

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

KOULAVONG SOUKANH

**ỨNG DỤNG CỦA QUAN HỆ THỨ TỰ
TRONG GIẢI TÍCH**

Chuyên ngành: Toán Giải Tích

Mã số : 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS. NGUYỄN BÍCH HUY**

Thành phố Hồ Chí Minh- 2010

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin chân thành cảm ơn tập thể quý thầy cô đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán Giải Tích Khoá 18. Thầy cô đã mang đến cho tôi những kiến thức Toán học bổ ích và thú vị.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS.TS Nguyễn Bích Huy. Thầy đã tạo trong tôi ý thức tham học hỏi và long say mê nghiên cứu khoa học. Thầy cũng đã tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn này.

TP.HCM, tháng 6 năm 2010

Học viên

KOULAVONG Soukanh

MỞ ĐẦU

Quan hệ thứ tự có nhiều ứng dụng trong những lĩnh vực khác nhau của Toán học như Lý thuyết tập hợp, Đại số, Giải tích. Ngay cả khi vấn đề được nghiên cứu không liên quan đến thứ tự thì việc đưa vào một thứ tự thích hợp sẽ làm cho việc trình bày trở nên rõ ràng, ngắn gọn hơn (như việc chứng minh các định lý Tychonoff, Hahn-Banach, Caristi, nguyên lý biến phân Ekeland) hoặc cho phép làm nhẹ các giả thiết (như giả thiết về dự liên tục của ánh xạ khi xét bài toán điểm bất động trong không gian có thứ tự).

Trong luận văn này chúng tôi trình bày 2 định lý cơ bản về tập hợp có thứ tự, đó là bổ đề Zorn cùng các dạng tương đương của nó và nguyên lý Entropy trừu tượng. Trình bày các ứng dụng khác nhau của hai định lý trên trong Giải tích như ứng dụng vào bài toán so sánh lực lượng tập hợp, vào Tô pô và Giải tích hàm, vào lý thuyết Độ đo, vào bài toán điểm bất động.

Luận văn gồm 5 chương:

Chương 1: Chúng tôi nêu một số định nghĩa, định lý cơ bản về tập hợp có thứ tự.

Chương 2: Các ứng dụng vào bài toán so sánh lực lượng tập hợp.

Chương 3: Ứng dụng vào Tô pô, Giải tích hàm.

Chương 4: Ứng dụng trong Lý thuyết độ đo.

Chương 5: Ứng dụng trong Giải tích phi tuyến và một số bài toán điểm bất động.

Chương 1. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ TẬP CÓ THỨ TỰ

1.1 CÁC ĐỊNH NGHĨA:

❖ Định nghĩa 1

Ta nói tập X được sắp bộ phận nếu giữa một số cặp phần tử $x, y \in X$ có định nghĩa quan hệ “ $x \leq y$ ” sao cho:

$$\text{i) } x \leq x \quad \forall x \in X$$

$$\text{ii) } (x \leq y, y \leq x) \Rightarrow x = y$$

$$\text{iii) } (x \leq y, y \leq z) \Rightarrow x \leq z$$

❖ Định nghĩa 2

Cho tập được sắp X . Ta nói:

1) $A \subset X$ là một xích (tập sắp thẳng, tập được sắp hoàn toàn) nếu :

$$\forall x, y \in A \Rightarrow \begin{cases} x \leq y \\ y \geq x \end{cases}$$

2) $a \in X$ là một cận trên của $A \subset X$ nếu $x \leq a \quad \forall x \in A$

3) $a \in X$ là một phần tử tối đại của X nếu:

$$(x \in X, a \leq x) \Rightarrow x = a$$

Khái niệm cận dưới, phần tử tối tiểu được định nghĩa tương tự.

Ghi chú: Trong một số tài liệu người ta định nghĩa:

1) Tập X gọi là được xếp nếu quan hệ “ $\leq$ ” chỉ có tính chất iii)

2) Khi đó A gọi là xích nếu:

$$\text{i) } (x, y \in A, x \leq y, y \leq x) \Rightarrow x = y$$

$$\text{ii) } \forall x, y \in A \Rightarrow \begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases}$$

3) Phần tử a gọi là tối đại trong X nếu $\forall x \in X \Rightarrow \begin{cases} x \leq a \\ a \leq x \end{cases}$

❖ Định nghĩa 3

Một dãy các phần tử X_n ($n \in \mathbb{N}$) của $(X, \leq)$ gọi là dãy tăng (tăng ngặt) nếu:

$$x_n \leq x_m \quad (x_n < x_m) \text{ mỗi khi mà } n < m.$$

Tương tự ta có dãy giảm (giảm ngặt) nếu thay $n < m$ bằng $n > m$. Dãy đơn điệu là dãy tăng hoặc giảm.

Định nghĩa 4

Ảnh xạ $S: X \rightarrow X$ gọi là tăng (giảm) nếu $S(x) \leq S(y)$ ($S(x) \geq S(y)$) mỗi khi $x, y \in X$ và $x \leq y$.

1.2 TIÊN ĐỀ CHỌN

Cho tập $I \neq \emptyset$ và họ các tập $X_i \neq \emptyset \forall i \in I$. Khi đó tồn tại ánh xạ $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ thỏa mãn $f(i) \in X_i$

$\forall i \in I$.

PHÁT BIỂU KHÁC

Cho $X \neq \emptyset$ thì tồn tại ánh xạ $f: 2^X / \{\emptyset\} \rightarrow X$ thỏa $f(A) \in A \quad \forall A \neq \emptyset$

(f gọi là hàm chọn của tập X).

1.3 BỔ ĐỀ CƠ BẢN

Cho $X \neq \emptyset$, ta xét thứ tự “ $\leq$ ” trên X theo: $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$

Cho $\emptyset \neq F \subset 2^X / \{\emptyset\}$ và $g: F \rightarrow F$ thỏa mãn:

1) Nếu F' là một xích của F thì $\bigcup_{A \in F'} A \in F$

2) $\forall A \in F$ thì $A \subset g(A)$ và $g(A) \setminus A$ chứa không quá một phần tử.

Khi đó tồn tại $A_* \in F$ thỏa $g(A_*) = A_*$.

➤ Chứng minh

Cố định $A_* \in F$

Một họ $\mu \subset F$ gọi là “tốt” nếu $A_0 \in \mu$ và thỏa:

a) Nếu $\mu' \in \mu$ là xích thì $\bigcup_{A \in \mu'} A \in \mu$

b) $\forall A \in \mu \Rightarrow g(A) \in \mu$.

I. Họ $\{A \in \mu: A \subset A_0\}$ là tốt.

Gọi μ là giao của tất cả họ tốt.

Nếu có μ_0 là xích thì cần tìm vì khi đó:

$A_* \in \mu_0$ do μ_0 là xích và tốt)

$\Rightarrow g(A_*) \in \mu_0$.

$\Rightarrow g(A_*) \subset A_*$ (do định nghĩa A_*) hay $g(A_*) = A_*$.

Tập $\mu_1 = \left\{ B \in \mu_0 : \forall A \in \mu_0 \Rightarrow \begin{cases} B \subset A \\ A \subset B \end{cases} \right\}$ là xích.

Nếu có μ_1 là tốt thì $\mu_1 = \mu_0$ (do định nghĩa μ_0) và do đó μ_0 là xích.

➤ **Chứng minh** μ_1 tốt :

Để thấy $A_0 \in \mu_1$ có tính chất a).thật vậy:

Nếu μ' là xích trong μ_1 , đặt $B = \bigcup_{A' \in \mu'} A'$, cần chứng minh $B \in \mu_1$

Ta có: $\forall A \in \mu_0 \Rightarrow \begin{cases} A' \subset A : \forall A' \in \mu' \Rightarrow B \subset A \\ \exists A' \in \mu' : A \subset A' \Rightarrow B \supset A \end{cases}$

Vậy μ_1 thỏa tính chất a)

Xét $B \in \mu_1$.

Ta chứng minh họ $\mu_B = \left\{ A \in \mu_0 : \begin{cases} g(B) \subset A(1) \\ A \subset B(2) \end{cases} \right\}$ là tốt và do đó $\mu_B = \mu_0$

a) Nếu $\mu \subset \mu$ là xích ta có:

$$A_1 = \bigcup_{A \in \mu} A \quad (\text{do } \mu \text{ tốt})$$

$$A_1 = g(B) \text{ nếu } \exists A \in \mu : A \supset g(B)$$

$$A_1 \subset B \text{ nếu } A \subset B : \forall A \in \mu$$

b) Xét tùy $A \in \mu$ Có thể có các khả năng:

$$(1) g(B) \subset A.$$

$$(2) A = B.$$

$$(3) A \subset B, A \neq B$$

Nếu (1),(2) đúng thì $g(A) \supset g(B)$ nên $g(A) \in \mu$

Giả sử (3) đúng.

Do $B \in \mu$ và $g(A) \in \mu$ ta có:

$$\begin{cases} B \supset g(A) \Rightarrow g(A) \in \mu \\ B \subseteq g(A) \Rightarrow g(A) \setminus A \end{cases} \text{ chứa hơn một phần tử (vô lý).}$$

➤ **Chứng minh** $g(B) \in \mu_1 : \forall A \in \mu_0 \Rightarrow A \in \mu$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(B) \subset A \\ A \subset B \Rightarrow A \subset g(B) \end{cases}$$

1.4 ĐỊNH LÝ HAUSDORFF VỀ XÍCH CỰC ĐẠI

Mỗi tập được xếp chứa ít nhất một xích cực đại (không là tập con thực sự của xích nào).

➤ **Chứng minh**

Giả sử $(X, \leq)$ là tập đã cho ; trong 2^X xét thứ tự: $A \prec B \Rightarrow A \subset B$.

Gọi f là họ tất cả các xích của X ; $F \neq \emptyset$ (do tập 1 điểm là xích).

Với mỗi $A \in F$ ta đặt $A^* = \{x \in X \setminus A : A \cup \{x\} \in F\}$

Nếu $A^* = \emptyset$ thì A cần tìm :

Gọi f là hàm chọn của X , ta định nghĩa $g : F \rightarrow F$ bởi:

$$g(A) = \begin{cases} A & \text{nếu } A^* = \emptyset \\ A \cup \{f(A^*)\} & \text{nếu } A^* \neq \emptyset \end{cases}$$

Ánh xạ thỏa tính chất 2) của bổ đề.

Tập F thỏa tính chất 1) của bổ đề vì:

Nếu $F' \subset F$ là một xích (đối với thứ tự $\prec$) thì $A_1 = \bigcup_{A \in F'} A$ là xích của $(X, \leq)$ hay $A_1 \in F$. Do đó tập

$A \in F$ thỏa $g(A) = A$ là tập cần tìm.

1.5 BỔ ĐỀ ZORN

Giả sử trong tập được xếp X mỗi xích đều có cận trên. Khi đó X có phần tử tối đại.

➤ Chứng minh:

Giả sử M là xích cực đại của x và a là một cận trên của M . Khi đó a là phần tử tối đại của X .

1.6 LIÊN HỆ GIỮA CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Các khẳng định sau tương đương theo nghĩa có thể dùng một khẳng định để chứng minh các khẳng định còn lại.

1) Tiên đề chọn

2) Định lý Hausdorff về xích cực đại

3) Bổ đề Zorn

➤ Chứng minh

Ta đã có $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$.

$3) \Rightarrow 1)$. Ký hiệu Y là tập các cặp (J, g) với:

$$J \subset I, g : J \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i = X \text{ thỏa } g(i) \in X_i \forall i \in J$$

Trong Y xét thứ tự:

$$(J, g) \leq (J', g') \Leftrightarrow \begin{cases} J \subset J' \\ g' / J = g \end{cases}$$

Nếu $(J_\alpha, g_\alpha)_{\alpha \in A}$ là một xích trong Y , ta định nghĩa:.

$J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha, g: J \rightarrow X$ là một xạ mà $g|_{J_\alpha} = g_\alpha$.

Khi đó g xác định đúng và $(J_\alpha, g_\alpha) \leq (J, g) \quad \forall \alpha \in A$.

Gọi (J_*, g_*) là phần tử tối đại của $\mathcal{Y}$ thì $J_* = I, f = g_*$ cần tìm.

1.7 NGUYÊN LÝ ENTROPY TRỪU TƯỢNG

1.7.1 Định lý (BREZIS, BROWDER)

Giả sử:

- (1) X là một tập sắp thứ tự sao cho mỗi dãy đơn điệu tăng trong X có một cận trên, nghĩa là từ $u_n \leq u_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, luôn suy ra tồn tại $v \in X$ sao cho $u_n \leq v$, với mọi $n \in \mathbb{N}$
- (2) $S: X \rightarrow [-\infty, +\infty)$ là một hàm đơn điệu tăng và bị chặn trên, nghĩa là từ $u \leq v$, luôn suy ra $S(u) \leq S(v)$ và tồn tại 1 số thực c sao cho $S(u) \leq c$, với mọi $u \in X$. Thế thì tồn tại $u \in X$ sao cho:
- (3) với mọi $v \in X, v \geq u$ thì $S(u) = S(v)$.

➤ Chứng minh

Chọn một phần tử cố định tùy ý $u_1 \in X$ rồi dựng theo qui nạp dãy $(u_n)_n$ đơn điệu tăng như sau:

Giả sử u_n đã chọn, chúng ta đặt:

$$M_n = \{u \in X : u_n \leq u\} \text{ và } \beta_n = \sup_{M_n} S.$$

- Nếu $\beta_n = S(u_n)$ thì (3) thỏa với $u = u_n$ và chúng ta chứng minh xong.
- Nếu không, ta có $\beta_n > S(u_n)$ và có thể chọn một $u_{n+1} \in M_n$ sao cho :

$$(4) \beta_n - S(u_{n+1}) \leq 2^{-1} [\beta_n - S(u_n)]$$

Bằng cách này ta thu được một dãy $(u_n)_n$ đơn điệu tăng. Mà theo (1) thì nó có một cận trên là u . Nghĩa là ;

$$(5) u_n \leq u \text{ với mọi } n.$$

Ta chứng minh u là phần tử cần tìm.

Giả sử u không thỏa (3) thì tồn tại $v \in X$ sao cho $u \leq v$ mà $S(u) < S(v)$.

Dãy $(S(u_n))_n$ đơn điệu tăng và bị chặn trên theo (2) nên nó hội tụ. Từ (5) và tính đơn điệu tăng của S ta suy ra :

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} S(u_n) \leq S(u).$$

Vì $v \geq u$ mà $u \geq u_n$ với mọi n (do (5)) nên $v \geq u_n$ với mọi n .

Vậy $v \in M_n$ với mọi n .

Do đó từ (4) ta suy ra: $2S(u_{n+1}) - S(u_n) \geq \beta_n \geq S(v)$ với mọi n cho $n \rightarrow \infty$ ta có:

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} S(u_n) \geq S(v)$$

Từ (6) và (7) ta suy ra $S(u) \geq S(v)$ mâu thuẫn với giả thiết của phản chứng.

Vậy định lý được chứng minh.

1.7.2 Hệ quả

Giả sử:

i) X là một sắp thứ tự sao cho mỗi dãy giảm trong X có cận dưới.

ii) $S: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ là một phiếm hàm tăng và bị chặn dưới.

Thế thì: tồn tại phần tử $u \in X$ sao cho:

iii) Với mọi $v \in X, v \leq u$ thì $S(u) = S(v)$.

➤ Chứng minh

Ta định nghĩa X trong quan hệ thứ tự mới “ $<$ ” như sau: $x < y \Leftrightarrow x \geq y$

Thế thì tập sắp thứ tự $(X, <)$ và phiếm hàm $(-S)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý 1.1. Thật vậy:

Ta kiểm tra dãy tăng $\{x_n\}_n \subset X$ có một cận trên.

Ta có:

$x_n < x_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên $x_n \geq x_{n+1}$. Do đó theo giả thiết $\{x_n\}$ có một cận

dưới là u , nghĩa là: $x_n \geq u$ với mọi n .

Trở lại quan hệ “ $<$ ” trong X ta có:

$x_n < u$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vậy $\{x_n\} \subset X$ có một cận trên.

Áp dụng nguyên lý Entropy $(X, <)$ và phiếm hàm $(-S)$ ta có:

Tồn tại $u \in X$ sao cho:

Với mọi $v \in X: v > u \Rightarrow -S(u) = -S(v)$

Hay với mọi $v \in X, v \leq u \Rightarrow S(u) = S(v)$.

Chương 2. ỨNG DỤNG VÀO LÝ THUYẾT TẬP HỢP

2.1 MỘT SỐ KẾT QUẢ VỀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG TẬP CÓ

THỨ TỰ

2.1.1. Định lý

Giả sử $(X, \leq)$ là tập có thứ tự và $f: X \rightarrow X$ thỏa mãn:

- a) Mỗi xích thuộc X có cận trên.
- b) $x \leq f(x)$, với mỗi $x \in X$.

Khi đó f có điểm bất động.

➤ Chứng minh

Ta có X là tập có thứ tự và mỗi xích thuộc X có cận trên nên theo bổ đề Zorn X Có phần tử tối đại, Gọi x_1 là phần tử tối đại.

Ta có:

$$\begin{cases} x_1 \leq f(x_1) \\ x_1 \text{ tối đại} \end{cases}$$

Suy ra $x_1 = f(x_1)$

Vậy f có điểm bất động.

2.1.2 Định lý

Cho tập được sắp $(X, \leq)$ và ánh xạ $f: X \rightarrow X$ thỏa mãn:

- a) Mỗi xích thuộc X có cận trên đúng.
- b) f là ánh xạ tăng.
- c) $\exists x_0 \in X : x_0 \leq f(x_0)$

Khi đó f có điểm bất động.

➤ Chứng minh

Đặt $X_1 = \{x \in X : x \leq f(x)\}$

Ta có $x_0 \in X_1$. Do f là ánh xạ tăng nên $f(X_1) \subset X_1$.

Thật vậy, với $x \in X_1$ ta có $x \leq f(x)$ nên do f là ánh xạ tăng ta có

$$f(x) \leq f(f(x)) \text{ hay } f(x) \in X_1.$$

Do định nghĩa của tập X_1 , ta thấy X_1 thỏa điều kiện b) của định lý 2.1.1

Ta sẽ chứng minh thỏa điều kiện a) của định lý 2.1.1.

Thật vậy $A \subset X_1$ là một xích thì theo giả thiết a) của định lý 2.1.2 tồn tại

$a = \sup A$. Ta phải chứng minh $a \in X_1$. Thật vậy, với mọi $x \in A$, ta có:

$$x \leq a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$$

Mà $x \leq f(x)$ với mọi $x \in A$.

Vậy $f(a)$ là một cận trên của A trong X , do đó $a \leq f(a)$.

Vậy $a \in X_1$ và là một cận trên của A trong X_1 .

Áp dụng định lý 2.1.1. cho tập X_1 và ánh xạ f ta suy ra f có điểm bất động trong X_1 .

2.1.3 Bổ đề

Cho các tập X, Y và các ánh xạ $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$.

Khi đó ta có thể phân tích $X = X_1 \cup X_2, Y = Y_1 \cup Y_2$ sao cho:

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset, Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, f(X_1) = Y_1, g(Y_2) = X_2.$$

➤ Chứng minh

Ta xét ánh xạ $\varphi: 2^X \rightarrow 2^X, \varphi(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$ với 2^X là tập tất cả các tập con của X .

Trong 2^X ta xét quan hệ: $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$

Ta chứng minh mỗi xích thuộc 2^X có cận trên đúng.

Ta xét xích $\{A_i\}_i \subset 2^X$ thì $\bigcup_i A_i$ là cận trên đúng của $\{A_i\}_i$

Ta cần chứng minh $\exists A \in 2^X$ sao cho $A \leq \varphi(A)$. Thật vậy ta chọn $A = \emptyset$ suy ra:

$$\varphi(\emptyset) = X \setminus g(Y \setminus f(\emptyset)) = X \setminus g(Y) \supset \emptyset$$

Ta chứng minh φ là ánh xạ tăng:

Giả sử $A \subset B$, ta chứng minh $\varphi(A) \subset \varphi(B)$

Ta có:

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \Rightarrow Y \setminus f(A) \supset Y \setminus f(B)$$

$$\Rightarrow X \setminus g(Y \setminus f(A)) \supset X \setminus g(Y \setminus f(B))$$

$$\Rightarrow X \setminus g(Y \setminus f(A)) \subset X \setminus g(Y \setminus f(B))$$

$$\Rightarrow \varphi(A) \subset \varphi(B).$$

Vậy φ là ánh xạ tăng.

Áp dụng định lý 2.1.2 ta có φ điểm bất động.

Bây giờ ta chứng minh tồn tại

$$X = X_1 \cup X_2, Y = Y_1 \cup Y_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset, f(X_1) = Y_1, g(Y_2) = X_2.$$

Thật vậy, lấy $X_1 \subset X$ thỏa $X_1 = \varphi(X_1)$ Và đặt

$$X_2 = X \setminus X_1, Y_1 = f(X_1), Y_2 = Y \setminus Y_1.$$

Ta có :

$$\varphi(X_1) = X_1 \Rightarrow X_1 = X \setminus g(Y \setminus f(X_1)) \Rightarrow g(Y \setminus f(X_1)) = X_2 \Rightarrow g(Y_2) = X_2.$$

Rõ ràng $X_1 \cap X_2 = \emptyset, Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$.

2.2 ĐỊNH LÝ BERSTEIN

Giả sử $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ và tồn tại các đơn ánh $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$. Khi đó tồn tại song ánh giữa X, Y .

➤ Chứng minh

Gọi X_1, X_2, Y_1, Y_2 là các tập thỏa mãn bổ đề 2.1.3.

DO $g: Y_2 \rightarrow X_2$ là song ánh nên có ánh xạ ngược.

Xét ánh xạ $h: X \rightarrow Y$ như sau :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \\ g^{-1}(x), \end{cases}$$

Thì h là song ánh từ X vào Y .

2.3. ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN LỰC LƯỢNG CỦA TẬP HỢP

2.3.1. Mệnh đề

Cho các tập X, Y Khi đó tồn tại ít nhất 1 trong 2 khả năng sau :

- 1) Có một đơn ánh từ X vào Y
- 2) Có một đơn ánh từ X vào Y

➤ Chứng minh

Xét tập $\mathcal{A}$ các tập (A, f) trong đó :

$A \subset X, f: A \rightarrow Y$ là đơn ánh

Trong $\mathcal{A}$ ta xét thứ tự:

$$(A_1, f_1) \leq (A_2, f_2) \text{ nếu } A_1 \subset A_2, f_1(x) = f_2(x) \text{ với mọi } x \in A_1.$$

Ta chứng minh $\mathcal{A}$ có phần tử tối đại. Xét một xích $\{(A_i, f_i)\}_i$. Đặt $A_0 = \cup A_i$.

$$f_0: A_0 \rightarrow Y \text{ thỏa } f_0(x) = f_i(x) \text{ nếu } x \in A_i.$$

Ta có:

$$\begin{cases} x \in A_i \Rightarrow f_0(x) = f_i(x) \\ x \in A_j \Rightarrow f_0(x) = f_j(x) \end{cases}$$

Mặt khác, do $\{A_i\}_{i \in I}$ là xích thuộc $\mathcal{A}$ nên $A_i \subset A_j$ hoặc $A_j \subset A_i$.

Vậy $f_i(x) = f_j(x)$.

Suy ra f_0 xác định đúng, và (A_0, f_0) là cận trên của $(A_i, f_i)_{i \in I}$.

Theo bổ đề Zorn thì $\mathcal{A}$ có phần tử tối đại là cặp (M, f) .

Ta sẽ chứng minh $M=X$ hoặc $f(M)=Y$, vì nếu $M=X$ thì $f: X \rightarrow Y$ là đơn ánh

Nếu $f(M)=Y$ thì $f^{-1}: Y \rightarrow M \subset X$ là đơn ánh.

Giả sử $M \neq X$, ta sẽ chứng minh $f(M)=Y$.

Nếu $f(M) \neq Y$ thì ta xét $M_1 = M \cup \{a\}$.

Với $a \in X \setminus M$ và $b \in Y \setminus f(M)$.

$$\text{Đặt } F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in M \\ b; & x = a \end{cases}$$

Thì F là đơn ánh trên M_1 .

Vậy mệnh đề chứng minh.

2.3.2. Định nghĩa

1) Ta nói hai tập hợp X, Y có cùng lực lượng hay tương đương và viết $\text{card} X = \text{card} Y$ nếu tồn tại một song ánh giữa X và Y .

2) Ta nói lực lượng của X không lớn hơn lực lượng của Y và viết $\text{card} X \leq \text{card} Y$ nếu tồn tại một đơn ánh từ X vào Y .

2.3.3. Định lý

1) Với hai tập X, Y tùy ý, luôn xảy ra ít nhất một trong các khả năng:
 $\text{card} X \leq \text{card} Y$ hoặc $\text{card} Y \leq \text{card} X$.

2) Nếu $\text{card} X \leq \text{card} Y$ và $\text{card} Y \leq \text{card} X$ thì $\text{card} X = \text{card} Y$.

➤ Chứng minh

1) Suy ra từ mệnh đề 2.3.1.

2) Suy ra từ định lý Bernstein.

Chương 3. ỨNG DỤNG VÀO TÔ PÔ GIẢI TÍCH HÀM

3.1. TỒN TẠI TẬP BẤT BIẾN COM PẮC CỦA MỘT ÁNH XẠ

❖ Mệnh đề

Cho X là T_2 không gian com pắc, $f: X \rightarrow X$ là ánh xạ liên tục, Khi đó tồn tại tập com pắc $X_0 \neq \emptyset$ sao cho $f(X_0) = X_0$

➤ Chứng minh

Đặt $Y = \{A \subset X : A \neq \emptyset, A \text{ đóng}, f(A) \subset A\}$

Trong Y ta xét thứ tự : $A_1 \leq A_2 \Leftrightarrow A_2 \subset A_1$.

Xét ánh xạ $F: Y \rightarrow 2^X$ xác định bởi $F(A) = f(A)$.

Ta kiểm tra F là ánh xạ từ Y vào Y . thật vậy, nếu $A \in Y$ thì A đóng nên A là tập com pắc.

Do đó $f(A)$ là tập com pắc trong X , mà X là T_2 -không gian nên $f(A)$ là tập đóng.

Ngoài ra ta có $f(A) \subset A$ nên $f(f(A)) \subset f(A)$.

Vậy tập $f(A) \in Y$.

Ta kiểm tra rằng f thỏa các điều kiện của định lý 2.1.1 trên tập Y .

Xét xích $\{A_i\}_{i \in I} \subset Y$, với $A_i \neq \emptyset, A_i$ đóng.

Đặt $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ thì A đóng, ta sẽ chứng minh $A \neq \emptyset$.

Thật vậy, do $\{A_i\}_{i \in I}$ là xích nên với mọi $i, j \in I$ thì $A_i \subset A_j$ hoặc $A_j \subset A_i$

nên $\{A_i\}_{i \in I}$ là họ có tâm các tập đóng trong không gian com pắc X .

Do đó $A = \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Ta có:

$$A \subset A_i \text{ với mọi } i \in I.$$

$$\Rightarrow f(A) \subset f(A_i) \subset A_i \text{ với mọi } i \in I.$$

$$\Rightarrow f(A) \subset A.$$

Vậy $A \in Y$.

Do $A = \bigcap_{i \in I} A_i \subset A_i$ nên $A \supseteq A_i$

Vậy $\{A_i\}_{i \in I}$ có cận trên là A .

Ta cần chứng minh với mọi $A \in Y$ thì $A \leq F(A)$.

Ta có $A \in Y$ nên $f(A) \subset A$ hay $A \leq F(A)$.

Vậy áp dụng định lý 2.1.1 thì F có điểm bất động là $X_0 \in Y$ hay $f(X_0) = X_0$.

3.2 ĐỊNH LÝ TYCHONOFF

Tích tô pô của các không gian tô pô com pắc là không gian com pắc, tức là $X_\alpha, \alpha \in I$ com pắc

thì $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ compắc.

➤ Chứng minh

Giả sử, với mọi $\alpha \in I, X_\alpha$ là không gian com pắc. cho F là một họ có tâm các tập đóng trong X .

Ta chứng minh rằng F có giao khác rỗng, Thật vậy, dùng bổ đề Zorn, ta có thể coi là họ F_0 có tâm tối đại gồm các tập con của X sao cho

$F_0 \supset F$. Vì:

$$\bigcap_{A \in F} A = \bigcap_{A \in F} \overline{A} \supset \bigcap_{A \in F_0} \overline{A}$$

Nên để chứng minh họ F có giao khác rỗng, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\bigcap_{A \in F_0} \overline{A} \neq \emptyset.$$

Do tính tối đại của F_0 , ta có:

a) Nếu $A_1, \dots, A_m$ thì $\bigcap_{i=1}^m A_i \in F_0$.

b) Nếu $A_0 \subset X$ và $A_0 \cap A \neq \emptyset$ với mọi $A \in F_0$ thì $A_0 \in F_0$.

Vì F_0 là một họ các tâm nên với mọi $\alpha \in I$, họ $\overline{(P_\alpha(A))}_{A \in F_0}$ cũng là một họ tam tập con của X_α .

Vì X_α com pắc nên $\bigcap_{A \in F_0} \overline{P_\alpha(A)} \neq \emptyset$ với mọi $\alpha \in I$.

Trong mỗi tập $\bigcap_{A \in F_0} \overline{P_\alpha(A)}$ ta chọn một phần tử x_α .

Ta sẽ chứng minh $X = \overline{(x_\alpha) \in A}$ với mỗi $A \in F_0$.

Nếu V là một lân cận tùy ý của x , theo định nghĩa không gian tích, tồn tại các lân cận $W_1, \dots, W_m$ của các điểm $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_m}$ trong các không gian $X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_m}$

Sao cho: $\bigcap_{i=1}^m P_{\alpha_i}^{-1}(W_i) \subset V$.

Vì $x_{\alpha_i} \in \bigcap_{A \in F_0} \overline{P_{\alpha}(A)}$ nên $W_i \cap P_{\alpha_i} \neq \emptyset$ với mọi $A \in F_0$ và $i=1, \dots, m$.

Theo tính chất b) của F_0 ta có $P_{\alpha_i}^{-1}(W_i) \in F_0, i=1, \dots, m$.

Theo a) ta có $\bigcap_{i=1}^m P_{\alpha_i}^{-1}(W_i) \in F_0$.

Như vậy với mọi $A \in F_0$ thì $V \cap A \neq \emptyset$

Như thế $x \in \overline{\bigcap_{A \in F_0} A}$ với mọi $A \in F_0$ hay $\bigcap_{A \in F_0} \overline{A} \neq \emptyset$ Vậy X compact.

3.3 ĐỊNH LÝ HAHN-BANACH

Cho p, q là hai số thực “mở rộng” (tức là có thể bằng $\mp \infty$). Ta giả thiết $p \leq q$ và $p < +\infty, q > -\infty$.
Với mỗi số thực y ta ký hiệu:

$$\langle p, q, y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{nếu } y = 0 \\ p \cdot q & \text{nếu } y < 0 \\ q \cdot y & \text{nếu } y > 0 \end{cases}$$

Như vậy $\langle p, q, y \rangle$ có thể bằng $+\infty$, nhưng không bao giờ bằng $-\infty$

3.3.1 Bổ đề

Cho X là không gian tuyến tính, $\mathbb{C} \subset X \times \mathbb{R}$ là tập lồi và hàm $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) Các tập sau không trống.

$$\mathbb{C}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{C} : y > 0\}, \mathbb{C}^- = \{(x, y) \in \mathbb{C} : y < 0\}.$$

ii) Với mọi $z = (x, y) \in \mathbb{C} : \langle p, q, y \rangle + h(z) \geq 0$ (1)

Khi đó phải có một số thực t sao cho $p \leq t \leq q$ và với mọi

$$z = (x, y) \in \mathbb{C} : t \cdot y + h(z) \geq 0 \quad (2)$$

➤ Chứng minh

Với mọi $z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$ ta đặt :

$$u(z) = -\frac{1}{y} h(z) \quad (\text{với } z = (x, y)).$$

Do (1) ta có :

$$(\forall z \in \mathbb{C}^+) \quad u(z) \leq q : \forall z \in \mathbb{C}^- \quad u(z) \geq p.$$

$$\text{Cho nên } \sup u(z) = u \leq q; \inf u(z) = v \geq p \quad (3)$$

Mặt khác, với mọi $z = (x, y) \in \mathbb{C}^+, z' = (x', y') \in \mathbb{C}^-$ ta có :

$$z_0 = \frac{\lambda}{y} z - \frac{\lambda}{y'} z' \in \mathbb{C}, \text{ với } \lambda = -\frac{y \cdot y'}{y - y'} > 0 \text{ (vì } \mathbb{C} \text{ là tập hợp lồi)}.$$

Do đó, vì h là hàm lồi (giả thiết) : $h(z_0) \leq \frac{\lambda}{y} h(z) - \frac{\lambda}{y'} h(z')$.

Nhưng với $z_0 = (x_0 - y_0)$ với $y_0 = 0$, cho nên theo (1) $h(z_0) \geq 0$

Vậy với mọi $z \in \mathbb{C}^+, z' \in \mathbb{C}^- : u(z) = -\frac{\lambda}{y} h(z) \leq -\frac{\lambda}{y'} h(z') = u(z')$.

Do đó ta suy ra $u < +\infty, v < -\infty$ và $u \leq v$ (4) .

Từ (3) và (4) ta có : $\max \{u, p\} \leq \min \{v, q\}$.

Đồng thời cả 2 vế bên trái và bên phải không thể cùng bằng $-\infty$ hoặc bằng $+\infty$.

Vậy phải có một số thực t sao cho $p \leq t \leq q, u \leq t \leq v$.

Do $u \leq t \leq v$ nên với mọi $z = (x, y) \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$ ta có :

$$t \cdot y + h(z) \geq u(z) \cdot y + h(z) = 0.$$

Bổ đề đã được chứng minh .

3.3.2 Định nghĩa

Một hàm thực $\varphi(x)$ trên một không gian tuyến tính X được gọi là dưới tuyến tính, Nếu :

$$\text{a) } \varphi(x_1 + x_2) \leq \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \text{ với mọi } x_1, x_2 \in X.$$

$$\text{b) } \varphi(ax) = a\varphi(x) \text{ với mọi } x \in X, \text{ mọi } a \geq 0.$$

Tính chất a) gọi là dưới cộng tính, còn tính chất b) gọi là tính thuần nhất dương. Hiển nhiên là dưới tuyến tính cũng là hàm lồi.

3.3.3 Định lý (Hahn-Banach)

Cho một phiếm hàm tuyến tính f xác định trong một không gian con M của một không gian tuyến tính thực X .

Giả sử có một hàm dưới tuyến tính φ xác định trong X sao cho :

Với mọi $x \in M$ thì $f(x) \leq \varphi(x)$.

Khi đó phải có một phiếm hàm tuyến tính $F(x)$ xác định trong toàn thể, sao cho:

1) F là khuếch của f , nghĩa là :

$$\text{Với mọi } x \in M : F(x) = f(x) .$$

2) Với mọi $x \in X : F(x) \leq \varphi(x)$.

➤ Chứng minh

Xét tập $\mathcal{A}$ các cặp (N, g) . Với N là không gian con chứa M , g là phiếm hàm tuyến tính trên N thỏa :

$$g(x) = f(x), g(x) \leq \phi(x) \quad \forall x \in X.$$

Trong $\mathcal{A}$ ta xét thứ tự :

$$(N_1, g_1) < (N_2, g_2) \text{ nếu } N_1 \subset N_2, g_1(x) = g_2(x) \text{ với mọi}$$

$$x \in N_1, g_2(x) \leq \phi(x) \text{ với mọi } x \in N_2.$$

Ta cần chứng minh sự tồn tại một phiếm hàm tuyến tính F xác định trên toàn X .

$$\text{Sao cho } f < F.$$

Trước hết ta chứng minh $\mathcal{A}$ có phần tử tối đại .

Ta xét $\mathcal{A}$ là tập hợp tất cả phiếm hàm tuyến tính g sao cho $f < g$. tập hợp đó không trống (vì $f \in \mathcal{A}$) và được sắp một phần bởi liên hệ “ $<$ ”.

Nếu P là một tập con được sắp tuyến tính của $\mathcal{A}$ thì cận trên của P là phiếm hàm có miền xác định bằng hợp tất cả các miền xác định của các phiếm hàm $g \in P$ và có giá trị từng phiếm hàm g ấy trên miền xác định của g . Vậy theo bổ đề Zorn, $\mathcal{A}$ phải có phần tử tối đại F .

Ta chứng minh miền xác định của F là toàn không gian ($M \equiv X$).

Giả sử trái lại rằng có một phần tử $x_0 \in X \neq M$.

Ta xét tập $\mathbb{C} = M \times \mathbb{R}$ đặt $P = -\infty, q = +\infty$.

Với mọi $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ ($x \in M, y \in \mathbb{R}$) ta có $\phi(x) \geq F(x)$.

Do đó với mọi $z = (x, y) \in \mathbb{C} : p, q, y > -F(x) + \phi(z) \geq 0$ (ở đây ta đồng nhất mỗi $z = (x, y) \in M \times \mathbb{R}$ với điểm $x + y.x_0 \in X$ nên $\phi(z) = \phi(x + y.x_0)$).

Mà $h(z) = -F(x) + \phi(z)$ là hàm lồi, vậy theo bổ đề 1 ta có một số thực t nghiệm đúng :

$$\text{Với mọi } z = (x, y) \in \mathbb{C} : t.y - F(x) + \phi(z) \geq 0.$$

Đặt $F_1(x) = F(x) - t.y$, với mọi $z = x + y.x_0$ ($y \in \mathbb{R}$) ta sẽ có một phiếm hàm tuyến tính F_1 xác định trên không gian con M_1 sinh bởi $M \cup \{x_0\}$ và nghiệm đúng với mọi $z \in M_1 : F_1(z) \leq \phi(z)$.

Như thế $F_1 \neq F$ và $F_1 < F$ trái với tính tối đại của F .

Suy ra điều phải chứng minh.

3.4 NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND

3.4.1 Định nghĩa

Một ánh xạ $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ gọi là nửa liên tục dưới nếu $\{u \in X : F(u) > \alpha\}$ là tập mở với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ánh xạ nửa liên tục dưới có tính chất :

$$\text{Nếu } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \text{ thì } \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq F(u)$$

3.4.2 Nguyên lý biến phân Ekeland

Giả sử:

- i) (X, d) là không gian metric đầy đủ .
- ii) $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ nửa liên tục dưới và bị chặn dưới .

Cho $\varepsilon, \lambda > 0$ và $x_\varepsilon \in X$ thỏa mãn :

$$F(x_\varepsilon) < \inf_{v \in X} F(v) + \varepsilon$$

Khi đó tồn tại phần tử u_ε sao cho :

$$1) F(u_\varepsilon) \leq F(x_\varepsilon)$$

$$2) d(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq \lambda$$

$$3) F(v) \geq F(u_\varepsilon) - \varepsilon \cdot \frac{d(u_\varepsilon, v)}{\lambda}, \text{ với mọi } v \in X, v \neq u_\varepsilon$$

➤ Chứng minh

Coi $\lambda = 1$ (nếu không xét metric $d' = \frac{d}{\lambda}$)

$$\text{Đặt } Y = \{u \in X : F(u) \leq F(x_\varepsilon), d(u, x_\varepsilon) \leq 1\}$$

$$\text{Đặt } Y_1 = \{u \in X : F(u) \leq F(x_\varepsilon)\}, Y_2 = \{u \in X : d(u, x_\varepsilon) \leq 1\}$$

Ta có :

$$Y = Y_1 \cap Y_2 \text{ mà } Y_1, Y_2 \text{ đóng nên } Y \text{ đóng .}$$

Suy ra (Y, d) đầy đủ .

Trong Y ta xét thứ tự :

$$u \leq v \Leftrightarrow F(v) \leq F(u) - \varepsilon \cdot d(u, v) .$$

Ta kiểm tra “ $\leq$ ” là quan hệ thứ tự Y .

Hiển nhiên ta có $u \leq u \quad \forall u \in Y$.

Ta có :

$$u \leq v, v \leq u$$

$$\Rightarrow F(v) \leq F(u) - \varepsilon \cdot d(u, v), F(u) \leq F(v) - \varepsilon \cdot d(u, v)$$

$$\Rightarrow d(u, v) = 0$$

$$\Rightarrow u = v$$

Nếu $u \leq v, v \leq w$ thì $F(v) \leq F(u) - \varepsilon.d(u, v), F(w) \leq F(v) - \varepsilon.d(v, w)$

$$\text{Suy ra } d(u, v) \leq \frac{F(u) - f(v)}{\varepsilon}, d(v, w) \leq \frac{F(v) - F(w)}{\varepsilon}.$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có :

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) \leq \frac{F(u) - F(v) + F(v) - F(w)}{\varepsilon} = \frac{F(u) - F(w)}{\varepsilon}$$

$$\text{Suy ra } F(w) \leq F(u) - \varepsilon.d(u, w)$$

$$\text{Hay } u \leq w$$

Ta sẽ áp dụng nguyên lý Entropy cho Y và phiếm hàm $S(u) = -F(u)$

Từ định nghĩa thứ tự trong Y ta có nếu $u \leq v$ thì :

$$-F(u) \leq -F(v) \text{ nên } (-F) \text{ tăng, bị chặn trên.}$$

Ta cần kiểm tra mọi dãy tăng trong Y đều có một cận trên.

Ta có :

$$u_n \leq u_{n+1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow F(u_{n+1}) \leq F(u_n) - \varepsilon.d(u_n, u_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \varepsilon.d(u_n, u_{n+1}) \leq F(u_n) - F(u_{n+1}) \quad (1)$$

$$\Rightarrow F(u_{n+1}) \leq F(u_n)$$

Suy ra dãy $\{F(u_n)\}_n$ là dãy giảm và bị chặn dưới nên $\{F(u_n)\}_n$ hội tụ. (2)

Ta chứng minh dãy hội tụ bằng cách chứng minh $\{u_n\}$ là dãy Cauchy:

Coi $n < m$ và $u_n \leq u_m$, ta có theo (1) thì :

$$d(u_n, u_m) \leq \frac{F(u_n) - F(u_m)}{\varepsilon} \quad (3)$$

$$\text{Suy ra dãy } \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(u_n, u_m) \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{F(u_n) - F(u_m)}{\varepsilon} = 0 \text{ (do dãy } \{F(u_n)\}_n \text{ hội tụ (2))}$$

Vậy $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(u_n, u_m) = 0$ hay $\{u_n\}$ là dãy Cauchy trong Y mà Y đầy đủ nên $\{u_n\}$ hội tụ.

Giả sử $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, ta chứng minh $u_n \leq u$.

Ta (3) ta có :

$$F(u_m) \leq F(u_n) - \varepsilon.d(u_n, u_m) \quad (4)$$

Do F là nửa liên tục dưới và $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ nên ta có :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \geq F(u)$$

cho $m \rightarrow \infty$ trong (4) ta có:

$$F(u) \leq F(u_n) - \varepsilon.d(u_n, u)$$

$$F(u) \leq F(u) - \varepsilon.d(u_n, u) .$$

Nên $u_n \leq u$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Áp dụng nguyên lý Entropy cho Y và phiếm hàm $S(u) = -F(u)$, ta có :

$$\text{Tồn tại } u_\varepsilon \in Y : u \geq u_\varepsilon \Rightarrow S(u) = S(u_\varepsilon) \text{ hay } F(u) = F(u_\varepsilon) .$$

Do $u_\varepsilon \in Y$ nên thỏa mãn tính chất 1) , 2) .

Bây giờ ta chứng minh tính chất 3).

Giả sử trái lại 3). Không đúng, ta có tồn tại $v_0 \neq u_\varepsilon : F(v_0) < F(u_\varepsilon) - \varepsilon.d(u_\varepsilon, v_0)$ (5)

Khi đó :

$$v_0 \geq u_\varepsilon \text{ nên } F(v_0) = F(u_\varepsilon) \text{ thay vào (5) ta có:}$$

$$0 < -\varepsilon.d(u_\varepsilon, v_0), \text{ vô lý .}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Chương 4. ỨNG DỤNG VÀO LÝ THUYẾT ĐỘ ĐO

4.1 Định nghĩa

Cho không gian độ đo (X, F, μ) . Ta nói tập $A \in F$ là một nguyên tử nếu $\mu(A) > 0$ và với mọi $B \in F$ mà $B \subset A$ thì hoặc $\mu(B) = \mu(A)$ hoặc $\mu(B) = 0$

4.2 Định lý

Cho không gian độ đo (X, F, μ) . Nếu F không chứa nguyên tử nào thì với mọi $\alpha \in (0, \mu(X))$ tồn tại tập $A \in F$ sao cho $\mu(A) = \alpha$.

➤ Chứng minh

Ta đặt :

$$F_1 = \{A \in F : \mu(A) \leq \alpha\}$$

$$S(A) = \mu(A), \text{ với mọi } A \in F_1.$$

-Trong F_1 ta xét thứ tự như sau: $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$.

-Ta có $S(A)$ bị chặn trên bởi α , với mọi $A \in F_1$.

-Ta cần chứng minh S là phiếm hàm tăng, thật vậy:

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B) \Rightarrow S(A) \leq S(B).$$

Vậy S tăng.

Giả sử $\{A_n\} \in F_1$ là dãy tăng. Ta đặt $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ thì $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$

Do $\mu(A_n) \leq \alpha$ nên $\mu(A) \leq \alpha$.

Vậy $A \in F_1$ và $A \geq A_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Áp dụng nguyên lý Entropy cho F_1 và phiếm hàm $S(A) = \mu(A)$.

Ta có :

Tồn tại tập $A_0 \in F_1$ sao cho :

Với mọi $A \in F_1$, $A \subset A_0 \Rightarrow \mu(A_0) = \mu(A)$.

$$\text{Đặt } F_2 = \{B \in F : B \supset A_0, \alpha \leq \mu(B) < \infty\}$$

Trong F_2 ta xét thứ tự như sau : $A \leq B \Leftrightarrow A \supset B$.

$$\text{Đặt } S(B) = \mu(B).$$

Ta cần kiểm tra dãy tăng $\{B_n\}$ trong F_2 có một cận trên.

Thật vậy, đặt $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ ta có $B_{n+1} \subset B_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$\mu(B_1) < \infty \text{ nên } \mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

Mà $\mu(B_n) \geq \alpha$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên $\mu(B) \geq \alpha$.

Hiển nhiên $\mu(B) < \infty$ và $B \subset B_n$ do đó $B \in F_2$ và $B \geq B_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vậy $\{B_n\}$ bị chặn trên

Ta chứng minh S là phiếm hàm giảm.

Ta có :

$$A \leq B \Leftrightarrow A \supset B \Rightarrow \mu(A) \geq \mu(B) \Rightarrow S(A) \geq S(B).$$

Suy ra S là phiếm hàm giảm.

Áp dụng hệ quả 1.6.2 cho phiếm hàm $S(B) = \mu(B)$.

Ta có :

Tồn tại tập $B_0 \in F_2$ thỏa :

$$\text{Với mọi tập } B \in F_2, B \subset B_0 \Rightarrow \mu(B) = \mu(B_0).$$

Bây giờ ta chỉ việc chứng minh : $\mu(B_0) = \mu(A_0) = \alpha$.

Theo tính chất của A_0 và B_0 ta có $\mu(A_0) \leq \alpha \leq \mu(B_0)$ và $A_0 \subset B_0$

Giả sử trái lại: $\mu(B_0) > \mu(A_0)$ thì $\mu(B_0 \setminus A_0) > 0$.

Ta chứng minh $C_0 = B_0 \setminus A_0$ là nguyên tử.

Thật vậy ta đã có $\mu(C_0) = \mu(B_0 \setminus A_0) > 0$.

Ta lấy $D \subset C_0 = B_0 \setminus A_0$ và giả sử $\mu(D) > 0$, ta chứng minh

$$\mu(D) = \mu(B_0 \setminus A_0).$$

Ta có :

$\mu(A_0 \cup D) > \alpha$ vì nếu $\mu(A_0 \cup D) \leq \alpha$ thì $A_0 \cup D \in F_1$ nên theo tính chất của A_0 ta có

:

$$\mu(A_0 \cup D) = \mu(A_0).$$

$$\Rightarrow \mu(A_0) + \mu(D) = \mu(B_0).$$

$$\Rightarrow \mu(D) = \mu(B_0 \setminus A_0)$$

Vậy với mọi $D \subset B_0 \setminus A_0$ thì hoặc $\mu(D) = 0$ hoặc $\mu(D) = \mu(B_0 \setminus A_0)$ nên

$B_0 \setminus A_0$ là tuyến tử, ta gặp mâu thuẫn. Định lý được chứng minh.

Chương 5. ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG

5.1. ĐỊNH LÝ CARISTI

Cho (X, d) là không gian metric đầy đủ.

$\varphi : (X, d) \rightarrow [0, +\infty)$ nửa liên tục dưới.

$f : X \rightarrow X$ là ánh xạ thỏa $d(x, f(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x))$.

Khi đó f có điểm bất động .

➤ Chứng minh

Trong X ta xét thứ tự : $x \leq y \Leftrightarrow d(x, y) \leq \varphi(y) - \varphi(x)$ (1)

Ta kiểm tra “ $\leq$ ” đúng là quan hệ thứ tự trong X .

Hiển nhiên ta có $x \leq x$ với mọi $x \in X$.

Ta có :

$$x \leq y, y \leq x$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq \varphi(y) - \varphi(x), d(x, y) \leq \varphi(y) - \varphi(x)$$

$$\Rightarrow d(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

Nếu $x \leq y, y \leq z$ thì $d(x, y) \leq \varphi(y) - \varphi(x), d(y, z) \leq \varphi(z) - \varphi(y)$.

Áp dụng bất thức tam giác, ta có :

$$d(x, z) \leq \varphi(z) - \varphi(x) \text{ hay } x \leq z$$

-Ta sẽ áp dụng nguyên lý Entropy cho $S(x) = \varphi(x)$.

-Trước hết ta kiểm tra là φ phiếm hàm tăng .

Thật vậy ta có :

$$\text{Với mọi } u \leq v \Leftrightarrow d(u, v) \leq \varphi(v) - \varphi(u) .$$

Do $d(u, v) \geq 0$ nên $0 \leq \varphi(v) - \varphi(u)$ hay $\varphi(u) \leq \varphi(v)$.

Vậy φ là phiếm hàm tăng và bị chặn dưới.

Áp dụng hệ quả 1.7.2 của nguyên lý Entropy cho $S(x) = \varphi(x)$.

Ta có $x_0 \in X$ thỏa :

$$\text{Với mọi } x \leq x_0 \Rightarrow S(x) = S(x_0) \text{ hay } \varphi(x) = \varphi(x_0) .$$

Bây giờ ta chứng minh x_0 là điểm bất động của f .

Ta có ;

$$d(x_0, f(x_0)) \leq \varphi(x_0) - \varphi(f(x_0)) \quad (2)$$

Nên theo định nghĩa thứ tự “ $\leq$ ” ta có :

$$x_0 \geq f(x_0) .$$

Do đó :

$\varphi(x_0) = \varphi(f(x_0))$, thay vào (2) ta có :

$$d(x_0, f(x_0)) = 0 \text{ hay } x_0 = f(x_0) .$$

5.2 CÁC ĐỊNH LÝ KIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN BANACH CÓ THỨ TỰ

5.2.1 ĐỊNH NGHĨA

Cho X là không gian Banach trên trường số thực $\mathbb{R}$ và K là tập con của X .

Khi đó K được gọi là nón nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau :

- i) K đóng , khác rỗng , và $K \neq \{0\}$,
- ii) Nếu $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$, $x, y \in K$ thì $ax + by \in K$.
- iii) Nếu $x \in K$ và $-x \in K$ thì $x = 0$.

Ví dụ:

Cho $X = \mathbb{R}^n$, $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$ thì K là nón trong $\mathbb{R}^n$.

5.2.2 Định nghĩa

Cho X là không gian Banach với nón K . thứ tự sinh bởi K được định nghĩa như sau:

$$x, y \in X, x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

5.2.3 Một số tính chất của thứ tự sinh bởi nón

❖ **Mệnh đề:**

Giả sử “ $\leq$ ” là thứ tự trong X sinh bởi nón K .

Khi đó :

- i) Nếu $x \leq y$ thì ;

$$\lambda x \leq \lambda y \quad \forall \lambda \geq 0 ,$$

$$x + z \leq y + z \quad \forall z \in X$$

- ii) Nếu $x_n \leq y_n \quad (n \in \mathbb{N})$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ thì $x \leq y$.

- iii) Nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng và hội tụ về X thì $x_n \leq x$, $n \in \mathbb{N}$.

➤ **Chứng minh**

- i) Ta có :

$$(y+z)-(x+z) = y-x \in K \text{ nên } x+z \leq y+z .$$

$$\lambda y - \lambda x = \lambda(y - x) \in K \text{ nên } \lambda x \leq \lambda y .$$

ii) Ta có :

$$y_n - x_n \in K \quad (n \in \mathbb{N}), \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = y - x , K \text{ đóng nên}$$

$$y - x \in K \text{ hay } x \leq y .$$

iii) Giả sử $\{x_n\}$ là dãy tăng .khi đó $x_n \leq x_{n+m} (m, n \in \mathbb{N})$. Cho $m \rightarrow \infty$

Ta được $x_n \leq x \quad (n \in \mathbb{N})$

5.2.4.Điểm bất động ảnh xạ tăng

❖ Định lý 1

Giả sử $(X, \leq)$ là không gian Banach có thứ tự sinh bởi nón, $M \subset X$ là tập đóng,

$F : M \rightarrow M$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện :

i) F là ánh xạ tăng và tồn tại $x_0 \in M : x_0 \leq F(x_0)$.

ii) Nếu $\{x_n\} \subset M$ là dãy tăng thì $\{F(x_n)\}$ hội tụ .

Khi đó F có điểm bất động trong M.

➤ Chứng minh

Đặt $M_0 = \{x \in M : x \leq F(x)\}$.

Xét phiếm hàm $S : M_0 \rightarrow [0, +\infty]$ như sau :

$$S(x) = \sup \{ \|F(u) - F(v)\| : u, v \in M_0, u \geq v \geq x \} .$$

Ta chứng minh S là phiếm hàm giảm .

Đặt $A_x = \{(u, v) : u, v \in M_0, u \geq v \geq x\}$.

Khi đó :

$$S(x) = \sup_{(u,v) \in A_x} \|F(u) - F(v)\|, S(y) = \sup_{(u,v) \in A_y} \|F(u) - F(v)\| .$$

Ta sẽ chứng minh $x \leq y$ thì $A_x \supset A_y$.

Thật vậy, lấy $(u, v) \in A_y$ thì $u \geq v \geq y$ nên $u \geq v \geq x$ (do $y \geq x$) .

Suy ra $(u, v) \in A_x$.

Do đó nên $x \leq y$ thì $S(x) \geq S(y)$ hay phiếm hàm S giảm .

Vậy (-S) tăng và bị chặn trên .

Áp dụng nguyên lý Entropy cho (-S) ta tìm được $a \in M_0$ thỏa :

Với mọi $x \geq a \Rightarrow S(x) = S(a)$

Ta cần chứng minh $S(a)=0$

Giả sử trái lại $\exists \alpha > 0 : S(a) > \alpha > 0$.

Do $S(a) > \alpha$ nên tồn tại $u_1, u_2 \in M_0 : u_2 \geq u_1 \geq a, \|F(u_2) - F(u_1)\| > \alpha$.

Do $u_2 \geq a$ nên $S(u_2) = S(a)$ hay $S(u_2) > \alpha$.

Do đó :

Tồn tại $u_3, u_4 \in M_0 : u_4 \geq u_3 \geq a, \|F(u_3) - F(u_4)\| > \alpha, \dots\dots$

Tiếp tục quá trình trên ta xây dựng được dãy :

$$a \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots\dots\dots, \|F(u_{2n}) - F(u_{2n-1})\| > \alpha.$$

Suy ra dãy $\{F(u_n)\}$ không hội tụ, trái giả thiết.

Vậy $S(a) = 0$ hay $F(u) = F(v), \forall (u, v) \in A_0$.

Do $(F(a), a) \in A_a$ nên $F(F(a)) = F(a)$.

Vậy $F(a)$ là điểm bất động.

❖ Định lý 2

Cho $(X, \leq)$ là không gian Banach có thứ tự sinh bởi nón, M đóng,

$F : M \rightarrow M$ là ánh xạ tăng thỏa :

- 1) Tồn tại $x_0 \in M : x_0 \leq F(x_0)$.
- 2) Mọi dãy tăng $\{F^n(x_n)\}_{(x_n \in M)}$ hội tụ.

Khi đó F có điểm bất động trên M .

➤ Chứng minh

Đặt $M_0 = \{x \in M : x \leq F(x)\}$, ta dễ thấy F là ánh xạ từ M_0 vào M_0 .

Đặt $S_n(x) = \sup \{\|F^n(u) - F^n(v)\| : u, v \in M_0, F^n(u) \geq F^n(v) \geq x\}, S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$.

Ta chứng minh $S(x)$ tồn tại.

Thật vậy, ta đặt

$$A_x = \{(u, v) \in M_0 : F^n(u) \geq F^n(v) \geq x\}$$

$$A_y = \{(u, v) \in M_0 : F^n(u) \geq F^n(v) \geq y\}$$

Khi đó :

$$S_n(x) = \sup_{(u,v) \in A_x} \|F^n(u) - F^n(v)\|, S_n(y) = \sup_{(u,v) \in A_y} \|F^n(u) - F^n(v)\|.$$

Ta sẽ chứng minh $\{S_n(x)\}$ là dãy giảm.

Trước hết ta chứng minh $x \leq y$ thì $A_x \supset A_y$.

Thật vậy, lấy $(u, v) \in A_y$ thì $F^n(u) \geq F^n(v) \geq y$ nên $F^n(u) \geq F^n(v) \geq x$ (do $y \geq x$)

Suy ra $(u, v) \in A_x$.

Vậy theo định nghĩa của $S_n(x)$ ta có ngay $S_n(x) \geq S_n(y)$.

Ta chứng minh $S_{n+1}(x) \leq S_n(x)$. Thật vậy, xét tùy ý $u, v \in M_0$.

Mà $F^{n+1}(u) \geq F^{n+1}(v) \geq x$.

Ta có :

$$F^n(Fu) \geq F^n(Fv) \geq x, Fu \in M_0, Fv \in M_0.$$

$$\Rightarrow \|F^n(Fu) - F^n(Fv)\| \leq S_n(x) \quad (\text{do định nghĩa } S_n(x)).$$

$$\Rightarrow \|F^{n+1}(Fu) - F^{n+1}(Fv)\| \leq S_n(x).$$

Do đó:

$$S_{n+1}(x) = \sup \left\{ \|F^{n+1}(u) - F^{n+1}(v)\| : u, v \in M_0, F^{n+1}(u) \geq F^{n+1}(v) \geq x \right\} \leq S_n(x)$$

Dãy $\{S_n(x)\}$ giảm, bị chặn dưới nên $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ tồn tại.

Tiếp theo ta chứng minh S giảm.

Nếu $x \leq y$ thì $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(y) = S(y)$.

Vậy S giảm.

-Ta sẽ áp dụng nguyên lý Entropy cho (-S) trên M_0

-Ta cần phải chứng minh nếu $\{x_n\}$ là dãy tăng trong M_0 thì $\{x_n\}$ có

cận trên thuộc M_0 Ta xét bảng sau :

$$\begin{array}{ccccccc} F(x_1) & F(x_2) & \dots & F(x_n) & \dots & & \\ F^2(x_1) & F^2(x_2) & \dots & F^2(x_n) & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ F^n(x_1) & F^n(x_2) & \dots & F^n(x_n) & \dots & & \end{array}$$

Do $\{x_n\}$ là dãy tăng và F tăng nên các phần tử thuộc một hàng tạo thành dãy tăng.

Do $x_k \leq F(x_k)$ (vì $x_k \in M_0$) nên các phần tử thuộc một cột cũng tạo thành dãy tăng.

Suy ra dãy “đường chéo” $\{F^n(x_n)\}$ là dãy tăng và do giả thiết 2) nó hội tụ.

Đặt $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x_n)$, ta sẽ chứng minh $x_0 \in M_0$ và $x_n \leq x_0$ với mọi $n=1,2,\dots$

Thật vậy do $\{F^n(x_n)\}$ tăng nên $F^n(x_n) \leq x_0$ với mọi $n = 1,2,\dots$

Mà $x_n \leq F^n(x_n)$ nên $x_n \leq x_0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Mặt khác $F^{n-1}(x_n) \leq F^n(x_n)$ nên $F^{n-1}(x_n) \leq x_0$

$$\Rightarrow F^n(x_n) \leq f(x_0) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta có $x_0 \leq F(x_0)$ hay $x_0 \in M_0$.

Vậy dãy tăng $\{x_n\}$ có cận trên trong M_0 là x_0 . Áp dụng nguyên lý Entropy cho $(-S)$ trên ta tìm được $a \in M_0$ thỏa :

Với mọi $x \geq a \Rightarrow S(x) = S(a)$.

Ta cần chứng minh $S(a) = 0$.

Giả sử trái lại tồn tại $\alpha > 0 : S(a) \geq \alpha > 0$.

Do $S(a) > \alpha$ nên $S_1(A) > \alpha$ do đó tồn tại

$$u_1, v_1 \in M_0, F(u_1) \geq F(v_1) \geq a, \|F(u_1) - F(v_1)\| > \alpha.$$

Do tính chất của a ta có :

$$S(Fu_1) = S(a) > \alpha \text{ do đó } S_2(Fu_1) > \alpha$$

Suy ra tồn tại

$$u_2, v_2 \in M_0 : F^2(u_2) \geq F^2(v_2) \geq F(u_1) \geq a, \|F^2(u_2) - F^2(v_2)\| > \alpha, \dots$$

Tiếp tục quá trình trên ta xây dựng được dãy :

$$a \leq F(u_1) \leq F^2(u_2) \leq \dots, \|F^n(u_n) - F^n(v_n)\| > \alpha$$

Suy ra dãy $\{F^n(u_n)\}$ không hội tụ, trái giả thiết.

$$\text{Vậy } S(a) = 0 \text{ hay } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a) = 0 \quad (1)$$

Ta chứng minh F có điểm bất động.

Do $a \in M_0$ nên ta có :

$$a \leq F(a) \leq F^2(a) \leq \dots$$

Do giả thiết 2) tồn tại phần tử $b = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a)$.

Vì $F^{n-1}(a) \leq b$ nên $F^n(a) \leq F(b)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Cho $n \rightarrow \infty$ ta được $b \leq F(b)$ hay $b \in M_0$.

Mặt khác, ta có :

$$F^n(a) \leq b \leq F(b) \leq \dots \leq F^n(b) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Do đó :

$$0 \leq F(b) - b \leq F^n(b) - F^n(a) \quad (2)$$

$$\text{Mà vì } a \leq F^n(a) \leq F^n(b) \text{ nên } \|F^n(a) - F^n(b)\| \leq S_n(a) \quad (3).$$

Từ (1) và (3) ta có :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F^n(b) - F^n(a)\| = 0 \quad (4).$$

Từ (2) và (4) Ta có $F(b) - b = 0$ hay b là điểm bất động của F .

KẾT LUẬN

Trong luận văn chúng tôi đã trình bày hai định lý cơ bản về tập hợp có thứ tự, đó là bổ đề Zorn cùng các dạng tương của nó và nguyên lý Entropy trừu tượng và trình bày các ứng dụng khác nhau của hai định lý trên trong giải tích.

Qua quá trình làm luận văn, tôi đã thấy được phần nào mối liên hệ giữa lý thuyết và ứng dụng trong các học phần của giải tích như: Giải tích cổ điển, Tô pô, Độ đo tích phân.

Bước đầu, tôi cũng học được phương pháp tự học và nghiên cứu.

Vì khả năng và thời gian hạn chế nên chưa tìm được nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực của giải tích. Tôi hy vọng sẽ được học tập và nghiên cứu thêm về đề tài này trong thời gian tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đình, Nguyễn Hoàng
Hàm số biến số thực
NXB Giáo dục 1999
2. Nguyễn Bích Huy
Positive weak solution for some semilinear elliptic equations
Nonlinear Analysis 48(2002)939-945
3. M.A.Kranoselski,P.P.Zabreiko
Geometrical Methods of Nonlinear Analysis
Springer Verlag, 1984
4. W.Rudin
Real and Complex Analysis
Mac Graw Hill,1987
5. Hoàng tụy
Giải tích hiện đại, tập 1,2,3
NXB Giáo dục,1978
6. E.Zeidler
Nonlinear Funtional Analysis and its Application, T1,3
Springer-Verlag, 1984