

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

VÕ VĂN TÙNG

ỨNG DỤNG CỦA CỰC TRỊ VÀO VIỆC
GIẢI CÁC BÀI TOÁN PHỔ THÔNG

CHUYÊN NGÀNH : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ : 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. LÊ HOÀNG TRÍ

Phản biện 1: TS. NGUYỄN NGỌC CHÂU

Phản biện 2: PGS.TS. NGUYỄN GIA ĐỊNH

Luận văn được bảo vệ tại hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 17 tháng 12 năm 2011.

** Có thể tìm hiểu luận văn tại:*

- Trung tâm Thông tin - Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

MỞ ĐẦU

1. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Các bài toán cực trị và những vấn đề liên quan đến nó là một phần rất quan trọng của đại số, hình học và giải tích toán học. Các bài toán cực trị có vị trí đặc biệt trong toán học, nhất là trong chương trình phổ thông.

Tuy nhiên đây là một dạng toán khó và có nhiều cách giải, hơn nữa, trong chương trình giảng dạy ở bậc phổ thông các phương pháp tìm cực trị, nhất là các bài toán tìm cực trị trong đại số và hình học chưa được trình bày một cách tường minh, trong khi đó học sinh trung học còn hiểu mơ hồ về cực trị và còn lúng túng khi giải các bài toán liên quan đến cực trị.

Do đó tôi chọn đề tài “ **Ứng dụng của cực trị vào việc giải các bài toán phổ thông** ” làm luận văn tốt nghiệp của mình.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

- Nghiên cứu tổng quan về cực trị.
- Nghiên cứu các định lý về điều kiện cần, điều kiện đủ để hàm số có cực trị, định lý Lagrange về cực trị có điều kiện
- Ứng dụng các tính chất của cực trị vào việc giải một số bài toán trong chương trình toán học phổ thông, các bài toán thi học sinh giỏi các cấp.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

3.1. Đối tượng nghiên cứu

Đề tài nghiên cứu và làm rõ các định lý cũng như các tính chất của cực trị, từ đó vận dụng vào việc giải các bài toán trong chương trình phổ thông, các bài toán thi học sinh giỏi các cấp.

3.2. Phạm vi nghiên cứu

- Đề tài chỉ tập trung nghiên cứu về cực trị của hàm hai biến, ba biến, đặc biệt là sử dụng điều kiện đủ của cực trị (của hàm một biến số) để tìm cực trị của một biểu thức đại số, lượng giác, giải tích và đặc biệt là các bài toán cực trị của hình học ở bậc học phổ thông.

- Trong đề tài chỉ nêu những ứng dụng của cực trị vào toán học phổ thông, trong kiến trúc và những ứng dụng khác của cực trị đề tài không đề cập đến.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Đề tài này đã sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp nghiên cứu tư liệu gồm: Sách giáo khoa phổ thông trung học, các tài liệu tham khảo dành cho giáo viên, tài liệu về cực trị có liên quan, các tài liệu về bất đẳng thức và các tài liệu về tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trong chương trình phổ thông, tạp chí toán học tuổi trẻ, các tài liệu về nghiên cứu giáo dục có liên quan.
- Phương pháp tiếp cận lịch sử, sưu tập, phân tích, tổng hợp tư liệu và tiếp cận hệ thống.
- Thực nghiệm sư phạm ở trường phổ thông, vận dụng các kiến thức về cực trị để khảo sát cực trị của hàm số và điều đặc biệt của đề tài là đưa các bài toán cực trị ở bậc học phổ thông về dạng khảo sát cực trị của hàm một biến.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN

5.1. Ý nghĩa khoa học

- Đề tài góp phần giải quyết một lớp bài tập toán học phổ thông nhờ ứng dụng của cực trị, đưa ra phương pháp tìm cực trị, phương pháp chứng minh bất đẳng thức, góp phần giúp học sinh và giáo viên có thêm phương pháp để giải quyết các bài toán về cực trị.

5.2. Ý nghĩa thực tiễn

- Làm tài liệu tham khảo thêm cho những người yêu thích các bài toán về cực trị.
- Giúp cho các giáo viên có thêm tài liệu để dạy bồi dưỡng học sinh về chuyên đề cực trị, giá trị lớn nhất và bất đẳng thức.
- Giúp cho học sinh có thêm tài liệu để tự học.

6. CẤU TRÚC LUẬN VĂN

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm các chương chính sau.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

- Chương này sẽ trình bày một số kiến thức tổng quan về cực trị cần thiết có liên quan đến luận văn như: Trình bày các định nghĩa về cực trị, các định lý về cực trị, cực trị có điều kiện của các hàm nhiều biến, chứng minh các định lý này: điều kiện cần để hàm có cực trị, điều kiện đủ để hàm có cực trị, định lý Lagrange về cực trị có điều kiện và tập trung trình bày hai vấn đề lớn :

1. Khảo sát cực trị của hàm nhiều biến số (cực trị tự do):

2. Khảo sát cực trị có điều kiện (cực trị ràng buộc).

Chương 2. Ứng dụng lý thuyết cực trị để khảo sát cực trị và tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm nhiều biến.

Trong chương này tập trung trình bày

- Khảo sát cực trị địa phương của hàm hai biến

- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm hai biến trên một miền D xác định.

- Dùng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị

Chương 3. Sử dụng điều kiện đủ để hàm số một biến số có cực trị để tìm ra các phương pháp giải các bài toán cực trị ở chương trình phổ thông

Trong chương này đề tài chủ yếu nghiên cứu tập trung các bài toán Trong chương này tập trung trình bày năm vấn đề lớn sau :

- Kiến thức lý thuyết (trong chương trình phổ thông):

- Các bài toán tìm cực trị trong đại số dạng phân thức đại số

- Các bài toán tìm cực trị trong lượng giác .

- Các bài toán tìm cực trị khác thường gặp trong đại số, giải tích

- Các bài toán tìm cực trị khác thường gặp trong hình học

Chương 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1. 1. Khảo sát cực trị của hàm nhiều biến số (cực trị tự do):

1.1.1. Định nghĩa: Cho tập U và hàm $f:U \rightarrow \mathbb{R}$. Điểm $a \in U$ được gọi là điểm cực trị địa phương của hàm f nếu tồn tại một số $r > 0$ sao cho hình cầu $B(a,r) \subset U$ và với mọi $x \in B(a,r)$ thì hiệu số $f(x) - f(a)$ có dấu không đổi.

Nếu $f(x) - f(a) \leq 0, \forall x, x \in B(a,r)$ thì a là điểm cực đại của hàm f

Nếu $f(x) - f(a) \geq 0, \forall x, x \in B(a,r)$ thì a là điểm cực tiểu của hàm f

1.1.2. Định lý (Fermat)

1.1.3. Dạng toàn phương

1.1.3.1. Định nghĩa 1

Giả sử $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp $n \times n$ đối xứng, tức là, $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j = 1, 2, \dots, n$

Dạng toàn phương ứng với ma trận này là hàm số :

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Ta có các kết quả sau đây:

- Nếu $\varphi(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$ thì ta nói φ là dạng toàn phương xác định dương.
- Nếu $\varphi(x) \geq 0$ với mọi $x \neq 0$ thì ta nói φ là dạng toàn phương nửa xác định dương (hay dạng toàn phương dương).
- Nếu $\varphi(x) < 0$ với mọi $x \neq 0$ thì ta nói φ là dạng toàn phương xác định âm.
- Nếu $\varphi(x) \leq 0$ với mọi $x \neq 0$ thì ta nói φ là dạng toàn phương nửa xác định âm (hay dạng toàn phương âm).
- Nếu tồn tại $x \neq 0, y \neq 0$ sao cho $\varphi(x) > 0, \varphi(y) < 0$ thì ta nói φ là

dạng toàn phương có dấu thay đổi. Ta kí hiệu $\Delta_k, k=1,2,\dots,n$ là định thức của ma trận cấp $k \times k$ ứng với k hàng và k cột đầu của A . Ta có các kết quả sau.

1.1.3.2. Định nghĩa 2

1.1.3.3. **Bổ đề** Nếu φ là một dạng toàn phương xác định dương thì tồn tại số $\lambda > 0$ sao cho : $\varphi(x) \geq \lambda \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

1.1.3.4. Định lý (điều kiện đủ để hàm có cực trị)

Cho U là tập hợp mở trong $\mathbb{R}^n, f \in C^2(U)$. Giả sử $a \in U$ là điểm dừng của f , tức là $Df(a) = 0$. Khi đó :

i) Nếu $d^2 f(a)$ là dạng toàn phương xác định dương, thì a là một điểm cực tiểu của f .

2i) Nếu $d^2 f(a)$ là dạng toàn phương xác định âm, thì a là một điểm cực đại của f .

3i) Nếu $d^2 f(a)$ đổi dấu thì hàm f không có cực trị.

Xét trường hợp đặc biệt $n = 2$.

Kí hiệu : $A = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), C = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(a)$. Khi đó

i) Nếu $A > 0$ và $AC - B^2 > 0$ thì dạng toàn phương $d^2 f(a)$ là xác định dương và hàm f đạt cực tiểu a .

2i) Nếu $A < 0$ và $AC - B^2 > 0$ thì dạng toàn phương $d^2 f(a)$ là xác âm và hàm f đạt cực tiểu a .

3i) Nếu $AC - B^2 < 0$ thì vì định thức cấp hai (chẵn) là số âm, theo định lý Sylvester trong đại số, dạng toàn phương $d^2 f(a)$ không xác định dấu, do đó điểm a không là cực trị của hàm f .

4i) Nếu $AC - B^2 = 0$ thì ta chưa thể kết luận được gì, cần tiếp tục xét thêm

1.2. Khảo sát cực trị có điều kiện (cực trị ràng buộc)

1.2.1. Định nghĩa 1

i) Cho tập hợp mở $U \subset \mathbb{R}^2$ và hàm $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ta xét bài toán tìm cực trị của hàm f khi các biến x, y thỏa mãn phương trình sau

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (1.1)$$

Ta nói rằng tại điểm $(x_0, y_0) \in U$ thỏa mãn điều kiện $\varphi(x_0, y_0) = 0$ hàm f đạt cực đại có điều kiện (tương ứng đạt cực tiểu có điều kiện) với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ nếu tồn tại một lân cận $V \subset U$ của (x_0, y_0) sao cho

$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (tương ứng $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$) với mọi $(x, y) \in V$ thỏa mãn điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.

ii) Điểm (x_0, y_0) được gọi là điểm cực trị có điều kiện của hàm $f(x, y)$ còn điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ được gọi là điều kiện ràng buộc của bài toán. Nếu trong một lân cận của điểm (x_0, y_0) từ hệ thức $\varphi(x, y) = 0$ ta xác định được hàm số $y = y(x)$ thì rõ ràng $f(x_0, y(x_0))$ là cực trị địa phương của hàm một biến $g(x) = f(x, y(x))$. Như vậy, trong trường hợp này bài toán tìm cực trị ràng buộc đưa về bài toán tìm cực trị tự do của hàm $g(x) = f(x, y(x))$. Để minh họa, ta xét bài toán sau

1.2.2. Bài toán 1 Tìm cực trị của hàm số :

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 < 1, \text{ với điều kiện } x + y - 1 = 0.$$

Từ hệ thức $x + y - 1 = 0$ ta suy ra : $y = 1 - x$. Thay vào biểu thức của f ta

$$\text{xét : } g(x) = f(x, y(x)) = \sqrt{1 - x^2 - (1 - x)^2} = \sqrt{2} \sqrt{x - x^2}.$$

Vậy, việc tìm cực trị có điều kiện được đưa về việc tìm cực trị địa phương của hàm số $g(x) = \sqrt{2} \sqrt{x - x^2}$ xác định với $x - x^2 \geq 0$ hay $0 \leq x \leq 1$.

Do đó, không phải lúc nào bài toán cực trị có điều kiện cũng đưa về được bài toán tìm cực trị tự do. Trong trường hợp đó ta dùng phương pháp nhân tử Lagrange được trình bày dưới đây.

1.2.3. Phương pháp nhân tử Lagrange

Giả sử (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm số $f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$, khi đó $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Ta giả thiết thêm rằng :

i) Các hàm $f(x, y)$ và $\varphi(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0) .

$$\text{ii) } \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Theo định lý về hàm ẩn trong một lân cận nào đó của điểm x_0 tồn tại duy nhất một hàm khả vi $y = y(x)$ thỏa mãn $\varphi(x, y(x)) = 0$ với mỗi x thuộc lân cận này và $y_0 = y(x_0)$. Khi đó hàm $g(x) = f(x, y(x))$ xác định và có đạo hàm liên tục trong một lân cận đó của điểm x_0 . Hơn nữa, tại điểm x_0 hàm số $g(x) = f(x, y(x))$ đạt cực trị địa phương.

Do đó: $\frac{dg}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0, y(x_0)) + \frac{df}{dy}(x_0, y(x_0))y'(x_0) = 0,$

$$\text{hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy = 0 \quad (1.2)$$

Mặt khác, ta cũng có :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)dy = 0 \quad (1.3)$$

Nhân hai vế của (1.3) với tham số λ (bây giờ tạm thời còn là tùy ý, chưa được xác định) rồi cộng từng vế các đẳng thức thu được với (1.2) ta có :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) \right] dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) \right] dy = 0.$$

Hệ thức này thỏa mãn với mọi λ , do đó nếu ta chọn λ sao cho :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (1.4)$$

10

$$\text{tức là } \lambda = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}, \text{ thì ta có } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0. \quad (1.5)$$

Số λ xác định như trên được gọi là nhân tử Lagrange. Như vậy điểm cực trị (x_0, y_0) của hàm f phải thỏa mãn điều kiện ràng buộc và các hệ thức

(1.4), (1.5). Còn trường hợp $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, ta cũng làm theo cách tương tự. Vì vậy ta có thể phát biểu lại kết quả trên dưới dạng định lí sau :

1.2.4. Định lí

1.2.5. Bài toán 2

1.2.6. Phương pháp nhân tử Lagrange (đối với hàm nhiều biến)

1.2.6.1. Định nghĩa 2

1.2.6.2. Định lý

1.2.6.3. Định lý

Cho tập hợp mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và các hàm $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên U ($m < n$). Cho $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in U$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ là các số thực thỏa mãn các hệ phương

$$\text{trình} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \text{và}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^0) + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x^0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x^0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x^0) + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x^0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}(x^0) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x^0) + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(x^0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(x^0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x - 1)(2x + 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y = 4y(y^2 - 1) = 4y(y - 1)(y + 1)$$

Giải hệ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, ta được các nghiệm

$$(0;0), (0;1), (0;-1), \left(\frac{1}{2};0\right), \left(\frac{1}{2};1\right), \left(\frac{1}{2};-1\right), \left(-\frac{1}{2};0\right), \left(-\frac{1}{2};1\right), \left(-\frac{1}{2};-1\right)$$

Ta được 9 điểm dừng:

$$M_0(0;0); M_1(0;1); M_2(0;-1); M_3\left(\frac{1}{2};0\right); M_4\left(\frac{1}{2};1\right)$$

$$M_5\left(\frac{1}{2};-1\right); M_6\left(-\frac{1}{2};0\right); M_7\left(-\frac{1}{2};1\right); M_8\left(-\frac{1}{2};-1\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 24x^2 - 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 12y^2 - 4$$

Tại $M_0(0;0)$ ta có : $A = -2, B = 0, C = -4$

$AC - B^2 = 8 > 0$ vậy M_0 là một điểm cực đại $f_{\max} = f(0;0) = 0$

Tại các điểm $M_1(0;1)$ và $M_2(0;-1)$ lúc đó $AC - B^2 < 0$ vậy M_1, M_2 không phải điểm cực trị của hàm f

Tại các điểm M_3, M_6 ta có $AC - B^2 = -8 < 0$, do đó f không đạt cực trị tại M_3, M_6 .

Tại các điểm M_4, M_5, M_7, M_8 ta có $AC - B^2 = 32 > 0$ do đó các điểm đó là điểm cực trị tại đó $A = 4 > 0$. Vậy tại các điểm đó là điểm cực tiểu

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{2};1\right) = f\left(\frac{1}{2};-1\right) = f\left(-\frac{1}{2};1\right) = f\left(-\frac{1}{2};-1\right) = \frac{-9}{8}$$

2.1.1.5. Bài toán 5 Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$

2.1.1.6. Bài toán 6

Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. ($a, b > 0$)

2.1.1.7. Bài toán 7 Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

2.1.1.8. Bài toán 8 Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2(x + 1) + y^3$

2.1.1.9. Bài toán 9 Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

Bài giải

Hàm số $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ xác định $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Giải hệ: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$, ta được các nghiệm: $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ và $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Tóm lại ta có 3 điểm tới hạn $M_0(0,0)$; $M_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Ta có $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 12x^2 - 4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 12y^2 - 4 \end{cases}$. Tại các điểm $M_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

ta có : $A = 20, B = 4, C = 20 \Rightarrow \begin{cases} AC - B^2 = 400 - 16 > 0 \\ A = 20 > 0 \end{cases}$.

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $M_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, và :

$$f_{\min} = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$$

Tại điểm M_0 , ta có $A = -4, B = 4, C = -4, AC - B^2 = 0$. Ta chưa kết luận ngay được. Ta có $f(0,0) = 0$

Ta xét dấu của hiệu $f(x, y) - f(0, 0)$ khi M chạy trong một lân cận của điểm M_0 .

Ta có : $f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4 - x^2) < 0 = f(0, 0), \forall x : 0 < |x| < 2$

$$f(x, x) = 2x^4 > 0 = f(0, 0), \forall x \neq 0$$

Vậy dấu của $f(x, y) - f(0, 0)$ thay đổi khi M chạy trong lân cận của M_0 .

Hàm số không đạt cực trị tại M_0

2.1.1.10. Bài toán 10 Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2 y^3 (3x + 2y + 1)$

2.1.2.1. Bài toán 11

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $f(x, y) = x^2 - y^2$, trên miền

D xác định bởi : $x^2 + y^2 \leq 4$

2.1.2.2. Bài toán 12

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $f(x, y) = x^2 + y^2$, trên miền

D xác định bởi : $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$

2.1.2.3. Bài toán 13

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $f(x, y) = x^2 y (4 - x - y)$, trên miền đóng D giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 0, x + y - 6 = 0$

2.1.2.4. Bài toán 14

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, trên miền đóng D giới hạn bởi các đường $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$

2.1.2.5. Bài toán 15

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)$, trên miền D xác định bởi: $x^2 + y^2 \leq 1$

2.1.2.6. Bài toán 16

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y),$$

giới hạn bởi các đường $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$

2.1.2.7. Bài toán 17

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x, y) = (a^2 - c^2)x^2 + (b^2 - c^2)y^2 + c^2 - [(a - c)x^2 + (b - c)y^2 + c]^2;$$

với $(a > b > c)$, trong miền D định bởi : $x^2 + y^2 \leq 1$

2.1.3. Dùng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị

2.1.3.1. Bài toán 18

Tìm cực trị của hàm : $f(x, y, z) = yz$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1, y + z = 0$.

Bài giải

Bước 1 .Ta lập hàm Lagrange

$\Phi(x, y, z) = yz + \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu(y + z)$ trong đó λ, μ là các hằng số.

Ta có : $\Phi'_x = 2\lambda x, \Phi'_y = z + 2\lambda y + \mu, \Phi'_z = y + \mu$

Bước 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \Phi'_x = 0 \\ \Phi'_y = 0 \\ \Phi'_z = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x = 0 \\ z + 2\lambda y + \mu = 0 \\ y + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

ta tìm được các bộ (x_0, y_0, z_0) ứng với λ_0, μ_0 như sau

$$\begin{cases} (x_0, y_0, z_0; \lambda_0, \mu_0) = (0, 1, -1; 1, -1) \\ (x_0, y_0, z_0; \lambda_0, \mu_0) = (0, -1, 1; 1, 1) \\ (x_0, y_0, z_0; \lambda_0, \mu_0) = (1, 0, 0; 0, 0) \\ (x_0, y_0, z_0; \lambda_0, \mu_0) = (-1, 0, 0; 0, 0) \end{cases}$$

Bước 3. Tính $d^2\Phi(x, y, z)$:

$d^2\Phi(x, y, z) = \Phi''_{xx}d^2x + \Phi''_{yy}d^2y + \Phi''_{zz}d^2z + 2\Phi''_{xy}dxdy + 2\Phi''_{xz}dxdz + 2\Phi''_{yz}dydz$
với λ, μ tương ứng.

$$\text{Do } x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow d(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Rightarrow 2xdx + 2ydy = 0 \quad (2.4)$$

- Xét bộ $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, -1)$ thì $(2.4) \Rightarrow 2ydy = 0 \Rightarrow dy = 0$

$$\text{Do } y + z = 0 \Rightarrow d(y + z) = 0 \Rightarrow dy + dz = 0 \Rightarrow dz = 0 \quad (\text{vì } dy = 0).$$

$$\text{Suy ra } d^2\Phi(x, y, z) = \Phi''_{xx}d^2x = 2\lambda d^2x = 2d^2x > 0$$

Vậy tại điểm $M_1(0, 1, -1)$ hàm số $f(x, y, z)$ đạt cực tiểu địa phương

- Xét bộ $(x_0, y_0, z_0) = (0, -1, 1)$ thì $(2.4) \Rightarrow 2ydy = 0 \Rightarrow dy = 0$

$$\text{Do } y + z = 0 \Rightarrow d(y + z) = 0 \Rightarrow dy + dz = 0 \Rightarrow dz = 0 \quad (\text{vì } dy = 0).$$

$$\text{Suy ra } d^2\Phi(x, y, z) = \Phi''_{xx}d^2x = 2\lambda d^2x = 2d^2x > 0$$

Vậy tại điểm $M_2(0, -1, 1)$ hàm số $f(x, y, z)$ đạt cực tiểu địa phương

- Xét bộ $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ ứng với $\lambda = 0, \mu = 0$

$$\text{Do } x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow d(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Rightarrow 2xdx + 2ydy = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{Vì } x = 1, y = 0; (2.5) \Rightarrow dx = 0$$

$$\text{Do } y + z = 0 \Rightarrow d(y + z) = 0 \Rightarrow dy + dz = 0 \Rightarrow dy = -dz.$$

$$\text{Suy ra } d^2\Phi(x, y, z) = 2\Phi''_{yz}dydz = 2dydz = -2d^2z < 0$$

Vậy tại điểm $M_3(1, 0, 0)$ hàm số $f(x, y, z)$ đạt cực đại địa phương

- Xét bộ $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 0, 0)$ ứng với $\lambda = 0, \mu = 0$

$$\text{Do } x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow d(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Rightarrow 2xdx + 2ydy = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{Vì } x = -1, y = 0; (2.6) \Rightarrow dx = 0$$

$$\text{Do } y + z = 0 \Rightarrow d(y + z) = 0 \Rightarrow dy + dz = 0 \Rightarrow dy = -dz.$$

$$\text{Suy ra } d^2\Phi(x, y, z) = 2\Phi''_{yz}dydz = 2dydz = -2d^2z < 0$$

Vậy tại điểm $M_4(1, 0, 0)$ hàm số $f(x, y, z)$ đạt cực đại địa phương

Cuối cùng ta cần chú ý rằng tập $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ là mặt trụ (đáy là đường tròn bán kính bằng 1, tâm là gốc tọa độ), còn tập $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 1\}$ là mặt phẳng. Giao của hai tập này là đường elip (E). Đó là tập compact. Từ các kết quả trên ta được

$$\max\{yz \mid (x, y, z) \in (E)\} = 0, \min\{yz \mid (x, y, z) \in (E)\} = -1$$

2.1.3.2. Bài toán 19

Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$, trong miền :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 8\}.$$

2.1.3.3 Bài toán 20

Cho hình cầu bán kính R. Hình hộp chữ nhật nào nội tiếp trong hình cầu ấy có thể tích lớn nhất

Chương 3

SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ CÓ CỰC TRỊ VÀ TÌM PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ Ở CHƯƠNG TRÌNH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Trong chương này chỉ ra một số phương pháp, giải quyết một số bài toán ở phổ thông và giải một số bài toán thi học sinh giỏi.

3.1. Kiến thức lý thuyết (trong chương trình phổ thông)

3.1.1. Định nghĩa 1 (Định nghĩa đạo hàm của hàm một biến)

3.1.2. Định nghĩa 2 (Định nghĩa cực trị địa phương của hàm một biến)

3.1.3. Điều kiện đủ (dấu hiệu) để hàm số có cực trị

3.1.3.1. Dấu hiệu 1

3.1.3.2. Dấu hiệu 2

3.1.4. Định lý (Fermat)

3.1.5. Định lý (Cauchy)

3.1.6. Định lý (Roll)

3.2. Bài toán vận dụng

Để giải loại toán này ta thường làm như sau:

Bước 1: Lập được hàm số dạng $y = f(x)$.

Bước 2: Tìm điều kiện của x , tìm miền khảo sát D

Bước 3: Khảo sát hàm số, lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên miền D , từ bảng biến thiên ta suy ra kết quả.

3.2.1. Các bài toán tìm cực trị trong đại số dạng phân thức đại số

3.2.1.1. Bài toán 1 Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}, x \in \mathbb{R}.$$

3.2.1.2. Bài toán 2 Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$y = f(x) = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}$$

3.2.1.3. Bài toán 3 Cho $x^2 + y^2 + xy = 1$ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = x^2 - xy + 2y^2$

3.2.1.4. Bài toán 4

Cho $2x^2 + y^2 + xy \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = x^2 + y^2$

3.2.1.5. Bài toán 5 Cho $x^2 + y^2 - xy = 1$ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = x^4 + y^4 - x^2y^2$

3.2.1.6. Bài toán 6 Cho $a^2 + b^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = \frac{2(a^2 + 6ab)}{1 + 2ab + b^2}$

3.2.2. Các bài toán tìm cực trị trong lượng giác

3.2.2.1. Bài toán 1 Tìm giá trị nhỏ nhất của của hàm số :

$$y = f(x) = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}, \text{ với } |x| < \pi$$

3.2.2.2. Bài toán 2 Tìm giá trị nhỏ nhất của của hàm số :

$$y = f(x) = \sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{1 + 2\sin x}$$

3.2.2.3. Bài toán 3 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$$

3.2.2.4. Bài toán 4 Cho $0 \leq \alpha \leq \pi$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{1 + \sin 2\alpha} + \sqrt{1 + \cos 2\alpha}$$

3.2.2.5. Bài toán 5 Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin 2x + 3\cos^2 x - \sin^2 x$$

3.2.2.6. Bài toán 6 Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{2 + \sin x - \cos x}{2 - \sin x + \cos x}$$

3.2.2.7. Bài toán 7 A,B,C là ba góc của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 3\cos A + 2(\cos B + \cos C)$

3.2.3. Các bài toán tìm cực trị khác thường gặp trong đại số, giải tích

3.2.3.1. Bài toán 1

Cho hàm số : $y = f(x) = \frac{x^2 + (\sin \alpha)x + |\sin \alpha| - 1}{x + 1}$ (C_α). Tìm α để (C_α)

có cực đại cực tiểu và khoảng cách giữa các điểm này lớn nhất.

3.2.3.2. Bài toán 2

Cho phương trình $x^2 - \frac{1}{2}mx + \frac{1}{12}m^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{m^2} = 0$, ($m \neq 0$) (2.1)

có nghiệm x_1, x_2 . Tìm GTLN, GTNN của biểu thức : $T = x_1^3 + x_2^3$.

3.2.3.3. Bài toán 3 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \text{ với } a, b \neq 0$$

3.2.3.4. Bài toán 4 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = xy + \frac{1}{xy}$ với

$x, y > 0$ và $x + y = 1$

3.2.3.5. Bài toán 5 Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $12 \geq 21ab + 2bc + 8ca$ (5.1).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$

Bài giải

Từ (5.1) ta suy ra: $\frac{12}{abc} \geq \frac{21ab + 2bc + 8ca}{abc} \Rightarrow 12 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \geq 21 \cdot \frac{1}{c} + 2 \cdot \frac{1}{a} + 8 \cdot \frac{1}{b}$

Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ bài toán chuyển thành :

Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $12xyz \geq 2x + 8y + 21z$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

Từ giả thiết $12xyz \geq 2x + 8y + 21z \Rightarrow z(12xy - 21) \geq 2x + 8y > 0$

Suy ra $x > \frac{7}{4y}$ (5.2). Do đó $A(x, y, z) \geq x + 2y + \frac{2x + 8y}{4xy - 7}$ (5.3)

Xét hàm số :

$f(x) = x + \frac{2x + 8y}{4xy - 7} = \frac{4x^2y - 5x + 8y}{4xy - 7}$, với biến $x > \frac{7}{4y}$ và y là tham số thực

dương ta có: $f'(x) = \frac{16x^2y^2 - 56xy - 32y^2 + 35}{(4xy - 7)^2}$

Trên khoảng $\left(\frac{7}{4y}; +\infty \right)$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \frac{7}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2 + 14}}{4y}$ và qua

x_0 thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 . Suy ra:

$$f(x) \geq f(x_0) = 2x_0 - \frac{5}{4y} \Rightarrow A(x, y, z) \geq f(x) + 2y \geq f(x_0) + 2y. \quad (5.4)$$

$$\text{Đặt : } g(y) = f(x_0) + 2y = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{1}{2y}\sqrt{32y^2 + 14}. \quad D_g = (0; +\infty) \quad (5.5)$$

Xét hàm số

$$g(y) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{1}{2y}\sqrt{32y^2 + 14}. \quad D_g = (0; +\infty).$$

Ta có : $g'(y) = 2 - \frac{9}{4y^2} - \frac{1}{2y^2}\sqrt{32y^2 + 14} + \frac{16}{\sqrt{32y^2 + 14}}$.

$$g'(y) = \frac{(8y^2 - 9)\sqrt{32y^2 + 14} - 28}{4y^2 \cdot \sqrt{32y^2 + 14}}$$

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow (8y^2 - 9)\sqrt{32y^2 + 14} - 28 = 0. \text{ Đặt } t = \sqrt{32y^2 + 14}, t > 0$$

$$\text{Phương trình trên trở thành } t^3 - 50t - 112 = 0 \Leftrightarrow (t - 8)(t^2 + 8t + 14) = 0$$

Phương trình này có duy nhất một nghiệm dương $t = 8 \Rightarrow y = y_0 = \frac{5}{4}$.

Vậy $g'\left(\frac{5}{4}\right) = 0$. Với $y > 0$ và qua y_0 thì $g'(y)$ đổi dấu từ âm sang dương

nên $g(y)$ đạt cực tiểu tại y_0 . Lúc đó $g(y_0) = g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$.

Kết hợp với (5.3), (5.4), (5.5) suy ra $A(x, y, z) \geq g(y) \geq g(y_0) = \frac{15}{2}$.

Đẳng thức xảy ra với : $y = \frac{5}{4}; x = 3; z = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}; b = \frac{4}{5}; c = \frac{3}{2}$.

3.2.3.6. Bài toán 6

Cho phương trình $x^2 + 2\left(\frac{1}{\sin \alpha} - 3\right)x + \frac{1}{\sin \alpha} - 13 = 0$, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. (Với x là ẩn số). Tìm α để nghiệm lớn của phương trình nhận giá trị lớn nhất.

3.2.3.7. Bài toán 7 Tìm số hạng lớn nhất của dãy (x_n) :

$$x_n = -n^4 + 20n^3 - 0,5n^2 + 13n, (n \in \mathbb{N}, n > 0).$$

3.2.3.8. Bài toán 8

Giả sử cho đa thức $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ có nghiệm x_0 . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $A = a^2 + b^2 + c^2$

3.2.3.9. Bài toán 9

Cho $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ và $1 \leq x < y < z < t \leq 50$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức : } A = \frac{x}{y} + \frac{z}{t}$$

3.2.3.10. Bài toán 10

Cho x, y, z thỏa mãn điều kiện : $x, y, z > 0; x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm cực tiểu của biểu thức : $A = \frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2}$

3.2.3.11. Bài toán 11 Xét đa thức với hệ số thực $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leq \alpha, \forall x \in [-1; 1], \alpha > 0$ cho trước 0. Tìm giá trị lớn nhất của $|a|, |b|, |c|, |d|$

3.2.4. Các bài toán tìm cực trị khác thường gặp trong hình học

3.2.4.1. Bài toán 1 Chứng minh thể tích V của một khối nón tròn xoay và diện tích xung quanh S của hình nón đó thỏa mãn bất đẳng thức :

$$\left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \geq 0. \text{ Dấu bằng xảy ra khi nào ?}$$

3.2.4.2. Bài toán 2 Người thợ hàn dùng một tấm tôn để hàn một cái thùng hình trụ tròn xoay có thể tích V đã định sẵn trước. Nếu gọi S là diện tích toàn phần của hình trụ tròn xoay đó. Khi đó ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$2\pi V^2 - \frac{1}{27} S^3 \leq 0. \text{ Tìm dấu bằng xảy ra của bất đẳng thức đó.}$$

3.2.4.3. Bài toán 3

Trong một hình tứ diện, độ dài của một và chỉ một cạnh lớn hơn 1. Chứng minh rằng thể tích của tứ diện này không vượt quá $\frac{1}{8}$

3.2.4.4. Bài toán 4

Cho hình nón tròn xoay (T), có đường sinh l không đổi. Gọi thể tích khối nón đó là V và diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay đó là S .

Tìm cực tiểu của M biết : $M = \left(\frac{2S}{\pi}\right)^3 - \left(\frac{6V}{\pi}\right)^2$.

3.2.4.5. Bài toán 5

Cho tam giác ABC . Tìm cực tiểu của biểu thức : $M = \frac{1}{\sin^2 A (1 - \sin^4 A)}$.

3.2.4.6. Bài toán 6

Tìm tam giác nội tiếp một đường tròn bán kính R cho trước mà diện tích tam giác lớn nhất

3.2.4.7. Bài toán 7

Tìm chiều cao hình nón nội tiếp trong hình cầu bán kính R mà hình nón đó có thể tích lớn nhất.

3.2.4.8. Bài toán 8

Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = a$, $AD = b$, $SA = 2a$, SA vuông góc với đáy. Lấy $M \in AS$, đặt $AM = x$, $0 \leq x \leq 2a$. Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích là S . Tìm giá trị lớn nhất của S khi x thay đổi

3.2.4.9. Bài toán 9

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với cạnh đáy bằng a không đổi, đường cao $SH = h$ thay đổi. Gọi r , R là các bán kính hình cầu nội tiếp, ngoại tiếp của hình chóp. Xác định h để tỉ số $\frac{r}{R}$ đạt cực đại.

KẾT LUẬN

Đề tài đã trình bày được khái niệm về cực trị (tự do) và cực trị (có điều kiện), các định lý về điều kiện cần, điều kiện đủ để hàm có cực trị, sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange (đối với hàm nhiều biến) để:

- Khảo sát cực trị địa phương của hàm hai biến.
- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm hai biến trên một miền D xác định.
- Dùng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị đối với hàm nhiều biến.
- Giải các bài toán tìm cực trị dạng phân thức đại số
- Giải các bài toán tìm cực trị trong lượng giác.
- Giải các bài toán tìm cực trị khác thường gặp trong đại số, giải tích
- Giải các bài toán tìm cực trị khác thường gặp trong hình học

Từ những vấn đề đó, tôi hoàn thành luận văn này với hi vọng đây sẽ là một tài liệu tham khảo tốt cho những ai muốn nghiên cứu về cực trị, nhất là cho người dạy và học sinh phổ thông.

Do hạn chế về mặt thời gian và khuôn khổ luận văn được ấn định nên một số vấn đề của chương trình phổ thông chưa được đưa vào luận văn cụ thể là các bài toán tìm tham số để hàm số đạt cực trị, điểm cực trị trong tam giác, tứ giác, bài toán liên quan đến cực trị,... Tôi hy vọng sẽ tiếp tục nghiên cứu và phát triển đề tài này trong quá trình dạy học phổ thông.