

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  
**ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG**

**TRẦN THỊ ÁI HOA**

**ỨNG DỤNG CÔNG THỨC VIETE**  
**VÀO GIẢI TOÁN THUỘC CHƯƠNG TRÌNH**  
**TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**

**Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp**  
**Mã số: 60.46.40**

**TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC**

**Đà Nẵng - Năm 2011**

Công trình được hoàn thành tại  
**ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG**

Người hướng dẫn khoa học: **TS. NGUYỄN NGỌC CHÂU**

Phản biện 1: **TS. LÊ HẢI TRUNG**

Phản biện 2: **PGS.TS. NGUYỄN GIA ĐỊNH**

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 26 tháng 11 năm 2011

*Có thể tìm hiểu luận văn tại:*

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư Phạm, Đại học Đà Nẵng

## MỞ ĐẦU

### 1. Lý do chọn đề tài

Đa thức, phương trình là những khái niệm cơ bản và quan trọng trong chương trình toán Trung học phổ thông. Bài toán tìm nghiệm của đa thức, của phương trình đại số đã được các nhà toán học quan tâm nghiên cứu trong nhiều thế kỷ. Mặc dù lời giải của các bài toán này cho đến nay chỉ mới tìm được đối với các đa thức, phương trình đại số có bậc nhỏ hơn 5, nhưng nhiều tính chất về nghiệm của đa thức, của phương trình đã được phát hiện. Một trong những tính chất đó là mối liên hệ giữa các nghiệm và các hệ số của đa thức, của phương trình đại số, nó được thể hiện bằng một công thức nổi tiếng – Công thức Viète.

Ứng dụng của công thức Viète khá phong phú và hiệu quả. Trong chương trình toán học phổ thông, học sinh đã được học công thức Viète đối với tam thức bậc hai, tuy nhiên với một thời lượng không nhiều và chỉ ở mức độ nhất định, hơn nữa sách giáo khoa cũng không chỉ ra việc định hướng tìm tòi lời giải bằng việc ứng dụng công thức Viète và cũng chưa chú trọng đến việc rèn luyện kỹ năng này nên học sinh thường lúng túng khi vận dụng công thức Viète để giải toán. Bên cạnh đó, trong các đề thi tuyển sinh đại học, thi học sinh giỏi trong và ngoài nước thường có những bài toán mà lời giải của chúng có thể tìm được thông qua công thức Viète.

Với mục đích tìm hiểu và hệ thống hóa một cách đầy đủ những ứng dụng của công thức Viète trong chương trình toán ở bậc phổ thông, tôi chọn đề tài “**ỨNG DỤNG CÔNG THỨC VIÈTE VÀO GIẢI TOÁN**”

THUỘC CHƯƠNG TRÌNH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG” cho luận văn thạc sĩ của mình.

Luận văn gồm hai chương. Để thuận tiện cho người đọc, chương một nhắc lại một số kiến thức cơ bản về đa thức, đặc biệt là các đa thức đối xứng và công thức Viète để làm tiền đề cho chương sau. Chương hai là nội dung chính của luận văn: Nghiên cứu, tìm hiểu việc vận dụng công thức Viète để giải một số lớp bài toán trong các lĩnh vực giải tích, đại số, đa thức, hình học, lượng giác thuộc chương trình toán bậc trung học phổ thông.

## **2. Mục đích nghiên cứu**

- Nghiên cứu các ứng dụng của công thức Viète trong chương trình toán phổ thông.

- Hệ thống và phân loại một số bài toán có thể ứng dụng công thức Viète để giải.

- Nhằm nâng cao năng lực tư duy cho học sinh cần thiết phải xây dựng chuỗi bài toán từ bài toán gốc, cũng như xây dựng bài toán tổng quát nhằm hướng đến từng đối tượng học sinh.

## **3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu**

- Những kiến thức cơ bản về tam giác, các công thức lượng giác, các bất đẳng thức quan trọng, các tính chất của đa thức, đa thức đối xứng, phương trình đối xứng.

- Công thức Viète và các ứng dụng trong chương trình toán bậc phổ thông.

- Các bài toán có thể ứng dụng công thức Viète.

#### **4. Phương pháp nghiên cứu**

- Nghiên cứu các tài liệu về công thức Viète và các kiến thức liên quan, như sách giáo khoa, sách tham khảo, tạp chí toán học, cùng một số tài liệu khác từ Internet.

- Thông qua thực tế giảng dạy ở trường trung học phổ thông để tổng kết rút ra những kết luận cần thiết. Kết hợp những kiến thức đã đạt được trong quá trình thu thập thông tin để hệ thống và đưa ra các bài toán có thể giải được bằng công thức Viète.

- Thảo luận, trao đổi với người hướng dẫn luận văn.

#### **5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài**

Công thức Viète và các ứng dụng của nó có vai trò quan trọng, mở ra hướng giải quyết cho nhiều bài toán có liên quan đến nghiệm của phương trình đại số một cách phong phú, đa dạng như: các bài toán liên quan đến hàm số, chứng minh các hệ thức đại số, tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của biểu thức, giải phương trình và hệ phương trình không mẫu mực, chứng minh các bài toán lượng giác, hình học....

Việc dạy công thức Viète và các ứng dụng của nó trong chương trình toán học phổ thông có ý nghĩa đặc biệt là: làm cho học sinh hiểu sâu sắc hơn về các nghiệm của một phương trình đại số. Nêu được quan hệ định tính, định lượng giữa các nghiệm số với các hệ số của một phương trình đại số. Giúp học sinh nhìn nhận các bài toán trong mối liên hệ sinh động của sự ràng buộc giữa biến số và tham số; giữa hằng và biến, phần nào giúp học sinh nâng cao chất lượng học tập môn toán.

## 6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo trong luận văn gồm có các chương như sau :

Chương 1 - **ĐA THỨC**

Chương 2 - **MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA CÔNG THỨC VIÈTE**

### Chương 1 ĐA THỨC

#### 1.1. VÀNH ĐA THỨC MỘT ẨN

Giả sử  $A$  là một vành giao hoán, có đơn vị ký hiệu là 1. Ta gọi  $P$  là tập hợp các dãy  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  trong đó  $a_i \in A$  với mọi  $i \in \mathbb{N}$  và  $a_i = 0$  tất cả trừ một số hữu hạn.

Trên  $P$  ta định nghĩa hai phép toán cộng và nhân như sau

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) + (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots) \quad (1.1)$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \times (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots) \quad (1.2)$$

$$\text{với } c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 = \sum_{i+j=k} a_i b_j \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vì các  $a_i$  và  $b_i$  bằng 0 tất cả trừ một số hữu hạn nên các  $a_i + b_i$  và  $c_i$  cũng bằng 0 tất cả trừ một số hữu hạn, nên (1.1) và (1.2) xác định hai phép toán trong  $P$ .

Tập  $P$  cùng với hai phép toán cộng và nhân ở trên là một vành giao hoán có đơn vị. Phần tử không của phép cộng là dãy  $(0, 0, \dots)$ , phần tử đơn vị của phép nhân này là  $(1, 0, 0, \dots)$ .

Xét dãy  $x = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \in P$

Theo quy tắc của phép nhân trong  $P$ , ta có

$$x^n = \left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, 1, \dots, 0, \dots \right)$$

Ta quy ước  $x^0 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$

Mặt khác, xét ánh xạ :  $A \rightarrow P$

$$a \mapsto (a, 0, \dots, 0, \dots)$$

Để dàng kiểm chứng được ánh xạ này là một đơn cấu vành, do đó ta đồng nhất phần tử  $a \in A$  với dãy  $(a, 0, 0, \dots) \in P$  và xem  $A$  là một vành con của vành  $P$ . Vì mỗi phần tử của  $P$  là một dãy  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  trong đó các  $a_i = 0$  tất cả trừ một số hữu hạn, nên mỗi phần tử của  $P$  có dạng  $(a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$  trong đó  $a_0, \dots, a_n \in A$  (không nhất thiết khác 0). Việc đồng nhất  $a$  với  $(a, 0, 0, \dots)$  và việc đưa vào dãy  $x$  cho phép ta viết

$$\begin{aligned} (a_0, \dots, a_n, 0, \dots) &= (a_0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, \dots) + \dots + (0, \dots, a_n, 0, \dots) \\ &= (a_0, 0, \dots) + (a_1, 0, \dots)(0, 1, 0, \dots) + \dots + (a_n, 0, \dots)(0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_0x^0 + a_0x + \dots + a_nx^n \end{aligned}$$

**Định nghĩa 1.1.** Vành  $P$  được định nghĩa như trên, gọi là *vành đa thức của ẩn  $x$  lấy hệ tử trong  $A$* , hay vắn tắt là *vành đa thức của ẩn  $x$  trên  $A$* , ký hiệu  $A[x]$ . Các phần tử của  $A[x]$  gọi là các đa thức của ẩn  $x$  lấy hệ tử trong  $A$  và thường ký hiệu là  $f(x), g(x), \dots$

Trong một đa thức  $f(x) = a_0x^0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , các  $a_i$ , với  $i = 0, 1, \dots, n$  gọi là các hệ tử của đa thức, các  $a_ix^i$  gọi là các hạng tử của đa thức, đặc biệt  $a_0x^0 = a_0$  gọi là *hạng tử tự do*.

## 1.2. VÀNH ĐA THỨC NHIỀU ẨN

**Định nghĩa 2.1.** Giả sử  $A$  là một vành giao hoán có đơn vị. Ta đặt

$$A_1 = A[x_1], \quad A_2 = A_1[x_2], \quad \dots \quad A_n = A_{n-1}[x_n]$$

Vành  $A_n = A_{n-1}[x_n]$  được kí hiệu  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  và gọi là vành đa thức của  $n$  ẩn  $x_1, \dots, x_n$  lấy hệ tử trong  $A$ . Mỗi phần tử của  $A_n$  gọi là một đa thức của  $n$  ẩn  $x_1, \dots, x_n$  lấy hệ tử trong  $A$  và thường kí hiệu là  $f(x_1, \dots, x_n)$  hay  $g(x_1, \dots, x_n) \dots$

Từ định nghĩa trên ta có dãy vành:  $A_0 = A \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$

Trong đó  $A_{i-1}$  là vành con của vành  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Từ tính chất của hai phép toán trong một vành và bằng quy nạp ta chứng minh được mọi đa thức

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  đều có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & c_1 x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_n^{a_{1n}} + c_2 x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_n^{a_{2n}} \\ & + \dots + c_m x_1^{a_{m1}} x_2^{a_{m2}} \dots x_n^{a_{mn}} \end{aligned}$$



với  $c_i \in A$ ,  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , là những số tự nhiên và  $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \neq (a_{j1}, \dots, a_{jn})$  khi  $i \neq j$ ; các  $c_i$  gọi là các hệ tử,  $c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots x_n^{a_{in}}$  gọi là các hạng tử của đa thức  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Đa thức  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  khi và chỉ khi các hệ tử của nó bằng không tất cả.

### 1.3. ĐA THỨC ĐỐI XỨNG VÀ CÔNG THỨC VIÈTE

#### 1.3.1. Đa thức đối xứng

**Định nghĩa 3.1.** Giả sử  $A$  là một vành giao hoán có đơn vị,  $f(x_1, \dots, x_n)$  là một đa thức của vành  $A[x_1, \dots, x_n]$ . Ta nói  $f(x_1, \dots, x_n)$  là một đa thức đối xứng của  $n$  ẩn nếu  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)})$ , với mọi phép thế  $\tau$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

trong đó  $f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)})$  có được từ  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bằng cách trong  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  thay  $x_i$  bởi  $x_{\tau(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Định lý 3.1.** Tập con gồm các đa thức đối xứng của vành  $A[x_1, \dots, x_n]$  là một vành con của vành  $A[x_1, \dots, x_n]$ .

Các đa thức

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$$

...

$$\sigma_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

...

$$\sigma_{n-1} = x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + \dots + x_2 x_3 \dots x_n$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

là các đa thức đối xứng và gọi là các đa thức đối xứng cơ bản đối với  $n$  ẩn  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Giả sử  $g(x_1, \dots, x_n)$  là một đa thức của  $A[x_1, \dots, x_n]$ , phần tử của  $A[x_1, \dots, x_n]$  có được bằng cách trong  $g(x_1, \dots, x_n)$  thay  $x_1$  bởi  $\sigma_1$ ,  $x_2$  bởi  $\sigma_2$ , ...,  $x_n$  bởi  $\sigma_n$  gọi là một đa thức của các đa thức đối xứng cơ bản, kí hiệu là  $g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ .

Vì  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  là những đa thức đối xứng nên  $g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  cũng là một đa thức đối xứng theo định lý 3.1.

### 1.3.2. Công thức Viète

Cho đa thức bậc  $n$ :

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k} + \dots + a_n \quad (1.3)$$

lấy hệ tử trong trường  $T$ . Giả sử  $f(x)$  có trong  $T$  hoặc trong một mở rộng nào đó của  $T$ , tức là một trường nào đó chứa  $T$  làm một trường con,  $n$  nghiệm  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Khi đó ta có :

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \quad (1.4)$$

Khai triển về phải và so sánh các hệ tử của các lũy thừa giống

nhau trong (1.3) và (1.4) ta sẽ được các công thức sau và gọi là công thức Viète đối với đa thức bậc  $n$ .

$$\frac{a_1}{a_0} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

....

$$\frac{a_k}{a_0} = (-1)^k \cdot \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}$$

....

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

Chú ý rằng vế phải của công thức Viète là những đa thức đối xứng cơ bản đối với các biến  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

## Chương 2

### MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA CÔNG THỨC VIÈTE

#### 2.1. ỨNG DỤNG CÔNG THỨC VIÈTE TRONG CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ

**Bài toán:** Cho hàm số  $y = x^4 - 6x^2 + 4x + 6$ .

Xét tam giác mà các đỉnh là các điểm cực trị của hàm số nói trên. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác ấy là gốc tọa độ.

**Giải**

Giả sử  $M_i(x_i; y_i)$  là các điểm cực trị với  $i = 1, 2, 3$

$G(x_G; y_G)$  là trọng tâm của tam giác  $M_1M_2M_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$$

$x_i$  là nghiệm của phương trình bậc ba:  $y' = 4x^3 - 6x + 4 = 0$ .

Áp dụng công thức Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow x_G = 0$$

Tính  $y_i$ :  $y'_i(x_i) = 0$

$$y = \frac{y'}{4}x - 3(x^2 - x - 2) \quad (\text{chia } y \text{ cho } y')$$

$$\Rightarrow y_i = y(x_i) = -3(x_i^2 - x_i - 2)$$

$$\begin{aligned} y_G &= -\left[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) - 6\right] \\ &= -\left[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 6\right] = 0 \end{aligned}$$

Vậy  $G(0;0) \Leftrightarrow G \equiv O$  gốc tọa độ.

## 2.2. ỨNG DỤNG CÔNG THỨC VIÈTE TRONG CÁC BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

**Bài toán:** [Đề tuyển sinh ĐH – CĐ khối A, năm 2006]

Cho hai số thực thay đổi  $x \neq 0, y \neq 0$  thỏa mãn :

$$(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ .

**Giải**

Đặt  $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = m$

Với  $x \neq 0, y \neq 0$ , xét hệ phương trình:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = m \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{(xy)^3} = m \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{xy(x+y)^2}{(xy)^3} = m \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x+y)xy = (x+y)^2 - 3xy \\ \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = m \end{cases} \quad (2.1) \end{aligned}$$

Đặt  $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$

Theo công thức Viète để  $x, y$  sẽ là hai nghiệm thực của phương trình  $t^2 - St + P = 0$  thì  $S, P$  phải thỏa mãn điều kiện  $S^2 \geq 4P$ .

$$(2.1) \Leftrightarrow \begin{cases} SP = S^2 - 3P \\ \left(\frac{S}{P}\right)^2 = m \end{cases} \quad (2.2)$$

Hệ (2.1) có nghiệm  $x \neq 0, y \neq 0 \Leftrightarrow$  hệ (2.2) có nghiệm  $(S; P)$  thỏa mãn:  $S^2 \geq 4P$ .

$$\text{Do } SP = x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0, \forall x \neq 0, y \neq 0$$

Từ đó :

- Nếu  $m \leq 0$  thì hệ (2.1) vô nghiệm

- Nếu  $m > 0$  thì từ phương trình

$$\left(\frac{S}{P}\right)^2 = m \Leftrightarrow \frac{S}{P} = \sqrt{m} \Rightarrow S = \sqrt{m}.P$$

Thay vào phương trình đầu của hệ (2.2)

Ta được:

$$\sqrt{m}.P^2 = m.P^2 - 3P \Leftrightarrow (m - \sqrt{m})P = 3 \quad (SP > 0, P \neq 0)$$

Để có  $P$  từ phương trình này thì:

$$m - \sqrt{m} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \quad (m > 0)$$

$$\text{Vậy } P = \frac{3}{\sqrt{m}(\sqrt{m} - 1)} \Rightarrow S = \frac{3}{\sqrt{m} - 1}$$

Hệ (2.2) có nghiệm  $(S; P)$  thỏa mãn  $S^2 \geq 4P$  khi và chỉ

$$\text{khi : } \left(\frac{3}{\sqrt{m} - 1}\right)^2 \geq \frac{12}{\sqrt{m}(\sqrt{m} - 1)}$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq \frac{4(\sqrt{m}-1)^2}{\sqrt{m}(\sqrt{m}-1)}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{m} \geq 4(\sqrt{m}-1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 < m \leq 16 \quad (m \neq 1)$$

Vậy giá trị lớn nhất  $\max A = 16$ .

### 2.3. ỨNG DỤNG CÔNG THỨC VIỆT TRONG CÁC BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

**Bài toán:** Giải phương trình sau :

$$\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2 \quad (2.3)$$

**Giải**

Đặt  $u = \sqrt[3]{7x+1}, \quad v = -\sqrt[3]{x^2-x-8}, \quad w = \sqrt[3]{x^2-8x-1}$

Đặt 
$$\begin{cases} a = u + v + w \\ b = uv + vw + wu \\ c = uvw \end{cases}$$

Theo giả thiết, ta có :

$$u + v + w = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

và  $u^3 + v^3 + w^3 = 8$

Mặt khác  $(u + v + w)^3 = a^3$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + w^3 + 3u^2v + 3u^2w + 3v^2u + 3v^2w + 3w^2u + 3w^2v + 6uvw = a^3$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + w^3 = a^3 - (3u^2v + 3u^2w + 3v^2u + 3v^2w + 3w^2u + 3w^2v + 9uvw) + 3uvw$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + w^3 = a^3 - 3uv(u+v+w) - 3vw(u+v+w) - 3wu(u+v+w) + 3uvw$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + w^3 = a^3 - 3(u+v+w)(uv+vw+wu) + 3uvw$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + w^3 = a^3 - 3ab + 3c$$

$$\Rightarrow a^3 - 3ab + 3c = 8 \Rightarrow c = 2b$$

Theo công thức Viète thì  $u, v, w$  là ba nghiệm của phương trình

$$: \quad X^3 - 2X^2 + bX - 2b = 0 \quad (2.4)$$

$$\Leftrightarrow (X-2)(X^2+b) = 0$$

Ta nhận thấy phương trình (2.4) có nghiệm  $X=2$ .

Do tính chất đối xứng nên  $u, v, w$  có thể nhận giá trị 2 đó.

i, Trường hợp  $u = 2$

$$\text{Ta có : } 7x+1 = 8 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay giá trị  $x = 1$  vào phương trình đầu ta thấy giá trị  $x = 1$  nghiệm đúng phương trình đã cho.

ii, Trường hợp  $v = 2$

$$\text{Ta có : } -x^2+x+8 = 8 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Thay giá trị  $x = 0$  vào phương trình đầu ta thấy giá trị  $x = 0$  nghiệm đúng phương trình đã cho.

iii, Trường hợp  $w = 2$

$$\text{Ta có : } x^2-8x-1 = 8 \Leftrightarrow x^2-8x-9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 9 \end{cases}$$



Thay giá trị  $x = -1$  và  $x = 9$  vào phương trình đầu ta thấy giá trị  $x = -1$  và  $x = 9$  đều nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy phương trình (2.3) có 4 nghiệm :  $S = \{-1; 0; 1; 9\}$ .

## 2.4. ỨNG DỤNG CÔNG THỨC VIỆTE TRONG CÁC BÀI TOÁN GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

**Bài toán :** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 9 \\ 2xy - 6yz - 3xz = 27 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} - \frac{1}{3z} = 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

**Giải**

Hệ phương trình (2.5) không phải là hệ đối xứng theo  $x, y, z$ .

Tuy nhiên nếu đặt  $u = x, v = 2y, w = -3z$ , thì ta có hệ đối xứng

$$\begin{cases} u + v + w = 9 \\ uv + vw + wu = 27 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Đặt  $a = u + v + w, b = uv + vw + wu, c = uvw$ .

$$\text{Khi đó hệ (2.6) trở thành } \begin{cases} a = 9 \\ b = 27 \\ \frac{b}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 27 \\ c = 27 \end{cases}$$

Áp dụng công thức Viète thì  $u, v, w$  là ba nghiệm của phương trình :  $t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = 0 \Leftrightarrow (t-3)^3 = 0$

Vậy ta có  $t_1 = t_2 = t_3 = 3$  nên  $u = v = w = 3$ .

Từ đó ta tìm được nghiệm  $(x; y; z)$  của hệ (2.5) là:

$$\begin{aligned} & \left(-1; \frac{3}{2}; 3\right), \left(-1; 3; \frac{3}{2}\right), \left(3; -1; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; 3; -1\right), \\ & \left(3; \frac{3}{2}; -1\right), \left(\frac{3}{2}; -1; 3\right). \end{aligned}$$

## 2.5. ỨNG DỤNG CÔNG THỨC VIỆT TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**Bài toán:** Cho phương trình  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có ba nghiệm dương  $x_1, x_2, x_3$ .

Chứng minh rằng  $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq -\frac{b^3 c^2}{81a^5}$

**Giải**

Theo công thức Viète ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

Bất đẳng thức Bunyakovski cho ta :

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \Leftrightarrow 0 < \frac{c}{a} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (2.7)$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 \leq 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \Leftrightarrow 0 < \frac{b^2}{3a^2} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (2.8)$$

Từ (2.7) và (2.8) ta suy ra:  $0 < \frac{b^2c}{3a^3} \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski ta lại có :

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 &\leq (1+1+1)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) \\ \Rightarrow 0 < \frac{b^2c}{9a^3} &\leq x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Vì  $x_1, x_2, x_3 > 0$  nên suy ra :

$$\begin{aligned} (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)^2 &= \left( x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_1^{\frac{7}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{7}{2}} + x_3^{\frac{1}{2}} \cdot x_3^{\frac{7}{2}} \right)^2 \\ &\leq (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Từ (2.9) và (2.10) ta được :

$$\begin{aligned} \frac{b^4c^2}{81a^6} &\leq -\frac{b}{a}(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) \\ \Leftrightarrow -\frac{b^3c^2}{81a^5} &\leq x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta có : } x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq -\frac{b^3c^2}{81a^5}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a}.$$

## 2.6. ỨNG DỤNG CÔNG THỨC VIỆT TRONG ĐA THỨC

**Bài toán:** Giả sử một trong các nghiệm của đa thức

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  (với  $a, b, c \in \mathbf{Z}$ ) bằng tích của hai nghiệm kia.

Chứng minh rằng  $2P(-1)$  chia hết cho  $P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))$ .

**Giải**

Gọi  $x_1, x_2, x_3$  là ba nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Theo giả thiết của bài toán một trong các nghiệm bằng tích của hai nghiệm kia, giả sử  $x_3 = x_1x_2$ .

Áp dụng công thức Viète ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_1x_2 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_1x_2 + x_1x_2x_1 = b \\ x_1x_2x_1x_2 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_1x_2 = -a \\ x_1x_2(1 + x_1 + x_2) = b \\ x_1^2x_2^2 = -c \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } b - c = x_1x_2(1 + x_1 + x_2 + x_1x_2) = x_1x_2(1 - a)$$

i, Với  $a \neq 1$  thì  $x_1x_2 = \frac{b-c}{1-a}$  là số hữu tỉ.

Mà  $x_1^2x_2^2 = -c$  là số nguyên do đó  $x_1x_2$  cũng là số nguyên.

Ta có

$$\begin{aligned} P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0)) &= (1 + a + b + c) + (-1 + a - b + c) - 2(1 + c) \\ &= -2 + 2a = -2(1 - a) = -2(1 + x_1 + x_2 + x_1x_2) \\ &= -2(1 + x_1)(1 + x_2) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 2P(-1) &= 2(-1 + a - b + c) \\ &= -2[-1 - x_1 - x_2 - x_1x_2 - x_1x_2(1 + x_1 + x_2) - x_1^2x_2^2] \\ &= -2(1 + x_1x_2)(1 + x_1)(1 + x_2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Từ (2.11) và (2.12) ta có:

$$2P(-1) = (1 + x_1x_2)[P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))].$$

$$\Rightarrow \frac{2P(-1)}{P(1)+P(-1)-2(1+P(0))} = 1+x_1x_2.$$

Vì  $x_1x_2$  là số nguyên nên  $1+x_1x_2$  cũng là số nguyên.

Do đó  $2P(-1)$  chia hết cho  $P(1)+P(-1)-2(1+P(0))$ .

ii, Với  $a=1$  thì  $x_1+x_2+x_1x_2=-1 \Leftrightarrow 1+x_1+x_2+x_1x_2=0$

$$\Leftrightarrow (1+x_1)(1+x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

Suy ra  $P(x)$  có một nghiệm bằng  $-1$ .

Hay  $P(-1)=0 \Rightarrow 2P(-1)=0$ .

Do đó  $2P(-1)$  chia hết cho  $P(1)+P(-1)-2(1+P(0))$ .

Vậy số  $2P(-1)$  chia hết cho số  $P(1)+P(-1)-2(1+P(0))$

với  $a, b, c \in \mathbf{Z}$ .

## 2.7. ỨNG DỤNG CÔNG THỨC VIỆT TRONG HÌNH HỌC

**Bài toán:** Cho Parabol  $(P): y^2 = 4x$ . Một đường thẳng bất kỳ đi qua tiêu điểm của Parabol đã cho và cắt Parabol tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ  $A$  và  $B$  đến trục hoành là một đại lượng không đổi.

**Giải**

Parabol  $(P): y^2 = 2.2x$  có tham số tiêu  $p=2$  và tiêu điểm

$F(1; 0)$ .

Gọi đường thẳng đi qua tiêu điểm  $F(1; 0)$  của Parabol là  $(d)$ .

i, Đường thẳng  $(d)$  song song với trục  $Oy \Rightarrow (d): x = 1$ .

Lúc đó  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm  $A(1; -2)$  và  $B(1; 2)$ .

$$\Rightarrow AF \cdot BF = 2 \cdot 2 = 4.$$

ii, Đường thẳng  $(d)$  không song song với trục  $Oy$ , khi đó đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = k(x-1)$ , với  $k \neq 0$  (vì  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt).

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  với  $(P)$  là :

$$k^2(x-1)^2 = 4x \Leftrightarrow k^2x^2 - 2(k^2+2)x + k^2 = 0$$

Ta có  $\Delta' = 4k^2 + 4 > 0, \forall k \neq 0$ . Do đó  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.

Gọi  $x_1, x_2$  lần lượt là hoành độ của  $A$  và  $B$ .

Như vậy  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ , với  $\begin{cases} y_1 = k(x_1 - 1) \\ y_2 = k(x_2 - 1) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } d(A; Ox) \cdot d(B; Ox) &= |y_1 \cdot y_2| = |k^2(x_1 - 1)(x_2 - 1)| \\ &= |k^2[x_1x_2 + 1 - (x_1 + x_2)]| \end{aligned}$$

Theo công thức Viète, ta có :  $\begin{cases} x_1x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = \frac{2(k^2 + 2)}{k^2} \end{cases}$

$$\text{Nên } |y_1 \cdot y_2| = \left| k^2 \left[ 1 + 1 - \frac{2(k^2 + 2)}{k^2} \right] \right| = |-4| = 4.$$

Vậy tích các khoảng cách từ  $A$  và  $B$  đến trục hoành là một đại lượng không đổi.

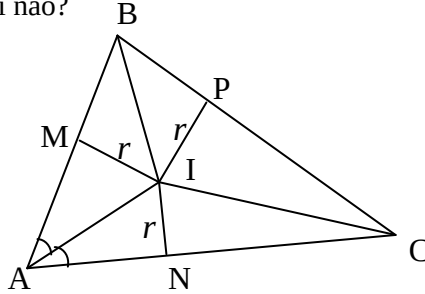
## 2.8. ỨNG DỤNG CÔNG THỨC VIÈTE TRONG CÁC BÀI TOÁN LƯỢNG GIÁC

**Bài toán:** Cho  $p, r, R$  lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Chứng minh rằng :  $p^2 \geq 3r^2 + 12r.R$ .

Dấu bằng xảy ra khi nào?

**Giải**



Xét  $\triangle AMI$  vuông tại  $M$ , ta có  $\cot \frac{A}{2} = \frac{AM}{IM}$

$$\Rightarrow AM = IM \cdot \cot \frac{A}{2} = r \cdot \cot \frac{A}{2}$$

$$\text{Và } p - a = \frac{b + c - a}{2} = \frac{AN + CN + AM + BM - CP - BP}{2}$$

Mà  $AM = AN$ ,  $BM = BP$ ,  $CN = CP$  nên  $p - a = AM = r \cdot \cot \frac{A}{2}$

$$\Rightarrow r = \frac{(p - a)}{\cot \frac{A}{2}} = (p - a) \tan \frac{A}{2}$$

$$\text{Ta có } \sin A = \frac{a}{2R} = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} \quad (2.13)$$

$$\text{Thay } \tan \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \text{ vào (2.13): } \frac{a}{2R} = \frac{\frac{2r}{p-a}}{1 + \frac{r^2}{(p-a)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{2r(p-a)}{(p-a)^2 + r^2}$$

$$\Leftrightarrow a(p^2 - 2pa + a^2) + ar^2 = 4rRp - 4rRa$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 2pa^2 + (p^2 + r^2 + 4rR)a - 4rRp = 0$$

Tương tự với  $b, c$  và ta có  $a, b, c$  là nghiệm của phương trình :  $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4rR)x - 4rRp = 0$

$$\text{Theo công thức Viète : } \begin{cases} a + b + c = 2p \\ ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4rR \end{cases}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \geq (ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow 4p^2 \geq 3(p^2 + r^2 + 4rR)$$

$$\Rightarrow p^2 \geq 3r^2 + 12rR.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$$

$\Rightarrow a = b = c$  hay  $ABC$  là tam giác đều.



**Các bài toán tương tự**

1. Cho hàm số  $y = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$ . Xác định  $a$  để đường thẳng  $y = x$  cắt đồ thị hàm số tại ba điểm  $A, B, C$  với  $AB = BC$ .

2. Cho hai số thực không âm  $x, y$  thỏa mãn điều kiện  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ .  
 Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức  $Q = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+9}$ .

3. Giải phương trình:  $\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = 3$ .

4. Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4 \end{cases}$$

5. Gọi  $m, n, p$  là ba nghiệm của phương trình bậc ba  $ax^3 + bx^2 + cx - a = 0$ . Chứng minh rằng :

$$m^2 + n^2 + p^2 \geq \frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{\sqrt{3}}{n} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{p}.$$

6. Cho ba số nguyên  $a, b, c$ , biết rằng  $a > 0$ , còn đa thức  $ax^2 + bx + c$  có hai nghiệm khác nhau trên khoảng  $(0; 1)$ . Chứng minh rằng  $a \geq 5$ . Tìm ít nhất một cặp số  $b, c$  để  $a = 5$ .

7. Chứng minh rằng:  $\tan^6 20^\circ + \tan^6 40^\circ + \tan^6 80^\circ = 33273$ .

## KẾT LUẬN

Luận văn “ỨNG DỤNG CÔNG THỨC VIÈTE VÀO GIẢI TOÁN THUỘC CHƯƠNG TRÌNH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG” đã thực hiện được các vấn đề sau:

1. Xây dựng vành đa thức một ẩn, nhiều ẩn lấy hệ tử trong một trường. Đặc biệt là vành các đa thức đối xứng, từ đó giới thiệu công thức Viète tổng quát.

2. Trên cơ sở các tài liệu toán học, đặc biệt tài liệu về công thức Viète, đa thức và đa thức đối xứng, luận văn đã sưu tầm, hệ thống và phân loại được một số lớp bài toán giải được bằng công thức Viète. Cụ thể là: các bài toán liên quan đến hàm số, bài toán tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất, các bài toán giải phương trình, hệ phương trình, chứng minh bất đẳng thức, các bài toán đa thức, các bài toán hình học, lượng giác.

3. Đối với mỗi lớp bài toán, ngoài những ví dụ minh họa nhằm làm sáng tỏ khả năng ứng dụng phong phú và linh hoạt của công thức Viète, còn có các bài toán tương tự từ dễ đến khó dành cho học sinh các lớp chọn, lớp chuyên.

Hy vọng rằng nội dung của luận văn còn tiếp tục được hoàn thiện và mở rộng hơn nữa nhằm thể hiện sự ứng dụng đa dạng và hiệu quả của công thức Viète.