do đó ta luôn giả sử rằng g_a đã được mở rộng. Vì $\log|z - a|$ cũng điều hòa trong lân cận của Γ nên R_a cũng điều hòa

trong lân cận của Γ . Đặc biệt, ta có thể nghiên cứu về tích phân của các hàm g_a và R_a cũng như các đạo hàm và vi phân liên hợp của chúng trên Γ .

Ứng dụng đầu tiên của những khái niệm này là công thức nghiệm của bài toán Dirichlet. Trước hết ta xét bổ đề sau:

2.2.4 Bổ đề.

Cho $r > 0$ sao cho $\bar{B}(a; r) \subseteq G$ và đặt $B_r = B_r(a; r)$. Nếu u là hàm C^1 trên ∂B_r và điều hòa trên G thì

$$\int_{\partial B_r} (g_a^* du - u^* dg_a) = 2\pi u(a) + \eta(r)$$

trong đó $\eta(r) \rightarrow 0$ khi $r \rightarrow 0$.

Chứng minh.

Đặt $\ell(\zeta) = \log|\zeta - a|$. Sử dụng định nghĩa của $^*d\ell$ và tham số hóa đường tròn ∂B_r bởi $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$ ta thu được $^*d\ell = d\theta$ trên ∂B_r . Do đó, theo định lý giá trị trung bình của hàm điều hòa thì

$$\int_{\partial B_r} u^* d\ell = \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta = 2\pi u(a)$$

Đồng thời tồn tại hằng số M sao cho $\left| \int_{\partial B_r} u^* dR_a \right| \leq Mr$. Vì vậy

$$\int_{\partial B_r} u^* dg_a \rightarrow -2\pi u(a) \text{ khi } r \rightarrow 0.$$

Mặt khác tồn tại các hằng số C_1, C_2 sao cho với mọi r thì

$$\left| \int_{\partial B_r} g_a^* du \right| = \left| - \int_{\partial B_r} \ell^* du + \int_{\partial B_r} R_a^* du \right| \leq C_1 r \log r + C_2 r. \quad \square$$

2.2.5 Định lý.

Nếu G là một miền Jordan chỉnh hình, Γ là biên được định hướng dương của G , h là hàm liên tục trên Γ và $\hat{h}$ là nghiệm của bài toán Dirichlet với các giá trị biên h thì $\hat{h}(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} h^* dg_z$, trong đó g_z là hàm Green đối với G với điểm kì dị tại z .

Chứng minh.

Nhận thấy phương trình trên đúng khi dãy hàm $\{h_n\}$ hội tụ đều về hàm h trên Γ . Do đó ta có thể giả sử thêm h là một hàm trơn trên Γ . Lấy $r > 0$ sao cho $\bar{B}(a; r) \subseteq G$. Đặt $G_r = G \setminus \bar{B}(a; r)$ và $\Gamma_r = \partial G_r$ với định hướng dương. Lấy $B_r = B(a; r)$ và luôn xét ∂B_r đã được định hướng dương. Đặt $u = \hat{h}$. Theo hệ quả 2.2.3 thì

$$\int_{\Gamma_r} g_a^* du = \int_{\Gamma_r} u^* dg_a$$

Do g_a đồng nhất với 0 trên Γ nên theo bổ đề 2.2.4 thì

$$\int_{\Gamma} u^* dg_a = \int_{\partial B_r} (u^* dg_a - g_a^* du) = -2\pi u(a) + \eta(r)$$

Cho $r \rightarrow 0$ ta thu được $\int_{\Gamma} h^* dg_a = -2\pi \hat{h}(a)$. $\square$

Ta lưu ý rằng chiều ngược lại của định lý 2.2.5 cũng đúng. Nếu h là hàm liên tục trên Γ thì công thức trong 2.2.5 cho ta nghiệm của bài toán Dirichlet. Do đó (2.2.5) là sự tổng quát của công thức Poisson đối với D .

Theo mệnh đề 0.4.3, công thức nghiệm của bài toán Dirichlet ở trên có thể được viết lại:

$$h(z) = \int_{\Gamma} h(w) \frac{\partial g_z}{\partial n}(w) |dw| \quad \hat{h}(z) = \int_{\Gamma} h(w) \frac{\partial g_z}{\partial n}(w) |dw|$$

2.2.6 Hệ quả.

Nếu $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ là cơ sở điều hòa đối với G thì với $0 \leq j \leq n$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j}^* dg_a = -w_j(a)$$

Chứng minh.

Lấy h như trong định lý 2.2.5 chính là hàm đặc trưng của γ_j . $\square$

2.3. Giá trị biên của tương đương bảo giác giữa các miền Jordan liên thông hữu hạn

Ta bắt đầu với kết quả sau:

Nếu G và Ω là hai miền liên thông hữu hạn và $\phi : G \rightarrow \Omega$ là một tương đương bảo giác thì ϕ xác định một sự tương ứng giữa các thành phần liên thông trên biên của hai tập hợp.

Nhắc lại 0.1.2, một ánh xạ $F \rightarrow F \cap \partial_\infty G$ xác định một song ánh giữa các thành phần liên thông của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ và các thành phần của $\partial_\infty G$. Trong phần này ta cố định miền n -liên G và $K_0, \dots, K_n$ là các thành phần liên thông của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ với ∞ trong K_0 và $C_0, \dots, C_n$ là các thành phần liên thông tương ứng trên biên. Lấy Ω là một miền n -liên khác và giả sử tồn tại một tương đương bảo giác $\phi : G \rightarrow \Omega$. Với $0 \leq j \leq n$ và $\varepsilon > 0$, lấy

$$\Phi_j(\varepsilon) = cl \left[\phi \left(\left\{ z \in G : dist(z, K_j) < \varepsilon \right\} \right) \right] = cl \left[\phi \left(\left\{ z \in G : dist(z, C_j) < \varepsilon \right\} \right) \right]$$

và đặt $\Phi_j = \bigcap_\varepsilon \Phi_j(\varepsilon)$.

Khoảng cách ở đây là mêtric trong mặt phẳng phức mở rộng, dù mêtric thông thường trong mặt phẳng có thể được dùng khi Ω bị chặn. Ta sẽ chỉ ra các tập $\Phi_0, \dots, \Phi_n$ chính là các thành phần liên thông $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ của $\partial_\infty \Omega$.

2.3.1 Bổ đề.

- (a) $\Phi_j(\varepsilon_1) \subseteq \Phi_j(\varepsilon_2)$ nếu $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.
- (b) Nếu $\{\varepsilon_k\}$ đơn điệu giảm về 0 thì $\Phi_j = \bigcap_k \Phi_j(\varepsilon_k)$.
- (c) Nếu U là tập mở chứa Φ_j thì tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $\Phi_j(\varepsilon) \subseteq U$.
- (d) Φ_j là tập con liên thông của $\partial_\infty \Omega$.

Chứng minh.

Từ định nghĩa của Φ_j , ta được (a), (b), (c).

Ta chứng minh $\Phi_j \subseteq \partial_\infty \Omega$. Giả sử U và V là các tập mở khác rỗng, rời nhau và $\Phi_j \subseteq U \cup V$. Theo phần (c) tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $\Phi_j(\varepsilon) \subseteq U \cup V$. Nhưng $\Phi_j(\varepsilon)$ là tập liên thông vì là bao đóng của tập liên thông. Điều mâu thuẫn này chứng minh xong phần (d). $\square$

2.3.2 Mệnh đề.

Các tập $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ chính là các thành phần liên thông của $\partial_\infty \Omega$.

Chứng minh.

Theo phần (d) của bổ đề 2.3.1, các tập Φ_j được chứa trong một trong các thành phần liên thông γ_i của $\partial_\infty \Omega$. Mặt khác, lí luận tương tự với ϕ^{-1} thì mỗi điểm của $\partial_\infty \Omega$ phải thuộc về một trong các tập Φ_j . Do đó các tập $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ chính là các thành phần liên thông $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ của $\partial_\infty \Omega$. $\square$

Nếu $\Phi_j = \gamma_i$ thì ta nói rằng ϕ liên kết C_j với γ_i . Để duy trì tính linh động ta cũng nói rằng ϕ liên kết K_j với γ_i . Ý tưởng ở đây là dù ϕ có thể không mở rộng như một hàm đến biên của G thì ta có thể xem ϕ là ánh xạ từ các thành phần liên thông của $\partial_\infty G$ vào các thành phần liên thông của $\partial_\infty \Omega$.

Kết quả tiếp theo là một phát biểu khác của định lý 2.2.1, chỉ ra mỗi thành phần liên thông bất kỳ thuộc $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ của có thể được liên kết với ∂D .

2.3.3 Định lý.

Nếu G là một miền n -liên không suy biến và C là thành phần liên thông bất kỳ của biên mở rộng của G , thì tồn tại một tương đương bảo giác ϕ của G vào miền n -Jordan chỉnh hình Ω sao cho biên ngoài của Ω là $\partial D, 0 \notin \Omega$, và ϕ liên kết C với ∂D .

Chứng minh.

Theo định lý 2.2.1, tồn tại ánh xạ ϕ được xây dựng để liên kết ∂K_n với ∂D .

Nếu $C = \partial K_n$ với $1 \leq j \leq n$ thì thực hiện đánh số lại ta chứng minh xong định lý.

Nếu $C = \partial K_0$ thì căn cứ vào ảnh G_1 của G qua ánh xạ Möbius $\frac{1}{z-a}$ để chọn a thích hợp. Ở đây C tương ứng với biên của thành phần liên thông thuộc phần bù của G_1 mà không chứa ∞ và áp dụng các lý luận trên. $\square$

2.3.4 Định lý.

Nếu G và Ω là hai miền liên thông hữu hạn Jordan và $\phi : G \rightarrow \Omega$ là tương đương bảo giác thì ϕ mở rộng thành phép đồng phôi của clG vào $cl\Omega$.

Chứng minh.

Sử dụng định lý 2.3.3 và đặt $C_j = \partial K_j$, ta có thể giả sử rằng ϕ liên kết đường cong biên C_j của G với đường cong biên γ_j của Ω với $0 \leq j \leq n$. Ta giả sử rằng G là miền Jordan chỉnh hình. Thật vậy, nếu chứng minh xong trường hợp này thì đối với trường hợp tổng quát chỉ cần áp dụng định lý 2.2.1 để tìm hai miền Jordan chỉnh hình G_1 và Ω_1 và tương đương bảo giác $f : G \rightarrow G_1$ và $\tau : \Omega \rightarrow \Omega_1$. Đặt $\phi : G_1 \rightarrow \Omega_1$ được định nghĩa bởi $\phi_1 = \tau \circ \phi \circ f^{-1}$. Nhận thấy rằng nếu định lý được thiết lập cho trường hợp đặc biệt với tập nguồn là miền Jordan chỉnh hình thì áp dụng định lý đảo suy ra định lý cũng đúng khi miền giá trị đang xét là miền Jordan chỉnh hình. Do đó mỗi ánh xạ f, τ và ϕ_1 cũng như các ánh xạ ngược của chúng mở rộng thành phép đồng phôi. Vì vậy, ϕ mở rộng thành phép đồng phôi.

Do đó, ta giả sử mỗi đường cong $C_0, \dots, C_n$ là đường cong Jordan chỉnh hình. Lấy

$0 < r < \text{dist}(\gamma_j, \gamma_k)$ với $j \neq k$. Lấy $0 < \varepsilon < \text{dist}(C_j, C_k)$ với $j \neq k$. Theo mệnh đề 2.3.2 và bổ đề 2.3.1 thì ε có thể chọn sao cho

$$\phi\left(\left\{z \in G : \text{dist}\left(z, C_j\right) < \varepsilon\right\}\right) \subseteq \left\{\zeta \in \Omega : \text{dist}\left(\zeta, \gamma_j\right) < r\right\}.$$

Theo hệ quả 0.6.6 thì ϕ có các giới hạn không theo phương tiếp tuyến hầu khắp nơi trên mỗi C_j .

Cổ định $j, 0 \leq j \leq n$ và lấy a_1 và a_2 là hai điểm tùy ý trên C_j mà ϕ không có giới hạn không theo phương tiếp tuyến. Do đó tồn tại các cung Jordan $\eta_i : [0, 1) \rightarrow G, i = 1, 2$ sao cho $\eta_i(t) \rightarrow a_i$ khi $t \rightarrow 1, n_1(0) \neq n_2(0)$ và $\lim_{t \rightarrow 1} \phi(\eta_i(t)) = \alpha_i$ với α_i là một điểm trong γ_j . Chú ý rằng $\alpha_1 \neq \alpha_2$ do nếu chúng bằng nhau thì giới hạn không theo phương tiếp tuyến của ϕ sẽ là giá trị chung của hầu hết các điểm trên một trong hai cung con của C_j nối giữa a_1 và a_2 (hoặc có thể xem chúng minh trong [Co', định lý 15.5.6]. Lấy η_0 là một trong hai cung trong C_j nối giữa a_1 và a_2 và lấy η_3 là cung Jordan trong G nối $\eta_2(0)$ với $\eta_1(0)$. Do đó $C = \eta_0 \eta_1 \eta_3 \eta_2^{-1}$ là đường cong Jordan trong Ω và $\text{ins } C \subseteq G$. Lấy $\lambda_i = \phi \circ \eta_i$ với $i = 1, 2, 3$ nên mỗi λ_i là cung Jordan trong Ω và $\lambda_1 \lambda_3 \lambda_2^{-1}$ là cung Jordan nối α_2 với α_1 . Nếu λ_0 là một trong hai cung con của γ_j nối α_2 với α_1 thì $\lambda_1 \lambda_3 \lambda_2^{-1} \lambda_0$ là đường cong Jordan tách khỏi $\phi(\text{ins } C)$, chọn cung λ_0 sao cho $\phi(\text{ins } C) = \text{ins } \gamma$. Vì $\text{ins } \gamma \subseteq \Omega$ và ϕ là toàn ánh nên $\phi(\text{ins } C) = \text{ins } \gamma$. Theo hệ quả 1.5.7 thì ϕ mở rộng thành phép đồng phôi của $cl(\text{ins } C)$ vào $cl(\text{ins } \gamma)$. Do đó ϕ biến η_0 đồng phôi vào λ_0 .

Bằng cách xét cung con khác của C_j nối a_1 và a_2 ta thấy rằng ϕ mở rộng thành phép đồng phôi của $G \cup C_j$ vào $\Omega \cup \gamma_j$. $\square$

Chứng minh của những kết quả tiếp theo tương tự với chứng minh ở trên nên sẽ không trình bày. Định lý sau đây là mở rộng của định lý 0.7.1.

2.3.5 Định lý.

Nếu G miền Jordan liên thông hữu hạn và $\phi : G \rightarrow \Omega$ là tương đương bảo giác thì các mệnh đề sau tương đương

- (a) ϕ có mở rộng liên tục đến bao đóng của G
- (b) Mỗi thành phần liên thông của $\partial\Omega$ là đường liên tục
- (c) $\partial\Omega$ liên thông địa phương
- (d) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ liên thông địa phương

Nhắc lại định nghĩa của điểm biên đơn 0.7.5. Định lý tiếp theo là mở rộng của định lý 0.7.8.

2.3.6 Định lý.

Cho Ω là miền liên thông hữu hạn và G là miền liên thông hữu hạn Jordan và $\phi : G \rightarrow \Omega$ là tương đương bảo giác.

- (a) Nếu w là điểm biên đơn của Ω thì ϕ có mở rộng liên tục đến $\Omega \cup \{w\}$.
- (b) Nếu R là họ các điểm biên đơn của Ω thì ϕ có mở rộng đơn ánh liên tục đến $\Omega \cup R$.

Những kết quả của định lý 2.3.5, 2.3.6 đối với tương đương bảo giác giữa những miền liên thông hữu hạn có thể được sử dụng để mở rộng các kết quả của 0.7 cho các miền đơn liên không bị chặn. Sau đây là một số kết quả mở rộng như thế và sẽ được sử dụng trong các phần sau.

Định nghĩa

Nếu G là một tập con mở của $\mathbb{C}$ và $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ là một hàm tùy ý thì với mỗi điểm $a \in \partial_\infty G$, tập giới hạn (cluster set) của f tại a được xác định bởi:

$$\text{Clu}(f; a) \equiv \bigcap \left\{ \text{cl}_\infty \left[f \left(B(a; \varepsilon) \cap G \right) \right] : \varepsilon > 0 \right\}$$

2.3.7 Mệnh đề.

Cho $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ là cung Jordan sao cho $\gamma(t) \rightarrow \infty$ khi $t \rightarrow \infty$ và $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma$.

Nếu $\tau : D \rightarrow \Omega$ là ánh xạ Riemann với $\tau(0) = \alpha$ và $\tau'(0) > 0$ thì τ mở rộng đến ánh xạ liên tục từ $cl D$ vào $\mathbb{C}_\infty$.

Chứng minh.

Xét ánh xạ Möbius $T(z) = \frac{1}{z - \alpha}$ và đặt $\sigma = T \circ \tau$. Vì vậy σ là tương đương bảo giác từ D vào $\Lambda \equiv$ phần bù trong mặt phẳng phức của cung $\lambda = T \circ \gamma$ và $\sigma(0) = \infty$. Theo [Co', định lý 14.1.11] thì $clu(\sigma, b)$ với $b \in \partial D$ đều nằm trong cung λ nên đặt $A = \left\{ z : \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\}$ thì $\sigma(A)$ là miền bị chặn bởi cung λ và đường cong Jordan $\sigma\left(\left\{ |z| = \frac{1}{2} \right\}\right)$. Theo định lý 2.3.5 thì σ có mở rộng liên tục đến $cl A$. Từ đây suy ra $\tau = \frac{1 - \alpha\sigma}{\sigma}$ có mở rộng liên tục đến $cl D$. $\square$

Những miền như Ω trong mệnh đề 2.3.7 được gọi là *miền bị rạch*. Tiếp theo là một mệnh đề về ánh xạ giữa các miền bị rạch và đĩa được sử dụng ở phần tiếp sau.

2.3.8 Mệnh đề.

Nếu Ω là miền bị rạch trong mệnh đề 2.3.7 và $g : \Omega \rightarrow D$ là tương đương bảo giác thì g có thể được mở rộng liên tục đến $\Omega \cup \{\gamma(0)\}$.

Chứng minh.

Dĩ nhiên $w_0 = \gamma(0)$ là điểm biên đơn của Ω nhưng Ω không bị chặn nên chưa thể áp dụng định lý 2.3.6. Tuy nhiên nếu $w = g^{-1}(0)$, $T(\zeta) = \frac{1}{\zeta - w}$ và $\Lambda = T(\Omega) \subseteq \mathbb{C}_\infty$ thì $h = g \circ T^{-1}$ là tương đương bảo giác của Λ vào D với $h(\infty) = 0$. Nếu $A = \left\{ z : \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\}$ và $\Lambda_1 = h^{-1}(A)$ thì Λ_1 là miền bị chặn và $T(w_0)$ là điểm biên

đơn. Áp dụng định lý 2.3.6 với Λ_1 và h suy ra g có thể được mở rộng liên tục đến $\Omega \cup \{\gamma(0)\}$. $\square$

2.4. Sự hội tụ của các hàm đơn điệu

Trong phần này chúng tôi sẽ mở rộng khái niệm hội tụ của các hàm chỉnh hình với các miền được xét là tùy ý.

2.4.1 Định nghĩa.

Nếu $\{G_n\}$ là dãy các miền chứa 0 thì ta định nghĩa *hạt nhân* của $\{G_n\}$ (ứng với 0) là thành phần liên thông tập hợp $\{z : \text{tồn tại } r > 0 \text{ sao cho } \bar{B}(z; r) \subseteq G_n \text{ với mọi số tự nhiên trừ đi hữu hạn số}\}$. Tập này chứa 0 nên khác rỗng. Nếu tập trên là rỗng thì $\{G_n\}$ không có hạt nhân. Khi $\{G_n\}$ có hạt nhân thì hạt nhân được kí hiệu là $\ker \{G_n\}$.

Ta nói rằng $\{G_n\}$ hội tụ về G nếu G là hạt nhân của mỗi dãy con của $\{G_n\}$ và kí hiệu $G_n \rightarrow G$.

Lưu ý rằng nếu $\{G_n\}$ là dãy tăng của các miền và $G = \bigcup G_n$ thì $G_n \rightarrow G$. Nếu $\{G_n\}$ được định nghĩa là $G_n = D$ khi n chẵn và là hình vuông đơn vị với các đỉnh $\pm 1, \pm i$ khi n lẻ thì $D = \ker \{G_n\}$ nhưng $\{G_n\}$ không hội tụ về D . Cũng nên lưu ý rằng điểm 0 trong định nghĩa trên không có gì đặc biệt. Nếu tồn tại một điểm chung của tất cả các miền G_n thì có thể định nghĩa hạt nhân của $\{G_n\}$ ứng với điểm này.

Ta cũng lưu ý rằng hạt nhân của $\{G_n\}$ là miền lớn nhất G chứa 0 sao cho nếu K là tập con compact của G thì tồn tại n_0 sao cho $K \subseteq G_n$ với $n \geq n_0$.

Từ định nghĩa hạt nhân ta có nhận xét sau:

2.4.2 Nhận xét.

Với mỗi $n \geq 1$, G_n là miền chứa 0 và $f_n : G_n \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm chỉnh hình với

$$f_n(0) = 0, f'_n(0) > 0 \text{ và } \Omega_n = f_n(G_n). \quad (2.4.3)$$

và $\{c_n\}$ là dãy các vô hướng phức. Khi đó:

a. Nếu $G_n \rightarrow G$ và $c_n \rightarrow c$ thì $c_n G_n \rightarrow cG$.

b. Nếu $\{G_n\}$ có hạt nhân và $c_n \rightarrow \infty$ thì $c_n G_n \rightarrow G$.

c. Nếu $\{G_n\}$ có hạt nhân và $c_n \rightarrow 0$ thì $\{c_n G_n\}$ không có hạt nhân.

Với khái niệm hạt nhân, ta có thể mở rộng khái niệm hội tụ của các hàm:

2.4.4 Định nghĩa.

Giả sử $\{G_n\}$ là dãy các miền chứa 0 và tồn tại $G = \ker \{G_n\}$. Với các hàm $f_n : G_n \rightarrow \mathbb{C}$ ta nói rằng $\{f_n\}$ hội tụ đều trên tập compact đến $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nếu với mỗi tập con compact K của G và với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số n_0 sao cho $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ với mọi $z \in K$ và mọi $n \geq n_0$. Kí hiệu $f_n \xrightarrow{uc} f$

Khi khái niệm “ $f_n \xrightarrow{uc} f$ ” được sử dụng thì các khái niệm trong định nghĩa đã được giả sử thỏa mãn.

Tiếp theo là kết quả về sự hội tụ đều trên tập compact của dãy các hàm đơn điệu

2.4.5 Mệnh đề.

Giả sử f_n thỏa 2.4.3. Nếu mỗi $f_n : G_n \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm đơn điệu và $f_n \xrightarrow{uc} f$ thì hoặc f đơn điệu hoặc f đồng nhất với 0.

2.4.6. Bổ đề.

Giả sử f_n thỏa 2.4.3. Nếu mỗi f_n là hàm đơn điệu và $f_n \xrightarrow{uc} f$ và f không là hàm hằng thì dãy các miền $\{\Omega_n\}$ có hạt nhân chứa $f(G)$.

Chứng minh.

Đặt $\Omega = f(G)$ thì Ω là miền chứa 0. Lấy K là tập con compact của Ω . Có thể viết G dưới dạng hợp của các tập mở $\{H_k\}$, trong đó $cl H_k$ là tập compact và nằm trong

H_{k+1} . Do đó $\Omega = \cup_k f(H_k)$ và vì vậy tồn tại $k \geq 1$ sao cho $K \subseteq f(H_k)$. Theo định nghĩa của hạt nhân, tồn tại n_0 sao cho $cl H_k \subseteq G_n$ với $n \geq n_0$. Do đó $K \subseteq \Omega_n$ với $n \geq n_0$. $\square$

Kết quả tiếp theo có phần chứng minh tương tự với mệnh đề 1.1.23.

2.4.7. Bổ đề.

Giả sử f_n thỏa 2.4.3. Nếu $G = \ker \{G_n\}$ tồn tại, mỗi hàm f_n đơn điệu và $f'_n(0) = 1$ với mọi n thì tồn tại một dãy con $\{f_{n_k}\}$ sao cho $G = \ker \{G_{n_k}\}$ tồn tại và $\{f_{n_k}\}$ hội tụ (uc) tới hàm đơn điệu $f : G \rightarrow \mathbb{C}$.

Chứng minh.

Lấy $R > 0$ sao cho $\bar{B}(0, R) \subseteq G$. Lấy N_0 là số nguyên thỏa $\bar{B}(0, R) \subseteq G_n$ với mọi $n \geq N_0$. Đặt $g_n(z) = \frac{z}{f_n(z)}$. Như trong chứng minh mệnh đề 1.1.23 thì $|g_n(z)| \leq 4$ với $|z| \leq R$ và $|g_n(z)| \leq \frac{4|z|}{R}$ với $z \in G_n \setminus \bar{B}(0, R)$.

Viết $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ trong đó mỗi D_j là miền chứa $\bar{B}(0, R)$ và $cl D_j$ là tập compact nằm trong D_{j+1} . Lấy $N_0 < N_1 < \dots$ sao cho $cl D_j \subseteq G_n$ với $n \geq N_j$. Từ nhận xét trên thì $\{g_n : n \geq N_j\}$ bị chặn đều trên D_j . Lấy $\{g_n : n \in A_1\}$ là dãy con hội tụ đều trên các tập con compact của D_1 đến hàm chỉnh hình $h_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$. Tồn tại một dãy con $\{g_n : n \in A_2\}$ của $\{g_n : n \in A_1\}$ hội tụ trong $H(D_2)$ đến hàm h_2 . Tiếp tục quá trình thu được các tập vô hạn những số nguyên $\{A_j\}$ với $A_{j+1} \subseteq A_j$, $n \geq N$ với mọi $n \in A_j$ và sao cho $\{g_n : n \in A_j\}$ hội tụ trong $H(D_j)$ đến hàm chỉnh hình h_j xác định trên D_j . Từ tính chất tự nhiên của dãy con rõ ràng $h_j = h_{j+1}$ với mọi j . Vì vậy tồn tại hàm chỉnh hình $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ sao cho $g|_{D_j} = h_j$ với mọi j .

Lấy n_j là số nguyên thứ j trong A_j . Vì $D_k \subseteq G_{n_j}$ với $j \geq k, G = \ker \{G_{n_n}\}$. Ta cũng có $\{g_{n_j}\}$ là dãy con của mỗi $\{g_n : n \in A_k\}$ vì vậy $g_{n_j} \xrightarrow{uc} g$. Vì g_n không bao giờ triệt tiêu trên G_n và $g_n(0) = 1$ với mọi n , $g(0) = 1$ nên g không triệt tiêu trên G . Ta kiểm tra được $f_{n_j} \xrightarrow{uc} f = \frac{z}{g}$ (như trong chứng minh mệnh đề 1.1.23). $\square$

Tiếp theo là kết quả chính của phần này.

2.4.8 Định lý.

Giả sử f_n thỏa 2.4.3. Nếu $G_n \rightarrow G$, mỗi hàm f_n đơn điệu và $f_n'(0) = 1$ với mọi n thì tồn tại một hàm đơn điệu f trên G sao cho $f_n \xrightarrow{uc} f$ khi và chỉ khi $\Omega_n \rightarrow \Omega$ với Ω là miền nào đó. Khi điều này xảy ra thì $\Omega = f(G)$ và $\phi_n = f_n^{-1} \xrightarrow{uc} f^{-1}$

Chứng minh.

Trước hết giả sử $f_n \xrightarrow{uc} f$ với f là hàm đơn điệu xác định trên G . Đặt $\Omega = f(G)$. Theo bổ đề 2.4.6 thì $\Lambda \equiv \ker \{\Omega_n\}$ tồn tại và $\Omega \subseteq \Lambda$. Đặt $\phi_n = f_n^{-1} : \Omega_n \rightarrow G_n$. Theo bổ đề 2.4.7 tồn tại dãy con $\{\phi_{n_k}\}$ sao cho $\Lambda = \ker \{\Omega_{n_k}\}$ và hàm đơn điệu $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ sao cho $\phi_{n_k} \xrightarrow{uc} \phi$

Có định $\varepsilon > 0$. Vì $\phi(0) = 0$ nên tồn tại $\rho > 0$ sao cho $\bar{B}(0; \rho) \subseteq \Omega$ và

$|\phi(\zeta) - \phi(\zeta')| < \frac{\varepsilon}{2}$ khi $\zeta, \zeta' \in B(0; \rho)$. Chọn k_1 sao cho $\bar{B}(0; \rho) \subseteq \Omega_{n_k}$ khi $k \geq k_1$. Lấy

$r > 0$ sao cho $f(\bar{B}(0; r)) \subseteq B(0; \rho)$ và chọn $k \geq k_2$. Cuối cùng lấy $k_3 > k_2$ sao cho

$|\phi_{n_k}(\zeta) - \phi(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{2}$ với $k \geq k_3$ và $|\zeta| < \rho$. Do vậy với $k \geq k_3$ và $|z| < r$, ta có

$$|\phi_{n_k}(f_{n_k}(z)) - \phi(f(z))| \leq |\phi_{n_k}(f_{n_k}(z)) - \phi(f_{n_k}(z))| + |\phi(f_{n_k}(z)) - \phi(f(z))| < \varepsilon$$

Nhưng với mỗi k thì $\phi_{n_k}(f_{n_k}(z)) = z$ nên $\phi(f(z)) = z, \forall z \in B(0; r)$.

Do $f(G) = \Omega \subseteq \Lambda$ nên ta thu được $\phi(f(z)) = z, \forall z \in G$.

Áp dụng bổ đề 2.4.6 cho dãy $\{\phi_{n_k}\}$ suy ra $G \subseteq \phi(\Lambda) \subseteq \ker\{\phi_{n_k}(\Omega_{n_k})\} = \ker\{G_{n_k}\}$ bằng với G vì $G_n \rightarrow G$.

Từ đây suy ra $\Lambda = \Omega$ và $\phi = f^{-1}$.

Lưu ý lí luận trên có thể được áp dụng cho dãy con bất kỳ của $\{f_n\}$. Đó là với dãy con bất kỳ $\{f_{m_k}\}$ tồn tại dãy con $\{f_{m_{k_j}}\}$ sao cho $\Omega = \ker\{\Omega_{m_{k_j}}\}$ và $\phi_{m_{k_j}} \rightarrow \phi = f^{-1}$.

Ta chứng minh $\Omega_n \rightarrow \Omega$. Giả sử ngược lại, khi đó tồn tại dãy con $\{\Omega_{m_k}\}$ sao cho hoặc nó không có hạt nhân hoặc có hạt nhân nhưng Ω không là hạt nhân của nó. Trong trường hợp nào cũng tồn tại tập con compact K của Ω sao cho $K \setminus \Omega_n \neq \emptyset$ với vô hạn số n . Do đó tồn tại dãy con $\{\Omega_{m_k}\}$ sao cho $K \setminus \Omega_{m_k} \neq \emptyset$ với mọi k . Nhưng theo lập luận ở trên thì ta được dãy con $\{\Omega_{m_k}\}$ nhận Ω là hạt nhân (mâu thuẫn).

Ngược lại, giả sử $\Omega_n \rightarrow \Omega$ và đặt $\phi_n = f_n^{-1}$. Khi đó $\phi_n(0) = 0$ và $\phi_n'(0) = 1$. Nếu $\{f_n\}$ không hội tụ thì tồn tại số $\varepsilon > 0$, một tập con compact K của G và dãy con $\{f_{n_k}\}$ sao cho $\sup\{|f_{n_k}(z) - f_{n_j}(z)| \geq \varepsilon : z \in K\}$ với mọi $n_k \neq n_j$. Lại áp dụng bổ đề 2.4.7 suy ra tồn tại dãy con $\{\phi_{n_{k_j}}\}$ của $\{\phi_{n_k}\}$ sao cho $\Omega = \ker\{\Omega_{n_{k_j}}\}$ và $\phi_{n_{k_j}} \rightarrow \phi(uc)$, với ϕ là hàm đơn điệu trên Ω . Nhưng do $\Omega_{n_{k_j}} \rightarrow \Omega$ nên ta có thể áp dụng chứng minh trên cho

$\Omega_{n_{k_j}}$ thu được $G_{n_{k_j}} \rightarrow G = \phi(\Omega)$ và $f_{n_{k_j}} \xrightarrow{uc} f = \phi^{-1}$. Điều này mâu thuẫn với

$\sup\{|f_{n_k}(z) - f_{n_j}(z)| : z \in K\} \geq \varepsilon$ với mọi $n_k \neq n_j$. Do vậy tồn tại hàm f trên G sao

cho $f_n \xrightarrow{uc} f$. Vì $f'(0) = 1$ nên f đơn điệu. $\square$

Trước khi chứng minh định lý mở rộng của định lý 2.4.8, ta đến với một kết quả khá thú vị và cần thiết cho phần chứng minh. Mệnh đề này đúng cho mọi miền nhưng chứng minh trình bày ở đây chỉ áp dụng cho một lớp các miền nhỏ hơn. Chứng minh hoàn chỉnh của mệnh đề cần đến chứng minh của định lý đơn trị hóa. Bạn đọc có thể tham khảo [Co', Hệ quả 16.5.6].

2.4.9 Mệnh đề.

Cho G là miền trong $\mathbb{C}$ chứa 0 và không trùng với $\mathbb{C}$. Nếu f là tương đương bảo giác của G vào chính nó với $f(0) = 0$ và $f'(0) > 0$ thì $f(z) = z$ với mọi $z \in G$.

Chứng minh.

Gọi C là thành phần liên thông không tầm thường của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$.

Đặt $\Omega = \mathbb{C}_\infty \setminus C$ thì Ω là miền đơn liên chứa G .

Gọi $\phi : \Omega \rightarrow D$ là ánh xạ Riemann với $\phi(0) = 0$ và $\phi'(0) > 0$. Đặt

$G_1 = \phi(G)$, $\phi_1 = \phi|_G$ và $f_1 = \phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ thì f_1 là tương đương bảo giác của G_1 vào chính nó với $f_1(0) = 0$ và $f_1'(0) > 0$. Nếu chỉ ra được f_1 là ánh xạ đồng nhất thì ta suy ra f là ánh xạ đồng nhất. Như vậy có thể giả sử G là miền bị chặn.

Gọi M là hằng số với $|z| \leq M$ với mọi $z \in G$ và lấy $R > 0$ sao cho $\bar{B}(0; R) \subseteq G$.

Với $n \geq 1$ đặt $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ lần}}$ thì $f_n(0) = 0$ và $f_n'(0) = [f'(0)]^n$. Sử dụng ước lượng

Cauchy suy ra $0 < [f'(0)]^n = f_n'(0) \leq \frac{M}{R}$. Do đó $f'(0) \leq 1$. Lại áp dụng lập luận này với

f^{-1} suy ra $[f'(0)]^{-1} \leq 1$. Vậy $f'(0) = 1$.

Gọi a_m là hệ số khác 0 đầu tiên trong khai triển chuỗi lũy thừa của f gần 0 với $m \geq 2$. Vì vậy $f(z) = z + a_m z^m + \dots$. Bằng quy nạp thì $f_n(z) = z + n a_m z^m + \dots$. Theo ước

lượng Cauchy suy ra $n |a_m| = \frac{n |f_n^{(m)}(0)|}{n!} \leq \frac{M}{R^m}$. Điều này suy ra $a_m = 0$ (mâu thuẫn).

Vì vậy hệ số khác 0 duy nhất trong khai triển chuỗi lũy thừa đối với f là hệ số đầu tiên. Do đó $f(z) = z$. $\square$

2.4.10 Hệ quả.

Nếu G là miền không trùng với $\mathbb{C}$ và f, g là các tương đương bảo giác của G vào miền Ω sao cho với mỗi $a \in G$ mà $f(a) = g(a), f'(a) > 0$ và $g'(a) > 0$ thì $f = g$.

Kết quả tiếp theo là một dạng khác của định lý 2.4.8

2.4.11 Định lý.

Giả sử f_n thỏa 2.4.3 và $G \neq \mathbb{C}$. Nếu $G_n \rightarrow G$, mỗi hàm f_n đơn điệu và $f'_n(0) > 0$ với mọi n thì tồn tại một hàm đơn điệu f trên G sao cho $f_n \xrightarrow{uc} f$ khi và chỉ khi $\Omega_n \rightarrow \Omega$ với Ω là miền nào đó. Khi điều này xảy ra thì $f(G) = \Omega$.

Chứng minh.

Giả sử $f_n \xrightarrow{uc} f$ với f là hàm đơn điệu. Do đó $f'(0) > 0$ và $f'_n(0) \rightarrow f'(0)$. Vì vậy nếu $g_n = \frac{f_n}{f'_n(0)}$ và $g = \frac{f}{f'(0)}, g_n \xrightarrow{uc} g$ trên G .

Theo định lý 2.4.9, $g_n(G_n) \rightarrow g(G)$. Theo nhận xét 2.4.2 thì $g_n(G_n) = [f'_n(0)]^{-1} \Omega_n$ hội tụ đến $[f'(0)]^{-1} \Omega$. Do đó $\Omega_n \rightarrow \Omega$.

Bây giờ giả sử rằng $\Omega_n \rightarrow \Omega$ với miền Ω chứa 0. Để tránh đánh quá nhiều chỉ số, để ý rằng mọi tính chất đã được chứng minh cho dãy $\{f_n\}$ đều áp dụng được cho

các dãy con của nó. Đặt $g_n = \frac{f_n}{f'_n(0)}$ và giả sử $f'_n(0) \rightarrow 0$. Theo bổ đề 2.4.7 tồn tại một

dãy con $\{g_{n_k}\}$ hội tụ (uc) đến hàm đơn điệu g trên G . Theo định lý 2.4.8 thì

$[f'_{n_k}(0)]^{-1} \Omega_{n_k} = g_{n_k}(G_{n_k}) \rightarrow g(G)$. Theo kết quả trên thì $g(G) = \mathbb{C}$. Vì g đơn điệu nên suy

ra $G = \mathbb{C}$ (mâu thuẫn). Bây giờ giả sử $f'_n(0) \rightarrow \infty$. Lí luận tương tự suy ra tồn tại một dãy con và một hàm đơn điệu g trên G sao cho

$$\left[f'_{n_k}(0) \right]^{-1} \Omega_{n_k} = g_{n_k}(G_{n_k}) \rightarrow g(G).$$

Lại áp dụng kết quả trên, ta kết luận $\{g_{n_k}(G_{n_k})\}$ không có hạt nhân (mâu thuẫn).

Do đó tồn tại hằng số c và C sao cho $c \leq f'_n(0) \leq C$. Giả sử $f'_n(0) \rightarrow \alpha$ với α là vô hướng khác 0. Theo lưu ý ở trên, tồn tại dãy con $\{g_{n_k}\}$ sao cho $g_{n_k} \rightarrow g(uc)$ với g là hàm đơn điệu trên G . Do đó $f_{n_k} = f'_{n_k}(0)g_{n_k} \rightarrow \alpha g = f$. Vì $\alpha \neq 0$, f đơn điệu nên theo định lý 2.4.8 suy ra f biến G vào Ω . Lưu ý rằng $f'(0) = \alpha$.

Bây giờ giả sử rằng dãy các vô hướng $\{f'_n(0)\}$ có hai giới hạn khác nhau là α và β . Khi đó tồn tại các tương đương bảo giác g và h biến G vào Ω với $f(0) = h(0) = 0$, $f'(0) = \alpha$ và $h'(0) = \beta$. Theo hệ quả 2.4.10 thì $f = h$ và $\alpha = \beta$. Vì vậy dãy $\{f'_n(0)\}$ có điểm giới hạn duy nhất α nên $f'_n(0) \rightarrow \alpha$. Như ở trên điều này suy ra $\{f_n\}$ hội tụ (uc) đến một hàm đơn điệu f trên G thỏa $f(G) = \Omega$. $\square$

Khái niệm hạt nhân của các miền được giới thiệu bởi Carathéodory, người đã chứng minh định lý sau:

2.4.12 Hệ quả (định lý hạt nhân Carathéodory)

Nếu với mỗi $n \geq 1$, f_n là hàm đơn điệu trên D với $f_n(0) = 0, f'_n(0) > 0$ và $f_n(D) = \Omega_n$ thì $\{f_n\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của D đến hàm đơn điệu khi và chỉ khi $\{\Omega_n\}$ có hạt nhân $\Omega \neq \mathbb{C}$ và $\Omega_n \rightarrow \Omega$.

Định lý 2.4.11 sai khi $G = \mathbb{C}$. Thật vậy nếu $G_n = \mathbb{C} = \Omega_n$ với mọi n và

$f_n(z) = \frac{z}{n}$ thì $G_n \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega_n \rightarrow \mathbb{C}$ nhưng $\{f_n\}$ không hội tụ đến hàm đơn điệu.

Mục đích chủ yếu của các kết quả quan trọng trong phần này là cung cấp công thức tương đương hình học của sự hội tụ của một dãy các hàm đơn điệu. Phần lớn kiến thức trình bày trong phần này dựa trên §V.5 của Goluzin [1969].

2.5. Tương đương bảo giác với hình vành khăn với vết rạch là cung tròn

Phần này bắt đầu giới thiệu một số kết quả về các miền tương đương bảo giác với các miền liên thông hữu hạn. Những kết quả này được xem như các mở rộng của định lý ánh xạ Riemann. Chúng ta biết rằng mỗi miền đơn liên tương đương bảo giác với đĩa đơn vị hoặc toàn bộ mặt phẳng, chỉ xuất hiện khi miền ban đầu cũng là toàn bộ mặt phẳng. Hình ảnh về các miền liên thông hữu hạn phức tạp hơn nhiều nhưng vẫn có thể giải quyết được.

Trong phần này ta cố định miền n -liên G và gọi $K_0, \dots, K_n$ là các thành phần liên thông của $C_\infty \setminus G$ với ∞ nằm trong K_0 . Ta gọi miền Ω là *hình vành khăn với vết rạch là cung tròn* nếu nó có dạng sau:

$$\Omega = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : r_1 < |\zeta| < 1, \zeta \notin C_j \text{ với } 2 \leq j \leq n \right\}$$

trong đó C_j là cung tròn đóng thực sự của đường tròn, $\{|\zeta| = r_j, r_1 < r_j < 1\}$ và các cung tròn này đôi một rời nhau. Để thuận tiện ta kí hiệu $r_0 = 1$. Lưu ý rằng các hình vành khăn này nằm trong miền n -liên. Dĩ nhiên ta có thể giả sử bán kính ngoài của hình vành khăn tương ứng bằng với 1. Điều này được thực hiện cho mục đích chuẩn hóa. Để thuận tiện, ta kí hiệu C_0 là đường tròn đơn vị ∂D và C_1 là đường tròn $\{z : |z| = r_1\}$ và chúng được gọi là đường tròn ngoài và trong của Ω . Sau đây là kết quả chính của phần này.

2.5.1 Định lý.

Nếu G là miền n -liên không suy biến trong $\mathbb{C}$, A và B là hai thành phần liên thông của $\partial_\infty G$ và $a \in G$ thì tồn tại duy nhất hình vành khăn với vết rạch là cung tròn Ω và tương đương bảo giác $\phi : G \rightarrow \Omega$ sao cho ϕ liên kết A với đường tròn ngoài và liên kết B với đường tròn trong đồng thời $\phi'(a) > 0$.

Sự duy nhất của hình vành khăn được suy ra từ bổ đề 2.5.2 và chứng minh của bổ đề này cũng góp phần chứng minh sự tồn tại.

Lưu ý nếu Ω và Λ là hai hình vành khăn với vết rạch là cung tròn và $f: \Omega \rightarrow \Lambda$ là tương đương bảo giác sao cho f liên kết đường tròn ngoài của Ω với đường tròn ngoài của Λ thì f mở rộng liên tục đến đường tròn ngoài của Ω và biến nó thành đường tròn ngoài của Λ . Ta cũng có mệnh đề tương ứng với đường tròn trong.

2.5.2 Bổ đề.

Nếu Ω và Λ là hai hình vành khăn với vết rạch là cung tròn và $f: \Omega \rightarrow \Lambda$ là tương đương bảo giác sao cho f liên kết đường tròn ngoài và đường tròn trong của Ω tương ứng với đường tròn ngoài và trong của Λ thì tồn tại số phức α với $|\alpha| = 1$ sao cho $\Lambda = \alpha\Omega$ và $f(z) = \alpha z$ với mọi $z \in \Omega$.

Chứng minh .

Gọi G là miền n-Jordan chỉnh hình sao cho tồn tại tương đương bảo giác $\phi: G \rightarrow \Omega$. Ta có thể giả sử $G \subseteq D$, biên ngoài của G là ∂D và ϕ liên kết ∂D với $\partial \Omega$. Gọi $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ là các đường con Jordan còn lại trong biên của G và đặt $\gamma_0 = \partial D$. Đánh số các đường cong này để ϕ liên kết γ_1 với đường tròn trong của Ω . Gọi $w_1, \dots, w_n$ là cơ sở điều hòa đối với G . Lưu ý rằng mỗi w_k mở rộng đến một hàm điều hòa trong lân cận của $cl G$.

Theo chú ý ở phần trước định lý 2.5.1, gọi $\Lambda = \left\{ \zeta : \rho_1 < |\zeta| < 1, \zeta \notin \bigcup_{j=2}^n D_j \right\}$ trong đó D_j là cung con thực sự của đường tròn $\{\zeta : |\zeta| = \rho_j\}$. Gọi D_1 và D_0 là các đường tròn trong và ngoài của Λ . Gọi $\psi: G \rightarrow \Lambda$ là tương đương bảo giác $\psi = f \circ \phi$. Suy ra ϕ và ψ mở rộng liên tục đến $cl G$ (2.3.5).

Vì ϕ không triệt tiêu trên G , $u = \log|\phi|$ là hàm liên tục trên $cl G$, điều hòa trên G . Vì dáng điệu của hàm ϕ trên ∂G nên u là hàm hằng trên mỗi thành phần liên

thông của ∂G , $u \equiv \lambda_j$ trên γ_j . Do đó $u - \sum_1^n \lambda_k w_k$ là hàm điều hòa và triệt tiêu trên

$\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Nhưng $u \equiv 0$ trên $\gamma_0 = \partial D$ và vì vậy $u - \sum_1^n \lambda_k w_k \equiv 0$ trên ∂G . Vì vậy

$u - \sum_1^n \lambda_k w_k \equiv 0$. Định nghĩa c_{jk} như trong mệnh đề 2.1.7 ta được

$$\sum_{k=1}^n c_{jk} \lambda_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \lambda_k \int_{\gamma_j}^* dw_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j}^* du = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_j} \partial u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{\phi'}{\phi} = n(\phi(\gamma_j); 0) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } j = 1 \\ 0 & \text{nếu } 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

Lí luận tương tự với ψ thì $\log|\psi| = \sum_1^n \eta_k w_k$ và $\sum_{k=1}^n c_{jk} \eta_k = \sum_{k=1}^n c_{jk} \lambda_k$ với $1 \leq j \leq n$. Nhưng

theo mệnh đề 2.1.7, ma trận $[c_{jk}]$ khả nghịch vì vậy $\eta_j = \lambda_j$ với $1 \leq j \leq n$. Do đó

$\log|\phi| = \log|\psi|$. Vì vậy $|\phi| = |\psi|$ trên G và tồn tại hằng số α với $|\alpha| = 1$ sao cho $\psi = \alpha\phi$.

Do vậy $\Lambda = \alpha\Omega$ và $f(\phi(z)) = \alpha\phi(z)$ với mọi $z \in G$. $\square$

Chứng minh định lý 2.5.1.

Theo định lý 2.3.3, ta có thể giả sử G là miền n -Jordan chỉnh hình sao cho thành phần liên thông A của ∂G là $\gamma_0 = \partial D$, biên ngoài của G . Thành phần liên thông B của ∂G là một đường cong khác. Gọi b là điểm nằm ở phần bên trong đường cong này thì $b \notin G$. Nếu T là ánh xạ Möbius biến D vào D và $T(b) = 0$ thì thay G bằng $T(G)$ ta có thể giả sử 0 thuộc về phần bên trong của B . Kí hiệu đường cong biên B bởi γ_1 và gọi $\gamma_2, \dots, \gamma_n$ là các đường cong biên còn lại. Vì vậy

$n(\gamma_1, 0) = -1, n(\gamma_0, 0) = 1$ và $n(\gamma_j, 0) = 0$ với $2 \leq j \leq n$. Với $1 \leq j, k \leq n$ gọi

$$c_{jk} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j}^* dw_k$$

Theo mệnh đề 2.1.7 thì ma trận $[c_{jk}]$ khả nghịch.

Theo hệ quả 0.5.5 thì tồn tại miền Jordan chỉnh hình W chứa $\text{cl } G$ sao cho mỗi hàm điều hòa $w_k, 1 \leq k \leq n$ có mở rộng đến một hàm điều hòa trong W (cũng kí hiệu sự

mở rộng này là w_k). Lấy $\alpha_1 = 0$ và các điểm $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ trong phần bên trong của $\gamma_2, \dots, \gamma_n$ sao cho chúng nằm trong phần bù của $cl W$.

Vì ma trận $[c_{jk}]$ khả nghịch nên tồn tại duy nhất các số thực $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sao cho

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n c_{1k} \lambda_k = -1 \\ \sum_{k=1}^n c_{jk} \lambda_k = 0 \quad \text{ khi } 2 \leq j \leq n \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Lấy u là hàm điều hòa trên W cho bởi $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k$

Theo định lý 2.1.3 tồn tại hàm chỉnh hình h trên W sao cho

$$u(z) = \operatorname{Re} h(z) + \sum_{k=1}^n c_k \log |z - \alpha_k|$$

Trong đó $c_1, \dots, c_n$ là các chu kỳ của u . Chúng ta sẽ tính các chu kỳ này.

$$\text{Với } 1 \leq j \leq n \text{ thì } c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j}^* du = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j}^* dw_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k c_{jk} = \begin{cases} -1 & \text{ khi } j = 1 \\ 0 & \text{ khi } 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

Do đó $u = \operatorname{Re} h - \log |z|$.

Đặt $\phi = \frac{e^h}{z}$ thì ϕ là hàm chỉnh hình và không triệt tiêu trên W . Lưu ý rằng

$$|\phi| = \frac{e^{\operatorname{Re} h}}{|z|} = \exp u. \text{ Do đó, } |\phi| \text{ là hằng số trên mỗi đường cong biên của } G \text{ là } \gamma_1, \dots, \gamma_n.$$

Thật vậy, trên γ_j thì $|\phi| \equiv r_j \equiv e^{\lambda_j}$. Ta đi kiểm tra ϕ chính là tương đương bảo giác cần tìm.

Với bất kỳ số phức ζ , gọi $N(\zeta)$ là số các nghiệm nằm trong miền G , đếm cả bội, của phương trình $\phi(z) = \zeta$. Từ nguyên lý Argument, suy ra

$$N(\zeta) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{\phi}{\phi - \zeta} = \sum_{j=0}^n n(\phi(\gamma_j); \zeta) \quad (2.5.4)$$

Do $\phi(\gamma_j)$ là đường cong đóng (có thể không là đường cong Jordan) và vì $|\phi| = r_j$ trên γ_j nên đường cong đóng này phải nằm trong đường tròn $A_j = \{\zeta : |\zeta| = r_j\}$.

Do đó $n(\phi(\gamma_j); \zeta) = 0$ với $|\zeta| > r_j$ và $n(\phi(\gamma_j); \zeta) = n(\phi(\gamma_j); 0)$ với $|\zeta| < r_j$. Theo mệnh đề

0.4.3 ta thu được với $0 \leq j \leq n$ và $|\zeta| \neq r_j$ thì

$$n(\phi(\gamma_j); 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{\phi'}{\phi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \left(\frac{1}{z} + h' \right) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_j} \partial u = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j} *du.$$

Với $1 \leq j \leq n$ thì

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j} *du = c_j$$

Với $j = 0$, trước tiên nhận thấy ∂u là hàm chỉnh hình trên W sao cho

$$n(\phi(\gamma_0); 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} \partial u = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_j} \partial u = - \sum_{j=1}^n c_j = 1$$

Vì vậy, ta thu được

$$n(\phi(\gamma_0); 0) = \begin{cases} 1 & \text{khi } j = 0 \\ -1 & \text{khi } j = 1 \\ 0 & \text{khi } 2 \leq j \leq n \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Thay vào (2.5.4) suy ra nếu $|\zeta| \neq r_0 (=1), r_1, \dots, r_n$ thì $N(\zeta) = n(\phi(\gamma_0); \zeta) + n(\phi(\gamma_1); \zeta)$ và vì vậy khi xét tất cả các trường hợp (để lại một trường hợp) ta thu được

$$N(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{khi } |\zeta| > 1, |\zeta| > r_1 \\ 0 & \text{khi } |\zeta| < 1, |\zeta| < r_1 \\ 1 & \text{khi } r_1 < |\zeta| < 1 \end{cases} \quad (2.5.6)$$

Trường hợp duy nhất còn lại là có $N(\zeta) = -1$ với $1 < |\zeta| < r_1$. Điều này là vô lý vì

phương trình $\phi(z) = \zeta$ không thể có -1 nghiệm $N(\zeta)$ là số nghiệm trong G . Do đó

$r_1 \leq 1$. Nhưng $\phi(G)$ là mở nên $\phi(z) = \zeta$ phải có các nghiệm nào đó. Do vậy ta có

$r_1 < 1$.

Phương trình 2.5.6 cũng chỉ ra ϕ là ánh xạ đơn ánh của G vào ảnh của nó và

$\phi(G) \subseteq R \equiv \{\zeta : r_1 < |\zeta| < 1\}$. Đặt $C_j = \phi(\gamma_j) \subseteq A_j$. Cũng do 2.5.6 thì $N(\zeta) = 1$ với $\zeta \in R$ và $|\zeta| \neq r_j$ ($2 \leq j \leq n$). Vì vậy $\phi(G) \supseteq \{\zeta \in R : |\zeta| \neq r_2, \dots, r_n\}$. Bởi vì ϕ là phép đồng phôi của G vào $\phi(G)$ nên $\partial\phi(G) = \phi(\partial G) = \bigcup_{j=2}^n C_j \cup \{\zeta : |\zeta| = 1 \text{ hay } |\zeta| = r_1\}$. Từ đây suy ra hai điều.

Thứ nhất là với $2 \leq j \leq n$ thì $r_1 < r_j < 1$.

Thứ hai là $\phi(G) = \Omega \equiv R \setminus \bigcup_{j=2}^n C_j$.

Bây giờ $\phi(G)$ và do đó Ω là các tập liên thông và mỗi C_j là cung đóng nằm hẳn trong đường tròn A_j . Do đó Ω là hình vành khăn với vết rạch là cung tròn.

Còn về $\phi'(0)$ thì như thế nào? Nó có thể không là số dương. Tuy nhiên bằng cách thay thế ϕ bởi $e^{i\theta}\phi$ với θ thích hợp và thay Ω bởi $e^{i\theta}\Omega$ thì tính chất này được đảm bảo.

Từ bổ đề 2.5.2, ta suy ra tính duy nhất của hình vành khăn với vết rạch là cung tròn Ω và tương đương bảo giác ϕ . $\square$

Điều gì sẽ xảy ra nếu các thành phần liên thông của $C_\infty \setminus G$ là các tập chỉ có một điểm. Giả sử $C_\infty \setminus G$ có $n+1$ thành phần liên thông không tầm thường $K_0, \dots, K_n$ và m thành phần liên thông $a_1, \dots, a_m$ là các tập gồm một điểm. Bằng cách áp dụng phép biến đổi Möbius, ta có thể giả sử $\infty \in K_0$. Gọi $H = G \cup \{a_1, \dots, a_m\}$. Theo định lý 2.5.1 tồn tại tương đương bảo giác $\phi : H \rightarrow \Omega$ đối với hình vành khăn với vết rạch là cung tròn. Đặt $\alpha_i = \phi(a_i)$. Từ đây, ta có kết quả sau:

Định lý 2.5.7.

Nếu $n \geq 1$ và G là miền $(m+n)$ -liên với chỉ $(n+1)$ trong các thành phần phần liên thông của phần bù của nó trong $\mathbb{C}_\infty$ là không tầm thường thì G tương đương bảo giác với hình vành khăn với vết rạch là cung tròn bỏ đi m điểm.

Định lý trên có dạng thú vị trong trường hợp $n = 1$ và được phát biểu trong định lý sau:

Định lý 2.5.8.

Nếu G là miền 1-liên trong $\mathbb{C}$ thì ta có các mệnh đề sau:

- Nếu mỗi thành phần liên thông của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ là một điểm thì G tương đương bảo giác mặt phẳng thủng $\mathbb{C}_0$.*
- Nếu chỉ có duy nhất một thành phần liên thông của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ là một điểm thì G tương đương bảo giác với $\{z : 1 < |z| < \infty\}$*
- Nếu không có thành phần liên thông nào của $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ là một điểm thì tồn tại một số hữu hạn r sao cho G tương đương bảo giác với $\{z : 1 < |z| < r\}$*

Nếu $A_r \equiv \{z : 1 < |z| < r\}$ với $1 < r \leq \infty$ thì A_{r_1} và A_{r_2} tương đương bảo giác khi và chỉ khi $r_1 = r_2$.

Chứng minh.

Ta chứng minh được a,b,c và từ tính duy nhất trong định lý 2.5.1 suy ra A_{r_1}, A_{r_2} tương đương bảo giác khi và chỉ khi $r_1 = r_2$. $\square$

2.6. Tương đương bảo giác với đĩa bị rạch bởi cung tròn

Trong phần này, ta sẽ xét họ các miền n -liên chính tắc khác để hoàn chỉnh mô hình tập tất cả các miền n -liên.

2.6.1. Định nghĩa.

Một đĩa bị rạch bởi cung tròn là miền Ω có dạng

$$\Omega = D \setminus \bigcup_{j=1}^n C_j$$

trong đó C_j với $1 \leq j \leq n$ là các cung đóng nằm hẳn trong đường tròn

$$|z| = r_j, 0 < r_j < 1.$$

Lưu ý theo định nghĩa thì đĩa bị rạch bởi cung tròn chứa 0. Điểm 0 sẽ được sử dụng để trình bày tính chất duy nhất trong định lý 2.6.2 sau đây.

2.6.2 Định lý.

Nếu G là miền n -liên không suy biến, $a \in G$ và A là thành phần liên thông tùy ý của ∂G thì tồn tại duy nhất đĩa bị rạch bởi cung tròn Ω và một tương đương bảo giác $\phi : G \rightarrow \Omega$ sao cho ϕ liên kết A với ∂D , $\phi(a) = 0$ và $\phi'(a) > 0$.

Như trong phần trước, chúng ta sẽ chứng minh bổ đề 2.6.3 và suy ra tính duy nhất của định lý đồng thời góp phần chứng minh sự tồn tại.

2.6.3 Bổ đề.

Nếu Ω và Λ là các đĩa bị rạch bởi cung tròn và $f : G \rightarrow \Lambda$ là tương đương bảo giác sao cho $f(0) = 0$ và $f(\partial D) = \partial D$ thì tồn tại số phức α với $|\alpha| = 1$ sao cho $\Lambda = \alpha\Omega$ và $f(z) = \alpha z$ với mọi $z \in \Omega$.

Chứng minh.

Một số chi tiết của chứng minh sẽ được lược bỏ vì tương tự với chứng minh bổ đề 2.5.2. Gọi G là miền Jordan chỉnh hình với biên ngoài $\gamma_0 = \partial D$ sao cho tồn tại tương đương bảo giác $\phi : G \rightarrow \Omega$ và $\phi(\partial D) = \partial D$. Lấy $a \in G$ sao cho $\phi(a) = 0$. Kí hiệu các đường cong biên còn lại là $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Đặt $u = \log|\phi|$ thì u là hàm điều hòa âm trên $G \setminus \{a\}$ và $u \equiv \rho_j$ trong đó $e^{\rho_j} = r_j$ với $0 \leq j \leq n$. Đồng thời $\phi = (z - a)h$ trong đó h là hàm chỉnh hình không bao giờ triệt tiêu trên G . Vì vậy $u = \log|z - a| + \log|h|$ và $\log|h|$ là hàm điều hòa trên G . Nếu

$w_1, \dots, w_n$ là cơ sở điều hòa đối với G , $\left[u - \sum_j \rho_j w_j \right] - \log|z - a|$ là hàm điều hòa trên G và $u - \sum_j \rho_j w_j$ triệt tiêu trên ∂G . Do đó

$$u(z) = -g(z, a) + \sum_{j=1}^n \rho_j w_j(z)$$

trong đó $g(z, a) = g_a(z)$ là hàm Green đối với G với điểm kỳ dị tại a . Theo hệ quả 2.2.6 thì

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j} *du = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j} *dg_a + \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{2\pi} \int_{\gamma_j} *dw_k = w_j(a) + \sum_{k=1}^n c_{jk} \rho_k$$

trong đó c_{jk} là một trong các chu kỳ của w_k . Mặt khác

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j} *du = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_j} \partial u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{\phi'}{\phi} = 0$$

với $1 \leq j \leq n$. Vì vậy $\rho_1, \dots, \rho_n$ là các nghiệm duy nhất của các phương trình

$$\sum_{k=1}^n c_{jk} \rho_k = -w_j(a) \quad (2.6.4)$$

Lí luận như trong chứng minh bổ đề 2.5.2 nếu $\psi = f \circ \phi$ thì $|\phi| = |\psi|$. Vì vậy $\psi = \alpha \phi$ với α là vô hướng thỏa $|\alpha| = 1$.

Chứng minh định lý 2.6.2.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử G là miền Jordan chỉnh hình với biên ngoài $A = \gamma_0 = \partial D$. Gọi $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ là các đường cong biên còn lại. Gọi

$g_a = -\log|z - a| + R_a$ là hàm Green đối với G và $w_1, \dots, w_n$ là cơ sở điều hòa đối với G .

Nếu $\{c_{jk}\}$ là các chu kỳ của cơ sở điều hòa thì gọi $\rho_1, \dots, \rho_n$ là các vô hướng duy nhất

thỏa 2.6.4. Đặt $u = -g_a + \sum_k \rho_k w_k$ và $v = u - \log|z - a|$. Khi đó v là hàm điều hòa trên

G và với $1 \leq j \leq n$ thì

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j}^* dv &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j}^* d \log |z-a| - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j}^* dg_a + \sum_{k=1}^n c_{jk} \rho_k \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j} du = -1 \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j}^* d \log |z-a| = n(\gamma_j, a) = 0\end{aligned}$$

Vì vậy tồn tại hàm chỉnh hình h trên G sao cho $v = \operatorname{Re} h$. Hơn nữa có thể chọn h sao cho $h(a)$ là số thực. Vì vậy $u = \log |z-a| + \operatorname{Re} h$.

Gọi $\phi = (z-a)e^h$ sao cho $\log |\phi| = u$. Suy ra $|\phi| = r_0 \equiv 1$ trên γ_0 và $|\phi| = r_j \equiv e^{\rho_j}$ trên ρ_j với $1 \leq j \leq n$. Với số phức ζ bất kỳ gọi $N(\zeta)$ là số nghiệm của phương trình $\phi(z) = \zeta$, đếm kể cả bội. Theo chứng minh định lý 2.5.1 thì

$$N(\zeta) = \sum_{j=0}^n n(\phi(\gamma_j); \zeta)$$

Ta có: $\phi(\gamma_j) \subseteq \{\zeta : |\zeta| = r_j\}$ nên để tính $N(\zeta)$ ta đi tính $n(\phi(\gamma_j); 0)$. Nhưng

$$n(\phi(\gamma_j); 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{\phi'}{\phi} = n(\gamma_j; a) = \begin{cases} 1 & \text{khi } j=0 \\ 0 & \text{khi } 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Do đó nếu $|\zeta| \neq r_j$ với $0 \leq j \leq n$ thì $N(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{khi } |\zeta| > 1 \\ 1 & \text{khi } |\zeta| < 1 \end{cases}$

Từ đây suy ra $\Omega = \phi(G)$ là đĩa bị rạch bởi cung tròn và ϕ là tương đương bảo giác của G vào Ω với $\phi(a) = 0$. Vì $h(a)$ là số thực nên suy ra $\phi'(a) > 0$.

Tính duy nhất của định lý được suy ra từ bổ đề 2.6.3. $\square$

2.7. Tương đương bảo giác với miền có biên tròn

Miền Ω gọi là *miền có biên tròn* nếu biên của nó bao gồm hữu hạn các đường tròn không suy biến rời nhau. Trong phần này sẽ chỉ ra mỗi miền n -liên tương đương bảo giác với miền có biên tròn giới hạn bởi $n+1$ đường tròn. Điều này được chứng minh bằng cách sử dụng *định lý bất biến của miền* của Brouwer kết hợp với các kết

quả về tương đương bảo giác đã được chứng minh trước đây. Nhưng vấn đề đặt ra trước tiên là các miền như thế có tồn tại duy nhất hay không?

Ta gọi $\sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in E\}$ là *dao động của hàm f trên E* và kí hiệu là $\text{osc}(f, E)$. Kí hiệu $\ell(\gamma)$ là độ dài của đường cong γ .

2.7.1 Bổ đề.

Cho K là tập con compact của miền G và f là hàm chỉnh hình bị chặn trên $G \setminus K$. Giả sử với mỗi $\varepsilon > 0$ và mỗi tập con mở U chứa K mà nằm trong G tồn tại các đường cong trơn Jordan $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ trong U chứa K trong hợp của các phần bên trong của chúng sao cho

$$\sum_{j=1}^n \ell(\gamma_j)^2 < \varepsilon \text{ và } \sum_{j=1}^n [\text{osc}(f, \gamma_j)]^2 < \varepsilon$$

Khi đó f có mở rộng chỉnh hình đến G .

Chứng minh.

Gọi γ_0 là đường cong trơn Jordan định hướng dương trong $G \setminus K$ và K nằm trong phần bên trong của γ_0 . Cố định điểm $z \in (G \setminus K) \cap \text{ins } \gamma_0$. Với $\varepsilon > 0$ đặt $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ như trong phát biểu và sắp xếp sao cho chúng nằm trong $\text{ins } \gamma_0$ và z nằm ngoài mỗi đường cong. Ta định hướng âm các đường cong $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ thì $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ là hệ Jordan định hướng dương trong G . Đặt $d = \text{dist}(z, \Gamma)$.

Vì vậy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z} dw + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Cố định điểm w_j trên γ_j . Vì $z \in \text{out } \gamma_j$ nên

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w-z} dw = -\frac{f(w_j)}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dw}{w-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(w) - f(w_j)}{w-z} dw$$

Vì vậy nếu $\delta_j = \text{osc}(f, \gamma_j)$ thì

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \left| \frac{f(w) - f(w_j)}{w-z} \right| |dw| \leq \sum_{j=1}^n \frac{\ell(\gamma_j) \delta_j}{2\pi d}$$

$$\leq \left[\sum_{j=1}^n \ell(\gamma_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n \delta_j^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2\pi d}$$

Vì ε tùy ý nên $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z} dw$ với mọi $z \in \gamma_0 \cap (G \setminus K)$. Do vậy biểu thức này

cho ta cách xác định f trên tập K và mở rộng chỉnh hình cần tìm. $\square$

Ta kí hiệu Ω là miền có biên là các cung tròn mà biên ngoài là $\gamma_0 = \partial D$ và $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ là các đường tròn còn lại tạo nên biên của Ω , đặt $\gamma_j = \partial B(a_j; r_j)$ để sử dụng trong những phần tiếp theo.

Bây giờ, ta khảo sát miền đối xứng của Ω qua đường tròn γ_j . Nhắc lại: đối xứng của một điểm z qua đường tròn γ_j là điểm w cho bởi công thức

$$w = a_j + \frac{r_j^2}{\bar{z} - \bar{a}_j} \quad (2.7.2)$$

Lưu ý công thức này là liên hợp của phép biến đổi Möbius. Do đó, ảnh của Ω dưới phép biến đổi này là một miền Ω_{1j} có biên là cung tròn. Lưu ý biên ngoài của Ω_{1j} là đường tròn γ_j . Do đó $\Omega(1) \equiv \Omega \cup \Omega_{11} \cup \dots \cup \Omega_{1n} \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ cũng là miền có biên là các cung tròn dù phần bù của nó có nhiều thành phần hơn. Bây giờ với mỗi Ω_{1j} và mỗi đường tròn biên γ_j của nó ta khảo sát ảnh của Ω_{1j} qua phép đối xứng qua γ_j . Kí hiệu các miền thu được là $\{\Omega_{2j} : 1 \leq j \leq N_2\}$. Lưu ý mỗi miền thu được là ảnh của Ω qua hai phép đối xứng nên là ảnh của Ω dưới hợp thành của hai phép biến đổi dạng (2.7.2). Kiểm tra được hợp thành của hai phép biến đổi như thế là một phép biến đổi Möbius.

Gọi $\Omega(2)$ là hợp của $\Omega(1)$, các miền $\{\Omega_{2j} : 1 \leq j \leq N_2\}$ và các đường tròn tạo nên biên trong của $\Omega(1)$.

Tiếp tục quá trình này thì với mỗi số nguyên k ta có một họ các miền có biên là các cung tròn $\{\Omega_{kj} : 1 \leq j \leq N_k\}$ và dãy tăng các miền có biên là các cung tròn $\{\Omega(k)\}$, trong đó $\Omega(k)$ là hợp của $\Omega(k-1)$, các miền $\{\Omega_{kj} : 1 \leq j \leq N_k\}$ và các đường tròn tạo nên biên trong của $\Omega(k-1)$. Đặt $\Omega(\infty) = \bigcup_k \Omega(k)$. Vì vậy

$$\Omega(\infty) = \Omega \cup \bigcup \{cl\Omega_{kj} : k \geq 1 \text{ và } 1 \leq j \leq N_k\}$$

Với $k \geq 1$ và $1 \leq j \leq N_k$ thì $\Omega_{kj} = T_{kj}(\Omega)$, trong đó T_{kj} là phép biến đổi Möbius nếu k là số chẵn và là liên hợp của phép biến đổi Möbius nếu k là số lẻ. Gọi $\gamma_{kji}, 1 \leq i \leq n$ là các đường tròn mà là các thành phần của $\partial\Omega_{kj}$ ngoại trừ biên ngoài của nó. Vì vậy các thành phần của $\partial\Omega(k)$ là đường tròn đơn vị và các đường tròn $\{\gamma_{kji} : 1 \leq j \leq N_k, 1 \leq i \leq n\}$. Đặt r_{kji} là các bán kính của γ_{kji} .

2.7.3. Bổ đề.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum \{r_{kji}^2 : 1 \leq j \leq N_k, 1 \leq i \leq n\} < \infty$$

Chứng minh.

Trước hết, lưu ý các miền $\{\Omega_{kj} : k \geq 1, 1 \leq j \leq N_k\}$ là đôi một rời nhau. Gọi D_{kj} là đạo hàm của T_{kj} khi k chẵn và đạo hàm của liên hợp của T_{kj} khi k lẻ. Đặt $B = B(a; r)$

là đĩa nằm trong Ω và xét các đĩa $T_{kj}(B)$. Theo định lý Koebe $\frac{1}{4}$ thì $T_{kj}(B)$ chứa đĩa

$$\text{bán kính } \frac{r|D_{kj}(a)|}{4}. \text{ Do đó } Area(\Omega_{kj}) \geq \frac{\pi r^2 |D_{kj}(a)|^2}{16}$$

$$\text{Nhu vậy} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum \left\{ |D_{kj}(a)|^2 : 1 \leq j \leq N_k \right\} < \infty \quad (2.7.4)$$

Theo định lý “biến dạng” (1.1.16) thì với $1 \leq i \leq n$ tồn tại hằng số M_i sao cho với $k \geq 1$ và $1 \leq j \leq N_k$ thì $\sup \left\{ \left| D_{kj}(z) \right| : z \in \gamma_j \right\} \leq M_i \left| D_{kj}(a) \right|$.

Ta có $\gamma_{kij} = T_{kj}(\gamma_i)$ với $1 \leq i \leq n$ nên $2\pi r_{kij} = \int_{\gamma_i} \left| D_{kj}(z) \right| |dz| \leq M_i \left| D_{kj}(a) \right| 2\pi r_i$.

Kết hợp với (2.7.4), ta có điều cần chứng minh. $\square$

Để chứng minh mệnh đề tiếp theo ta cần kết quả sau:

Cho $f : D \rightarrow D$ là ánh xạ chỉnh hình 1-1 từ D vào chính nó và $f(a) = 0$. Khi đó tồn tại số c với $|c| = 1$ sao cho $f = c\varphi_a$ với $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

Người đọc có thể tham khảo chứng minh trong [Co, định lý 6.2.5].

2.7.5. Mệnh đề.

Nếu Ω và Λ là các miền có biên tròn và $f : \Omega \rightarrow \Lambda$ là tương đương bảo giác thì f là phép biến đổi Möbius.

Chứng minh.

Theo định lý 2.3.4 thì f biến mỗi đường tròn trong biên của Ω vào một đường tròn đồng phôi trong biên của Λ . Bằng cách sử dụng phép biến đổi Möbius thích hợp, ta chỉ cần xét trường hợp các biên ngoài của Ω và Λ là đường tròn đơn vị và f biến ∂D thành chính nó. Nếu $\eta_1, \dots, \eta_n$ là các đường tròn biên khác của Λ thì ta có thể đánh số để $f(\gamma_i) = \eta_i$ với $1 \leq i \leq n$.

Sử dụng kí hiệu trong bổ đề 2.7.3 và kí hiệu tương tự đối với miền có biên là các cung tròn Λ . Theo nguyên lý đối xứng thì với mỗi $k \geq 1$, tồn tại tương đương bảo giác $f_k : \Omega(k) \rightarrow \Lambda(k)$ mở rộng của f . Vì vậy, ta có tương đương bảo giác $f_\infty : \Omega(\infty) \rightarrow \Lambda(\infty)$. Lưu ý tập $K = D \setminus \Omega(\infty)$ là tập compact.

Bây giờ áp dụng bổ đề 2.7.1 hoàn tất chứng minh bằng cách chỉ ra f_∞ có mở rộng đến D . Thật ra nếu $g = f^{-1} : \Lambda \rightarrow \Omega$ thì lí luận tương tự ta suy ra g có mở rộng

đến D đó là tương đương bảo giác trên $\Lambda(\infty)$. Thật vậy $g_\infty = f_\infty^{-1}$. Vì

$z = g_\infty \circ f_\infty = f_\infty \circ g_\infty$ nên mở rộng của f đến D là tương đương bảo giác mà có ảnh xạ ngược là mở rộng của g đến D . Do đó f là tương đương bảo giác từ D vào chính nó. Theo kết quả đề cập ở trên thì f là phép biến đổi Möbius. Để thấy rằng bổ đề 2.7.1 có thể áp dụng đối với f_∞ ta gọi U là tập con mở của D chứa K và lấy $\varepsilon > 0$. Theo bổ đề 2.7.3 và lý thuyết tôpô thì tồn tại số nguyên m sao cho với $k \geq m$ thì mỗi đường tròn γ_{kji} nằm trong U và

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum \left\{ r_{kji}^2 : 1 \leq j \leq N_k, 1 \leq i \leq n \right\} < \varepsilon$$

Nếu ρ_{kji} là bán kính của γ_{kji} thì có thể chọn m sao cho

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum \left\{ \rho_{kji}^2 : 1 \leq j \leq N_k, 1 \leq i \leq n \right\} < \varepsilon$$

Nhưng f_k biến đường tròn γ_{kji} vào đường tròn γ_{kji} nên nếu $\delta_{kji} = \text{osc}(f, \gamma_{kji})$ thì ta có

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum \left\{ \delta_{kji}^2 : 1 \leq j \leq N_k, 1 \leq i \leq n \right\} < \varepsilon$$

Do đó các đường cong $\{\gamma_{mji} : 1 \leq j \leq n, 1 \leq j \leq N_k\}$ là các đường cong tương ứng để áp dụng bổ đề 2.7.1.

Bổ đề tôpô sau đây được sử dụng để chứng minh sự tồn tại.

2.7.6. Bổ đề.

(a) Cho $\{\Omega_k\}$ là các đĩa bị rạch bởi cung tròn sao cho ∂D là biên ngoài của mỗi đĩa và Ω_k là tập n -liên. Nếu Ω là miền n -liên không suy biến với biên ngoài ∂D và $\Omega_k \rightarrow \Omega$ theo (2.4.1) thì Ω là đĩa bị rạch bởi cung tròn.

(b) Cho $\{G_k\}$ là miền có biên tròn sao cho ∂D là biên ngoài của mỗi đĩa và G_k là tập n -liên. Nếu G là miền n -liên không suy biến với biên ngoài ∂D và $\Omega_k \rightarrow \Omega$ theo (2.4.1) thì G là miền có biên tròn.

Chứng minh.

(a) Gọi $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ là các thành phần bị chặn thuộc phần bù của Ω . Đặt $\gamma_0 = \partial D$. Giả sử $0 < \delta < \text{dist}(\gamma_i, \gamma_j)$ với $i \neq j$ và $0 \leq i, j \leq n$. Chọn số nguyên k_1 sao cho với $k \geq k_1$, $K \equiv \{z \in D : \text{dist}(z, \partial\Omega) \geq \delta\} \subseteq \Omega_k$. Nếu $0 \leq j \leq n$ và $a_j \in \gamma_j$ thì suy ra tồn tại số nguyên $k_2 > k_1$ sao cho với $k \geq k_2$ thì $\text{dist}(a_j, \partial\Omega_k) < \frac{\delta}{2}$. Tạm cố định $k \geq k_2$ và giả sử $a_{jk} \in \partial\Omega_k$ với $|a_{jk} - a_j| < \frac{\delta}{2}$. Nếu γ_{jk} là thành phần của $\partial\Omega_k$ chứa a_{jk} thì $\gamma_{jk} \subseteq \{z : \text{dist}(z, \gamma_j) < \delta\}$. Thật ra từ $K \subseteq \Omega_k$ và $\Omega \subseteq D$ suy ra $\gamma_{jk} \subseteq D \setminus K$. Vì γ_{jk} liên thông nên từ cách chọn δ suy ra $\gamma_{jk} \subseteq \{z : \text{dist}(z, \gamma_j) < \delta\}$.

Như vậy với $k \geq k_2$ thì các cung con thực sự tạo nên các thành phần bị chặn thuộc phần bù của Ω_k có thể đánh số $\gamma_{1k}, \dots, \gamma_{nk}$ thỏa

$$\gamma_{jk} \subseteq (\gamma_j)_\delta \equiv \{z : \text{dist}(z, \gamma_j) < \delta\}. \quad (2.7.7)$$

Cố định j với $1 \leq j \leq n$. Với mỗi $\zeta \in \gamma_j$ tồn tại dãy $\{\zeta_k\}$ với $\zeta_k \in \partial\Omega_k$ sao cho $\zeta_k \rightarrow \zeta$. Theo (2.7.7) thì $\zeta_k \in \gamma_{jk}$ với $k \geq k_2$. Nếu γ_{jk} nằm trong đường tròn $\{\zeta : |\zeta| = \rho_{jk}\}$ thì $\rho_{jk} = |\zeta_{jk}| \rightarrow |\zeta|$. Vì ζ là điểm tùy ý của γ_j nên γ_j nằm trong đường tròn $\{\zeta : |\zeta| = \rho_j\}$ trong đó $\rho_{jk} \rightarrow \rho_j$ khi $k \rightarrow \infty$. Nhưng Ω liên thông và không có thành phần nào thuộc phần bù của Ω là tầm thường nên γ_j là cung đóng thực sự của đường tròn $\{\zeta : |\zeta| = \rho_j\}$. Vì vậy Ω là đĩa bị rạch bởi cung tròn. Phần (b) được chứng minh tương tự.

2.7.8 Bổ đề.

(a) Cho $\{G_k\}$ và G là các miền có biên tròn nhận ∂D làm biên ngoài và G_k là tập n -liên. Với mỗi $k \geq 1$, giả sử $f_k : G_k \rightarrow \Omega_k$ là tương đương bảo giác vào đĩa bị rạch bởi cung tròn Ω_k với biên ngoài ∂D sao cho $f_k(0) = 0, f'_k(0) > 0$ và $f_k(\partial D) = \partial D$. Nếu $G_k \rightarrow G$ theo nghĩa (2.4.1) thì $f_k \xrightarrow{uc} f$ trong đó f là tương đương bảo giác của G vào miền có biên tròn bị rạch Ω với biên ngoài ∂D và $\Omega_k \rightarrow \Omega$.

(b) Cho $\{\Omega_k\}$ và Ω là các đĩa tròn ∂D làm biên ngoài và G_k là tập n -liên. Với mỗi $k \geq 1$, giả sử $\phi_k : \Omega_k \rightarrow G_k$ là tương đương bảo giác vào miền có biên tròn G_k với biên ngoài ∂D sao cho $\phi_k(0) = 0, \phi'_k(0) > 0$ và $\phi_k(\partial D) = \partial D$. Nếu $\Omega_k \rightarrow \Omega$ theo nghĩa (2.4.1) thì $\phi_k \xrightarrow{uc} \phi$ trong đó ϕ là tương đương bảo giác của Ω vào miền có biên tròn bị rạch G với biên ngoài ∂D và $G_k \rightarrow G$.

Chứng minh.

Như trong bổ đề 2.7.6, chứng minh (a), (b) là tương tự nhau. Ở đây chỉ trình bày chứng minh của (a).

Trước tiên, ta chứng tỏ rằng $\{f'_k(0)\}$ bị chặn khỏi 0. Gọi $C_1, \dots, C_n$ là các đường tròn trong biên của G mà khác với ∂D và chọn $\varepsilon > 0$ sao cho bao đóng của $V = \{z : \text{dist}(z, \partial D) < \varepsilon\}$ không giao với từng C_j . Vì $G_k \rightarrow G$ nên tồn tại k_1 sao cho với $k \geq k_1, cl V \cap \partial G_k = \partial D$. Do đó mỗi f_k với $k \geq k_1$ có một mở rộng chỉnh hình đơn điệu đối với $G_k \cup V$ cũng được kí hiệu là f_k (mệnh đề 0.5.1). Ta kiểm tra được $G_k \cup V \rightarrow G \cup V$.

Bây giờ, ta xây dựng các đường nối từ 0 đến các điểm trên đường tròn đơn vị. Lấy $z \in \partial D$ và xét bán kính $[0, z]$. Bán kính này có thể giao với các đường tròn C_j . Mở rộng các đường tròn này đến các đường tròn $D_1, \dots, D_n$ sao cho chúng vẫn đôi một rời nhau, không giao với ∂D và không bao quanh 0. Khi $[0, z]$ giao với D_j thì thay đoạn

$[0, z]$ bằng nửa đường tròn này. Mỗi đường tròn D_j có bán kính nhỏ hơn 1 để ta được đường dẫn từ 0 đến z nằm trọn vẹn trong G , tách hẳn với các đường tròn $C_1, \dots, C_n$ và có độ dài nhỏ hơn $1 + n\pi$. Do vậy, ta có thể tìm tập con mở U của G sao cho $\partial D \subseteq clU \subseteq G \cup V$, $0 \in U$ và với mỗi $z \in \partial D$ tồn tại một đường trong U nối 0 với z có độ dài nhỏ hơn $1 + n\pi$. Lấy $k_2 > k_1$ sao cho $clU \subseteq G_{k_2} \cup V$ với $k \geq k_2$. Theo định lý 1.1.21, tồn tại hằng số M sao cho $|f'_k(z)| \leq M|f'_k(0)|$ với mọi $k \geq k_2$ và $z \in clU$. Nếu $|z| = 1$, gọi γ là một đường trong U nối 0 với z với độ dài $1 + n\pi$. Do vậy

$$1 = |f_k(z)| \leq \int_{\gamma} |f'_k| |dw| \leq M|f'_k(0)|(1 + n\pi). \text{ Vì vậy } \{f'_k(0)\} \text{ bị chặn dưới.}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $\{f'_k(0)\}$ bị chặn trên. Lấy $c_k = [f'_k(0)]^{-1}$ và đặt $g_k = c_k f_k$. Nếu $\{f'_k(0)\}$ không bị chặn thì tồn tại dãy con $\{c_{k_j}\}$ hội tụ về 0. Nhưng theo bổ đề 2.4.7, nếu cần thì thông qua dãy con, tồn tại hàm đơn điệu $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ sao cho $g_{k_j} \rightarrow g(uc)$. Định lý 2.4.8 suy ra $c_{k_j} \Omega_{k_j} = g_{k_j}(G_{k_j}) \rightarrow g(G)$. Nhưng các tập Ω_{k_j} đều nằm trong D và do $c_{k_j} \rightarrow 0$ nên $\{c_{k_j} \Omega_{k_j}\}$ không có hạt nhân (mâu thuẫn). Do vậy $\{f'_k(0)\}$ phải bị chặn.

Lưu ý tất cả những kết quả đã chứng minh về các dãy $\{f_k\}$ hay $\{f'_k(0)\}$ cũng đúng với dãy con bất kỳ của chúng. Giả sử $f'_k(0) \rightarrow a$ (a là vô hướng khác 0). Theo lý luận ở trên thì tồn tại dãy con $\{g_{k_j}\}$ và hàm đơn điệu g trên G sao cho $g_{k_j} \rightarrow g(uc)$. Do vậy $\Omega_{k_j} = f_{k_j}(G_{k_j}) \rightarrow af(G)$.

Do vậy $f \equiv ag$ là tương đương bảo giác của miền Ω và $\Omega_{k_j} \rightarrow \Omega$. Vì biên ngoài của Ω là ∂D nên theo bổ đề 2.7.6 suy ra Ω là đĩa bị rạch bởi cung tròn.

Bây giờ giả sử $\{f_{k_j}\}$ và $\{f_{m_j}\}$ là hai dãy con của $\{f_k\}$ sao cho $f_{k_j} \rightarrow f$ và $f_{m_j} \rightarrow h$ trong đó f và h là các tương đương bảo giác của G vào các đĩa bị rạch bởi cung tròn

tương ứng là Ω và Λ với $f(0) = h(0) = 0$, $f'(0) > 0$ và $h'(0) > 0$. Do vậy $\phi = f \circ h^{-1}$ là tương đương bảo giác của Λ vào Ω với $\phi(0) = 0, \phi'(0) > 0$ và $\phi(\partial D) = \partial D$. Theo bổ đề 2.6.3 thì $\Lambda = \Omega$ và $\phi(\zeta) = \zeta$ với mọi $\zeta \in \Lambda$. Do đó $h = f$

Tóm lại, mỗi dãy con của $\{f_k\}$ có một dãy con hội tụ đến một tương đương bảo giác của G vào đĩa bị rạch bởi cung tròn, và mỗi dãy con hội tụ của $\{f_k\}$ có cùng điểm giới hạn. Như vậy, $\{f_k\}$ hội tụ đến một tương đương bảo giác f của G vào đĩa bị rạch bởi cung tròn Ω . Theo định lý 2.4.11 thì $\Omega_k \rightarrow \Omega$.

2.7.9 Định lý.

Nếu G là miền liên thông hữu hạn không suy biến, A là một thành phần trên biên mở rộng của G và $a \in G$ thì tồn tại duy nhất miền có biên tròn Ω và duy nhất tương đương bảo giác $f : G \rightarrow \Omega$ sao cho f liên kết A với $\partial D, f(a) = 0$ và $f'(a) > 0$.

Chứng minh

Sự duy nhất được suy ra từ mệnh đề 2.7.5. Thật vậy, giả sử với $j = 1, 2, f_j : G \rightarrow \Omega_j$ là tương đương bảo giác tương ứng A với ∂D sao cho $f_j(a) = 0$ và $f_j'(a) > 0$. Khi đó $g = f_2 \circ f_1^{-1}$ là tương đương bảo giác của Ω_1 vào Ω_2 , $g(\partial D) = \partial D, g(0) = 0$ và $g'(0) > 0$. Suy ra $g(D) = D$ và $g(z) = \lambda(z - a)(1 - \bar{a}z)^{-1}$. Các giả thiết còn lại về hàm g suy ra $g(z) = z$, với mọi z .

Bây giờ, ta chứng minh sự tồn tại. Gọi $\mathbf{G}$ là họ tất cả các miền n -liên G sao cho $0 \in G$ và ∂D là biên ngoài của G . Gọi $\mathbf{H}$ là họ tất cả các đĩa bị rạch bởi cung tròn Ω mà là miền n -liên và ∂D là biên ngoài của Ω . Theo định lý 2.6.2, với mỗi G trong $\mathbf{G}$ tồn tại duy nhất một Ω trong $\mathbf{H}$ và tương đương bảo giác $f : G \rightarrow \Omega$ sao cho $f(0) = 0, f'(0) > 0$ và f tương ứng ∂D với ∂D . Điều này xác định ánh xạ $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ với $F(G) = \Omega$ khi G, Ω tương đương bảo giác. Để chứng minh định lý, ta chỉ cần chứng tỏ F toàn ánh.

Bây giờ, ta tôpô hóa $\mathbf{G}$ và $\mathbf{H}$. Nếu $G \in \mathbf{G}$, gọi $C_1, \dots, C_n$ là các đường tròn tạo nên biên của các thành phần bị chặn thuộc phần bù của G . Mỗi đường tròn C_j được xác định bởi tâm $z_j = a_j + ib_j$ và bán kính r_j . Do đó G có thể được đồng nhất với điểm trong R^{3n} với tọa độ $(a_1, b_1, r_1, \dots, a_n, b_n, r_n)$. Gọi $\mathbf{G}'$ là tập những điểm như vậy trong R^{3n} . Như vậy $\mathbf{G}'$ là tập con thực sự của tập $\{(a_1, b_1, r_1, \dots, a_n, b_n, r_n) : 0 < a_j^2 + b_j^2 < 1, 0 < r_j < 1\}$ vì các đường tròn tạo nên biên của G không giao nhau. Nếu $G \in \mathbf{G}$ thì gọi G' là điểm tương ứng trong $\mathbf{G}'$.

Nếu $\Omega \in \mathbf{h}$ thì đặt $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ là các cung đóng tạo nên các thành phần bị chặn trên phần bù của Ω . Mỗi γ_j được xác định bởi điểm đầu $\zeta_j = \alpha_j + i\beta_j$ và chiều dài θ_j của nó được đo theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Do vậy ta cũng có mỗi $\Omega \in \mathbf{h}$ có thể được đồng nhất với điểm $\Omega' \in R^{3n}$. Đặt $\mathbf{h}' = \{\Omega' : \Omega \in \mathbf{h}\}$. Hàm $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{h}$ sinh ra hàm $F' : \mathbf{G}' \rightarrow \mathbf{h}'$. Như vậy, ta có thể áp dụng các quan hệ tôpô trên R^{3n} đối với $\mathbf{G}'$, $\mathbf{h}'$. Dãy $\{G_k\}$ trong $\mathbf{G}'$ hội tụ về G trong $\mathbf{G}'$ (theo định nghĩa 2.4.1) khi và chỉ khi $G'_k \rightarrow G'$ trong $\mathbf{G}'$. Tương tự đối với các dãy hội tụ trong $\mathbf{h}$ và $\mathbf{h}'$. Ta sẽ chứng minh F toàn ánh bằng cách chỉ ra F' là một phép đồng phôi.

Ta sử dụng kết quả sau đây cho chứng minh 2.7.9.

2.7.8 Khẳng định.

$\mathbf{G}'$ và $\mathbf{h}'$ là các tập con mở liên thông của R^{3n}

Tiếp tục chứng minh định lý 2.7.7.

Lưu ý rằng F đơn ánh do tính duy nhất theo định lý 2.6.2. Giả sử $G_k \rightarrow G$ trong $\mathbf{G}$ và đặt $\Omega_k = F(G_k)$ và $\Omega = F(G)$. Theo bổ đề 2.7.8 thì $\Omega_k \rightarrow \Omega$ và F liên tục. Cụ thể thì $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{h}$ là ánh xạ mở. Giả sử F không toàn ánh. Đặt $\Omega_1 \in \mathbf{h} \setminus F(\mathbf{G})$ và $\Omega_0 = F(G_0) \in F(\mathbf{G})$. Vì $\mathbf{h}$ là tập con mở liên thông của R^{3n} nên tồn tại đường $\Omega : [0, 1] \rightarrow \mathbf{h}$ với $\Omega(0) = \Omega_0$ và $\Omega(1) = \Omega_1$. Vì $F(\mathbf{G})$ là mở nên tồn tại

τ với $0 < \tau \leq 1$ sao cho $\Omega(\tau) \notin F(\mathbf{G})$ và $\Omega(t) = F(G(t)) \in F(\mathbf{G})$ với $0 \leq t < \tau$. Lấy
 $0 < t_k < \tau$ sao cho $t_k \rightarrow \tau$ và $\Omega(t_k) \rightarrow \Omega(\tau)$. Nếu $G_k = F^{-1}[\Omega(t_k)]$ thì theo bổ đề
 2.7.8 thì $G_k \rightarrow G$ (G là miền có biên tròn) và $F(G) = \Omega(\tau)$. Điều này mâu thuẫn với
 $\Omega(\tau) \notin F(\mathbf{G})$. Do vậy F toàn ánh. $\square$

KẾT LUẬN

Luận văn đã tạo nên được mạch kiến thức, từ các kiến thức chuẩn bị đến các kết quả về một số lớp ánh xạ tương đương bảo giác trên các miền liên thông hữu hạn nói chung, đặc biệt các lớp tương đương bảo giác đối với các hình vành khăn hoặc các đĩa bị rạch bởi cung tròn,....

Trong trường hợp miền đơn liên luận văn tập trung nghiên cứu lớp các hàm đơn diệp trên đĩa mở đơn vị D qua đó nghiên cứu các hàm đơn diệp trên các miền đơn liên tùy ý.

Tác giả luận văn bước đầu làm quen với phương pháp chuyển bài toán tìm ánh xạ bảo giác từ đĩa mở đơn vị vào tứ giác vuông có cạnh là các cung tròn về bài toán giá trị biên Sturm – Liouville, cũng như việc sử dụng phương pháp tham số phổ chuỗi lũy thừa để tìm nghiệm bài toán Sturm – Liouville này.

Ngoài việc viết rõ, trình bày lại khá chi tiết các kết quả của luận văn, tác giả luận văn còn chứng minh mệnh đề 1.1.6 trang 20, nhận xét 2.4.2 trang 68 (trong tài liệu dành phần này như là bài tập cho người đọc)

Việc nghiên cứu các tài liệu tham khảo, tổng hợp và sắp xếp hệ thống kiến thức, tác giả đã rút ra được nhiều kiến thức và kinh nghiệm bổ ích cho bản thân. Tuy nhiên, do hạn chế về thời gian, kiến thức tác giả chưa thể đi sâu và phát triển thêm các kiến thức liên quan đến hướng nghiên cứu này như tìm hiểu thêm bài toán giá trị biên của các ánh xạ Riemann, tìm hiểu về lớp các phép biến hình á bảo giác...

Mặc dù tác giả đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những sai sót. Rất mong nhận được sự chỉ bảo của quý thầy cô và các bạn. Xin chân thành cảm ơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [B] P.Brown, Mapping onto circular arc polygons, *Complex Var. Theory Appl.* 50 (2005) 131-154 MR 2122750
- [B'] P.Brown, An investigation of a two parameter problem for conformal maps onto circular arc quadrilaterals, *Complex Var. Elliptic Equ.* 53 (2008), no. 1, MR2380819
- [Bj] P. Björstrand, E. Eric Grosse, Conformal mapping of circular arc polygons, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 8 (1987) 19-32 MR0873921
- [Co] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Springer-Verlag, 1978.
- [Co'] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, 1995.
- [DT] T. A. Driscoll, L. N. Trefethen, *Schwarz-Christoffel Mapping*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge (2002) MR1908657.
- [He] P.Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol.3, Wiley, New York (1986) MR0822470
- [Hi] E.Hille, *Analytic Function Theory*, Vol.2, *Introductions to Higher Mathematics*, Ginn and Co., Boston, Mass.-New York- Toronto, Ont. (1962) MR0201608
- [Ho] L.H.Howell, Numerical conformal mapping of circular arc polygons, *J.Comput. Appl. Math.* 46 (1993) 7-28 MR1222470
- [KP] V.V.Kravchenko and R.M.Porter, Conformal mapping of right circular quadrilaterals, arXiv:0904.374, 23 Apr 2009
- [KP'] V.V.Kravchenko and R.M.Porter, Spectral parameter power series for Sturm-Liouville problems, arXiv: 0811.4488v1, 28 Nov 2008
- [Ne] Z. Nehari, *Conformal Mapping*, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London (1952) MR0377031
- [Re] R.Rimmert, *Theory of Complex functions*, Springer-Verlag.